B. HANOUZET

Caractérisation de classes de fonctions C^∞ et analytiques sur une variété irrégulière à l'aide d'un opérateur différentiel

Astérisque, tome 2-3 (1973), p. 188-196
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__2-3__188_0>

CARACTERISATION DE CLASSES DE FONCTIONS C^∞ ET ANALYTIQUES SUR UNE VARIETE IRREGULIERE A L'AIDE D'UN OPERATEUR DIFFERENTIEL

par

B. HANOUZET

Sur un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière par morceaux, on étudie une famille d'opérateurs différentiels $\mathcal{A}$ d'ordre 2, elliptiques dans Ω, dégénérés sur la frontière $\partial\Omega$ à l'ordre 1 suivant chaque direction normale. Un tel opérateur réalise un automorphisme de l'espace $C^\infty(\overline{\Omega})$ des fonctions de classe C^∞ sur $\overline{\Omega}$, ainsi que de l'espace $a(\overline{\Omega})$ des fonctions analytiques sur $\overline{\Omega}$. On caractérise des classes de fonctions C^∞ sur $\overline{\Omega}$ à l'aide des itérés de $\mathcal{A}$; en particulier, si u est une fonction C^∞ sur $\overline{\Omega}$, pour qu'elle soit analytique sur $\overline{\Omega}$, il faut et il suffit qu'il existe une constante $L > 0$ telle que, pour tout entier k, on ait

$$\|\mathcal{A}^k u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant L^{k+1}\,(2k)!$$

Ce théorème est intéressant pour les applications par le fait qu'il ne fait pas intervenir de condition aux limites. Dans Lions-Magenes [6], pour Ω régulier, on trouve une caractérisation de $a(\overline{\Omega})$ par les itérés d'un opérateur elliptique, mais cette caractérisation fait intervenir de plus des opérateurs frontières.

Antérieurement, de tels résultats ont été obtenus pour le fonctions analytiques à l'intérieur du domaine par Aronszajn [1], Nelson [9], Komatsu [7], le cas général ayant été démontré par Kotake et Narasimhan [8].

Les résultats énoncés ici généralisent ceux de Baouendi et Goulaouic [2] pour un ouvert régulier ; ils font l'objet d'une publication plus détaillée en collaboration avec eux [4].

Nous considérons des ouverts dont la frontière est C^∞ (ou, pour certaines questions, analytiques) par morceaux, et qui peuvent se représenter localement sur $(\mathbb{R}_+)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, c'est-à-dire que :

si $x_o \in \partial\Omega$, il existe un voisinage O' de x_o, un voisinage O de l'origine, un difféomorphisme Θ de O' sur O et un entier k, $1 \leqslant k \leqslant n$, tels que

$$(1)\qquad \begin{cases} \Theta(O' \cap \Omega) = O \cap (\mathbb{R}_+)^k \times \mathbb{R}^{n-k} \\ \Theta(O' \cap \partial\Omega) = O \cap \partial((\mathbb{R}_+)^k \times \mathbb{R}^{n-k}) \end{cases}$$

Dans $(\mathbb{R}_+)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, la variable x est notée (y,z) avec $y = (y_1,\dots,y_k)$, $z = (z_{k+1},\dots,z_n)$. Les opérateurs $\mathcal{A}$ elliptiques dans Ω, sont tels que, après transport sur $(\mathbb{R}_+)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ ils s'écrivent sous la forme :

$$(2)\quad A(x,D)u = \sum_{1\leqslant i\leqslant k} a_i(x)\, D_{y_i}(y_i D_{y_i} u) + \sum_{|\mu|\leqslant 2} b_\mu(x)\, D_z^\mu u + Pu$$

où P est un opérateur d'ordre 2, négligeable en un sens qui sera précisé plus loin. On suppose que les coefficients a_i, b_μ et ceux de P sont suffisamment réguliers dans $\underline{O} = O \cap (\overline{\mathbb{R}}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k})$ et que la condition d'ellipticité suivante est réalisée :

$$(3)\qquad \begin{cases} \exists\, \alpha > 0 \mid \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \\ \operatorname{Re}\,\Big(\sum_{j=1}^{k} a_j(o)\, \xi_j^2 + \sum_{|\mu|=2} b_\mu(o)\, \xi^\mu\Big) \geqslant \alpha\, |\xi|^2 \end{cases}$$

L'idée directrice pour étudier A est que le changement de variables :

$$\mathbb{R}^2 - (0) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(s,t) \longrightarrow y = s^2 + t^2$$

fait passer du Laplacien $D_s^2 + D_t^2$ dans $\mathbb{R}^2 - (0)$ à l'opérateur dégénéré $4\, D_y\, y\, D_y$ dans $\mathbb{R}_+$. Nous posons donc :

$$(4)\qquad \begin{cases} y_i = s_i^2 + t_i^2\ , & 1 \leqslant i \leqslant k, \\ z_i = z_i & ,\ k+1 \leqslant i \leqslant n, \\ v(s,t,z) = u(s_1^2+t_1^2,\dots,s_k^2+t_k^2,z). \end{cases}$$

L'opérateur A donné par (2) s'écrit alors au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k}$ sous la forme :

$$(5)\quad \begin{cases} B(s,t,z,D_s;D_t,D_z)v = \sum_{1\leq i\leq k} \frac{1}{4}\, a_i(s,t,z)\ (D^2_{s_i}+D^2_{t_i})v \\ +\ \sum_{|\mu|\leq 2} b_\mu(s,t,z)\ D^\mu_z v + Qv \end{cases}$$

où Q est un opérateur d'ordre 2.

Nous supposons que P est tel que l'hypothèse (3) suffit pour que B soit uniformément fortement elliptique dans un voisinage $\tilde{O}$ de l'origine de $\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k}$, ce qui signifie pratiquement que les coefficients de la partie homogène d'ordre deux de Q doivent s'annuler à l'origine. Pour $\underline{O}$, nous pouvons prendre un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}$ contenu dans le transformé de $\tilde{O}$ par (4). L'étude de la régularité au voisinage de $\partial\Omega$ pour l'opérateur $\mathcal{A}$ est donc ramenée ainsi à une étude à l'intérieur pour l'opérateur elliptique B, ceci grâce à une augmentation du nombre des variables. En utilisant les résultats de régularité à l'intérieur dans les espaces de Sobolev pour B, nous obtenons la régularité pour $\mathcal{A}$ et caractérisons les domaines des itérés de $\mathcal{A}$. Par le théorème des itérés à l'intérieur de Kotake Narasimhan [8] dans les classes de Gevrey d'ordre s ($s \geqslant 1$), nous obtenons un théorème des itérés sur $\overline{\Omega}$ pour une classe de fonctions $a_s(\overline{\Omega})$ qui coïncide avec $a(\overline{\Omega})$ pour $s = 1$.

1 - Régularité $D(\mathcal{A}^m)$

Nous supposons dans cette partie, que les coefficients de $\mathcal{A}$ sont de classe C^∞ sur $\overline{\Omega}$ et que $\partial\Omega$ est C^∞ par morceaux.

Introduisons les espaces :

$$E_0 = \{u \in L^2\ (\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k})\ ;\ \text{supp } u \subset \underline{O}\}$$

$$E_1 = \{u \in E_o \; ; \; \sqrt{y_i}\, D_{y_i}\, u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}),\; 1 \leqslant i \leqslant k \; ;$$
$$D_{z_i}\, u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}),\; k+1 \leqslant i \leqslant n\}$$

et pour $\ell \geqslant 2$,

$$E_\ell = \{u \in E_{\ell-1} \; ; \; Au \in E_{\ell-2}\}$$

Par (4) on obtient que :

(6) $\qquad u \in E_\ell \iff v \in H^\ell(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$

où H^ℓ désigne l'espace de Sobolev usuel d'ordre ℓ.

Plus précisément, dans (6), v n'est définie à priori que sur $(\mathbb{R}^2-\{0\})^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. On montre d'abord que v appartient à $L^2((\mathbb{R}^2-\{0\})^k \times \mathbb{R}^{n-k})$ donc définit une distribution dans $\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k}$ et c'est pour cette distribution, que nous notons encore v que l'on obtient la régularité dans H^ℓ.

Grâce à des inégalités de Hardy, nous obtenons une description de E_{2m}

$$(7) \quad \begin{cases} E_{2m} = \{u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}) \; ; \; \operatorname{supp} u \subset \underline{O} \; ; \\ y_i^q\, D_{y_i}^{m+q}\, u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}) \text{ pour } o \leqslant q \leqslant m, \quad 1 \leqslant i \leqslant k \; ; \\ D_{z_i}^\mu\, u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}) \text{ pour } |\mu| \leqslant 2m\} \end{cases}$$

Cette propriété nous permet de décrire localement le domaine des itérés de $\mathcal{A}$. En définissant $D(\mathcal{A})$ comme l'espace des fonctions $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ telles que, localement au voisinage de tout $x_o \in \partial\Omega$, on ait $u \circ \Theta^{-1} \in E_1$ et $A(u \circ \Theta^{-1}) \in E_o$ et plus généralement :

$$D(\mathcal{A}^m) = \{u \in D(\mathcal{A}^{m-1}) \; ; \; \mathcal{A}u \in D(\mathcal{A}^{m-1})\}$$

on obtient :

<u>Théorème 1.</u>

L'espace $D(\mathcal{A}^m)$ *est constitué de fonctions* $u \in H^{2m}_{loc}(\Omega)$ *telles que, localement au voisinage de tout* $x_o \in \partial\Omega$ *on ait* $u \circ \Theta^{-1}$ *dans* E_{2m} *décrit par* (7).

Comme $H^{2m}(\Omega) \hookrightarrow D(\mathcal{A}^m) \hookrightarrow H^m(\Omega)$, nous tirons de ce théorème les deux conséquences suivantes :

(8) 1°) Pour $m \geqslant 1$, l'injection de $D(\mathcal{A}^m)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte

2°) Avec une condition de coercivité convenable, $\mathcal{A}$ est un automorphisme de $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Dans toute la suite, nous supposons que les coefficients de $\mathcal{A}$ sont analytiques sur $\overline{\Omega}$ et que $\partial\Omega$ est analytique par morceaux.
Par changement de variables (4), on peut aussi obtenir directement que, sous une condition de coercivité convenable $\mathcal{A}$ est un automorphisme de $a(\overline{\Omega})$. Cette dernière propriété découle aussi d'un résultat plus général sur les itérés de $\mathcal{A}$.

2 - Théorème des itérés.

Dans $(\mathbb{R}_+)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, on considère les opérateurs différentiels :

$$R_i^m = \begin{cases} (D_{y_i}\, y_i\, D_{y_i})^\ell & \text{si } m = 2\ell, \\ y_i\, D_{y_i}\, (D_{y_i}\, y_i\, D_{y_i})^\ell & \text{si } m = 2\ell+1 \end{cases}$$

et pour tout k-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ on pose :

$$R^\alpha = R_1^{\alpha_1} \dots R_k^{\alpha_k}.$$

On définit la classe d'espace $a_s(\overline{\Omega})$:

Définition

Soit $s \geqslant 1$ *; on note* $a_s(\overline{\Omega})$ *l'espace des fonctions* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *qui sont dans* $G_s(\Omega)$ *(classe de Gevrey d'ordre* s *sur* Ω*) et telles que :*
Pour tout $x_0 \in \partial\Omega$ *et toute carte locale donnée par (1) au voisinage de* x_0 *on ait, pour tout compact* $K \subset \underline{O}$ *une constante* $L > 0$ *vérifiant :*

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^k,\ \forall\, \mu \in \mathbb{N}^{n-k},\ \|R^\alpha D_z^\mu (u \circ \theta^{-1})\|_{L^2(K)} \leqslant L^{|\alpha|+|\mu|+1}((|\alpha|+|\mu|)!)^s.$$

On a immédiatement :

$$G_s(\overline{\Omega}) \hookrightarrow a_s(\overline{\Omega})$$

et par des inégalités de Hardy

$$a_s(\overline{\Omega}) \hookrightarrow G_{2s-1}(\overline{\Omega}) \ ;$$

en faisant s = 1, on obtient donc :

$$a(\overline{\Omega}) = a_1(\overline{\Omega}) = G_1(\overline{\Omega}).$$

Par le théorème de Kotake et Narasimhan dans les classes de Gevrey, appliqué aux opérateurs elliptiques $\mathcal{A}$ (dans Ω) et B (dans $\tilde{O}$), on obtient le résultat suivant :

Théorème 2.

Soient $s \geq 1$ *et* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$*. Alors, pour que* u *appartienne à* $a_s(\overline{\Omega})$ *il faut et il suffit que :*

$$\exists\, L > 0 \mid \forall\, k \in \mathbb{N},\ \|\mathcal{A}^k u\|_{L^2(\Omega)} \leq L^{k+1}(2k!)^s.$$

Ce résultat montre aussi que, avec une condition de coercivité convenable, $\mathcal{A}$ est un automorphisme de $a_s(\overline{\Omega})$. Pour s = 1, on retrouve le résultat de régularité analytique.

En vue des applications, nous avons encore besoin d'un résultat de théorie spectrale, que nous indiquons brièvement.

3 - Théorie spectrale.

On suppose dans toute la suite que $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ est auto-adjoint. La propriété (8) montre que le spectre de $\mathcal{A}$ est constitué par une suite $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de valeurs propres strictement positives, que l'on ordonne dans l'ordre croissant au sens large, et tendant vers l'infini avec j.

Le comportement asymptotique des valeurs propres de $\mathcal{A}$ est analogue à celui d'un opérateur elliptique d'ordre 2 sur un ouvert régulier, plus précisément :

Théorème 3.

Il existe une constante $c > 0$ *telle que :*

$$\lambda_j \sim c j^{2/n} \text{ quand } j \to +\infty.$$

4 - Applications.

Notons w_j une base orthonormée dans $L^2(\Omega)$ constituée de fonctions propres de $\mathcal{A}$ associées aux valeurs propres λ_j. On note J l'application, qui à $f \in L^2(\Omega)$, fait correspondre la suite $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de ses coefficients de Fourier sur la base $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$.

Si $P(j)$ est une suite de réels strictement positifs, posons :

$$\ell^2_{P(j)} = \{(f_j) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^2 \; P(j) < \infty\}$$

Par les théorèmes 1 et 3, on obtient :

J *est un isomorphisme de* $C^\infty(\bar{\Omega})$ *sur* s *espace des suites à décroissance rapide,*

et par les théorèmes 2 et 3 :

J *est un isomorphisme de* $a_s(\bar{\Omega})$ *sur* $\varinjlim_{M>0} \ell^2_{\exp(Mj^{1/sn})}$

Les résultats d'interpolation de [5] permettent d'obtenir une nouvelle caractérisation de espaces $a_s(\bar{\Omega})$:

Théorème 4.

Soit $s \geqslant 1$ *; il existe un foncteur d'interpolation* Ψ_s *tel que :*

$$\Psi_s \left[C^\infty(\bar{\Omega}), \, a(\bar{\Omega})\right] = a_s(\bar{\Omega}).$$

Plus généralement, on peut construire un foncteur d'interpolation Ψ_s tel que, pour $s_0 \leqslant s \leqslant s_1$:

$$\Psi_s \left[a_{s_0}(\bar{\Omega}), \, a_{s_1}(\bar{\Omega})\right] = a_s(\bar{\Omega}).$$

Le théorème 4 et les résultats d'approximation de [3] fournissent enfin :

Théorème 5.

Soient $s \geqslant 1$ *et* $u \in L^2(\Omega)$ *; pour que* u *soit dans* $a_s(\overline{\Omega})$*, il faut et il suffit qu'il existe* $L > 0$ *et* $a \in]0,1[$ *vérifiant pour tout* $k \in \mathbb{N}$:

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_k} \|u-P\|_{L^2(\Omega)} \leqslant L a^{k^{1/s}} .$$

($\mathcal{P}_k$ désigne l'espace des polynômes à n variables réelles, à coefficients complexes, de degré inférieur ou égal à k).

En conclusion, d'après ces propriétés d'interpolation et d'approximation, les espaces $a_s(\overline{\Omega})$ sont des espaces naturels entre $C^\infty(\overline{\Omega})$ et $a(\overline{\Omega})$, jouant le rôle des espaces de Georey sur une variété analytique sans bord.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. ARONSZAJN. Sur un théorème de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes.
C.R. Acad. Sc. Paris, 205 (1937), 16-18.

[2] M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC. Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés ; applications.
Journal of Funct. Anal.

[3] M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC. Approximation polynômiale de fonctions C^{∞} et analytique. Ann. Inst. Fourier 1971.

[4] M.S. BAOUENDI, C. GOULAOUIC, B. HANOUZET. Caractérisation de classes de fonctions C^{∞} et analytiques sur une variété irrégulière à l'aide d'un opérateur différentiel.
A paraître à :

[5] C. GOULAOUIC. Prolongements de foncteurs d'interpolation et applications. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 18, 1 (1968) p. 1-98.

[6] J.L. LIONS et E. MAGENES. Problèmes aux limites non homogènes
Tome 3 (Dunod) Paris 1970.

[7] H. KOMATSU. A proof of Kotake et Narasimhan's theorem. Proc. Japan Acad. 38 (1962) 615.
A characterization of real analytic functions
Proc. Jap. Acad. 36 (1960) 90-93.

[8] T. KOTAKE et M.S. NARASIMHAN. Fractionnel powers of a linear elliptic operator. Bull. Soc. Math. France, 90 (1962) 449-471.

[9] E. NELSON Analytic vectors. Ann. of Math. (1959) 572-615.