J. M. Bony

P. Schapira

Solutions analytiques et hyperfonctions du problème de Cauchy pour les opérateurs hyperboliques non stricts

Astérisque, tome 2-3 (1973), p. 108-116

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__2-3__108_0>

SOLUTIONS ANALYTIQUES ET HYPERFONCTIONS DU PROBLEME

DE CAUCHY POUR LES OPERATEURS HYPERBOLIQUES NON STRICTS

J.M. BONY et P. SCHAPIRA

1.- NOTATIONS.-

Dans tout cet exposé [1], nous considérons un opérateur différentiel

$$P(x,\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{\alpha<m} a_\alpha(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha$$

à coefficients analytiques dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors un voisinage $\tilde{U}$ de U dans $\mathbb{C}^n$ où les fonctions a_α se prolongent en fonctions holomorphes. Nous noterons encore P l'opérateur

$$P(z,\frac{\partial}{\partial z}) = \sum_{|\alpha|< m} a_\alpha(z)(\frac{\partial}{\partial z})^\alpha$$

défini dans $\tilde{U}$ et nous noterons p son symbole principal

$$p(z,\zeta) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(z)\zeta^\alpha .$$

[1] Cet exposé résume un article à paraître dans "Symposium on hyperfunctions theory" Lectures Notes in Math. Springer Verlag. Al'exception du paragraphe 4 qui est nouveau il reprend notre exposé au Séminaire GOULAOUIC-SCHWARTZ (janvier 1972).

On dit que la partie principale de p est hyperbolique dans la direction N (avec $N \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) si pour tout ξ appartenant à $\mathbb{R}^n$, on a $p(x,N+i\xi) \neq 0$. Il est équivalent d'affirmer que N est non caractéristique et que l'opérateur $p(x,\xi+\tau N)$ n'a que des racines τ réelles pour ξ réel.

Remarque 1.1.-

Si on pose $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ et si N désigne le vecteur de composantes $x' = 0$; $x_n = 1$, on peut énoncer une formulation géométrique équivalente : si un hyperplan H (de codimension réelle 1) de $\mathbb{C}^n$ contient l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $x_n = 0$, et si H est caractéristique pour $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$, alors H contient $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.2.-

Aucune hypothèse supplémentaire ne sera faite sur P. Les termes d'ordre inférieur et la multiplicité des caractéristiques peuvent être quelconques.

Nous allons démontrer sous ces hypothèses que le problème de CAUCHY est bien posé dans les espaces des fonctions analytiques et des hyperfonctions. Pour les fonctions analytiques (et même dans certaines classes de GEVREY), LERAY et OHYA [7] ont démontré ce résultat dans le cas où les caractérisitques sont de multiplicité constante. Pour les hyperfonctions, dans le cas où les caractéristiques sont simples le résultat est dû à KAWAI [5]. Pour les fonctions C^∞ ou les distributions, lorsque les caractéristiques sont de multiplicité constante, des hypothèses doivent être faites sur les termes d'ordre inférieur (voir la conférence de J. CHAZARAIN dans ce colloque.).

2.- INEGALITE HYPERBOLIQUE.-

Lorsque z n'est pas réel, l'opérateur $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$ n'est plus en général hyperbolique. L'inégalité qui suit permet de montrer que l'on s'écarte assez peu du cas hyperbolique. Nous nous appuierons sur le lemme suivant.

LEMME 2.1.-

Soit $\pi(z,\tau)$ un polynôme en une variable τ, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes des variables z. On suppose que pour z réel, les racines τ de ce polynôme sont réelles. On a alors sur tout compact une majoration du type suivant :

$$\pi(z,\tau) = 0 \Rightarrow |\mathrm{Im}\ \tau| \leqslant C\ |\mathrm{Im}\ z|.$$

Comme nous l'a signalé M.KASHIWARA, ce lemme se déduit immédiatement d'une forme locale du théorème des tubes de BOCHNER, dûe à KOMATSU-KASHIWARA [6][4]

THEOREME 2.1.-

Supposons la partie principale de P hyperbolique dans la direction N. Alors, sur tout compact, il existe une constante telle que

$$p(z,\zeta + \tau N) = 0 \Rightarrow |\ \mathrm{Im}\ \tau| \leqslant C(|\xi||y| + |\eta|)$$

Compte tenu de l'homogénéité en (z,τ), le lemme précédent fournit le résultat pour $|\eta|/|\xi|$ borné. Si on a au contraire $|\eta| \geqslant |\xi|$, c'est une conséquence immédiate de la majoration en module $|\tau| \leqslant C|\zeta|$ qui résulte de $p(z,N) \neq 0$.

3.- SOLUTIONS ANALYTIQUES DU PROBLEME DE CAUCHY.-

On désignera par $B(0,a)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon a et par $B'(0,a)$ son intersection avec l'hyperplan d'équation $x_n = 0$. On notera $K(a,\delta)$ (pour $\delta>0$) le cône tronqué intérieur de l'enveloppe convexe de $B'(0,a)$ et du point δaN .

L'opérateur P est supposé défini dans un voisinage d'une boule $B(0,r)$, et de partie principale hyperbolique dans la direction $N=(0,\ldots 0,1)$ pour tout x .

L'opérateur P se prolonge à $\overline{B(0,r)} + i\{y \leqslant \varepsilon\}$ pour ε assez petit.

On désignera par A_ε l'ensemble fermé des ζ tels que l'on ait $p(z,\zeta) = 0$ pour au moins un z appartenant à $\overline{B(0,r)} + i\,\{y \leqslant \varepsilon\}$.

Le théorème 2.1. peut se traduire géométriquement par la proposition suivante.

PROPOSITION 3.1. : Il existe un nombre $\delta > 0$, tel que pour tout $a < r$ et tout $\varepsilon > 0$ assez petit, tout hyperplan (de codimension **réelle** 1) dont la normale appartient à A_ε et qui passe par δaN coupe

$$(B(0,a) + i\{y \leqslant \varepsilon\}) \cap \{z_n = 0\} .$$

Cette proposition est à rapprocher de la remarque 1.1. Elle résulte, par un calcul élémentaire de la majoration du théorème 2.1. Il suffit de prendre $\delta < \dfrac{1}{C(r+1)}$.

THEOREME 3.1. -

Soit g analytique dans $K(a,\delta)$ et au voisinage de $B'(0,a)$. Soient $h_0,\dots\dots,h_{m-1}$ analytiques sur $B'(0,a)$. Il existe alors une et une seule f , analytique **dans** $K(a,\delta)$ et au voisinage de $B'(0,a)$ solution du problème de CAUCHY

$$Pf = g \;;\; \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(x',0) = h_k(x')$$

Pour chaque $a' < a$, le théorème de CAUCHY-KOWALEWSKI permet de trouver une solution f au voisinage de $\overline{B'(0,a')}$ et donc se prolongeant holomorphiquement au voisinage $\overline{B'(0,a')} + i\,\{|y| \leqslant \varepsilon\}$ pour ε convenable. Compte tenu de la proposition 3.1., le théorème de prolongement démontré dans notre exposé ([3] théorème 2.1) montre que f se prolonge en fonction holomorphe dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de $\delta a'N$ et de $B'(0,a')$. Sa trace sur R^n est une solution définie dans $K(a',\delta)$ pour tout $a'<a$ et donc dans $K(a,\delta)$.

4.- CAS DES OPERATEURS CHANGEANT DE TYPE.-

Dans ce paragraphe, $Q(x,\frac{\partial}{\partial x})$ désignera un opérateur défini au voisinage de l'origine et satisfaisant aux conditions suivantes :

- $N = (0,\ldots,0,1)$ est non caractéristique pour Q
- Pour $x_n > 0$, l'opérateur Q a sa partie principale hyperbolique dans la direction N (au sens du paragraphe 1)

THEOREME 4.1.-

> Sous les hypothèses précédentes, soit f une fonction analytique définie pour $x_n>0$ et telle que Pf se prolonge analytiquement au voisinage de 0. Alors la fonction f elle même se prolonge analytiquement au voisinage de 0 .

En appliquant le lemme 2.1. au polynôme $q(x',u^2,\xi',\zeta_n)$, on obtient, pour $\mathrm{Re}\, z_n>0$ une majoration :

$$p(z,\zeta + \tau N) = 0 \quad \Rightarrow \quad |\mathrm{Im}\, \tau| \leqslant C[|\xi|(|y'| + |\mathrm{Im}\, \sqrt{z_n}|) + |\eta|] .$$

Si on désigne par $L(a,\varepsilon,\delta)$ l'ensemble défini par $x_n = \delta a$; $|x'| \leqslant a$; $|y| \leqslant \varepsilon$, et par $M(a,\varepsilon,\delta)$ l'enveloppe convexe de 0 et de $L(a,\varepsilon,\delta)$ un calcul élémentaire permet de déduire de la majoration précédente que pour δ suffisamment petit (dépendant de a et de C , mais pas de ε), tout hyperplan dont la normale est caractéristique en au moins un point de $M(a,\varepsilon,\delta)$ et qui coupe $M(a,\varepsilon,\delta)$ coupe auusi $L(a,\varepsilon,\delta)$. Les arguments de prolongement de l'exposé [3] permettent alors de conclure :

<u>Remarque</u> : Contrairement au cas hyperbolique, on ne peut pas conclure à l'existence d'un voisinage fixe de 0 dans lequel les solutions de $Qf = 0$ se prolongeraient .

Exemple : Pour l'équation de TRICOMI $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - x_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0$, les solutions f analytiques définies dans l'ouvert $x_2 > 0$ se prolongent au voisinage de $x_2 = 0$.

5.- RAPPELS SUR LES HYPERFONCTIONS (cf [10] [11] [8] [9])

On désignera systématiquement par I, I' , I_α,..... des parties fermées convexes propres de la sphère unité S^{n-1} , et par Γ, Γ' , Γ_α, ... l'intérieur de leurs polaires respectifs, cônes ouverts de R^n .

Si ω est un ouvert de R^n , et $\tilde{\omega}$ un voisinage complexe de ω , on peut définir la valeur au bord $b(f)$ d'une fonction holomorphe dans $(\omega + i\Gamma) \cap \tilde{\omega}$, c'est une hyperfonction sur ω et réciproquement toute hyperfonction s'obtient comme somme finie de telles valeurs au bord.

Si (x,η) appartient à $\omega \times S^{n-1}$, et si u est une hyperfonction sur ω , nous dirons avec M. SATO [11] que le point (x,η) n'appartient pas au support singulier essentiel de u (que nous noterons $SS^*(U)$) s'il existe des I_α en nombre fini, ne contenant pas η , tels que dans un voisinage V de x , l'hyperfonction u soit somme de valeurs au bord de fonctions f_α , holomorphes dans $(V + i\Gamma_\alpha) \cap \tilde{V}$ pour un voisinage complexe $\tilde{V}$ de V convenable.

On montre alors que si des I_α en nombre fini sont tels que les $\omega \times I_\alpha$ recouvrent $SS^*(u)$, on peut écrire $u = \Sigma u_\alpha$ avec $SS^*(u_\alpha) \subset \omega \times I_\alpha$. De plus si on a $SS^* u \subset \omega \times I$, pour tout voisinage I' de I , on a $u = b(f)$ où f est holomorphe dans $(\omega + i\Gamma') \cap \tilde{\omega}$.

Dans le cas où $N = (0,\dots,0,1)$ et $-N$ n'appartiennent pas au support singulier essentiel de u en 0 , on peut définir la trace de u sur l'hyperplan

$x_n = 0$. En effet, au voisinage de 0, on a $u = \Sigma\, b(f_\alpha)$ avec $\pm N \notin I_\alpha$. Il en résulte que les cônes Γ_α coupent l'hyperplan $x_n = 0$. Les restrictions f'_α des fonctions f_α à $(\omega + i\Gamma_\alpha) \cap \{z_n = 0\}$, ont des valeurs au bord dans $\{x_n=0\}$ au voisinage de 0 et $\Sigma\, b(f'_\alpha)$ qui ne dépend pas de la décomposition choisie, est par définition la trace de u .

6. SOLUTIONS HYPERFONCTIONS DU PROBLEME DE CAUCHY.

Les notations sont celles du paragraphe 3, la partie principale de P est toujours supposée hyperbolique dans le direction de N .

PROPOSITION 6.1.

Il existe une constante δ' telle que, si Γ est un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ dont la trace Γ' sur l'hyperplan $x_n = 0$ est d'ouverture supérieure à $\pi/4$ (c'est-à-dire contient un cône de révolution d'axe γ et de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{4}$), si f est holomorphe au voisinage de $B'(0,a) + i\Gamma$, alors f se prolonge en fonction holomorphe dans l'intersection de $K(a,\delta') + i\Gamma_1$ et d'un voisinage complexe de $K(a,\delta')$ où Γ_1 est un cône ouvert convexe non vide convenable.

Si δ est la constante de la proposition 3.1., il est immédiat que tout hyperplan dont la normale appartient à A_ε et qui passe par le point $\frac{\delta a N}{2\sqrt{2}} + i\,\frac{\varepsilon}{2}\,\gamma$ coupe $(B'(0,a) + i\Gamma'_\varepsilon)$ en supposant γ unitaire et en notant Γ'_ε l'intersection de Γ' et de la boule de rayon ε . Si l'on désigne alors par M_ε , l'intérieur de l'enveloppe convexe de $\frac{\delta a N}{2\sqrt{2}} + i\,\frac{\varepsilon}{2}\,\gamma$ et de $B'(0,a) + i\Gamma_\varepsilon$, il résulte du théorème 2.1. de [3] que f se prolonge à M_ε. La réunion des M_ε , pour $\varepsilon' < \varepsilon$, contient un ouvert de la forme $K(a,\delta') + i\Gamma$, à condition de prendre $\delta' < \delta/2\sqrt{2}$.

THEOREME 6.1.

Soit v une hyperfonction définie dans la réunion de $K(a,\delta')$ et d'un voisinage de $B'(0,a)$, telle que N et $-N$ n'appartiennent pas au support singulier essentiel de u. Soient $w_0,\ldots,w_{m-1}$ des hyperfonctions définies sur $B'(0,a)$. Il existe alors une et une seule hyperfonction u, définie dans la réunion de $K(a,\delta')$ et d'un voisinage $B'(0,a)$, solution du problème de CAUCHY :

$$P_u = v \; ; \; \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k u|_{x_n=0} = w_k$$

En écrivant les hyperfonctions v et w_k comme somme de valeurs au bord de fonctions holomorphes, on se ramène à résoudre des problèmes de CAUCHY $Pf_\alpha = g_\alpha$; $\left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^k f_\alpha|_{z_n=0} = h_{k,\alpha}$ au voisinage de $B'(0,a)+i\Gamma'_\alpha$, puis on utilise la proposition 6.1. pour montrer que les f_α se prolongent.

Remarque : En précisant la démonstration de la proposition 3.1. on peut montrer que l'écart angulaire entre $SS^*(u|_{x_n=0})$ et $SS^*(u|_{x_n=t})$ est majoré par une constante fois t. Il y a non seulement propagation des solutions à vitesse finie, mais aussi propagation des directions de singularité à vitesse finie (ces vitesses ne dépendant que la constante C du théorème 2.1).

COROLLAIRE 5.1.- (Résolubilité locale).

Il existe un voisinage V de 0 tel que si v est une hyperfonction définie dans un sous-ouvert ω de V, il existe une hyperfonction u dans ω solution de $Pu = v$.

Le faisceau des hyperfonctions étant flasque, on peut supposer $\omega = V$. On peut écrire $v = b(g^+) + b(g^-) + \Sigma b(g_\alpha)$ où les parties I_α correspondantes ne contiennent pas N et $-N$, et où I_+ et I_- sont des voisinages arbitrairement petits de N et $-N$. Le théorème 6.1. permet de résoudre $Pu_\alpha = b(g_\alpha)$ pour V assez petit. D'autre part, le théorème 4.2. de [3] permet de résoudre $Pf^+=g^+$ dans Γ^+. On pose $u = \Sigma u_\alpha + b(f^+) + b(f^-)$.

Remarque : On peut déduire (voir [1],[2]) des résultats qui précèdent des théorèmes d'existence et de prolongement au bord analogues à ceux de [3] , en supposant que la partie principale de P est hyperbolique dans les directions normales au bord.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.M. BONY et P. SCHAPIRA.- Existence et prolongement des solutions analytiques des systèmes hyperboliques non stricts. C.R. Acad. Sc. Paris 274 (1972) p.86.-

[2] J.M. BONY et P. SCHAPIRA .- Problème de CAUCHY existence et prolongement pour les hyperfonction solutions des équations hyperboliques non strictes. C.R. Acad.Sc. PARIS 274(janvier 1972).-

[3] J.M. BONY et P. SCHAPIRA.- Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles. (ce même colloque).

[4] M. KASHIWARA.- On the structure of hyperfunctions (after M.SATO) SUGAKU no AYUMI 15(1970)19-72(en Japonais).

[5] T. KAWAI.- Construction of elementary solutions of I hyperbolic operators and solutions with small singularities. Proc. Japan.Acad. 46. (1970) 912-915.-

[6] M. KOMATSU.- A local version of BOCHNER's tube théorem J. Fac.Sci. Univ. Tokyo Sect.IA 19(1972)201-214.-

[7] J. LERAY et Y.OHYA.- Systèmes linéaires hyperboliques non stricts. Colloque sur l'analyse fonctionnelle, LIEGE,(1964),C.B.R.M. 105-144.

[8] A. MARTINEAU.- Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes Proc. of the Inter. Summer Inst. Lisbonne (1964)193-326.-

[9] M. MORIMOTO.- Sur la décomposition du faisceau des germes de singularité d'hyperfonctions, J. FAC.Sci. Univ. TOKYO, sect IA, 17(1970) 215-239.-

[10] M. SATO.- Theory of hyperfunctions I et II. Journ. Fac. Sc. Univ. Tokyo 8, (1959-1960) p.139-193 et 387-437.-

[11] M. SATO.- Regularity of hyperfunctions solutions of partial differential equations. Actes Cong. Intern. Math. Nice 1970 t.2.