LOUIS BOUTET DE MONVEL

Opérateurs pseudo-différentiels analytiques d'ordre infini

Astérisque, tome 2-3 (1973), p. 128-134

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__2-3__128_0>

OPERATEURS PSEUDO - DIFFERENTIELS ANALYTIQUES

D'ORDRE INFINI

par

Louis Boutet de Monvel

Cet exposé résume les résultats d'un article qui doit paraître dans les Annales de l'Institut Fourier ([2]). Je renvoie à cet article pour les démonstrations. On trouvera aussi une définition des opérateurs pseudo - différentiels d'ordre infini dans le chapitre II du livre de M. Kawai ([4]).

On attend des opérateurs pseudo - différentiels (o pd.), d'ordre fini ou non, les propriétés suivantes :

1 - Ils transforment une fonction à support compact (plus généralement une fonctionnelle analytique à support compact) en une hyperfonction, et diminuent le support singulier analytique

2 - Ils se composent raisonnablement, et donnent lieu à un calcul symbolique analogue à celui des opd. " classiques " (pour la définition de ces derniers, je renvoie à [3] et à sa bibliographie).

I - DEFINITION DES OPERATEURS.-

Soit X un ouvert de R^N. On appelle symbole analytique sur $X \times R^N$ une fonction $a(x,\xi)$ sur $X \times R^N$ telle que

(1.1) pout tout compact $K \subset X$, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que a se prolonge en une fonction holomorphe dans le domaine complexe (ouvert dans $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^n$) $d(x,K) < \varepsilon$, $|\mathrm{im}\, \xi| < \varepsilon \ (1+|\mathrm{re}\xi|)$; et pour tout $\lambda > 0$, $a \exp - \lambda|\xi|$ est borné dans ce domaine.

On dit que a est de degré fini $\leq m$ si $a(1+|\xi|)^{-m}$ est borné dans les domaines ci dessus (pour ε assez petit).

Par exemple, la fonction $\Sigma\, a_\alpha(x)\, \xi^\alpha$ est un symbole analytique si $\Sigma\, \alpha\, !a_\alpha(x)\, \xi^\alpha$ est holomorphe dans $U \times \mathbb{C}^n$, où U est un voisinage complexe de X. La fonction $\exp i\, c(x)\, (1+|\xi|^2)^\sigma$ est un symbole analytique (de degré infini) si c est analytique et si $\alpha < 1/2$.

Si a est un symbole analytique sur $X \times X \times R^n$, de degré fini $< - n$, on lui associe l'opd. P_a défini par

$$(1.2) \qquad \int P_a f \,.\, g = (2\pi)^{-n} \int e^{i<x-y,\xi>}\, a(x,y,\xi)\, f(y)\, g(x)\, dxdyd\xi$$

pour $f,g \in \mathfrak{D}(X)$. Si les supports singuliers analytiques de f et g sont disjoints, il existe trois champe de vecteurs $x'(x,y,\xi)$, $y'(x,y,\xi)$, $\xi'(x,y,\xi)$, homogènes de degrés respectifs 0,0,1 , tels que

(1.3) x' (resp. y') est nul près du support singulier analytique de g (resp. f). Et avec $x^t = x + itx'$, $y^t = y + ity'$, $\xi^t = \xi + it\,\xi'$ on a $\mathrm{im} < x^t-y^t,\xi^t> \; > 0$ pour $\xi \neq 0$, et $a(x^t,y^t,\xi^t)\, f(y^t)\, g(x^t)$ est bien défini pour $t > 0$ assez petit.

Posons alors $dx^t dy^t d\xi^t = dx_1^t \wedge dx_2^t \wedge \ldots \wedge d\xi_n^t$. La formule de Cauchy montre qu'on a encore, pour t petit,

$$(1.4) \quad \int P_a f.g = (2\pi)^{-n} \int \exp -i\langle x^t - y^t, \xi^t \rangle a(x^t, y^t, \xi^t) f(x^t) g(x^t) dx^t dy^t d\xi^t$$

Or, dans cette nouvelle intégrale, l'exponentielle décroît exponentiellement pour $\xi \to \infty$, et l'intégrale converge encore si a est n'importe quel symbole analytique. Ceci fournit la définition de l'opd. , P_a , et permet de montrer que P_a se prolonge aux fonctionnelles analytiques à support compact et diminue le support singulier analytique.

II - PROPRIETES DE CES OPERATEURS.-

(2.1) La définition indiquée ci dessus est invariante par changement analytique de coordonnées.

(2.2) Le transposé d'un opd. analytique en est un autre.

(2.3) Si $a(x,y,\xi)$ est un symbole analytique, il existe un symbole analytique $b(x,\xi)$ indépendant de y (unique mod. la relation d'équivalence de III) tel que les opd. P_a et P_b diffèrent par un opérateur à noyau analytique.

P_a et P_b diffèrent par un opérateur à noyau analytique.

(2.4) (composition)

Soient P et Q deux opd. analytiques sur X , $X' \subset X$ un ouvert relativement compact, et $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ égale à 1 dans X'. Alors $P \varphi Q|_{X'}$ est un opd. analytique sur X'. (Si f est à support dans X' , $Q(f)$ est analytique hors d'un compact de X' , donc $\varphi\, Q(f)$ et $P\varphi Q(f)$ sont bien définis).

(2.5) Soit P un opd. analytique. On appelle parametrix analytique de P un opd. analytique Q tel que, avec la notation de (2.4), $P\varphi Q|_{X'}$ et $Q\varphi P|_{X'}$ diffèrent de l'opérateur identité par un opérateur à noyau analytique sur X'. Si P possède une parametrix analytique, et si f est une fonctionnelle analytique (à support compact), f est analytique dans tout ouvert où $P(f)$ l'est.

(2.6) Si P est opd. analytique de degré fini m, elliptique au sens que P est défini par un symbole $a(x,y,\xi)$ de degré m tel que $a(x,x,\xi)$ domine $|\xi|^m$ pour $\xi \to \infty$, alors P possède une parametrix analytique.

III - CALCUL SYMBOLIQUE.-

Soit Λ une fonction > 0 telle que pour tout $\varepsilon > 0$, $\Lambda(r) \exp - \varepsilon r$ soit bornée.

(3.1) On appelle symbole analytique formel d'ordre Λ une série $\Sigma\, a_k$ de symboles analytiques (sur $X \times R^n$) tels que pour tout compact $K \subset X$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que les a_k soient tous holomorphes dans le domaine complexe

$d(x,K) < \varepsilon$, $|\xi| > \varepsilon$, $|\text{im}\ \xi| < \varepsilon\ |\text{re}\ \xi|$, et y vérifient

$$|a_k| \leq (1/\varepsilon)^{k+1}\, k\,!\, (1 + |\xi|)^{-k}\ \Lambda\ (|\xi|)$$

(3.2) On dit que deux symboles formels d'ordre Λ, $\Sigma\, a_k$ et $\Sigma\, b_k$ sont équivalents (et on écrit $\Sigma\, a_k \sim \Sigma\, b_k$) si pour tout compact $K \subset X$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que les a_k, b_k soient tous holomorphes dans le domaine complexe de (3.1) et y vérifient

$$\left| \sum_{K<N} a_k - b_k \right| \leq (1/\varepsilon)^{N+1}\, N\,!\, (1+|\xi|)^{-N}\ \Lambda\ (|\xi|)$$

Si a est un symbole analytique, on l'identifie au symbole formel Σa_k où $a_o = a$, $a_k = 0$ si $k \neq 0$. On a alors $a \sim 0$ si et seulement si a est à décroissance exponentielle (en ξ).

Si Σa_k et Σb_k sont deux symboles analytiques formels, on note $(\Sigma a_k)_o (\Sigma b_k)$ le symbole formel (analytique d'après (3.5))

$$(\Sigma a_k)\ _o\ (\Sigma\ b_k) = \sum_{k,l,\gamma} (i^{-|\gamma|}/\gamma !)\ (\tfrac{\partial}{\partial\xi})^{\gamma} a_k\ (\tfrac{\partial}{\partial x})^{\gamma}\ b_l$$

On a les résultats suivants :

(3.3) <u>Théorème</u> :

Soit Σa_k un symbole analytique formel. Il existe un symbole analytique a tel que $a \sim \Sigma a_k$.

(3.4) (Norme formelle)

Soit $K \subset X$ un compact, et $\varepsilon > 0$. Posons

$$N_\Lambda^{K,\varepsilon} (\Sigma a_k, T) = \sum_{k,\alpha,\beta} c_{k,\alpha,\beta}\ a_{k,\alpha,\beta}\ T^{2k+|\alpha|+|\beta|}$$

avec $c_{k,\alpha,\beta} = 2(2n)^{-k}\ k\ !\ \ (k+|\alpha|)!^{-1}\ (k+|\beta|)!^{-1}$

$$a_{k,\alpha,\beta} = \sup_{\substack{x\in K \\ |\xi|>1/\varepsilon}} (1+|\xi|)^k\ \Lambda^{-1}(|\xi|)|\ (\tfrac{\partial}{\partial x})^{\alpha}\ (\tfrac{\partial}{\partial\xi})^{\beta} a_k\ |$$

Il revient au même de dire que $\Sigma\ a_k$ est un symbole formel analytique, ou que, pour tout compact $K \subset X$, il existe $\varepsilon > 0$ et Λ comme ci dessus tels que $N_\Lambda^{K,\varepsilon}(\ \Sigma a_k,\ T)$ soit une série convergente.

(3.5) <u>Théorème</u> :

On a $N_{\Lambda\Lambda'}((\Sigma a_k)_o(\Sigma b_k),T) \ll N_\Lambda((\Sigma a_k),T) N_{\Lambda'}((\Sigma b_k),T)$ (où $\ll$ signifie que le coefficient de T^q dans le membre de droite majore le coefficient de T^q dans le membre de gauche).

Enfin

(3.6) Si P_a , P_b , P_c sont trois opd. analytiques, où $a = a(x,\xi)$; $b = b(x,\xi)$; $c = c(x,\xi)$ sont des symboles analytiques indépendants de y et si (avec la notation de (2.3)) $P_a \varphi P_b$ et P_c diffèrent par un opérateur à noyau analytique, on a $c \sim a \circ b$.

Les théorèmes (3.3) et (3.5) se trouvent déjà essentiellement dans [1] . Ils rendent le maniement des opd. analytiques presque aussi facile que celui des opd. " classiques " ; en particulier, une fois démontrés ces théorèmes, les assertions de II, et (3.6) se démontrent en gros comme dans [3]. Démontrons par exemple (2.6) : grâce à (3.3), (3.6) , il suffit de montrer qu'il existe un symbole analytique formel inverse de a pour la loi $\circ$. Or avec l'hypothèse de (2.6), $1 - a \circ a^{-1} = h$ est un symbole analytique formel de degré 0 sans terme h_o (en fait h est de degré -1). Alors $N_1(h,T)$ est une série convergente sans terme constant , et $N_1(\Sigma h^n,T) << \Sigma N_1(h,T)^n$ est une série convergente.

(Je n'ai pas de critère d'ellipticité raisonnable pour les opérateurs d'ordre infini, à coefficients variables, faute d'une définition utilisable de la partie principale du symbole. Par exemple, si a est le symbole $\exp ic(x) |\xi|^6$, $a \circ a^{-1} - 1$ n'est pas en général un symbole formel de degré fini < 0 , bien que chacun de ses termes le soit si $\sigma < 1/2$).

[1] L. Boutet de Monvel et P. Krée
" Pseudo - differential operators and Gevrey classes "
Ann. Inst. Fourier 17, 1(1967) 295-323

[2] L. Boutet de Monvel
" Opérateurs pseudo différentiels analytiques d'ordre infini "
A paraître dans Ann. Inst. Fourier (1972)

[3] L. Hörmander
" Fourier integral operators I "
Acta Math. 127 (1971) 79-183

[4] M. Kawai
" Micro functions and pseudo - differential equations "
A paraître. Lecture Notes, Springer

Louis Boutet de Monvel
Université de Paris VII