M. I. VISHIK

Les opérateurs différentiels et pseudo-différentiels à une infinité de variables, les problèmes elliptiques et paraboliques

Astérisque, tome 2-3 (1973), p. 342-362

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__2-3__342_0>

LES OPERATEURS DIFFERENTIELS ET PSEUDO-DIFFERENTIELS

A UNE INFINITE DE VARIABLES,

LES PROBLEMES ELLIPTIQUES ET PARABOLIQUES.

M.I. VISHIK
Université de MOSCOU.

En dimension infinie, les opérateurs différentiels et pseudo-différentiels ont beaucoup de propriétés différentes de celles qu'ils ont en dimension finie.

Il convient d'étudier ces opérateurs sur les classes de fonctions de type C . Rappelons que dans le cas de la dimension infinie, il n'y a pas de mesure de Lebesgue naturelle, et que, par conséquent, il est difficile de construire les espaces de type $\mathcal{L}$. Nous désignons par CL ou CL^s les espaces sur lesquels nous étudions les opérateurs dans cet article.

Il est bien connu qu'il existe une paramétrix sommable pour les opérateurs elliptiques en dimension finie. Dans le cas de la dimension infinie la notion de parametrix sommable est remplacée par celle de fonction complètement additive, que nous appellerons brièvement la mesure parametrix. Mais, contrairement au cas de la dimension finie, il existe beaucoup d'opérateurs différentiels elliptiques, avec des symboles différents de zéro, qui n'ont pas de mesure parametrix.

Pour développer la théorie elliptique et parabolique, nous avons introduit quelques classes $\Sigma^{p,s}$ de symboles à une infinité de variables. Les opérateurs pseudo-différentiels, correspondant à ces symboles, forment une algèbre. Le théorème central affirme que le composé de deux opérateurs de cette algèbre lui appartient aussi.

Dans l'étude du problème de Dirichlet (le premier problème aux limites) en dimension infinie, il est important d'étudier d'abord ce problème dans un demi-espace. La mesure de Poisson est l'analogue des noyaux de Poisson du cas de la dimension finie. Les variétés sur lesquelles sont définis les opérateurs, et leurs frontières, sont de classe CL , c'est-à-dire que les fonctions de changement de cartes sont de classe CL.

Le problème de Cauchy et quelques autres problèmes pour les opérateurs paraboliques et elliptiques du deuxième ordre à une infinité de variables ont été étudiés dans [1], [2], [3], [4], par des méthodes différentes de celles qui sont appliquées ici.

Dans cet article, nous donnons l'exposé de quelques résultats obtenus par l'Auteur dans [5], P.M. BLEHER et l'Auteur dans [6] et A.V. MARTCHENKO et l'Auteur dans [7], l'Auteur dans [8].

I. LES ESPACES $CL(U)$ ET $CL^s(U)$.

Soit $\mathbb{R}^\infty = \varinjlim \mathbb{R}^N$ $(= \sum_1^\infty \mathbb{R}^1)$ la limite inductive des espaces $\mathbb{R}^N$.
Les points (les vecteurs) seront désignés par $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$.
Définissons dans $\mathbb{R}^\infty$ les normes :

$$\|x\|^2 = \Sigma x_k^2 \,,\ \langle x,y\rangle = \Sigma x_k y_k \ ;\ \|x\|_1^2 = \Sigma x_k^2/C_k^2 \,,$$

$$\langle x,y\rangle_1 = \Sigma x_k y_k/C_k^2 \,,\ \text{où } C_k \uparrow +\infty \,,\ \Sigma C_k^{-2} < +\infty \,.$$

Désignons par H (H_1) la fermeture de $\mathbb{R}^\infty$ pour la norme $\|\,.\,\|$ $(\|\,.\,\|_1)$. L'opérateur de plongement $i : H \to H_1$ est un opérateur du type Hilbert-Schmidt. Nous désignons par P^N l'opérateur de projection de H_1 sur $\mathbb{R}^N$.

L'espace $C_\Phi(H_1)$ des fonctions (fonctionnelles) cylindriques est l'enveloppe linéaire de l'ensemble $\bigcup_{N=0}^{\infty} (P^N)^* C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, où $C_0^N(\mathbb{R}^N)$ est l'espace des fonctions à valeurs complexes, indéfiniment différentiables, à supports compacts, définies sur $\mathbb{R}^N$. Soit U un domaine dans H_1 : $\varkappa : U \subset H_1$. Posons : $C_\Phi(U) = \varkappa^* C_0^\infty(H_1)$.

Pour chaque $s \in Z_+ \bigcup 0 = Z_+^0$ et chaque ensemble $M \subset U$ définissons sur $C_\Phi(U)$ une semi-norme $\|\,.\,\|_{s,M}$:

$$\|f\|_{s,M} = \sum_{|\alpha| \leq s} \sup_{x \in M} |D^\alpha f(x)| \,, \tag{1}$$

où $\alpha \in \bigoplus_1^\infty Z_+^0 = \mathcal{J}$, $|\alpha| = \Sigma |\alpha_i|$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}, \dots, D_n^{\alpha_n} \dots$,

$$D_k = -i\partial/\partial x_k .$$

Nous définissons à l'aide des semi-normes (1), la notion de convergence dans l'espace $C_\Phi(U)$: une suite $\{f_k\} \subset C_\Phi(U)$ est fondamentale si :

1) $\sup_k \|f_k\|_{s,U} < +\infty$,

2) pour chaque ensemble borné $M \subset U$ et chaque nombre $\varepsilon > 0$, il existe

un $N > 0$ tel que pour $m, n > N$ $\|f_m - f_n\|_{s,M} < \varepsilon$.

Nous désignons la fermeture de $C_\Phi(U)$ au sens de cette convergence par $CL^s(U)$. En particulier, l'espace $CL^0(U) = CL(U)$ se compose des fonctions $f(x)$, qui sont les limites des fonctions $f_k(x) \in C_\Phi(U)$, uniformément bornées sur U et convergeant uniformément vers $f(x)$ sur chaque sous-ensemble borné de U .

2. LES FORMES QUADRATIQUES.

Le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur H permet d'établir une dualité entre l'espace $H_1 (\supset H)$ et l'espace $H_1^*(\subset H)$, constitué des points $y = (y_1,\dots,y_n,\dots)$, ayant la norme $\Sigma\, C_i^2\, y_i^2 < +\infty$.

Nous appellerons forme quadratique une fonction :

$$L(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha + \sum_{j=1}^{\infty} b_j(x)\xi_j + c_0(x) = \langle A\,(x)\xi,\xi\rangle + \langle B_1(x),\xi\rangle + C_0(x),$$

où : $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2,\dots)$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\ \xi_2^{\alpha_2}\ \dots$, $a_\alpha(x)$, $b_j(x)$, $c_0(x) \in CL^\infty(U)$,

$A\,(x) = (a_\alpha(x))_{|\alpha|=2}$ est un opérateur réel, symétrique dans H,

$B_1(x) = (b_j(x))_{j=1,2,\dots}$ est un vecteur, appartenant à H (pour chaque $x \in U$).

Nous dirons que la forme $L(x,\xi)$ appartient à la classe $E^2(U)$ des formes elliptiques, si les conditions suivantes 1°) et 2°) sont remplies :

1°) $L(x,\xi) = A(\xi) + B(x,\xi)$, où :

$A(\xi) = \langle A_2\xi,\xi\rangle + a_0$, $B\ (x,\xi) = \langle B_2(x)\xi,\xi\rangle + \langle B_1(x),\xi\rangle + b_0(x)$.

Ici, A_2 est l'opérateur réel symétrique dans H (ne dépendant pas de x), satisfaisant aux conditions suivantes :

a) $I\gamma^{-2} < A_2 < \gamma^2 I$, $\gamma > 0$;

b) $A_2|_{H_1^*}$ continu sur H_1^* ;

c) $a_0 = \text{const.}$, $\mathrm{Re}\, a_0 > 0$;

B_2 est l'opérateur réel, symétrique, non négatif sur H ,

$B_2(x) = (b_\alpha(x))_{|\alpha|=2}$, $\mathrm{Re}\, b_0(x) \geqq 0$.

Définissons pour $s \in Z_+^0$ la norme :

(3) $$|||B(x,\xi)|||_{s,U} = \|B_2(x,\xi)\|_{\sigma_2(H,H_1^*)_{s,U}} + \sum_{|\alpha| \leqq s} \Big(\sum_i (\sup_{x\in U} |D^\alpha b_i(x)|^2)^{\frac{1}{2}} + \sum_{|\alpha| \leqq s} \sup_{x\in U} |D^\alpha b_0(x)| ,$$

où $B_2(x,\xi) = \langle B_2(x)\xi, \xi \rangle$,.

$$\|B_2(x,\xi)\|_{\sigma_2(H,H_1^*)s,u} = \sum_{|\alpha| \leqq s} \Big(\sum_{i,j} \sup_{x\in U} |D^\alpha b_{ij}(x)|^2 c_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} .$$

Remarquons que, pour $s=0$ et dans le cas où $B_2(x,\xi)$ ne dépend pas de x, la norme $\|B_2(\xi)\|_{\sigma_2(H,H_1^*),0,U}$ coïncide avec la norme de Hilbert-Schmidt de B_2, si B_2 est regardé comme opérateur de H dans H_1^* .

2°) a) pour chaque $s \in Z_+^0$, $|||B(x,\xi)|||_{s,U} < +\infty$,

b) il existe une suite d'opérateurs $B^N(x,\xi) = B^N(P^N x, \xi)$ telle que, pour chaque $s \in Z_+^0$, $\sup\limits_N |||B^N(x,\xi)|||_{s,U} < +\infty$, et que pour chaque ensemble borné $M \subset U$ et chaque $s \in Z_+^0$,

$$\lim_{N\to\infty} |||B(x,\xi) - B^N(x,\xi)|||_{s,M} = 0 ;$$

3. LES CLASSES $\Sigma_A^{q,s}$

Tout d'abord nous définirons une classe de symboles correspondant aux mesures dans H_1. Soit $Q(x, \xi)$ une fonction de classe C^∞, définie sur $H_1 \times \mathbb{R}^\infty$.

Posons

$$Q(x, \xi^N) = Q(x, P^N \xi),$$

et désignons par

$$G^N(x, z^N) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi^N \to z^N} Q(x, \xi^N) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int Q(x, \xi^N)\, e^{-i\, \xi^N . z^N}\, d\xi^N ,$$

la transformée de Fourier de $Q(x, \xi^N)$.

Posons

$\mu_N(x, dz^N) = G^N(x, z^N)\, dz^N$. C'est une mesure (une fonction complètement additive) sur $\mathbb{R}^N$.

Définissons la norme

$$(4) \qquad \|Q(x, \xi)\|_o = \sup_N \|G^N(x, z^N)\|_{L_1(\mathbb{R}^N_{z^N})} = \sup_N \int_{\mathbb{R}^N_{z^N}} |\mu_N(x, dz^N)|.$$

Supposons que :

1°) $\|Q(x, \xi)\|_o < +\infty$ pour chaque $x \in H_1$,

2°) $\sup\limits_N \int_{\|z\|_1 \geq R} |\mu_N(x, dz^N)| \to 0$ quand $R \to +\infty$.

Dans [5] on démontre que la condition est remplie si

$$(5) \qquad \sup_{j,N} \int_{\mathbb{R}^N_z} |z_j^2\, G^N(x, z^N)|\, dz^N < +\infty .$$

Si les conditions 1°) et 2°) sont remplies, on déduit (cf. [5], [6]), qu'il existe une mesure $\mu(x, B)$, définie dans le corps d'ensembles boréliens $\{B\}$, $B \subset H_1$, et telle que

$$\int \varphi(z^N)\ \mu(x,dz) = \int \varphi(z^N)\ \mu_N(x,dz^N)\ ,$$

c'est-à-dire que la projection de la mesure $\mu(x,dz)$ sur $\mathbb{R}^N$ coïncide avec $\mu_N(x,dz^N)$ pour chaque $N \in Z$.

Nous dirons que la mesure $\mu(x,dz)$ correspond au symbole $Q(x,\xi)$. La formule suivante établit une correspondance entre les symboles $Q(x,\xi)$, ayant la norme $\| Q(x,\xi)\|_o < +\infty$ $(\forall x \in H_1)$ et les opérateurs $\hat{Q}(x,\xi)$, définis sur $C_\Phi(H_1)$ par :

$$\hat{Q}(x,\xi)\ \varphi(x) = \int \varphi(x-z)\ \mu(x,dz)\ ; \qquad \varphi(x) \in C_\Phi(H_1).$$

Voici quelques exemples de symboles $Q(x,\xi)$ avec la norme $\|Q\|_o < +\infty$ ou avec la norme $\|Q(x,\xi)\|_o = +\infty$.

En [6] on démontre que, pour le symbole $Q(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{\langle A_2\xi,\xi\rangle + a_o}$, où le dénominateur vérifie 1°), a), c), et où $f(\xi)$ est homogène de degré $\gamma < 2$: $f(t\xi) = t^\gamma f(\xi)$, $t > 0$, on a

$$\text{(6)} \qquad \|Q(\xi)\|_o < \frac{C}{|\mathrm{Re}\, a_o|^{\frac{2-\gamma}{2}}}\ .$$

Pour le symbole $Q(\xi) = (\langle A_2\xi,\xi\rangle + a_o)^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, nous avons aussi $\|Q(\xi)\|_o < +\infty$. Mais les symboles $Q_1(\xi) = (\|\xi\|^2 + i)^{-1}$, $Q_2(\xi) = (\|\xi\|^4 + 1)^{-1}$ ont des normes infinies : $\|Q_1(\xi)\|_o = +\infty$, $\|Q_2(\xi)\|_o = +\infty$ ([6]).

Remarquons que $Q_1(\xi)$ est le symbole du résolvant $R_\lambda = (-\Delta + \lambda)^{-1}$ (pour $\lambda = i$) du Laplacien $-\Delta = -\Sigma\, \partial^2/\partial x_i^2$ à une infinité de variables. La relation $\|Q_1(\xi)\|_o = +\infty$ démontre que, en un certain sens, le point $\lambda = i$ appartient au spectre de $-\Delta$ (sur H_1), contrairement au cas de la dimension finie. Mais les points λ, avec $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, sont réguliers, parce que $\|(\|\xi\|^2 + \lambda)^{-1}\|_o < +\infty$. En effet, ceci résulte de (6), si l'on prend $\lambda = a_o$, $f(\xi) \equiv 1$.

Soit $A(\xi,\xi) = \langle A_2\xi, \xi\rangle + \zeta$ où A_2 vérifie la condition 1 a), $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$. Le symbole $Q(x,\xi)$ appartient aux classes $\Sigma_A^{p,s}$ si les conditions 1) - 3) suivantes sont remplies :

1) $$|||Q(x,\xi,\zeta)|||_0^{(q)} = \sup_{\gamma,\beta} \| A^{-\frac{q+\gamma}{2}}(\xi,\zeta)\, D_x^\beta \, \partial_\xi^\gamma Q(x,\xi)\|_0 < +\infty, \quad \forall x \in H_1,$$

où $\beta < \beta_0$, $|\gamma| \leqslant g$, $\beta_0 \in \mathfrak{J}$, $g \in Z^0$.

Posons :

$$|||Q(x,\xi)|||_{s,R}^{(q)} = \sum_{|\alpha|\leqslant s} \sup_{\|x\|_1 < R} |||D_x^\alpha Q(x,\xi)|||_0^{(q)} .$$

2) La norme $|||Q(x,\xi)|||_{s,\infty}^{(q)} < +\infty$.

3) $$\lim_{N\to\infty} |||Q(x,\xi) - Q(P^N x,\xi)|||_{s,R}^{(q)} = 0, \quad \forall R > 0 .$$

On suppose que ces conditions 1) - 3), sont remplies pour chaque $\beta_0 \in \mathfrak{J}$, $g \in Z_+^0$ [1]

Il résulte de la condition 1) qu'on peut représenter les symboles $Q(x,\xi)$, appartenant à la classe $\Sigma_A^{q,s}$, comme produits $A^{q/2}(\xi,\zeta).\, Q_0(x,\xi) = Q(x,\xi)$, où $\|Q_0(x,\xi)\|_0 < +\infty$ (condition 1), quand $\gamma = 0$, $\beta = 0$).

On a aussi $\sup_i \| \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} Q_0(x,\xi)\|_0 < +\infty$ (condition 1), $\gamma = 2$, $\beta = 0$ [6]), alors $Q_0(x,\xi)$ satisfait aussi à l'inégalité (5). Il existe alors une mesure $\eta(x, dz)$ qui correspond au symbole $Q_0(x,\xi)$. Les conditions 1) - 3) contiennent en outre quelques restrictions sur le comportement des dérivées de $Q(x,\xi)$.

---

(1). Dans les notations $|||\ |||_{s,R}^{(q)}$ nous n'avons pas marqué que ces quantités dépendent de β_0, g.

4. A chaque symbole $Q(x,\xi) \in \Sigma_A^{q,s}$ correspond un opérateur $\hat{Q}(x,\xi)$ (ou $\hat{}Q(x,\xi)$) pseudo-différentiel (p-d). Pour les fonctions cylindriques $\varphi(x^N) \in C_\Phi(H_1)$, il est donné par :

$$\hat{Q}(x,\xi)\varphi(x^N) = \hat{Q}(x,\xi^N)\varphi(x^N) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int Q(x,\xi^N)\, \tilde{\varphi}(\xi^N)\, e^{-ix^N.\xi^N}\, d\xi^N \quad .$$

Alors $\hat{Q}(x,\xi)$ est défini sur les fonctions dépendant de N variables comme l'opérateur p-d , ayant le symbole $Q(x,\xi^N)$. D'après le Théorème 3.2. de [6], l'opérateur $\hat{Q}(x,\xi)$ se prolonge par continuité en l'opérateur $\hat{Q} : CL^s \to CL^t$, où $s = \max(t, t+[q]) + 2$.

THEOREME 1.

Il existe dans l'espace $CL(H_1)$ une fermeture $\hat{\bar{Q}}(x,\xi)$ de l'opérateur $\hat{Q}(x,\xi)$. correspondant au symbole $Q(x,\xi) \in \Sigma_A^{q,s}$.

Nous désignons par Ω_Q le domaine de définition de cet opérateur $\hat{\bar{Q}}(x,\xi)$.

Rappelons que $u(x) \in \Omega_Q$ s'il existe une suite $\varphi_k(x) \in C_\Phi(H_1)$ et une fonction $f(x) \in CL(H_1)$ telles que $\varphi_k(x) \to u(x)$ et $\hat{Q}(x,\xi)\varphi_k(x) \to f(x)$ dans $CL(H_1)$. Alors, nous posons $\hat{\bar{Q}}\, u(x) = f(x)$. Nous écrirons $\hat{Q}(x,\xi)$ au lieu de $\hat{\bar{Q}}(x,\xi)$.

Remarquons que l'opérateur de Laplace $-\Sigma \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \hat{}(\|\xi\|^2)$ a le symbole $\|\xi\|^2$ appartenant à $\Sigma_{\|\xi\|^2+1}^{2+\varepsilon,s}$.

En [6] on a montré que dans l'espace H_1, avec la norme (1), où $\Sigma\, C_k^{-2} = +\infty$, le Théorème 1 n'est pas vrai. Ce résultat justifie le choix de la norme dans H_1 avec $\Sigma\, C_i^{-2} < +\infty$. Par exemple dans $CL(H)$, le Théorème 1 n'est pas vrai.

THEOREME 2.

Supposons que $Q_1(x,\xi) \in \Sigma_A^{q_1,s}$, $Q_2(x,\xi) \in \Sigma_A^{q_2,\ell}$, où ℓ est assez grand.

Alors le composé $\hat{Q}_1(x, \xi) \circ \hat{Q}_2(x, \xi)$ des p - d opérateurs $\hat{Q}_1(x, \xi)$ et $\hat{Q}_2(x, \xi)$ est aussi un opérateur p - d avec le symbole $Q(x, \xi)$, appartenant à $\sum_A^{q,s}$, où $q = q_1 + q_2$ et :

$$Q(x, \xi) = Q_1(x, \xi) . Q_2(x, \xi) + \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq r-1} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha Q_1(x,\xi) D_x^\alpha Q_2(x,\xi) + R(x, \xi) , \tag{7}$$

où $R(x, \xi) \in \sum_A^{s,q_3}$, $q_3 > q_1 + q_2 - r$.

La démonstration est donnée dans [6].

Il résulte de ce théorème que les opérateurs $\hat{Q}(x, \xi)$ correspondant aux $Q(x, \xi) \in \bigcup_q \Sigma_A^{q,\infty}$, forment une algèbre.

5. L'opérateur correspondant à $Q(x, \xi)$, est dit elliptique d'ordre $\beta (\in \mathbb{R}^1)$ dans H_1, si $Q(x, \xi) \in \sum_A^{p,s}$ et $(Q(x, \xi))^{-1} \in \sum_A^{-p_1,s}$ où $| p_1 - p| < 1$. Désignons l'ensemble de tous les opérateurs elliptiques d'ordre p par E^p .

THEOREME 3.

Soit $Q(x, \xi) \in E^p$, $p > 0$ et $Q_\eta(x, \xi) = Q(\frac{x}{\eta}, \xi)$, où $\eta \in \mathbb{R}^1$, $\eta > 1$.
Alors pour η assez grand, l'opérateur $\hat{Q}_\eta(x, \xi)$ définit une application bi-univoque et surjective de Ω_{Q_η} sur $CL(H_1)$.

La démonstration est donnée dans [6] .

6. Dans [8] , on a démontré un théorème général d'existence de la solution fondamentale d'un opérateur elliptique quelconque à coefficients constants.

Soit $L_m(\xi)$, une forme d'ordre m par rapport à $\xi \in \mathbb{R}^\infty$:

$$L_m(\xi) = \sum_{|\alpha| \leqq m} a_\alpha \xi^\alpha, \qquad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots,$$

$a_\alpha \in \mathbb{C}$, a_α = constante. Supposons que :

1) pour chaque η' , $\eta'' \in \mathbb{R}^\infty$, $\|\eta'\| = 1, <\eta' , \eta''> = 0$, le polynôme $L_m(s\eta' + \eta'')$ par rapport à s a m racines complexes $s_j = s_j(\eta' , \eta'')$, vérifiant les inégalités :

$$\|\mathrm{Im}\, s_j\| \geqq \gamma_1^2 (\|\eta''\| + 1) \quad , \qquad |s_j| \leqq C (\|\eta''\| + 1) ,$$

où γ_1^2 , $C > 0$; γ_1^2 et C ne dépendent pas de η' et η'' .

2) $|L(s\eta' + \eta'')| \leqq C(|s| + \|\eta''\|)^m$, $\forall\, s \in \mathbb{C}$, $\|\eta'\| = 1$, $<\eta'' , \eta'> = 0$.

3) $|L_m^0(\eta')| \geqq \gamma > 0$, $\forall\, \eta' \in \mathbb{R}^\infty$, $\|\eta'\| = 1$, où $L_m^0(\eta')$ est la partie principale de $L_m(\eta)$.

<u>THEOREME 4</u>.

Soit $Q(\xi) = (L_m(\xi))^{-1}$, où $L_m(\xi)$ vérifie les conditions 1), 2), 3).

Soit :

$$G^N(z^N) = F_{\xi^N \to z^N} Q(\xi^N) .$$

Alors :

I. Il existe des constantes C et $M \geqq 1$, telles que :

$$\|G^N(z^N)\|_{L_1(\mathbb{R}^N_{z^N})} = \int_{\mathbb{R}^N} |G^N(z^N)|\, dz^N \leqq C.M^N .$$

II. Pour $a_N = (M_1 \ln M_1).N$ où $M_1 > M$ on a :

$$I_N = \int_{\|z^N\| \geqq a_N} |G^N(z^N)|\, dz^N \leqq C\, \gamma_0^N \qquad 0 < \gamma_0 < 1 \;,$$

où C ne dépend pas de N.

On a défini dans [8] l'espace CS, des fonctions $f(x)$, qui sont les limites des fonctions $f_N(x) = f_N(x^N)$ telles que $\sum_N M^N \|f_N(x) - f_{N-1}(x)\|_{a_N} < +\infty$, où $\|\varphi\|_a = \sup_{\|x\| \leqq a} |\varphi(x)|$, $f_{-1} \equiv 0$.

On a démontré que $G^N * f_N(x)$ a une limite $Gf(x)$ quand $N \to \infty$, et que $L_m(D)\, Gf(x) = f(x)$ pour $f(x) \in CS$, où $L_m(D)$ est la fermeture de l'opérateur $L_m(D)|_{\hat{C}_\Phi}$ dans l'espace CS [8].

7. PROBLEME DE CAUCHY POUR UN OPERATEUR PARABOLIQUE

Soit :

$$(8)\quad \hat{L}(x,A(x,\xi), \frac{\partial}{\partial t})u(x,t) \equiv \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} + \sum_{i=1}^{k} \hat{\ }(\varphi_i(x,A(x,\xi)))\, \frac{\partial^{k-i} u(x,t)}{\partial t^{k-i}} =$$

$$= f(x,t) \;, \quad t \in \mathbb{R}^1 \;, \quad x \in H_1 \;,$$

$$(9)\qquad u\Big|_{t<0} = 0 \qquad (f\Big|_{t<0} = 0) \;,$$

où $A(x,\xi)$ vérifie les conditions 1° et 2° de la classe $E^2(H_1)$.

Supposons que :

$$\varphi_i(x,\lambda) = a_i(x)\, \lambda^{i\delta} + \varphi_{i1}(x,\lambda) \;, \quad 0 < \delta < 1 \;, \; a_i(x) \in CL^s(H_1) \;,$$

$|\varphi_{i1}(x,\lambda)| \leqq C\,|\lambda|^{i\delta-\varepsilon}$ où $\arg|\lambda-\lambda_o| < \varphi$, $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, $\inf \operatorname{Re} a_o(x) > \lambda_o > 0$.

Les dérivées $\partial^r/\partial\lambda^r\, D_x^\gamma\, \varphi_1(x,\lambda)$ vérifient des conditions analogues.

On dit que l'opérateur (8) est parabolique, si

(10) 1) $L_o(x,\lambda,\zeta) \equiv \zeta^k + \sum_{i=1}^{k} a_i(x)\,\zeta^{k-i}\,\lambda^{\delta i} \neq 0$,

lorsque $|\lambda| + |\zeta| \neq 0$, $|\arg\lambda| \leqq \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\operatorname{Re}\zeta > 0$;

(11) 2) $|L_o(x,\xi,\zeta)| \geqq C\,(|\zeta| + |\lambda|^{\delta})^k$.

Soit $\hat{L}_o(x,A(x,\xi),\zeta) = \zeta^k + \sum_{i=1}^{k} a_i(x)\zeta^{k-i}\,\hat{A}^{i\delta}(x,\xi)$ le transformé de Laplace en t de l'opérateur $\hat{L}_o(x,A(x,\xi),\frac{\partial}{\partial t})$, $\operatorname{Re}\zeta > 0$, où $\hat{L}_o(x,\hat{A}(x,\xi),\zeta)$ coïncide avec la partie principale de l'opérateur $\hat{L}(x,A(x,\xi)\frac{\partial}{\partial t})$.

LEMME 1.

Soit $0 < \delta < 1$. Sous les hypothèses (10), (11), l'opérateur :

$$\hat{L}_o(x,A(x,\xi)\ \zeta) : \quad \Omega_L \to CL(H_1) \quad \text{pour } \operatorname{Re}\zeta >> 1$$

définit un isomorphisme de Ω_L sur l'espace $CL(H_1)$.

On a l'inégalité :

(12)
$$|\ell n\zeta|^{-1}\Big(|\zeta|^k\|v\| + \sum_{j=1}^{k} |\zeta|^{k-j}\|\hat{A}^{\delta j}(x,\xi)\,v\|\Big) \leqq$$

$$\leqq C\|\hat{L}_o(x,A(x,\xi),\zeta)\,v\|,$$

où $\|\ \|$ est la norme dans $CL(H_1)$, $v \in \Omega_{L_o}$.

De là on déduit, sous les hypothèses naturelles sur $F\ (u,\xi)=\mathcal{L}_{t\to\zeta}\ f(x,t)$ (tranformation de Laplace de $f(x,t)$), que le problème (8), (9) a une solution unique. Il est bizarre que dans le cas de $\delta = 1$, les conditions supposées pour $L_o(x,\lambda,\zeta)$ soient plus restrictives que dans le cas $0 < \delta < 1$ et l'estimation, correspondant à (12) dans le cas $\delta = 1$,

$$\mathrm{Re}\,\zeta(|\zeta|^{k-1}\|v\| + \sum_{j=1}^{k}|\zeta|^{k-j-1}\ \|\hat{A}^j(x,\xi)v\|) \leqq C\|\ \hat{L}_o(x,A(x,\xi),\zeta)\ v\ \|$$

est plus faible que (12) (à une puissance de $|\zeta|$ près) ([6]).

8. LE PROBLEME DE DIRICHLET DANS UN DEMI-ESPACE.

Par souci de simplification, nous nous bornerons à étudier le problème de Dirichlet pour l'opérateur elliptique de deuxième ordre. Tout d'abord, le symbole de cet opérateur est :

$$(13)\qquad L(x,\xi,\zeta) \equiv a_{11}(x)\xi_1^2 + \sum_{i,k=2}^{\infty} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k + \zeta\ ,\ \mathrm{Re}\ \zeta > 0\ ,$$

alors tous les coefficients $a_{1n}(x) \equiv 0(n=2,3,\dots)$.

Supposons que $L(x,\xi,\zeta) \in \mathbf{E}^2(H^+_{1,\varepsilon})$ où $H^+_{1,\varepsilon} = \{x,\ x_1 \geqq -\varepsilon\}$.

Le problème de Dirichlet pour l'opérateur $L(x, D, \zeta) = \hat{L}(x,\xi,\zeta)$ consiste à rechercher la solution $u(x)$ de l'équation :

$$(14)\qquad \hat{L}(x,\xi,\zeta)u(x) = f(x) \quad (x \in H^+_1 = H^+_{1,o})\ ,\qquad u \in \Omega_L\ ,$$

qui s'annule au bord :

$$(15)\qquad u\big|_{x_1=0} = 0\ .$$

On peut remplacer la dernière condition par :

$$(16)\qquad u \in \Omega^o_L = \Omega_L \bigcap \{u : u\big|_\Gamma = 0\}\ .$$

On suppose que $f(x) \in CL(H_1^+)$ et sans restriction, $a_{11}(x) \equiv 1$.
Soit $L_{\pm}(x,\xi,\zeta) = (\xi_1 \pm i\, S(x,\xi',\zeta))^{-1}$, où $S(x,\xi',\zeta) = \left(\sum_{i,k=2}^{\infty} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k + \zeta\right)^{\frac{1}{2}}$.
On a :

(17) $$L(x,\xi,\zeta) = L_+(x,\xi,\zeta) \,.\, L_-(x,\xi,\zeta) .$$

C'est la factorisation de $L(x,\xi,\zeta)$ par rapport à ξ_1. Soit $\chi(x_1) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^1)$, $\chi(x_1) \equiv 1$ pour $x_1 \geq -\frac{\varepsilon}{2}$, $\chi(x_1) = 0$ pour $x_1 < -\varepsilon$. Comme en dimension finie, nous définirons le paramétrix $\hat{R}$ de l'opérateur $\hat{L}(x,\xi,\zeta)|_{\Omega_L^o}$ par la formule :

(18) $$\hat{R}f(x) = \rho^+ \,\hat{}\,(\chi(x_1)L_+^{-1}(x,\xi,\zeta))\ \theta\ (x_1)\,\hat{}\,(\chi(x_1)L_-^{-1}(x,\xi,\zeta))\ \ell f ,$$

$f(x) \in CL(H_1^+)$, où ℓf est le prolongement de $f(x)$ sur tout H_1, tel que $\ell f(x) \in CL(H_1)$, $\theta(x_1) = 1$ pour $x_1 > 0$, $\theta(x_1) = 0$ pour $x_1 < 0$; ρ^+ étant l'opérateur de restriction sur H_1^+ (pour $g(x) \in CL(H_1)$, on ait $\rho^+ g(x) = g_o(x)$ où $g_o(x) = g(x)$ pour $x_1 > 0$).

THEOREME 5.

L'opérateur $\hat{R}f(x)$, défini par (18) est une paramétrix (à droite et à gauche) de l'opérateur $\hat{L}(x,\xi)|_{\Omega_L^o}$ et on a

(19) $$\hat{L}(x,\xi,\zeta)\circ\hat{R}f = f + \hat{T}f ,\ f \in CL(H_1^+),\ \|\hat{T}f\|_{C(H_1^+)} \leq \frac{C}{|\mathrm{Re}\,\zeta|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \|f\|_{C(H_1^+)} ,$$

(20) $$\hat{R}\circ\hat{L}(x,\xi,\zeta)u = u + T_1 u,\ u\in \Omega_L^o ,\ \|\hat{T}_1 u\|_{C(H_1^+)} \leq \frac{C}{|\mathrm{Re}\,\zeta|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \|u\|_{C(H_1^+)} .$$

La démonstration se trouve en [7].

On démontre que $\hat{R}$ définit une application $CL^2(H_1^+) \to CL^2(H_1^+ \cap \Omega_L^o$.

(C'est un théorème de régularité de l'opérateur $\hat{R}$). On peut alors appliquer l'opérateur $\hat{L}(x,\xi,\zeta)$ à la fonction $\hat{R}f(x)$, où $f \in CL^2(H_1^+)$ au sens classique. A l'aide de fermeture d'opérateurs, on déduit de (19) que $\hat{R}f$ appartient à Ω_L^o pour chaque $f(x) \in CL(H_1^+)$.

Il résulte de (19) et (20) que, pour $\mathrm{Re}\zeta >> 1$ les opérateurs $\hat{R} \circ (I+\hat{T})^{-1}$ et $(I + \hat{T}_1)^{-1} \circ \hat{R}$, sont les opérateurs inverses à droite **et à** gauche de $L(x,\xi,\zeta)|_{\Omega_L^o}$; (ils coïncident). Alors le problème (14),(15) pour chaque $f(x) \in CL(H_1^+)$ comporte une solution unique et l'opérateur $\hat{L}(x,\xi,\zeta)$ définit un isomorphisme de Ω_L^o sur l'espace $CL(H_1^+)$.

Remarquons que, dans le cas de coefficients a_{ik} constants, les opérateurs $\hat{T}$ et $\hat{T}_1$ dans (19) et (20) sont égaux à zéro ; alors l'opérateur $\hat{R}$ est inverse de $\hat{L}|_{\Omega_L^o}$. Dans ce cas, (18) est une généralisation de la formule de Poisson (en l'infinité de variables pour la solution du problème de Dirichlet dans le demi-espace H_1^+). On démontre ([7]) qu'aux symboles $\chi_1(x_1)L_{\pm}^{-1}(x,\xi,\zeta)$ correspondent les mesures; alors, dans le cas d'une infinité de variables, la formule de Poisson s'écrit de la manière suivante :

$$u(x) = \hat{R}f(x) = \int_{H_1^+} f(z_1,x'-z')\eta(x_1,dz_1,dz'), \tag{21}$$

où $z' = (0,z_2,z_3,\ldots),\eta(x_1,dz_1,dz')$ est une mesure sur H_1^+ dépendant de x_1 (comme paramètre). Remarquons que l'intégrale en (21) est une convolution en z'.

Dans le cas de l'opérateur elliptique $\hat{L}(x,\xi)$ général, qui est donné par (2) et appartient à $E^2(H_{1,\varepsilon}^+)$, on démontre dans ([7]) qu'il existe un changement de variables,

$$y_1 = x_1 \ , \quad y_k = g_k(x_1, x_2,\ldots) \ ,$$

tel que, pour $-\delta < y_1 < \delta$ (δ étant assez petit), tous les coefficients $a_{1n}(y) \equiv 0$ $(n = 2,3,\ldots)$. Alors au voisinage du bord $y_1 = 0$, l'opérateur $\hat{L}$ a la partie principale avec le symbole (13).

Soit $\varphi(y_1)$, $\Psi(y_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\varphi(y_1) \equiv 0$ pour $|y_1| > \frac{3}{4}\delta$, $\varphi(y_1) \equiv 1$ pour $|y_1| < \frac{\delta}{2}$, $\Psi(y_1)\varphi(y_1) = \varphi(y_1)$, $\Psi(y_1) \equiv 0$ pour $|y_1| > \delta$. Soit $L^0(y,\xi)$, la somme des termes du deuxième ordre du symbole $L(y,\xi)$ et :

(22) $$L_+^0(y,\xi,\zeta)L_-^0(y,\xi,\zeta) = L^0(y,\xi) + \zeta \ , \quad \mathrm{Re}\,\zeta > 0 \ ,$$

la factorisation de L^0 par rapport à ξ_1. Alors on peut prendre comme paramétrix locale de l'opérateur $\hat{L}(y,\xi) + \zeta$ $(\mathrm{Re}\zeta > 0)$ au voisinage de $y_1 = 0$, l'opérateur

(23) $$\hat{R}_1 f = \varphi(y_1)\ \hat{R}\ \Psi_1(y)\ f \ ,$$

où $\hat{R}$ est défini par (18), où L_+^{-1} et L_-^{-1} sont remplacés par $(L_+^0(y,\xi,\zeta))^{-1}$ et $(L_-^0(y,\xi,\zeta))^{-1}$ et tous les termes sont écrits dans les coordonnées de y.

9. LES CL-VARIETES.

Soit $z = z(x) : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, une application (non linéaire) bi univoque du domaine $\mathcal{U} \subset H_1$ sur $\mathcal{V} \subset H_1$. Nous l'appellerons CL-application si :

1) les images des classes $CL^s(\mathcal{V})$ sont $CL^s(\mathcal{U})$: $z^* : CL^s(\mathcal{V}) \to CL^s(\mathcal{U})$,
2) les images des symboles $L(x,\xi) \in E^2(\mathcal{U})$ sont les symboles $L(z,\eta) \in E^2(\mathcal{V})$.

Il est démontré dans [7] que, pour satisfaire les propriétés 1) et 2) , il suffit de pouvoir approximer l'application $z=z(x)=(z_1(x),\ldots,z_k(x),\ldots)$ par les applications des dimensions finies en quelques normes de type $|||\ \ |||_{s,u}$ ((3)) qui doivent être finies.

La variété M s'appelle une CL-variété, si c'est une variété hilbertienne qui est modelée sur H_1 et munie d'une CL-structure, c'est-à-dire :

1) soit $\{\mathcal{U}_\alpha\}$, un recouvrement de M et $\{\mathcal{U}_\alpha, \chi_\alpha\}$, le système des cartes : $(\chi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{V}_\alpha \subset H_1)$; alors les applications $\chi_{\alpha\beta} : \mathcal{V}_\alpha \to \mathcal{V}_\beta$ sont des CL-applications, uniformes par rapport à α et β ;

2) il existe une partition de l'unité : $\Sigma\, \varphi_\alpha(x) \equiv 1 \quad (x \in M)$, $\operatorname{supp} \varphi_\alpha(x) \subset \mathcal{U}_\alpha$, où chaque fonction $(\chi_\alpha^{-1})^* \varphi_\alpha$ appartient à $CL^\infty(\mathcal{V}_\alpha)$ (ou $CL^s(\mathcal{V}_\alpha)$). On n'exige pas la finitude locale du recouvrement. Mais on suppose la convergence de quelques séries de dérivées des fonctions $(\chi_\alpha^{-1})^* \varphi_\alpha(x)$.

Dans le cas de variétés M à bord, on suppose que la frontière correspond à l'équation $x_1 = 0$ en coordonnées locales.

Les espaces CL^s consistent en des fonctions $f(x)$, $x \in M$, telles que $(\chi_\alpha^{-1})^* f(x) \in CL^s(\chi_\alpha \mathcal{U}_\alpha)\ \forall \alpha$.

Des exemples de CL-variétés :

1°). $M = M^n \times H_1^{\infty-n}$, où M^n est une variété à dimension finie, $M^n \subset P^n H_1$, et $H_1^{\infty-n} = (I - P^n)H_1$. C'est une variété cylindrique.

2°). $M = \{x : x \in H_1 , x_1 \geqq \sqrt{1 + \sum_{i \geqq 2} x_i^2 d_i^{-2}}$, où $d_i \to +\infty$ et $\Sigma\, c_i^2 d_i^2 < +\infty$.

3°). Soit $M^1 \subset M^2 \subset \ldots \subset M^n \subset \ldots$, une suite croissante de variétés M^n de dimension $n (n=1,2,\ldots)$ et $M^\infty (= \underline{\lim}\, M^n)$, limite inductive de cette suite. Alors M est la fermeture de M^∞ dans une topologie convenable telle que M devient une CL-variété.

L'opérateur elliptique de deuxième ordre $L(x, D)$ sur une CL-variété M est défini par son symbole $L(x,\xi)$. On suppose que :

1°) $\chi_{\alpha *} L(x,\xi) = L_\alpha(x,\xi)$ appartiennent à $E^2(\mathcal{U}_\alpha)$ uniformément par rapport à α (c'est-à-dire que toutes les estimations sont uniformes),

2°) $\chi_{\alpha\beta *} L_\beta(x,\xi) = L_\alpha(x,\xi)$. Alors on demande que le symbole général (avec les membres inférieurs) soit conservé.

THEOREME 6.

Soit M une CL-variété de frontière ∂M et $L(x,D)$, l'opérateur elliptique défini sur M et vérifiant les conditions 1°) et 2°).

Alors :

1). Il existe la fermeture $\bar{L}(x,D)$ de l'opérateur $L(x,D)$ dans l'espace $CL(M)$. Nous désignons par Ω_L, le domaine de définition de l'opérateur $\bar{L}(x, D)$ et ensuite nous écrirons $L(x,D)$ au lieu de $\bar{L}(x,D)$;

2). Pour $\mathrm{Re}\zeta$ assez grand, l'opérateur $L(x, D)+ \zeta$ définit un isomorphisme entre $\Omega_L^o = \Omega_L \bigcap (\mathcal{U} : \mathcal{U})|_{\partial M} = 0)$ et $CL(M)$, alors le problème de Dirichlet pour $L(x,D)$ sur M a une solution unique.

Le théorème analogue a lieu pour la variété M sans bord. Remarquons que l'on construit le paramétrix $\hat{R}$ de l'opérateur $(L(x,D) +\zeta)|_{\Omega_L^o}$ d'une manière semblable au cas fini :

$$\hat{R}f = \sum_\alpha \varphi_\alpha \chi_\alpha^* \hat{R}_\alpha (\chi_\alpha^{-1})^* \Psi_\alpha f \quad , \quad \Psi_\alpha \varphi_\alpha = \varphi_\alpha ,$$

supp φ_α, $\Psi_\alpha \subset \mathcal{U}_\alpha$, $\hat{R}_\alpha$, le paramétrix local d'opérateur $L(x,D) + \zeta$ $(\mathrm{Re}\zeta > 0)$ dans un voisinage intérieur ou abordant la frontière de M .

Il est démontré dans [7] que :

(24) $$(L(x, D)+\zeta) \circ \hat{R}f = f + Tf, \quad f \in CL(M) \ ,$$

(25) $$\|\hat{T}f\|_{C(M)} \leqq \frac{C}{(\mathrm{Re}\,\zeta)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \|f\|_{C(M)} \ .$$

L'opérateur $\hat{R}f$ est aussi une parametrix à gauche de $L(x, D)+\zeta$. De (24) et de (25), on déduit l'existence de l'opérateur inverse pour l'opérateur $L(x, D)|_{\Omega_L^0}$.

10. Soit M une CL-variété de frontière ∂M et $L(x, D)$, l'opérateur vérifiant les conditions 1°) et 2°) du numéro précédent.

Soit :

(26) $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + L(x, D)u(x,t) = f(x,t), \ (x,t) \in (M, \mathbb{R}^1_t) \ ,$$

(27) $$u|_{t<0} \equiv 0 \quad , \quad u|_{\partial M} = 0 \ .$$

C'est un problème parabolique aux limites sur M. On suppose que $f(x,t)= 0$ pour $t < 0$ et pour chaque t $f(x,t) \in CL(M)$. Sous les hypothèses naturelles, on démontre en [7], que le problème (26), (27) a une solution $u(x,t)$ unique. Dans la démonstration, on applique à (26) et à (27) la transformation de Laplace et on utilise le théorème 5 et une estimation simple pour $(L(x,D) + \zeta)^{-1}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DALETZKI, J.L. Les opérateurs elliptiques avec l'infinité de variables et les opérateurs paraboliques correspondants. Ouspeshi Mat. Nauk XXII, 4 (1967), 3-54.

[2] PIECH, M.Ann. A fundamental solution of parabolic equation on Hilbert space. J. Functional Analysis, 3 N° 1 (1969), 85-114.

[3] FOMIN, S.V. La méthode de transformation de Fourier pour les équations aux dérivées variationnelles. Doklady AN 181, N° 4 (1968), 812-814.

[4] GROSS, L. Potential theory in Hilbert space. J. Functional Analysis, 1 (1967), 123-181.

[5] VISHIK, M.I. Paramétrix des opérateurs elliptiques à l'infinité de variables indépendantes. Ouspeshi Mat. Nauk XXVI, 2 (1971), 155-174.

[6] BLEHER, P.M. et VISHIK, M.I. Sur une classe d'opérateurs pseudo-différentiels avec l'infinité des variables et leurs applications. Matem. Sbornik 86 (128), N° 3(1971), 446-494.

[7] VISHIK, M.I. et MARTCHENKO, A.V. Problèmes aux limites pour les opérateurs elliptiques et paraboliques avec l'infinité de variables. Mat. Sbornik (1972), à paraître.

[8] VISHIK, M.I. La solution fondamentale des opérateurs elliptiques d'ordre arbitraire avec les coefficients constants en cas d'infinité de dimensions infinies. Doklady Ac. Sci. (à paraître).