Astérisque

GIORGIO TALENTI

Équations paraboliques « en avant - en arrière »

Astérisque, tome 2-3 (1973), p. 292-304

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__2-3__292_0>

EQUATIONS PARABOLIQUES "EN AVANT - EN ARRIERE"

Giogio TALENTI

Università di Firenze

0.- INTRODUCTION.-

Considérons une équation parabolique du second ordre en deux variables de la forme :

(1) $$k(x,y)u_y - a(x,y)u_{xx} + (\text{termes d'ordre inférieur}) = 0 \ ,$$

où le coefficient $a(x,y)$ est strictement positif et le coefficient $k(x,y)$ s'annule le long d'une courbe. GEVREY [7] a montré que, moyennant des hypothèses convenables de régularité sur les coefficients, l'équation (1) peut être réduite, par changement des coordonnées, à la forme suivante :

$$|x|^p u_y - a(x,y)u_{xx} + (\text{termes d'ordre inférieur}) = 0,$$

ou bien à la suivante :

$$|x|^p \operatorname{sgn} x \ . \ u_y - a(x,y)u_{xx} + (\text{termes d'ordre inférieur}) = 0,$$

selon que le coefficient $k(x,y)$ garde un signe constant ou bien que $k(x,y)$ change de signe à travers la ligne $k(x,y) = 0$, l'exposant p étant un nombre positif convenable.

Les formes canoniques de l'équation (1) sont donc les suivantes :

(2) $$|x|^p u_y - u_{xx} = 0$$

(3) $$|x|^p \operatorname{sgn} x \,.\, u_y - u_{xx} = 0.$$

Le but de cet exposé est de donner quelques résultats relatifs à l'équation (3). Dans la suite on suppose toujours $p > -1$. Les résultats que nous allons énoncer sont publiés dans les articles [4] de PAGANI et dans l'article [5] de PAGANI-TALENTI.

1.- POSITION DU PROBLEME ET THEOREME D'UNICITE.-

Le problème consiste à chercher une fonction telle que :

(1.1 a) u est une fonction, définie en $R^2_+ = \{(x,y) \in R^2 : y > 0\}$ et à valeurs réelles, ayant les propriétés suivantes :

$$\text{ess.sup.}\ \{\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p\, u(x,y)^2\, dx : y > 0\} < \infty,$$

$$|x|^{p/2}\, u_y \quad \text{et} \quad |x|^{-p/2}\, u_{xx} \quad \text{appartiennent à} \quad L^2(R^2_+),$$

$$\text{ess.sup.}\ \{\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p\, u(x,y)^2\, dx : y > k\} \to 0 \quad \text{si} \quad k \to +\infty;$$

(1.1 b) u vérifie l'équation : $|x|^p \operatorname{sgn} x \,.\, u_y - u_{xx} = 0$;

(1.1 c) u vérifie la condition au bord :

$$\operatorname{spt}\,[u(.,0) - h] \subseteq\,]-\infty, 0],$$

où h est une fonction donnée ayant la propriété suivante :

(1.2) h est une fonction, définie en $]-\infty, +\infty[$ et à valeurs réelles, localement absolument continue telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\,|x|^p\, h(x)^2 + h'(x)^2]\,dx < \infty.$$

Dans (1.1 c) nous avons noté spt le support et $u(.,0)$ la trace de u

La solution du problème (1.1) est unique. Cela résulte de l'inégalité a priori, suivante :

THEOREME 1.1.

Si u est une solution du problème (1.1) on a :

$$\iint_{R^2_+} u_x^2 \, dxdy \leqslant \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^p \, h(x)^2 \, dx \tag{1.3}$$

Pour préciser l'énoncé du problème (1.1) et démontrer le théorème 1.1 nous avons besoin d'un théorème de trace.

Définissons $W(R^2_+)$ = espace des fonctions u ayant la propriété (1.1 a), muni de la norme :

$$\| u \|^2_{W(R^2_+)} = \text{ess.sup.} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p \, u(x,y)^2 \, dx \; : \; y > 0 \right\} + \\ + \iint_{R^2_+} \left(|x|^p \, u_y^2 + |x|^{-p} \, u_{xx}^2 \right) dxdy.$$

Définissons $T(-\infty, +\infty)$ = espace des fonctions h ayant la propriété (1.2), muni de la norme :

$$\| h \|^2_{T(-\infty,+\infty)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(|x|^p \, h^2 + h'^2 \right) dx .$$

$W(R^2_+)$ est un espace de Banach complet, $C_0^\infty(\overline{R^2_+})$ est dense dans $W(R^2_+)$.

Cela posé, on peut démontrer que $T(-\infty,+\infty)$ est exactement l'espace des traces sur l'axe $y = 0$ des fonctions appartenant à $W(R^2_+)$; plus précisément, on a :

THEOREME 1.2.

(i) $C_0^\infty(\overline{R^2_+}) \ni u \to u(.,0)$ [= restriction de u à l'axe $y = 0$] est un opérateur linéaire à domaine dense, borné de $W(R^2_+)$ à valeurs dans $T(-\infty,+\infty)$. Soit γ l'opérateur de trace, i.e. la transformation linéaire bornée de (et avec domaine égal à) $W(R^2_+)$ dans $T(-\infty,+\infty)$ prolongeant l'opérateur précédent ; alors : (ii) l'image $\gamma \, W(R^2_+)$ est exactement

$T(-\infty,+\infty)$; (iii) γ est un isomorphisme entre $W(R^2_+)/(\text{noyau de } \gamma)$ et $T(-\infty,+\infty)$.

La démonstration de la propriété (i) du théorème 1.2 est presque immédiate et découle du lemme 1.3 ; (ii) et (iii) peuvent être démontrés par exemple en résolvant, dans les espaces qu'il faut, le problème de Cauchy pour l'équation (2).

LEMME 1.3. Si $u \in C_0^\infty(\overline{R^2_+})$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{d}{dx} u(x,0)\right|^2 dx \leqslant \iint_{R^2_+} (|x|^p u^2_y + |x|^{-p} u^2_{xx})\, dxdy.$$

En effet : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u_x(x,0)^2\, dx = - \iint_{R^2_+} \frac{\partial}{\partial y} u^2_x\, dxdy =$

$= -2 \displaystyle\iint_{R^2_+} u_x u_{xy}\, dxdy =$ (intégrant par parties)

$2 \displaystyle\iint_{R^2_+} u_{xx} u_y\, dxdy \leqslant \iint_{R^2_+} (|x|^p u^2_y + |x|^{-p} u^2_{xx})\, dxdy.$

Démonstration du théorème 1.1.

Soit u une solution du problème (1.1) ; multiplions les deux membres de l'équation (1.1 b) par u et intégrons sur la bande $\{(x,y) \in R^2 : -\infty < x < +\infty, 0 < y < k\}$:

$$-\int_0^k dy \int_{-\infty}^{+\infty} u\, u_{xx}\, dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^k |x|^p \operatorname{sgn} x \; u\, u_y\, dy.$$

Rappelant que $C_0^\infty(\overline{R^2_+})$ est dense dans $W(R^2_+)$ et utilisant le théorème de trace 1.2., on obtient aisément les formules :

$$-\int_0^k dy \int_{-\infty}^{+\infty} u\, u_{xx}\, dx = \int_0^k dy \int_{-\infty}^{+\infty} u^2_x\, dx,$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p \operatorname{sgn} x\, dx \int_0^k u\, u_y\, dy = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)^2 |x|^p \operatorname{sgn} x\, dx - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,k)^2 |x|^p \operatorname{sgn} x\, dx.$$

Par conséquent :

$$\int_0^k dy \int_{-\infty}^{+\infty} u^2_x dx \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^p u(x,0)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} |x|^p\, u(x,k)^2\, dx,$$

ce qui entraîne l'inégalité (1.3) puisque, grâce à l'hypothèse (1.1 a),

$$\int_{-\infty}^{0} |x|^p\, u(u,k)^2\, dx \to 0 \qquad \text{si} \quad k \to +\infty \ .$$

2.- EXISTENCE .-

Les théorèmes sur l'existence et sur la régularité de la solution sont basés sur l'étude d'une formule de représentation.

Pour trouver cette formule nous employons la méthode de la séparation des variables. Appelant $-(qt/2)^2$ la constante de séparation (où q est un nombre que nous allons choisir dans un instant) et superposant les solutions à variables séparées, on obtient des solutions u de la forme :

$$(2.1) \qquad u(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{-y(qt/2)^2}\, U(x,t)dt \quad ,$$

où $x \to U(x,t)$ est une solution continûment différentiable bornée de l'équation différentielle (une équation de AIRY si $p = 1$) :

$$(2.2) \qquad (d^2/dx^2)U + (qt/2)^2\, |x|^p \operatorname{sgn} x \,.\, U = 0 \quad .$$

Maintenant il est commode de poser : $q = p + 2$. Les solutions de l'équation (2.2) qui nous intéressent, dépendent d'une constante multiplicative arbitraire ; notant $t^{1/2} f(t)$ cette constante, elles sont :

$$(2.3) \qquad U(x,t) = \begin{cases} t^{1/2} f(t) x^{1/2}\, [J_{1/q}(tx^{q/2}) + J_{-1/q}(tx^{q/2})] & \text{si } x>0 \\ t^{1/2} f(t)\, \frac{2}{\pi} \sin(\pi/q) |x|^{1/2}\, K_{1/q}(t|x|^{q/2}) & \text{si } x<0 \end{cases}$$

où $J_{\pm 1/q}$, $K_{1/q}$ sont des fonctions de BESSEL.

Nous avons donc trouvé une famille de solutions u de l'équation (3) dépendantes d'une fonction arbitraire $f(t)$:

(2.4)

$$u(x,y) = \int_0^{+\infty} dt\ e^{-y(qt/2)^2}\ (t|x|)^{1/2}\ f(t).\begin{cases} J_{1/q}(t\ x^{q/2}) + J_{-1/q}(t\ x^{q/2}) & \text{si } x>0 \\ \frac{2}{\pi}\sin(\pi/q)\ K_{1/q}(t|x|^{q/2}) & \text{si } x<0. \end{cases}$$

Prenons $f(t)$ de la manière suivante :

(2.5)

$$f(t) = \frac{q}{4\cos^2(\pi/2q)} \int_0^{+\infty} (tx)^{1/2}\ [\mathbf{J}_{1/q}\ (t\,x^{q/2}) + \mathbf{J}_{-1/q}\ (tx^{q/2})]x^p\ h(x)dx$$

les $\mathbf{J}_{\pm 1/q}$ étant fonctions de ANGER. Nous allons démontrer que, si la donnée $h(x)$ vérifie (1.2) et une hypothèse supplémentaire, la fonction u, définie par (2.4) - (2.5), est la solution du problème (1.1). Remarquons que l'intégrale au second membre de (2.5) est prise au sens : $\int_0^{+\infty}$ = limite en $L^2(0,+\infty)$ de $\int_0^k$.

Le choix indiqué de la fonction $f(t)$ est dû aux raisons suivantes : premièrement la condition au bord (1.1 c) , couplée avec (2.4), donne lieu formellement à l'équation :

$$\int_0^{+\infty} (xt)^{1/2} f(t)\ [J_{1/q}(tx^{q/2}) + J_{-1/q}(tx^{q/2})]dt = h(x) \tag{2.6}$$

$$(0 < x < +\infty);$$

d'autre part le lemme suivant assure, moyennant des changements de variables évidents, que la fonction (2.5) est la seule solution de carré sommable de l'équation (2.6).

<u>LEMME 2.1</u> | Soit λ un paramètre tel que $-1 < \lambda < +1$, définissons un opérateur U_λ avec la formule :

$$(U_\lambda \Phi)(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (\xi t)^{1/2}[J_\lambda(\xi t) + J_{-\lambda}(\xi t)]\ \Phi(t)dt \tag{2.7}$$

On a les propriétés suivantes :

(i) si $\Phi \in L^2(0,+\infty)$ l'intégrale au second membre de (2.7) converge en moyenne ;

(ii) pour toute $\Phi \in L^2(0,+\infty)$:

$$\cos(\pi\lambda/2)\|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} \leqslant \|U_\lambda\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} \leqslant \|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} ;$$

(iii) l'image $U_\lambda\, L^2(0,+\infty)$ est exactement $L^2(0,+\infty)$;

(iv) pour toute $\psi \in L^2(0,+\infty)$ on a la formule :

(2.8) $$(U_\lambda^{-1}\psi)(t) = \frac{1}{2\cos^2(\pi\lambda/2)} \int_0^{+\infty} (\xi t)[\mathbf{J}_\lambda(\xi t) + \mathbf{J}_{-\lambda}(\xi t)]\psi(\xi)d\xi,$$

l'intégrale convergeant en moyenne.

Utilisant les développements en série des fonctions de BESSEL, le lemme 2.1 et la continuité dans $L^2(0,+\infty)$ de la transformation de MEIJER [$u(x,y)$ avec x négatif est, à un changement de variable près, la transformée de MEIJER de $0 < t \to e^{-y(qt/2)^2} f(t)$], on démontre aisément les propriétés suivantes de la fonction (2.4) - (2.5) :

(i) u a des dérivées continues (dans R_+^2 ouvert) par rapport a y, de n'importe quel ordre, et au moins $[p + 2]$ (= partie entière de $p + 2$) dérivées continues par rapport a x ; si p est un entier impair, u est indéfiniment différentiable. On prouve aussi que, si p est un entier impair, u appartient à la classe de GEVREY $(1 - 1/q, 1)$; ce qui est lié à l'hypoellipticité de l'équation (GEVREY [7]).

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p |u(x,y)|^2\, dx$ est majoré par : (const.). $\int_0^{+\infty} x^p\, h(x)^2\, dx$ pour tout $y > 0$, et tend vers 0 si $y \to +\infty$;

(iii) $\quad \int_0^{+\infty} x^p \, |u(x,y) - h(x)|^2 \, dx \to 0 \quad \text{si} \quad y \to 0 \quad ;$

(iv) $\quad \iint_{R_+^2} u_x^{\,2} \, dxdy \leqslant (\text{const.}) \int_0^{+\infty} x^p \, h(x)^2 \, dx$

Les propriétés énoncées permettraient de démontrer que la fonction (2.4) - (2.6) est une solution faible (dans un sens facile à imaginer) du problème : équation (1.1 b) + condition au bord (1.1 c). Par conséquent, grâce au théorème d'unicité de BAOUENDI-GRISVARD [1], la solution faible de ce problème, donc à fortiori la solution du problème (1.1) - si elle existe - a nécessairement l'expression (2.4) - (2.5). En d'autres termes, le problème (1.1) a une solution si et seulement si la fonction que nous venons de construire est une solution.

Examinons les conditions sur $h(x)$, nécessaires et suffisantes pour que la fonction (2.4) - (2.5) soit dans l'espace $W(R_+^2)$.

Evidemment, à cause de l'équation différentielle, il suffit de considérer la dérivée u_y. De (2.4), prenant la dérivée sous le signe d'intégration et posant $x = \xi^{2/q}$, on obtient :

$$\xi^{p/2q} \, u_y(\xi^{2/q},y) = -\frac{q^2}{4} \int_0^{+\infty} (\xi t)^{1/2} \, t^2 \, e^{-y(qt/2)^2} f(t) \, [J_{1/q}(\xi t) + J_{-1/q}(\xi t)] dt \; ,$$

donc, en vertu du lemme 2.1 :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^p \, u_y^{\,2}(x,y)dx &= \frac{2}{q} \int_0^{+\infty} |\xi^{p/2q} \, u_y(\xi^{2/q},y)|^2 \, d\xi \\ &\geqslant \frac{2}{q} \cos^2(\pi/2q) \int_0^{+\infty} t^4 \, e^{-2y(qt/2)^2} f(t)^2 \, dt.\end{aligned}$$

Avec un procédé du même type on trouve :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p \, u_y^{\,2}(x,y)dx \leqslant (\text{const.}) \int_0^{+\infty} t^4 \, e^{-2y(qt/2)^2} f(t)^2 \, dt.$$

Il s'ensuit que :

(2.10) $$\frac{1}{2}(2/q)^3\cos^2(\pi/2q)\int_0^{+\infty}|t\,f(t)|^2dt \leqslant \iint_{R^2_+}|x|^p\, u_y^{\,2}\,dxdy \leqslant (\mathrm{const.})\int_0^{+\infty}|t\,f(t)|^2\,dt.$$

Des lemmes suivants on déduit aisément que $tf(t)$ est de carré intégrable si et seulement si, la dérivée $h'(x)$ de $h(x)$ étant supposée de carré intégrable, on a la condition :

(2.11) $$\int_0^{+\infty}\left|\frac{1}{t}\,\mathfrak{M}\,h'(\tfrac{1}{2}+it)\right|^2 dt < \infty ,$$

où $\mathfrak{M}\,h'(s) = \int_0^{+\infty} h'(x)x^{s-1}\,dx$ est la transformée de MELLIN de h'.

<u>LEMME 2.2</u> Soit $-1 < \lambda < +1$, définissons un opérateur V_λ avec la formule :

(2.12) $$(V_\lambda\,\Phi)(\xi) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\xi t)^{1/2}\,[J_\lambda(\xi t)-J_{-\lambda}(\xi t)]\,\Phi(t)dt$$

On a les propriétés :

(i) si $\Phi\in L^2(0,+\infty)$, l'intégrale au second membre de (2.12) converge en moyenne ;

(ii) pour toute $\Phi\in L^2(0,+\infty)$:

(2.13) $$\|V_\lambda\,\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} \leqslant \sin(\pi\lambda/2)\,\|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} ;$$

(iii) l'image $V_\lambda L^2(0,+\infty)$ est exactement :

(2.14) $$A = \{\psi\in L^2(0,+\infty) : 0 < t \to \frac{1}{t}\,\mathfrak{M}\,\psi(\tfrac{1}{2}+it) \in L^2(-\infty,+\infty)\}.$$

Remarquons que l'ensemble A contient l'ensemble :

$$\{\psi\in L^2(0,+\infty) : \int_0^{+\infty}|\psi(x)|\ln x|^2\,dx < \infty ,\ \int_0^{+\infty}x^{-1/2}\psi(x)dx = 0;$$

(iv) V_λ est inversible, l'opérateur V_λ^{-1} (non borné) est représenté par la formule :

$$(V_\lambda^{-1}\psi)(t) = \frac{1}{2\sin^2(\pi\lambda/2)} \int_0^{+\infty} (\xi t)^{1/2}[\mathcal{J}_\lambda(\xi t) - \mathcal{J}_{-\lambda}(\xi t)]\psi(\xi)d\xi$$

et on a l'inégalité :

$$\|V_\lambda^{-1}\psi\|^2_{L^2(0,+\infty)} \leqslant \text{const.}\left[\|\psi\|^2_{L^2(0,+\infty)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\tfrac{1}{t}\mathcal{M}\psi(\tfrac{1}{2}+it)\right|^2 dt\right]$$

LEMME 2.3 Soit $0 < \lambda < 1$, et posons : $D_\lambda = \frac{d}{d\xi} + \frac{-\lambda+1/2}{\xi}$. Alors

$$\left.\begin{array}{l} \psi \in L^2(0,+\infty) \\ D_\lambda \psi \in A \end{array}\right\} \text{ impliquent } t(U_\lambda^{-1}\psi)(t) \left\{\begin{array}{l} \in L^2(0,+\infty) \text{ et} \\ = (V_{1-\lambda}^{-1} D_\lambda \psi)(t) \; ; \end{array}\right.$$

réciproquement :

$$\left.\begin{array}{l} \psi \text{ et} \\ t(U_\lambda^{-1}\psi)(t) \end{array}\right\} \in L^2(0,+\infty) \text{ impliquent } D_\lambda\psi \left\{\begin{array}{l} \in A \text{ et} \\ = V_{1-\lambda}(tU_\lambda^{-1}\psi). \end{array}\right.$$

Conclusion :

THEOREME 2.4.

Supposons que l'hypothèse (1.2) sur la donnée $h(x)$ soit vérifiée. Alors le problème (1.1) a une solution u si et seulement si, $h(x)$ vérifie la condition de compatibilité :

(2.18) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\tfrac{1}{t}\mathcal{M}h'(\tfrac{1}{2}+it)\right|^2 dt < \infty .$$

(2.18) étant vérifiée, on a l'inégalité :

(2.19) $$\iint_{R_+^2} (|x|^p u_y^2 + |x|^{-p} u_{xx}^2)dxdy \leqslant (\text{const.}) \int_0^{+\infty} h'^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\tfrac{1}{t}\mathcal{M}h'(\tfrac{1}{2}+it)\right|^2 dt .$$

Remarquons que si on fait l'hypothèse :

(2.20) $$\int_0^{+\infty} [x^p h(x)^2 + (1+|\ln x|)^2 h'(x)^2]\, dx < \infty ,$$

alors (2.18) équivaut à :

$$(2.21) \qquad \int_0^{+\infty} x^{-1/2}\, h'(x)dx = 0$$

et le second membre de (2.19) peut être majoré par :

$$\int_0^{+\infty} (1 + |\ln x|)^2\, h'(x)^2\, dx .$$

En ce qui concerne l'équation (2) - une équation d'évolution du type "de la chaleur" avec une "ligne de dégénéréscence" - nous signalons seulement que son étude est très simple et ses propriétés semblables à celles de l'équation de la chaleur (voir par exemple [4])/ L'équation (2) peut être employée pour établir des théorèmes de trace dans les espaces fonctionnels liés à l'équation (3), et aussi pour étudier l'équation (3) avec la méthode des équations intégrales de WIENER-HOPF (voir[5],[6]).

Remarquons que l'équation (3) change de type au travers de l'axe $x = 0$; en effet (3) est parabolique "en avant" à droite de l'axe $x = 0$ et parabolique "en arrière" à gauche. Cette équation a un intérêt pour les applications ; on la rencontre dans la théorie des processus stochastiques (FLEMING [2]) et dans les théories cinétiques comme modèle de l'équation de FOKKER-PLANCK (PAGANI[4]). Rappelons que BAOUENDI-GRISVARD [1] ont considéré un problème aux limites bien posé pour l'équation (3) et démontré l'existence et l'unicité d'une solution faible.

Notre objet principal est le problème suivant ; chercher une solution u de l'équation (3), définie dans le demi-plan $y > 0$ (donc définie à droite et à gauche de l'axe $x = 0$) et"continue" en quelque sens sur le même axe), vérifiant une condition de croissance convenable à l'infini et une condition de Dirichlet sur la partie droite de l'axe $y = 0$: $u(x,0) = h(x)$ pour tout $x > 0$ (et seulement pour les x positifs), où $h(x)$ est une fonction donnée.

On peut démontrer, avec la méthode de BAOUENDI-GRISVARD, l'existence et l'unicité d'une solution faible de ce problème. D'ailleurs, l'unicité d'une solution suffisamment régulière est très facile à obtenir. Pour ce qui concerne l'existence d'une solution régulière où, ce qui revient au même, la régularité de la solution faible, le problème énoncé admet un indice différent de zéro. En effet, la solution faible refuse en général d'être régulière, même si la donnée de DIRICHLET $h(x)$ est arbitrairement régulière ; la solution faible est régulière si et seulement si, la donnée de DIRICHLET vérifie un certain nombre de conditions de compatibilité, le nombre de ces conditions dépendant de la régularité exigée de la solution et augmentant avec cette régularité.

L'équation (3) est donc un contre-exemple à la théorie des équations elliptiques-paraboliques de KOHN-NIRENBERG [3].

3.- REGULARITE.-

Itérant convenablement les procédés décrits dans le numéro précédent on démontre le théorème :

THEOREME 3.1.

Soit n un entier $\geqslant 2$; supposons que la donnée h vérifie l'hypothèse (1.2) et la suivante :

$$\begin{cases} (x^{-p}\,\frac{d^2}{dx^2})^k\, h,\ \frac{d}{dx}\,(x^{-p}\,\frac{d^2}{dx^2})^k\, h \in L^2(0,+\infty) \\ \text{pour tout } k = 1, 2, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Alors le problème (1.1) a une solution u telle que :

$$\begin{cases} (\partial/\partial y)^k\, u \in L^2(R^2_+) \\ \text{pour tout } \; k = 2, \ldots, n \end{cases}$$

si et seulement si h vérifie les conditions de compatibilité :

$$\int_0^{+\infty} x^{-1/2} \frac{d}{dx} \left(x^{-p} \frac{d^2}{dx^2}\right)^k h(x)dx = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots n-2),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{t} \left(\mathcal{M} \frac{d}{dx} \left(x^{-p} \frac{d^2}{dx^2}\right)^{n-1} h\right) \left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 dt < \infty .$$

REFERENCES

[1] BAOUENDI-GRISVARD .- J. Functional Anal. 1968

[2] FLEMING.- U.S. Army Math. Center M.R.C. Report 1963

[3] KOHN-NIRENBERG.- Comm. Pure Appl. Math. 1966

[4] PAGANI.- Rend. Ist. Lombardo 1969, Boll. UMI 1970

[5] PAGANI-TALENTI.- Ann. Mat. Pura Appl. 1972

[6] TALENTI.- à paraître aux Atti Congresso UMI-Bari 1971

[7] GEVREY .- J. Mathématique 1914