MITSURU IKAWA

Remarques sur les problèmes mixtes pour l'équation des ondes

Astérisque, tome 2-3 (1973), p. 217-221

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__2-3__217_0>

REMARQUES SUR LES PROBLEMES MIXTES

POUR L'EQUATION DES ONDES

par

Mitsuru IKAWA

Au Colloque International du C.N.R.S. de 1961, AGMON a donné une conférence sur les problèmes mixtes pour les équations hyperboliques d'ordre supérieur ([2]). Dans cet exposé la condition de Lopatinski uniforme a été introduite. Par la suite on étudiait les problème mixtes qui satisfont la condition de Lopatinski uniforme (par exemple Balaban [3], Kreiss [10] et Sakamoto [11]) et les problèmes pour les opérateurs à coefficients constants dans un demi-espace (par exemple, Agemi-Shirota [1], Chazarain-Piriou [5] et Hersh [6]).

Malgré ces travaux, on connaît très peu de chose sur les problèmes qui ne satisfont pas nécessairement la condition de Lopatinski uniforme dans un domaine général ou pour les opérateurs à coefficients variables. L'un des problèmes les plus typiques qui ne satisfont pas la condition de Lopatinski uniforme est le suivant :

$$
(1)\quad \begin{cases} \Box u(x,y,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \qquad\qquad = f(x,y,t) \quad \text{dans} \quad \Omega \times]0,T] \\ Bu(x,y,t) = b_1(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + b_2(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \qquad\qquad = g(x,y,t) \quad \text{sur} \quad S \times [0,T] \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = u_1(x,y) \end{cases}
$$

où Ω est un domaine de $\mathbb{R}^2$ de frontière S de classe C^∞ et $b_i(x,y) \in \mathcal{B}(S)$ à valeurs réelles vérifiant $b_1^2 + b_2^2 = 1$. Et on suppose que B est une dérivée transversale par rapport à S , c'est-à-dire,

(2) $\qquad b_1 n_1 + b_2 n_2 \neq 0 \quad \text{sur} \quad S$

où $n = (n_1, n_2)$ désigne la normale extérieure unitaire de S . Quand

(3) $\qquad b_1 n_2 - b_2 n_1 = 0 \quad \text{sur} \quad S$

on l'appelle condition de Neumann, et quand

(4) $\qquad b_1 n_2 - b_2 n_1 \neq 0 \quad \text{sur} \quad S$

condition de dérivée oblique.

Rappelons quelques résultats sur (1).

(i) Ω est un demi-espace et B une dérivée oblique à coefficients constants.

Le problème (1) n'est pas bien posé au sens de L^2 ([7]) et il a une vitesse propagatrice plus grande que le problème de Cauchy pour $\Box$ (Appendice de [8]).

(ii) Ω est un domaine général dont la frontière est compacte et on fait l'hypothèse (2).

Le problème (1) est bien posé dans l'espace d'ultra-distributions à valeurs vectorielles (Chazarain [4]). D'autre part, on peut montrer sous l'hypothèse (4) que (1) est bien posé au sens de C^∞ et qu'il y a l'estimation,

$$\|u(x,y,t)\|^2_{2,L^2(\Omega)} + \|\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t)\|^2_{1,L^2(\Omega)} + \|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leqslant C\,\|u_1\|^2_{N,L^2(\Omega)} \qquad \forall t \in [0,T]$$

pour $u_o = f = g = 0$, où N est un entier déterminé par B , Ω et T .

. En ce cas là (1) représente un phénomène propagateur avec une vitesse finie ([8]).

Concernant les résultats ci-dessus, on peut se poser les questions suivantes :

Question 1. La constante N dépend-elle vraiment de Ω , de B et de T ?

Question 2. Est-ce que, si (3) n'a pas lieu , il faut la condition (4) pour que (1) soit bien posé ?

Autrement dit, quand la direction de la dérivée B varie régulièrement de l'oblique en normale le problème (1) est-il bien posé au sens de C^∞ ?

Sur les deux questions ci-dessus nous allons donner deux exemples de domaine Ω de frontière C^∞ simple, compacte et fermée et d'opérateur B à coefficients C^∞

Exemple 1. B et Ω vérifient (2) et (4). Et la constante N dépend de T de façon que N tende vers l'infini lorsque T tend vers l'infini.

Exemple 2. B et Ω vérifient (2). Le problème (1) n'est pas bien posé au sens de C^∞ .

L'exemple 2 nous montre que la condition de Lopatinski, si elle n'est pas uniforme, n'entraîne pas que le problème mixte est bien posé. Ce fait contraste avec la condition de Lopatinski uniforme, qui assure que le problème est bien posé. au sens de L^2 même pour les cas généraux. Et pour les problèmes mixtes avec la condition de Lopatinski non uniforme la figure du domaine joue un rôle très important.

Pour la construction des exemples, la considération de la réflexion des solutions dans un demi-espace est essentielle, c'est-à-dire, quand B est une dérivée oblique on peut trouver une fonction telle que sa régularité diminue par la réflexion.

Les démonstrations détaillées seront données dans [9].

REFERENCES

[1] R. AGEMI et T. SHIROTA.- On necessary and sufficient conditions for L^2-well posedness of mixed problems for hyperbolic equations, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 21 (1970), 133-151.

[2] S. AGMON.- Problème mixte pour les équations hyperboliques d'ordre supérieur. Colloque International du C.N.R.S., (1962), 13-18.

[3] T. BALABAN.- On the mixed problem for a hyperbolic equation. Mem. Amer. Math. Soc., N° 112 (1971).

[4] J. CHAZARAIN.- Problèmes de Cauchy abstraits et applications à quelques problèmes mixtes, J. Funct. Analysis, 7 (1971).

[5] J. CHAZARAIN et A. PIRIOU.- Caractérisation des problèmes mixtes hyperboliques bien posés, à paraître.

[6] R. HERSH.- Mixed problems in several variables, J. Math. Mech. 12 (1963), 317-334.

[7] M. IKAWA.- On the mixed problem for the wave equation with an oblique derivative boundary condition. Proc. Japan Acad., 44 (1968), 1033-1037.

[8] M. IKAWA.- Mixed problem for the wave equation with an oblique derivative boundary condition, Osaka J. Math., 7 (1970), 495-525.

[9] M. IKAWA.- Remarques sur les problèmes mixtes pour l'équation des ondes, à paraître.

[10] H.O. KREISS.- Initial boundary value problem for hyperbolic systems. Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970), 277-298.

[11] R. SAKAMOTO.- Mixed problems for hyperbolic equations (I) et (II), J. Math. Kyoto Univ., 10 (1970) 349-373 et 403-417.