Astérisque

PHILIPPE ROBBA

Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets

Astérisque, tome 10 (1973), p. 109-218

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__10__109_0>

FONCTIONS ANALYTIQUES SUR LES CORPS VALUES ULTRAMETRIQUES COMPLETS

par

Philippe ROBBA

PLAN

1

INTRODUCTION

Soit K un corps valué, ultramétrique, complet et algébriquement clos. Soit A un sous-ensemble de K . Si l'on veut édifier une théorie des fonctions analytiques sur A on sait qu'il n'est pas possible de définir celles-ci par des conditions locales (à cause de la nature ultramétrique de K : cf. [8]).

Il faut donc définir globalement les fonctions analytiques sur A . Pour définir celles-ci demandons-nous quelles propriétés il est souhaitable que possède l'espace $H(A)$ des fonctions analytiques sur A . Il est raisonnable de demander que la somme et le produit de deux fonctions analytiques sur A , l'inverse d'une fonction analytique sur A ne s'annulant pas dans A , la limite uniforme sur A d'une suite de fonctions analytiques sur A soient des fonctions analytiques sur A . De plus, on demandèra que les fonctions analytiques sur A vérifient le principe du prolongement analytique : si $f \in H(A)$ s'annule dans une boule contenue dans A , alors f est identiquement nulle dans A .

Il est naturel d'admettre que les fonctions polynômes sont analytiques (elles vérifient certainement le principe du prolongement analytique). Eventuellement, on exigera que les fonctions analytiques sur A soient indéfiniment dérivables, que leurs dérivées soient des fonctions analytiques et qu'une fonction analytique dans un disque (respectivement une couronne) y soit développable en série de Taylor (respectivement en série de Laurent).

Il résulte de ces conditions que les fractions rationnelles sans pôles dans A et les limites uniformes sur A de telles fractions rationnelles sont des fonctions analytiques sur A . Une limite uniforme sur A de fractions rationnelles sans pôles dans A sera appelée un élément analytique. Si on demande que les éléments analytiques sur A vérifient le principe du prolongement analytique, on obtient des conditions sur A . Si les éléments analytiques sur A vérifient le principe du prolongement analytique on dit que A _est analytique_. La classe des ensembles analytiques sera notée $\mathcal{a}$. Dans [8] nous avons étudié sous quelles conditions un ensemble était analytique ainsi que quelques propriétés des ensembles analytiques (voir l'annexe).

Dans cet article, nous nous proposons d'étudier les propriétés des éléments analytiques sur un ensemble $A \in \mathcal{a}$. Nous établirons un théorème de décomposition d'un élément analytique suivant ses parties singulières, théorème analogue à celui de Mittag-Löffler. Nous étudierons si les éléments analytiques vérifient les propriétés indiquées dans cette introduction. Nous verrons que ce n'est pas toujours le cas ; nous serons donc obligés d'introduire les fonctions analytiques (§ 7). Il apparaîtra alors que, pour que les fonctions analytiques possèdent les propriétés désirables, il est nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires sur la nature topologique de K , à savoir K devra être maximalement complet (§ 10).

Nous étudierons les fonctions méromorphes pour lesquelles on obtient une factorisation suivant les zéros et les pôles analogue à celle obtenue pour les fonctions analytiques (voir par exemple [7]).

Enfin, nous obtiendrons des critères permettant de savoir si une série de Taylor se prolonge en dehors de son disque de convergence.

C'est M. Krasner [6] l'initiateur de la théorie des fonctions analytiques dans les corps valués ultramétriques. Il a été le premier à donner des définitions convenables des fonctions analytiques et à trouver des techniques pour les étudier. Bien des idées de cet article se trouvent déjà implicitement ou explicitement dans ses travaux.

2

NOTATIONS ET TERMINOLOGIE

La fin d'une démonstration sera indiquée par $\|$.

La valeur absolue sur K sera notée $|\ |$.

Dire que K est ultramétrique signifie que

$$|x+y| \leq \max(|x|, |y|).$$

Il en résulte que si $|x| \neq |y|$ on a l'égalité dans la formule précédente.

On suppose que le groupe des valeurs est dense dans $\mathbb{R}^+$.

On notera $\overline{K} = K \cup \{\infty\}$.

On appellera disque ouvert, disque fermé, cercle de centre a et de rayon r , et on notera $D(a, r^-)$, $D(a, r^+)$, $C(a, r)$ les ensembles

$$|x-a| < r \ , \quad |x-a| \leq r \ , \quad |x-a| = r \ .$$

Si $b \in D(a, r^+)$ (resp. $C(a, r)$), $D(b, r^-)$ est contenu dans $D(a, r^+)$ (resp. $C(a, r)$) et est appelé disque intérieur du disque $D(a, r^+)$ (resp. du cercle $C(a, r)$).

Le complémentaire d'un disque sera appelé disque de centre ∞ .

$D(0, 1^+)$ forme un anneau commutatif unitaire dont $D(0, 1^-)$ est un idéal maximal. $D(0, 1^+)/D(0, 1^-)$ est appelé le corps de reste du corps K . C'est l'ensemble des disques intérieurs du disque unité fermé $D(0, 1^+)$. On le note $\mathfrak{k}$.

$\prec$ signifiera soit $<$, soit $\leq$ et lorsque nous parlerons du disque de centre a et de rayon r , D(a, r) : $|x-a| \prec r$ cela désignera soit $D(a, r^-)$ soit $D(a, r^+)$.

3

POLYGONE DE VALUATION D'UN ELEMENT ANALYTIQUE

3. 1. - Soit A un sous-ensemble de K et soit y un point de K. Nous noterons $\mathrm{Im}_y(A)$ l'image de A dans l'application de K dans $\mathbb{R}^+$: $x \to |x-y|$. Soit $\overline{\mathrm{Im}_y(A)}$ l'adhérence de $\mathrm{Im}_y(A)$ dans $\mathbb{R}^+$. Nous dirons que A est <u>infraconnexe relativement à</u> y si $\overline{\mathrm{Im}_y(A)}$ est un intervalle.

Nous dirons que A est <u>infraconnexe</u> s'il est infraconnexe relativement à tout point de K [5]. (Un ensemble analytique est infraconnexe [8]).

Nous appellerons <u>projection de</u> A <u>relativement</u> à y et nous noterons $\mathrm{Pr}_y(A)$ l'ensemble des points d'accumulation de $\mathrm{Im}_y(A)$. Si A est infraconnexe, $\mathrm{Pr}_y(A) = \overline{\mathrm{Im}_y(A)}$ sauf si $\mathrm{Im}_y(A)$ est réduit à un point auquel cas $\mathrm{Pr}_y(A)$ est vide.

3. 2. - Soit $P(x)$ un polynôme. On pose, pour r appartenant au groupe des valeurs,

$$|P|_y(r) = \sup_{|x-y|=r} |P(x)|$$

$|P|_y(r)$ est une fonction continue monômiale par morceaux qui se prolonge sur $\mathbb{R}^+$ tout entier.

Pour une fraction rationnelle $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, on pose :

$$|R|_y(r) = \frac{|P|_y(r)}{|Q|_y(r)}$$

$|R|_y(r)$ est une fonction continue, monômiale par morceaux (éventuellement avec exposant négatif) définie sur tout $\mathbb{R}^+$.

Si R n'a ni zéros ni pôles sur le cercle $|x-y| = r$, on a $|R|_y(x) = |R(x)|$ pour tout x vérifiant $|x-y| = r$.

Le polygone de valuation de R relatif au point y est le graphe de l'application $\operatorname{Log} r \to \operatorname{Log} |R|_y(r)$.

La pente du polygone à gauche (resp. à droite) du point d'abscisse $\operatorname{Log} r$ représente la différence entre le nombre de zéros et le nombre de pôles situés dans le disque $|x-y| < r$ (resp. $|x-y| \leq r$). Le changement de pente au point d'abscisse $\operatorname{Log} r$ représente donc la différence entre le nombre de zéros et le nombre de pôles situées sur le cercle $|x-y| = r$.

Le polygone de valuation d'un polynôme est donc convexe.

Soit $R_n(x)$ une suite de fractions rationnelles sans pôles dans A convergeant uniformément vers f sur A. On pose pour $r \in \operatorname{Pr}_y(A)$

$$|f|_y(r) = \lim_{n\to\infty} |R_n|_y(r) .$$

On vérifie que cette limite existe et ne dépend pas de la suite R_n choisie.

Le graphe de l'application $\operatorname{Log} r \to \operatorname{Log}|f|_y(r)$ est le polygone de valuation de f relatif au point y.

Toutes ces propriétés sont faciles à démontrer. On en trouvera les démonstrations par exemple dans [5] § 3, ou [8] ch. II.

3. 3. - La fonction de valuation $|f|$ possède les propriétés suivantes :

3. 3. 1. - Soient y et z deux points de K et $r = |y-z|$, alors

$$|f|_y(r) = |f|_z(r) ,$$

lorsque les deux termes de cette égalité sont définis.

3.3.2. - Si f est un élément analytique dans le disque $D(y, r)$, on a :

$$|f|_y(r) = \sup_{x \in C(y,r)} |f(x)|$$

3.3.3. - Si f est un élément analytique sur A, si $r \in Pr_y(A)$ et si le cercle $C(y, r)$ est contenu dans A, on a :

$$|f|_y(r) = \sup_{x \in C(y,r)} |f(x)| \quad .$$

3.3.4. - Si $\sup_{x \in A} |f(x)| \leq M$, on a pour $r \in Pr_y(A)$:

$$|f|_y(r) \leq M \quad .$$

3.3.5. - Si $r_n \in Pr_y(A)$, $r_n \to r$ et si pour tout n, $|f|_y(r_n) \neq |g|_y(r_n)$, on a :

$$|f+g|_y(r) = \max\left(|f|_y(r) , |g|_y(r) \right) .$$

Cela vient de ce que si $|f|_y(r) \neq |g|_y(r)$, alors : $|f+g|_y(r) = \max\left(|f|_y(r) , |g|_y(r) \right)$ et de la continuité des fonctions $|f|_y$, $|g|_y$ et $|f+g|_y$.

En particulier si à gauche ou à droite du point d'abscisse $\operatorname{Log} r$ les polygones de f et g ont des pentes différentes on a l'égalité ci-dessus.

4

THEOREME DE DECOMPOSITION DE MITTAG LOFFLER

Nous nous proposons de montrer qu'un élément analytique sur un ensemble infra-connexe est somme de ses parties singulières.

Avant d'énoncer le théorème il nous faut donner quelques nouvelles définitions.

4. 1. - Soit A un ensemble infraconnexe. Un disque T contenu dans $\complement A$ sera appelé un <u>trou</u> de A si pour tout disque D tel que $T \subset D \subset \complement A$ on a : $T = D$. On notera $\mathfrak{T}(A)$ où $\mathfrak{T}$ la famille des trous de A. Un disque intérieur d'un trou de A ou un trou de A réduit à un point sera appelé <u>trou intérieur</u> de A. On notera $\mathfrak{T}^\circ(A)$ ou $\mathfrak{T}^\circ$ la famille des trous intérieurs de A.

4. 2. - Soit E un sous-ensemble ouvert de $\overline{K} = K \cup \{\infty\}$. Nous noterons $H(E)$ l'espace vectoriel des éléments analytiques sur E (cf. définition §. 1 , nuls à l'infini (cette dernière condition tombe si $\infty \notin E$). On pose, pour $f \in H(E)$,
$\|f\|_E = \sup_{x \in E} f(\dot{x})$ (cette dernière quantité peut être infinie, mais ce cas ne se produit que si E n'est pas fermé).

Dans ce qui suit T désignera un trou intérieur de l'infraconnexe A

4. 3. - LEMME. - <u>Si</u> $f \in H(A \cup T)$, <u>on a</u> $\|f\|_{A \cup T} = \|f\|_A$.

Soit $T = D(y, r^-)$. On a $\|f\|_T = |f|_y(r)$ (3. 3. 2) .

Si A n'est pas entièrement contenu dans $C(y, r)$, $r \in Pr_y(A)$ et donc

$|f|_y(r) \leq \|f\|_A$ d'après 3. 3. 4. On en déduit $\|f\|_T \leq \|f\|_A$ et enfin $\|f\|_{A \cup T} = \sup (\|f\|_T , \|f\|_A) = \|f\|_A$.

Si $A \subset C(y, r)$, $Pr_y A$ est vide et on ne peut appliquer directement 3. 3. 4. .

Soit alors $z \in A$, on a $|y-z| = r$, $r \in Pr_z(A)$ et 3. 3. 4. donne $|f|_z(r) \leq \|f\|_A$. Mais alors d'après 3. 3. 1. $|f|_y(r) = |f|_z(r)$ et on termine comme ci-dessus.

Le cas où T est un trou de centre ∞ se traite de façon analogue. $\|$

4. 4. - LEMME. - Si $f \in H(\complement T)$, on a $\|f\|_{\complement T} = \|f\|_A$.

Soit $R = D(y, r^-)$. 3. 3. 2. se généralise au cas d'un disque de centre ∞ et donne $|f|_y(r) = \|f\|_{\complement T}$.

D'autre part, comme on l'a vu au lemme 4. 3. on a $|f|_y(r) \leq \|f\|_A$.

On a donc :

$$\|f\|_A \leq \|f\|_{\complement T} = |f|_y(r) \leq \|f\|_A .$$

Le cas où T est un trou de centre ∞ se traite de même. $\|$

4. 5. - LEMME. - Soit R une fraction rationnelle sans pôles dans A . Notons R_T la somme des éléments simples de R correspondant aux pôles de R situés dans T . On a alors :

$$\|R_T\|_{\complement T} = \|R_T\|_A \leq \|R\|_A .$$

(La partie polynômiale de R , y compris le terme constant, sera considérée comme associée à un pôle à l'infini).

Traitons d'abord le cas où T est le trou intérieur de centre ∞ . Soit $z \in A$, ρ le diamètre de A . T est l'ensemble $|x-z| > \rho$. $Pr_z(A) = [0 , \rho]$. $R_T(x)$ n'ayant pas de pôle dans le disque $D(z, \rho^+)$ le polygone de R_T relatif à z a une pente positive ou nulle à droite du point d'abscisse $\operatorname{Log} \rho$. $R(x) - R_T(x)$

n'ayant pas de pôle pour $|x-z| > \rho$ et tendant vers 0 quand $x \to \infty$ son polygone de valuation relatif à z a une pente strictement négative à droite du point d'abscisse $\mathrm{Log}\,\rho$. Comme $R = (R - R_T) + R_T$ il résulte alors de 3.3.5. que l'on a

$$|R|_z(\rho) = \max(|R_T|_z(\rho)\ ,\ |R - R_T|_z(\rho)).$$

Comme, en vertu de 3.3.4. on a $|R|_z(\rho) \leq \|R\|_A$, on en déduit que $|R_T|(\rho) \leq \|R\|_A$. Or, comme R_T n'a pas de pôles dans T on a d'après 3.3.2. $|R_T|_z(\rho) = \|R_T\|_{\complement T}$; ce qui nous donne l'inégalité annoncée.

Le cas où T est un disque borné se traite de façon analogue. ||

4.6. - Remarque : Il résulte du lemme 4.3. que, si $f \in H(A \cup T)$, et si f est nulle dans A, alors f est nulle dans $A \cup T$. Ceci nous permet donc de parler du prolongement analytique dans T (s'il existe) d'un élément analytique f sur A.

4.7. - THEOREME. - Soient A un ensemble infraconnexe, et f un élément analytique sur A. A chaque trou intérieur T de A on associe une fonction $f_T \in H(\complement T)$ appelée partie singulière de f relative au trou T, caractérisée par la condition que $f - f_T$ se prolonge analytiquement dans T. On a alors :

$$f = \sum_{T \in \mathfrak{T}^\circ} f_T\ ,$$

la série convergeant uniformément sur A, et de plus

$$\|f\|_A = \sup_{T \in \mathfrak{T}^\circ} \|f_T\|_{\complement T}$$

(i) Prouvons d'abord l'unicité de f_T. S'il existe deux fonctions f_T et g_T vérifiant les conditions indiquées, il existe une fonction h, définie sur $\overline{K}$, telle que $h = f_T - g_T$ dans $\complement T$, h est un élément analytique sur $\complement T$, un élément analytique sur $A \cup T$, et vaut 0 à l'infini.

Soit ε_n une suite de nombres tendant vers 0. Il existe deux suites de fractions rationnelles P_n et Q_n , telles que

$$\|h-P_n\|_{\complement T} \leq \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \|h-Q_n\|_{A\cup T} \leq \varepsilon_n .$$

Posons $\Pi_n = P_n - Q_n$. On a $\|\Pi_n\|_A \leq \varepsilon_n$.

Il résulte du lemme 4. 5. que $\|\Pi_{nT}\|_{\complement T} \leq \varepsilon_n$.

On déduit alors du lemme 4. 3. que

$$\|\Pi_n - \Pi_{nT}\|_{T\cup A} = \|\Pi_n - \Pi_{nT}\|_A \leq \sup(\|\Pi_n\|_A , \|\Pi_{nT}\|_A) \leq \varepsilon_n .$$

Posons $R_n = P_n - \Pi_{nT} = Q_n + (\Pi_n - \Pi_{nT})$; R_n n'a aucun pôle dans $\overline{K}$ et on a

$$\|h-R_n\|_{\complement T} \leq \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \|h-R_n\|_{T\cup A} \leq \varepsilon_n$$

et donc $\|h-R_n\|_{\overline{K}} \leq \varepsilon_n$. h est donc un élément analytique sur $\overline{K}$ et, puisque $h(\infty) = 0$, on a donc $h = 0$, soit $f_T = g_T$.

(ii) Construisons f_T . Soit R_n une suite de fractions rationnelles sans pôles dans A , convergeant uniformément vers f sur A . R_n forme une suite de Cuachy dans H(A) . Comme $(R_n - R_m)_T = R_{nT} - R_{mT}$, il résulte du lemme 4. 5. que R_{nT} forme une suite de Cauchy dans $H(\complement T)$, et donc converge vers un élément f_T de $H(\complement T)$. En particulier, R_{nT} converge uniformément sur A vers f_T . Puisque l'on a, pour tout n ,

$$R_n = \sum_{T\in \mathfrak{T}^\circ} R_{nT}$$

(il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls), on aura à la limite,

$$f = \sum_{T\in\mathfrak{T}^\circ} f_T$$

la série convergeant uniformément sur A . Comme, pour $T' \neq T$, on a

$$\|f_{T'}\|_{T\cup A} = \|f_{T'}\|_A ,$$

on voit que la série

$$\sum_{\substack{T'\in\mathfrak{T}^\circ \\ T'\neq T}} f_{T'} = f - f_T$$

converge uniformément sur $A\cup T$, ce qui prouve que $f\text{-}f_T$ se prolonge analytiquement dans T . Enfin, comme on a, pour tout n ,

$$\|R_{nT}\|_{\complement T} \leq \|R_n\|_A ,$$

on aura à la limite,

$$\|f_T\|_{\complement T} \leq \|f\|_A ,$$

mais comme, d'autre part,

$$\|f\|_A \leq \sup_{T\in\mathfrak{T}^\circ} \|f_T\|_A$$

on doit avoir

$$\|f\|_A = \sup_{T\in\mathfrak{T}^\circ} \|f_T\|_A = \sup_{T\in\mathfrak{T}^\circ} \|f_T\|_{\complement T} \quad . \quad \|$$

4. 8. - COROLLAIRE. - Si A et B sont infraconnexes, $B\subset A$, $f\in H(A)$ et $T\in\mathfrak{T}^\circ(B)$, on a $(f|B)_T \; \sum_{\substack{T'\in\mathfrak{T}'(A) \\ T'\subset T}} f_{T'}$. En particulier si $T\in\mathfrak{T}^\circ(B)\cap\mathfrak{T}^\circ(A)$ on a $(f|B)_T = f_T$.

En effet $g_T = \sum_{\substack{T'\in\mathfrak{T}^\circ(A) \\ T'\subset T}} f_{T'}$ appartient à $H(\complement T)$. D'autre part, soit $h = \sum_{\substack{T'\in\mathfrak{T}^\circ(A) \\ T'\not\subset T}} f_T$, on a $h\in H(A\cup T)$ et $h = f - g_T$ sur A . Alors a fortiori $h\in H(B\cup T)$ et donc $g_T = (f)_T$.

4. 9. - Remarque : Le théorème 4. 7. est évidemment encore vrai lorsqu'on considère la famille $\mathfrak{T}$ des trous de A au lieu de $\mathfrak{T}^\circ$.

4. 10. - Application : Problème de Mittag-Löffler

Pour chaque trou de l'infraconnexe A, on se donne un élément $f_T \in H(\complement T)$. Existe-t-il un élément analytique f sur A, tel que f_T soit sa partie singulière relative au trou T ? Le théorème précédent nous dit qu'il faut que la famille f_T soit sommable dans $H(A)$, ce qui équivaut à la condition que $\|f_T\|_A$ tende vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies de $\overset{\circ}{\mathfrak{T}}$. On voit que cette condition est suffisante, car $f = \sum_{T \in \overset{\circ}{\mathfrak{T}}} f_T$ répond au problème posé.

4. 11. - Application : Théorème de Runge

Soient A et B deux ensembles infraconnexes, $A \subset B$. Pour que les éléments analytiques sur A puissent être approchés uniformément par des éléments analytiques sur B, il faut et il suffit que A ne possède aucun trou intérieur contenu dans B.

Nécessité :

Supposons que A possède un trou intérieur T contenu dans B. Si $H(B)$ était dense dans $H(A)$, pour tout f de $H(A)$ on pourrait trouver $f_n \in H(B)$ telle que $f_n \to f$ uniformément sur A. Comme $f \in H(A \cup T)$ il résulte alors du lemme 4. 3. que la suite f_n est une suite de Cauchy dans $H(A)$ et converge donc uniformément sur $A \cup T$ vers une limite F. En particulier soit $a \in T$ et prenons $f(x) = 1/(x-a)$. Alors $(x-a)F(x) \in H(A \cup T)$ (on peut supposer $A \cup T$ borné), comme $(x-a)F(x) = 1$ pour $x \in A$, il résulte de la remarque 4. 6. que $(x-a)F(x) = 1$ pour $x \in T$ ce qui fournit une contradiction quand $x = a$.

Suffisance :

Soit $T \in \overset{\circ}{\mathfrak{T}}(A)$; par hypothèse T n'est pas contenu dans B, il existe donc $T' \in \overset{\circ}{\mathfrak{T}}(B)$, $T' \subset T$. Soit $a \in T'$, nous verrons en 5. 1. que tout élément de $H(\complement T)$ est approximable par les fonctions $1/(x-a)^n$, $a \in T$, $n = 1, 2, \ldots$, (développement en série de Laurent, le cas où T est un trou de centre ∞ s'en déduit par une transformation homographique). Ces fonctions appartiennent à $H(B)$. Comme les fonctions de $H(A)$ sont approximables par des combinaisons linéaires de fonctions de $H(\complement T)$, $T \in \mathfrak{T}^\circ(A)$, on en déduit qu'elles sont approximables par les fonctions de $H(B)$. $\|$

5

ELEMENTS ANALYTIQUES DANS UNE COURONNE

5. 1. - THEOREME (Krasner [11]). - Soit Δ la couronne : $\rho < |x-a| < \rho'$ et soit f un élément analytique sur Δ. Alors f se décompose en série de Laurent

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (x-a)^n$$

convergeant dans Δ. De plus, si la couronne fermée Δ' : $r \leq |x-a| \leq r'$ est contenue dans Δ, la série de Laurent de f converge uniformément sur Δ' (et l'on a de plus $\|f\|_{\Delta'} = \max (\sup_{n<0} |c_n| r^n , \sup_{n\geq 0} |c_n| r'^n))$.

5. 2. - Si la série de Laurent $\Sigma\, c_n (x-a)^n$ converge uniformément vers f sur Δ, f est évidemment un élément analytique sur Δ. Si la série ne converge pas uniformément, f peut ne pas être un élément analytique (exemple $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ dans $D(0, 1^-)$). La définition des fonctions analytiques nous permettra de récupérer ce cas.

5. 3. - Si f est un élément analytique sur la couronne ouverte Δ, $\rho < |x-a| < \rho'$ et n'est pas un élément analytique sur la couronne fermée $\rho \leq |x-a| \leq \rho'$ alors sa série de Laurent ne converge pas uniformément sur Δ (exemple $f(x) = \frac{1}{1+x}$ dans $D(0, 1^-)$).

6

SOMME, PRODUIT, DERIVEE, LIMITE D'ELEMENTS ANALYTIQUES

Les résultats de ce paragraphe sont immédiats.

6. 1. - PROPOSITION. - Soit A un sous-ensemble ouvert de K ; la somme de deux éléments analytiques sur A est un élément analytique sur A , la limite uniforme d'une suite d'éléments analytiques sur A est un élément analytique sur A , le produit de deux éléments analytiques bornés sur A est un élément analytique sur A .

6. 2. - LEMME. - Soient A un ouvert de K , f un élément analytique sur A ; alors f est la somme d'un élément analytique borné de A et d'une fraction rationnelle dont les pôles sont adhérents à A . En particulier si A est fermé et borné, f est bornée.

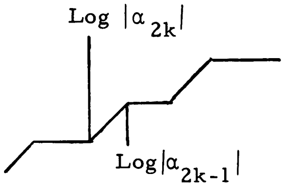
En effet, soit $R(x)$ une fraction rationnelle sans pôles dans A telle que $\sup_{x \in A} |f(x)-R(x)| \leq M$. Soit $P(x)$ la somme des éléments simples correspondant aux pôles de $R(x)$ adhérents à A (si A est non bornée, on considère que le point ∞ est adhérent à A et la partie polynomiale de R est l'élément simple associé à ce pôle). Alors $R(x) - P(x)$ est borné sur A et donc $f(x) - P(x)$ est borné sur A , de plus d'après la proposition 6. 1. c'est un élément analytique sur A . ||

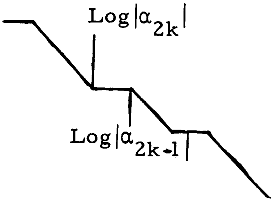
6. 3. - Pour prouver que le produit de deux éléments analytiques sur A est un élément analytique il suffirait, en vertu de la proposition 6. 1. et du lemme, de

montrer que, si f est analytique et si $a \notin A$ est adhérent à A, alors $\frac{f(x)}{x-a}$ est un élément analytique sur A. Ce sera le cas si a est isolé dans $\complement A$. Donnons un exemple prouvant que $\frac{f(x)}{x-a}$ peut ne pas être un élément analytique.

Exemple : Soit a_n une suite de points tels que a_n forme une suite strictement décroissante convergeant vers 0, avec $\prod_k \left|\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}\right| = 0$. (Par exemple $a_{n+1} = a_n/2$). A est l'ensemble des x tels que $x \neq 0$.

Polygone de f





Polygone de f(x)/x

$\forall n\ |x-a_n| \geq |a_n|$. (Remarquons que A est quasi-connexe [6]). Alors la suite

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{x-a_{2k}}{x-a_{2k-1}} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{a_{2k-1}-a_{2k}}{x-a_{2k-1}}\right),$$

converge uniformément sur A vers un élément analytique $f(x)$, dont le polygone de valuation relatif à 0 est indiqué sur la figure.

En effet, si

$\prod_{k=1}^{K} \left|\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}\right| < \varepsilon$, on a pour $x \in A$,

$|x| < |a_{2K}|$, et pour $n > K$

$\left|\prod_{k=1}^{n} \frac{x-a_{2k}}{x-a_{2k-1}}\right| < \varepsilon$; d'autre part si

$\left|\frac{a_{2N+1}}{a_{2K}}\right| < \varepsilon$ on a pour $x \in A$, $|x| \geq |a_{2K}|$ et pour $N \leq n \leq m$

$$\left|\prod_{k=1}^{m} \frac{x-a_{2k}}{x-a_{2k-1}} - \prod_{k=1}^{n} \frac{x-a_{2k}}{x-a_{2k-1}}\right| = \left|\prod_{k=n+1}^{m} \left(1 + \frac{a_{2k-1}-a_{2k}}{x-a_{2k-1}}\right)\right| \left|\prod_{k=1}^{n} \frac{x-a_{2k}}{x-a_{2k-1}}\right|$$

$$\leq \frac{|a_{2n+1}|}{|a_{2K}|} < \varepsilon .$$

Alors $f(x)/x$ a le polygone de valuation indiqué sur la figure et ce polygone ne peut être celui d'un élément analytique sur A .

6. 4. - LEMME. - Soit $f(x)$ un élément analytique dans le disque $D(a, r^+) = D$, alors f est dérivable dans D , sa dérivée f' est un élément analytique dans D et on a $\|f'\|_D \leq \frac{1}{r} \|f\|_D$.

Pour le prouver il suffit de développer f en série de Taylor. $\|$

6. 5. - PROPOSITION. - Si A est à une distance positive de son complémentaire, (A est alors ouvert et fermé), et si f est un élément analytique sur A , f a une dérivée f' qui est un élément analytique sur A .

En effet f possède bien une dérivée puisque localement c'est la somme d'une série de Taylor. Mais si $r < d(A, \complement A)$ pour tout a de A , on a $D(a, r^+) \subset A$; et donc si R_n converge uniformément sur A vers f , d'après le lemme 6. 4. , on a :

$$\|f' - R'_n\|_A \leq \frac{1}{r} \|f - R_n\|_A$$

donc R'_n converge uniformément sur A vers f' ce qui prouve que f' est un élément analytique. $\|$

6. 6. - Il suffirait de supposer que l'intérieur de l'adhérence de A est à une distance positive de son complémentaire. Donnons un exemple où la dérivée d'un élément analytique n'est pas un élément analytique.

Exemple : Soit a_n une suite de points de K tels que $|a_n - a_m| = 1$ pour tous m et n , $m \neq n$. Soit r_n une suite de nombres réels < 1 tendant vers 0 . Soit A l'ensemble des x tels que : $|x - a_n| \geq r_n$. (Alors A est un quasi-connexe [6]). Soit α_n une suite de points de K tels que $\frac{|\alpha_n|}{r_n} \to 0$). Alors la série

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{x-a_n}$ converge uniformément sur A et définit un élément analytique f sur A . La dérivée f' de f est $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\alpha_n}{(x-a_n)^2}$; cette série converge pour tout x de A mais ne converge pas uniformément sur A . Si f' était un élément analytique sur A on aurait $f' = \sum_{T\in\mathfrak{T}^\circ} f'_T$ la série convergeant uniformément sur A d'après le théorème 4. 7. Or on voit sans peine que les trous intérieurs de A sont les disques $D(a_n, r_n^-) = T_n$ et que $f'_{T_n} = \frac{-\alpha_n}{(x-\alpha_n)^2}$. Cette série ne convergeant pas uniformément sur A , f' n'est pas un élément analytique sur A .

6. 7. - PROPOSITION. - <u>Si</u> f <u>est un élément analytique sur</u> A <u>et si</u> $\inf_{x\in A} |f(x)| > 0$ 1/f <u>est un élément analytique sur</u> A .

En effet, soit $\inf_{x\in A} |f(x)| = \alpha$; si $R_n(x)$ converge uniformément vers f sur A et si n est assez grand pour que $\sup_{x\in A} |f(x) - R_n(x)| < \alpha$, R_n ne s'annule pas sur A donc $1/R_n$ n'a pas de pôles dans A , de plus, on a :

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{R_n(x)}\right| = \frac{|f(x) - R_n(x)|}{|f(x) \,.\, R_n(x)|} \leq \frac{1}{\alpha^2} \, |f(x) - R_n(x)| \, ,$$

ce qui prouve que $1/R_n$ converge uniformément vers 1/f sur A . ||

<u>Remarque</u> : Si f ne s'annule pas dans A , il se peut que 1/f ne soit pas un élément analytique sur A . C'est le cas de l'exemple construit en 6. 3. .

7

FONCTIONS ANALYTIQUES

7. 1. - Ainsi qu'il résulte des paragraphes précédents, la notion d'élément analytique est insuffisante puisque la classe des éléments analytiques sur un ensemble A n'est pas stable pour toutes les opérations algébriques et que, d'autre part, la somme d'une série entière n'est pas forcément un élément analytique dans le disque de convergence. M. Krasner a eu l'idée d'introduire les fonctions analytiques définies comme suit.

$\mathcal{a}$ désigne la classe des ensembles analytiques (cf. introduction).

Une famille $\mathfrak{F}$ de sous-ensembles de $\mathcal{K}$ est dite <u>enchaînée</u> si pour tous ensembles A et B de $\mathfrak{F}$ il existe une famille finie $A_1, \ldots, A_n$ d'ensembles de $\mathfrak{F}$ telle que $A = A_1$, $B = A_n$, $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

Une fonction f sur l'ensemble A est dite $\mathcal{a}$<u>-analytique sur</u> A s'il existe une famille enchaînée $(A_i)_{i \in I}$ d'ensembles analytiques telle que $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ et que la restriction de f à chaque A_i soit un élément analytique.

7. 2. - THEOREME. - <u>Une fonction</u> $\mathcal{a}$<u>-analytique sur</u> A <u>vérifie le principe du prolongement analytique.</u>

On en trouvera la démonstration (très facile) dans [8].

7.3. - COROLLAIRE. - Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille enchaînée d'ensembles analytiques, $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ est un ensemble analytique.

7.4. - PROPOSITION. - Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille enchaînée d'ensembles analytiques. Soit f une fonction définie sur $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ telle que la restriction de f à chaque A_i soit une fonction $\mathcal{a}$-analytique sur A_i. Alors f est une fonction $\mathcal{a}$-analytique sur A.

En effet, soit A_i^j les ensembles de $\mathcal{a}$ tels que $A_i = \bigcup_j A_i^j$ et que la restriction de f à chaque A_i^j soit un élément analytique, les (A_i^j) formant une famille enchaînée pour i fixé. Alors la famille (A_i^j) est enchaînée et $A = \bigcup_{i,j} A_i^j$ ce qui prouve que f est un élément $\mathcal{a}$-analytique sur A. ||

Nous allons voir que, du fait que la classe $\mathcal{a}$ n'est pas stable par intersection finie, on a des difficultés à faire la somme de deux fonctions analytiques (rapprocher la proposition 7.5. et le théorème 9.2.).

7.5. - PROPOSITION. - Il existe $A \in \mathcal{a}$ et deux fonctions f_1 et f_2 $\mathcal{a}$-analytiques sur A telles que $f_1 + f_2$ ne soit pas $\mathcal{a}$-analytiques sur A.

Soit $(a_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ $i = 1, 2$, une double suite de points de K telle que $|a_{n,1}| = |a_{n,2}| = |a_{n,1} - a_{n,2}| = r_n$ et que r_n forme une suite strictement croissante convergeant vers r avec $\sum_{n=1}^{\infty} (\text{Log}\, r - \text{Log}\, r_n) = +\infty$.

Soit (ρ_n) la suite de nombres réels tels que

$$\text{Log}\, \rho_n = \text{Log}\, r_n - \sum_{k=1}^{n-1} (\text{Log}\, r_n - \text{Log}\, r_k) .$$

Pour $0 < \lambda < 1$, soit $D_{n,i}^{\lambda}$ le disque $|x - a_{n,i}| < \lambda \rho_n$ et soit $A_i^{\lambda} = \complement [(\bigcup_{n, j\neq i} a_{n,j}) \cup (\bigcup_n D_{n,i}^{\lambda})]$. Alors A_i^{λ} est analytique (cf. annexe, ex. 2). Par contre $A_1^{\lambda} \cap A_2^{\lambda}$ n'est pas analytique (cf. annexe, ex. 3).

Et on a $\bigcup_{0<\lambda<1} A_1^\lambda = \bigcup_{0<\lambda<1} A_2^\lambda = (\bigcup_{\substack{n \\ i=1,2}} a_{n,i}) = A$.

Choisissons une suite (α_n) de points de K telle que

$$\frac{3}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (\mathrm{Log}\, r_n - \mathrm{Log}\, r_k) \leq \mathrm{Log}\, r_n - \mathrm{Log}\, |\alpha_n| \leq \frac{5}{3} \sum_{k=1}^{n-1} (\mathrm{Log}\, r_n - \mathrm{Log}\, r_k) .$$

Soit $f_i = \sum_n \dfrac{\alpha_n}{x - a_{n,i}}$.

Vu le choix de ρ_n et α_n , $\dfrac{|\alpha_n|}{\lambda \rho_n} \to 0$ quand $n \to \infty$ ce qui prouve que cette série converge uniformément sur A_i pour tout λ . f_i définit donc une fonction analytique sur A .

Montrons alors que $f = f_1 + f_2$ n'est pas $\mathcal{a}$-analytique sur A . Si f est $\mathcal{a}$-analytique sur A , il existe $B \in \mathcal{a}$, $B \subset A$ avec $B \cap C(0, r) \neq \emptyset$ et $B \cap D(0, r^-) \neq \emptyset$, tel que f soit un élément analytique sur B . B est infraconnexe. On a donc d'après le théorème 4. 5. : $f = \sum_{T \in \mathfrak{T}^\circ} f_T$ où $\mathfrak{T}^\circ$ est la famille des trous intérieurs de B , la série convergeant uniformément sur B . Si $0 \notin B$ soit T_o le trou intérieur de centre 0 , et pour $a_{n,i} \notin T_o$ soit $T_{n,i} = D(a_{n,i}, \rho_{n,i})$ le trou de centre $a_{n,i}$. T_o ne contient qu'un nombre fini de points $a_{n,i}$. On voit sans peine que

$$f_{T_o} = \sum_{a_{n,j} \in T_o} \frac{\alpha_n}{x - a_{n,j}} \qquad f_{T_{n,i}} = \frac{\alpha_n}{x - a_{n,i}}$$

et que pour $T \in \mathfrak{T}^\circ$; $T \neq T_o$, $T \neq T_{n,i}$ $f_T = 0$.

Il en résulte que la série $\sum_{a_{n,i} \notin T_o} \dfrac{\alpha_n}{x - a_{n,i}}$ doit converger uniformément sur B et pour cela il faut que $\dfrac{|\alpha_n|}{\rho_{n,i}} \to 0$ quand $n \to \infty$. On aura donc pour n grand $\mathrm{Log}\, \rho_{n,i} \geq \mathrm{Log}\, |\alpha_n| \geq \mathrm{Log}\, r_n - \frac{5}{3} \sum_{k=1}^{n-1} (\mathrm{Log}\, r_n - \mathrm{Log}\, r_k)$ ce qui montre que B n'est pas analytique (cf. annexe, ex. 3). Il y a contradiction, donc f n'est pas analytique. ||

7.6. - On peut même construire deux fonctions $\mathcal{A}$-analytiques dont la somme est nulle au voisinage d'un point mais n'est pas identiquement nulle. (La démonstration longue, technique et peu intéressante, ne sera pas donnée ici).

7.7. - Il résulte de la proposition 7.5. que les fonctions $\mathcal{A}$-analytiques ne donnent pas satisfaction. Il faut donc restreindre cette classe de fonctions.

Soit $\mathcal{B}$ une famille d'ensembles analytiques. On dira que la fonction f définie sur l'ensemble B est $\mathcal{B}$-analytique s'il existe une famille enchaînée $(B_i)_{i\in I}$ d'ensembles analytiques appartenant à $\mathcal{B}$ telle que $B = \bigcup_{i\in I} B_i$ et que la restriction de f à chaque B_i soit un élément analytique sur B_i.

Il résulte du théorème 7.2. que les fonctions $\mathcal{B}$-analytiques vérifient le principe du prolongement analytique (puisqu'elles sont $\mathcal{A}$-analytiques). La proposition 7.4. se généralise facilement :

7.8. - PROPOSITION. - *Soit* f *une fonction définie sur* $B = \bigcup B_i$. *Si la restriction de* f *à chaque* B_i *est une fonction* $\mathcal{B}$*-analytique sur* B_i, f *est une fonction* $\mathcal{B}$*-analytique sur* B.

Il s'agit de trouver les hypothèses raisonnables à faire sur la famille $\mathcal{B}$ pour que les fonctions $\mathcal{B}$-analytiques vérifient les propriétés algébriques et topologiques indiquées dans l'introduction.

8

FONCTIONS ANALYTIQUES SUR LES FAMILLES ENCHAINEES FINIES PROLONGEMENT ANALYTIQUE UNIFORME

8. 1. - Nous dirons que la classe $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ est <u>régulière</u> si

i) Les couronnes : $r < |x-a| < r'$ $(0 \leq r \leq r' \leq +\infty,\ a \in K)$ appartiennent à $\mathcal{B}$.

ii) Si A et B appartiennent à $\mathcal{B}$, $A \cap B$ appartient à $\mathcal{A}$

iii) Si A et B appartiennent à $\mathcal{B}$, $A \cap B \neq \emptyset$ alors $A \cup B$ appartient à $\mathcal{B}$.

<u>Commentaires</u> :

Nous voulons que les fonctions $\mathcal{B}$-analytiques contiennent les sommes convergentes de séries de Laurent d'où la condition i . D'autre part, c'est parce que l'intersection de deux ensembles analytiques pouvait ne pas être analytique que nous avons pu construire le contre exemple de la proposition 7. 5. , d'où la condition ii . Enfin, rappelons que si $A \in \mathcal{A}$, $A \cap B \neq \emptyset$ alors $A \cup B \in \mathcal{A}$.

8. 2. - Si A et B appartiennent à $\mathcal{B}$; A, B et $A \cap B$ sont infraconnexes puisque ce sont des ensembles analytiques. D'autre part, les trous intérieurs de A et B sont contenus dans les trous intérieurs de $A \cap B$ (puisque $\complement A \cup \complement B = \complement(A \cap B)$). On peut en fait préciser :

LEMME. - Si $\mathcal{B}$ est régulière et si A et B appartiennent à $\mathcal{B}$, $A \cap B \neq \emptyset$, on a $\mathfrak{T}^\circ_{A \cap B} \subset \mathfrak{T}^\circ_A \cup \mathfrak{T}^\circ_B$. Autrement dit, un trou intérieur de $A \cap B$ est soit un trou intérieur de A soit un trou intérieur de B.

Soit T un trou intérieur de $A \cap B$. Si T est réduit à un point, alors il est évident que c'est soit un trou intérieur de A soit un trou intérieur de B. Soit alors $T = D(a, r^-)$. Soient T_A et T_B les trous intérieurs de A et B de centre a (si $a \in A$, resp. B, $T_A = \emptyset$, resp. $T_B = \emptyset$). Soit $T' = D(a, r'^-)$ le plus grand des deux disques T_A et T_B ; $T' = T_A \cup T_B$. Comme $T' \subset T$ on a $r' \leq r$. Il faut prouver que $r' = r$. Or si $r' < r$, soit ρ avec $r' < \rho < r$. Posons $\Delta = D(a, \rho^-)$. Alors $A \cap \Delta \neq \emptyset$, $B \cap \Delta \neq \emptyset$ (car $r' < \rho$) donc $A \cup \Delta$ et $B \cup \Delta$ appartiennent à $\mathcal{B}$. Mais $(A \cup \Delta) \cap (B \cup \Delta) = (A \cap B) \cup \Delta$ n'est pas infraconnexe (car $\rho < r$) et donc n'appartient pas à $\mathcal{A}$. Il y a donc une contradiction avec les hypothèses. ||

8.3. - THEOREME. - Si la classe $\mathcal{B}$ est régulière et si f est une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur la famille enchaînée finie $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$, alors f est, en fait, un élément analytique sur l'ensemble $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Il suffit de prouver le théorème pour $n = 2$, le résultat général s'obtient alors par récurrence.

Soient donc $A_1 \in \mathcal{B}$, $A_2 \in \mathcal{B}$, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, f une fonction analytique sur $A_1 \cup A_2$ dont la restriction à A_1 (resp. A_2) est un élément analytique.

Il résulte du lemme 8.2. que l'on a :

$$\mathfrak{T}^\circ(A_1 \cup A_2) \cup \mathfrak{T}^\circ(A_1 \cap A_2) = \mathfrak{T}^\circ(A_1) \cup \mathfrak{T}^\circ(A_2) ,$$

$$\mathfrak{T}^\circ(A_1 \cup A_2) \cap \mathfrak{T}^\circ(A_1 \cap A_2) = \mathfrak{T}^\circ(A_1) \cap \mathfrak{T}^\circ(A_2) .$$

Nous noterons f_1, f_2, f_{12}, respectivement les restrictions de f sur A_1, A_2, $A_1 \cap A_2$.

Pour $T \in \mathfrak{T}^\circ(A_1 \cup A_2) \cap \mathfrak{T}^\circ(A_i)$, on pose $f_T = f_{iT}$. Cette définition est bien cohérente, car si $T \in \mathfrak{T}^\circ(A_1 \cup A_2) \cap \mathfrak{T}^\circ(A_1) \cap \mathfrak{T}^\circ(A_2)$, alors $T \in \mathfrak{T}^\circ(A_1 \cap A_2)$, et donc $f_{1T} = f_{12T} = f_{2T}$ (corollaire 4. 8.).

Si $T \in \mathfrak{T}^\circ(A_1)$ et $T \notin \mathfrak{T}^\circ(A_1 \cup A_2)$, alors $T \in \mathfrak{T}^\circ(A_1 \cap A_2)$ et $T \cap A_2 \neq \emptyset$. Posons

$$g_T = \sum_{\substack{T' \in \mathfrak{T}^\circ(A_1 \cup A_2) \\ T' \subset T}} f_{T'} = \sum_{\substack{T' \in \mathfrak{T}^\circ(A_2) \\ T' \subset T}} f_{2T'}$$

Cette série converge uniformément dans $\complement T$, donc $g_T \in H(\complement T)$. De plus, sur A_2,

$$f_2 - g_T = \sum_{\substack{T' \not\subset T \\ T' \in \mathfrak{T}^\circ(A_2)}} f_{2T'} ,$$

cette série convergeant uniformément dans $A_2 \cup T$, ce qui prouve que $g_T = f_{12T}$, et donc $g_T = f_{1T}$.

On voit d'autre part que

$$\bigcup_{T \in \mathfrak{T}^\circ(A_1) \cap \complement \mathfrak{T}^\circ(A_1 \cup A_2)} \left(\bigcup_{\substack{T' \subset T \\ T' \in \mathfrak{T}^\circ(A_1 \cup A_2)}} T' \right) = \bigcup_{T' \in \mathfrak{T}^\circ(A_1 \cup A_2) \cap \complement \mathfrak{T}^\circ(A_1)} T' .$$

On a donc sur A_1

$$f_1 = \sum_{T \in \mathfrak{T}^\circ(A_1)} f_{1T} = \sum_{T \in \mathfrak{T}^\circ(A_1) \cap \mathfrak{T}^\circ(A_1 \cup A_2)} f_{1T} + \sum_{T \in \mathfrak{T}^\circ(A_1) \cap \complement \mathfrak{T}^\circ(A_1 \cup A_2)} f_{1T}$$

$$= \sum_{T \in \mathfrak{T}^\circ(A_1) \cap \mathfrak{T}^\circ(A_1 \cup A_2)} f_T + \sum_{T' \in \mathfrak{T}^\circ(A_1 \cup A_2) \cap \complement \mathfrak{T}^\circ(A_1)} f_{T'} = \sum_{T \in \mathfrak{T}^\circ(A_1 \cup A_2)} f_T$$

cette série convergeant uniformément sur A_1. On voit de même que cette série converge uniformément sur A_2 vers f_2, donc converge uniformément sur $A_1 \cup A_2$ vers f, ce qui prouve que f est un élément analytique sur $A_1 \cup A_2$. $\|$

8.4. - COROLLAIRE. - Soit f une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur A. Il existe une famille filtrante (A_i) avec $\bigcup_i A_i = A$, telle que la restriction de f à chaque A_i soit un élément analytique.

En effet, supposons que f soit définie par la famille enchaînée $(B_j)_{j\in J}$. Pour tout sous-ensemble fini I de J, tel que la famille $(B_j)_{j\in J}$ soit enchaînée, f est un élément analytique sur $A_I = \bigcup_{j\in J} B_j$. Soit $\mathfrak{I}$ la famille de ces sous-ensembles. Il est clair que $\bigcup_{I\in\mathfrak{I}} A_I = A$. Montrons que la famille $(A_I)_{I\in\mathfrak{I}}$ est filtrante. Soient I et $I'\in\mathfrak{I}$, et soient $i\in I$, $j\in I'$: il existe $K\in\mathfrak{I}$ tel que $i\in K$ et $j\in K$. Alors $I'' = I\cup I'\cup K$ appartient à $\mathfrak{I}$ et $(A_I\cup A_{I'})\subset A_{I''}$. $\|$

Remarque : Il est clair qu'une famille filtrante est enchaînée.

Dorénavant, dans le cas des familles régulières, nous supposerons que les fonctions $\mathcal{B}$-analytiques ont été définies à partir de familles filtrantes.

8.5. - THEOREME : (principe du prolongement analytique uniforme). - Supposons que $\mathcal{B}$ soit régulière. Si (B_j), $1\leq j\leq n$, est une famille d'ensembles de $\mathcal{B}$ telle que $B_j\cap B_{j+1}\neq\emptyset$, $1\leq j\leq n-1$, $B_n\cap B_1\neq\emptyset$ et si f_j est un élément analytique sur B_j tel que $f_j = f_{j+1}$ sur $B_j\cap B_{j+1}$, $1\leq j\leq n-1$, alors $f_1 = f_n$ sur $B_n\cap B_1$.

Le théorème est trivial pour $n = 2$. Supposons alors la propriété démontrée pour $n-1$. Posons $A_i = B_i\cup B_{i+1}$, $1\leq i\leq n-1$. En vertu du théorème 8.3. il existe g_i, élément analytique sur A_i, tel que $g_i = f_i$ sur B_i, $g_i = f_{i+1}$ sur B_{i+1}. g_i et g_{i+1}, éléments analytiques sur $A_i\cap A_{i+1}$ coïncident sur $B_{i+1}\subset A_i\cap A_{i+1}$; comme $A_i\cap A_{i+1}$ est analytique (car $\mathcal{B}$ régulière) et B_{i+1} est un ouvert non vide, g_i et g_{i+1} coïncident sur $A_i\cap A_{i+1}$ tout entier, donc d'après l'hypothèse de récurrence $g_1 = g_{n-1}$ sur $A_1\cap A_{n-1}$, mais $B_1\cap B_n\subset A_1\cap A_{n-1}$ et dans $B_1\cap B_n$ $g_1 = f_1$ et $g_{n-1} = f_n$. $\|$

8.6. - Cette propriété est liée au fait que l'intersection de deux ensembles de $\mathcal{B}$ est analytique. En effet on a la :

PROPOSITION. - Soient A et B deux ensembles analytiques tels que $\mathfrak{T}^\circ(A\cap B)\subset \mathfrak{T}^\circ(A)\cup \mathfrak{T}^\circ(B)$ et tels que $A\cap B$ ne soit pas analytique. Alors il existe un disque $D\subset A\cap B$ et deux éléments analytiques f_A et f_B sur A et B tels que $f_A = f_B$ sur D l'égalité n'ayant pourtant pas lieu partout dans $A\cap B$.

En effet, soit f un élément analytique sur $A\cap B$, nul sur un disque D de $A\cap B$ et non identiquement nul dans $A\cap B$ (f et D existent puisque $A\cap B$ non analytique). On a alors $f = \sum_{T\in\mathfrak{T}^\circ(A\cap B)} f_T$, la série convergeant uniformément sur $A\cap B$. Comme $\sup_{x\in A\cap B} |f_T(x)| = \sup_{x\notin T} |f_T(x)|$ on voit que si $T\in\mathfrak{T}^\circ(A)$ (resp. $\mathfrak{T}^\circ(B)$), $\sup_{x\in A} |f_T(x)| = \sup_{x\in A\cap B} |f_T(x)|$ (resp. $\sup_{x\in B} |f_T(x)| = \sup_{x\in A\cap B} |f_T(x)|$).

Donc

$$f_A = \sum_{T\in\mathfrak{T}^\circ(A)\cap\mathfrak{T}^\circ(A\cap B)} f_T \quad \text{et} \quad f_B = -\sum_{\substack{T\in\mathfrak{T}^\circ(A\cap B)\cap\mathfrak{T}^\circ(B)\\ T\notin\mathfrak{T}^\circ(A)}} f_T$$

convergent uniformément sur A et B respectivement donc définissent des éléments analytiques sur A et B et l'on a

$$f_A - f_B = f \quad \text{sur} \quad A\cap B . \quad \|$$

8.7. - COROLLAIRE. - Les fonctions $\mathfrak{a}$-analytiques ne vérifient pas le principe du prolongement analytique uniforme.

Avec les notations de la proposition 7.5. nous voyons en effet que les ensembles $A = \complement \bigcup_n D(a_{n,1}, \rho_n^-)$ et $B = \complement \bigcup_n D(a_{n,2}, \rho_n^-)$ satisfont aux hypothèses de la proposition 8.6.. Si l'on prend alors $B_1 = A$, $B_2 = D$, $B_3 = B$, $f_1 = f_A$, $f_2 = f_A = f_B$, $f_3 = f_B$ (notations du théorème 8.5.) on n'a pas $f_3 = f_1$ sur $B_1\cap B_3$. $\|$

9

SOMME DE FONCTIONS $\mathcal{B}$ - ANALYTIQUE
CAS D'UNE FAMILLE $\mathcal{B}$ STABLE PAR INTERSECTION

9. 1. - Ainsi que nous l'avons indiqué il est souhaitable que la somme de deux fonctions $\mathcal{B}$-analytiques soit $\mathcal{B}$- analytique. Indiquons une propriété liée à celle-ci.

PROPOSITION. - Si pour toute fonction f $\mathcal{B}$-analytique, la restriction de f à un ensemble B de $\mathcal{B}$ contenu dans le support de f est une fonction $\mathcal{B}$-analytique, alors la somme de deux fonctions $\mathcal{B}$-analytiques du même support est une fonction $\mathcal{B}$-analytique.

Soient f et g deux fonctions $\mathcal{B}$-analytiques de support B.

Prenons d'abord le cas où f est un élément analytique sur B. Il existe une famille enchaînée B_i d'ensembles de $\mathcal{B}$ telle que $B = \bigcup_{i \in I} B_i$ et telle que g soit un élément analytique sur B_i. Mais alors $f+g$ est un élément analytique sur B_i donc $f+g$ est une fonction analytique sur B.

Si f est alors une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur B, en vertu des hypothèses c'est aussi une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur les B_i, donc d'après ce que l'on vient de voir $f+g$ est une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur B_i, en vertu de la proposition 7. 8 $f+g$ est donc une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur B. $\|$

9. 2. - Si $\mathcal{B}$ est une sous-famille de $\mathcal{A}$ contenant les couronnes, stable par intersection finie et par réunion de familles finies enchaînées, $\mathcal{B}$ sera régulière.

Les résultats du paragraphe précédent sont donc valables, de plus on a :

THEOREME. - Si la classe $\mathcal{B}$ est stable par intersection finie, la somme de deux fonctions $\mathcal{B}$-analytiques est $\mathcal{B}$-analytique.

On peut supposer que les fonctions f et g sont définies par des familles filtrantes (A_i) et (B_j), avec $A_i \in \mathcal{B}$, $B_j \in \mathcal{B}$ et $A = \bigcup_i A_i$, $A = \bigcup_j B_j$. Mais alors la famille formée des ensembles $A_i \cap B_j$ non vides est une famille filtrante engendrant A et l'on a $A_i \cap B_j \in \mathcal{B}$. Sur un tel $A_i \cap B_j$ il est clair que $f+g$ est un élément analytique. $f+g$ est donc une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur A. ||

Remarques :

1) La famille des quasi-connexes [6] possède ces propriétés.

2) Le théorème 9.2. peut être encore vrai même si la famille n'est pas stable par intersection finie (cf. §. 11).

10

DEVELOPPEMENT EN SERIE DE LAURENT DES FONCTIONS ANALYTIQUES

10. 1. - Une fonction analytique dans une couronne est-elle somme d'une série de Laurent dans cette couronne ? Paradoxalement ce n'est pas le cas si le corps K n'est pas maximalement complet.

K est dit <u>maximalement complet</u> [7] si toute famille emboîtée de disques non vides a une intersection non vide.

Notons que $\hat{\Omega}_p$, le complété topologique de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, n'est pas maximalement complet.

Cette propriété m'a été signalée par E. Motzkin. Comme je ne connais aucune référence pour la démonstration, je donne ici le schéma de celle-ci.

PROPOSITION. - <u>Si</u> K <u>est séparable et a une valuation dense dans</u> $\mathbb{R}^+$, K <u>n'est pas maximalement complet.</u>

Notons d'abord que pour tout couple ρ et ρ', $0<\rho<\rho'$, il existe dans tout disque de rayon ρ' une infinité dénombrable de disques disjoints de rayons ρ (car la valuation est dense).

Soit alors r_k une suite strictement décroissante de réels convergeant vers $r>0$. Soit D_{n_1}, $n_1 \in \mathbb{N}$, une famille de disques disjoints de rayons r_1. Construisons par récurrence sur k la famille de disques $D_{n_1 n_2 \dots n_k}$ $n_i \in \mathbb{N}$: les $D_{n_1 n_2 \dots n_k}$ sont, pour $n_1 \dots n_{k-1}$ fixés, des disques disjoints de rayons

r_k contenus dans le disque $D_{n_1 n_2 \dots n_{k-1}}$. Une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers définit ainsi une famille de disques emboîtés, soit $D_{n_1 \dots n_k \dots}$ l'intersection des disques de cette famille. Si $D_{n_1 \dots n_k}$ n'est pas vide c'est un disque de rayon r . Si K est maximalement complet, aucun de ces disques n'est vide et on obtient une famille non dénombrable de disques disjoints de rayon $r > 0$. Or K est séparable et on ne peut avoir qu'une infinité dénombrable de tels disques. K n'est donc pas maximalement complet.

10. 2. - PROPOSITION. - Si K n'est pas maximalement complet, il existe une fonction analytique dans K tout entier, tendant vers 0 à l'infini, non identiquement nulle et bornée.

Puisque K n'est pas maximalement complet, il existe une suite de disques emboîtés Δ_m tels que $\bigcap_m \Delta_m = \emptyset$. Soit r_m le rayon de Δ_m , r_m forme une suite décroissante convergeant vers la limite $\rho > 0$.

Soit u_n une suite de nombres > 1 tendant vers $+\infty$ quand $n \to \infty$.

Soit v_n une suite de nombres tels que $0 < v_n \leq 1$, $v_o = 1$, et $\sum_{n \geq 1} u_n v_n < 1/2$ (1) .

Posons $w_n = \prod_{k=0}^{n-2} v_k \qquad n \geq 2$.

On a $0 < w_n \leq v_n \leq u_n \cdot v_n$, la série $\sum_{n=2}^{\infty} w_n$ est donc convergente, soit w sa somme.

Choisissons ρ_1 tel que $\rho < \rho_1 < \rho\, e^{w/2}$ et posons, pour $n \geq 2$

$$\rho_n = \rho_1 \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{w} \sum_{k=2}^{n} w_k}$$

ρ_n est une suite strictement décroissante convergeant vers ρ .

Pour chaque n soit m l'entier tel que $r_{m+1} < \rho_n \leq r_m$, et soit D_n l'unique disque ouvert de diamètre ρ_n contenant Δ_{m+1} . On voit que les disques D_n sont emboîtés et que de plus $\bigcap_n D_n = \bigcap_m \Delta_m = \emptyset$.

Soit $a_n \in D_{n+1}$. $D_n = D(a_n , \rho_n^-)$.

Choisissons $\alpha \in K$ tel que $\rho_1 / e < |\alpha| < \rho_2/\sqrt{e} = \frac{\rho_1}{\sqrt{e}} (\frac{\rho}{\rho_1})^{\frac{1}{w}}$

Nous allons construire par récurrence une suite de fractions rationnelles R_n telles que R_n ait un seul pôle en a_n et que $R_n(x) \to 0$ quand $x \to \infty$.

On prend $R_1(x) = \frac{\alpha}{x-a_1}$.

Supposons alors construite R_n . On pose $M_n = \sup_{x \in \complement D_{n+1}} | R_n(x) | = |R_n|(\rho_n)$.

Soit $R_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(x-a_{n+1})^k}$ le développement en série de Laurent de la de la fraction rationnelle R_n dans D_{n+1} .

On pose $s_n = \frac{\text{Log } M_n + u_n}{\text{Log } \rho_n - \text{Log } \rho_{n+1}}$ et $R_{n+1} = \sum_{k \leq s_n} \frac{\alpha_k}{(x-a_{n+1})^k}$.

On a $M_n = \sup_k \frac{|\alpha_k|}{\rho_{n+1}^k}$; il en résulte que

$$\| R_n - R_{n+1} \|_{\complement D_n} = \sup_{k > s_n} \frac{|\alpha_k|}{\rho_n^k} < M_n \left(\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}\right)^{s_n} = e^{-u_n} . \qquad (3)$$

D'autre part

$$M_{n+1} = \sup_{k \leq s_n} \frac{|\alpha_k|}{\rho_{n+2}^k} \leq M_n \left(\frac{\rho_{n+1}}{\rho_{n+2}}\right)^{s_n} = M_n (M_n e^{u_n})^{v_n} . \qquad (4)$$

Montrons par récurrence que $M_m < 1$ pour tout m .

Pour $m = 1$, on a : $M_1 = \frac{|\alpha|}{\rho_2} < 1$ d'après (2) .

Si $M_m < 1$ pour $m \leq n$, (4) donne $M_{m+1} \leq M_m e^{u_m v_m}$ pour $m \leq n$; et l'on a donc

$$M_{n+1} \leq M_1 e^{\sum_{m=1}^{n} u_m v_m} < e^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{d'après (1) et (2)} .$$

Finalement, comme $u_n \to +\infty$ il résulte de (3) que la suite R_n est une suite de Cauchy pour la norme uniforme dans $\complement D_m$, donc converge uniformément dans $\complement D_m$. Sa limite f est donc une fonction analytique dans $\bigcup_m \complement D_m = K$, elle tend vers 0 à l'infini puisque c'est le cas pour tous les R_n , elle est majorée par 1 puisque les R_n sont majorées par 1 dans $\complement D_m$ pour $m \leq n$, enfin elle n'est pas identiquement nulle car pour $|x-a_1| = \rho_1$ on a $|R_1(x)| = \frac{|\alpha|}{\rho_1} > 1/e$, donc pour tout n $|R_n(x)| > 1/e$ puisque $e^{-u_n} < e$, et donc $|f(x)| > 1/e$. ||

10. 3. - <u>Commentaires</u> :

1) Cette fonction f ne peut pas être somme d'une série de Taylor dans tout disque $D(0, r^+)$ car on aurait alors pour r appartenant au groupe des valeurs, $\sup_{|x| \leq r} |f(x)| = \sup_{|x| = r} |f(x)|$ et comme $\sup_{|x|=r} |f(x)| \to 0$ quand $r \to \infty$, on aurait $f(x) = 0 \quad \forall x$.

2) La fonction construite est une fonction $\mathcal{B}$ -analytique, où $\mathcal{B}$ est la famille des couronnes ce qui est le minimum que l'on puisse demander à la famille $\mathcal{B}$. Il n'y a donc pas moyen d'obvier à cette difficulté par un choix convenable de la famille $\mathcal{B}$.

3) Cette fonction ne vérifie pas le principe du maximum.

10. 4. - THEOREME. - <u>Si</u> K <u>est maximalement complet, et si</u> $\mathcal{B}$ <u>est une famille régulière une fonction</u> $\mathcal{B}$<u>-analytique sur une couronne définie par un système cohérent dénombrable d'éléments analytiques, est développable en série de Laurent dans cette couronne.</u>

Nous utiliserons le :

10. 5. - LEMME. - <u>Soit</u> I <u>un ensemble d'indices, filtrant à droite, et soit</u> $(E_\alpha, \varphi_{\alpha\beta})$ <u>un système projectif d'ensembles c'est-à-dire que pour</u> $\alpha \leq \beta$, $\varphi_{\alpha\beta}$ <u>est une application</u> $E_\beta \to E_\alpha$ <u>et que pour</u> $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ <u>on a</u> $\varphi_{\alpha\gamma} = \varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\gamma}$. <u>On suppose de plus que les applications</u> $\varphi_{\alpha\beta}$ <u>sont surjectives. Notons</u>

10. 6. - Démonstration du théorème 10. 4.

Notons Δ la couronne $r < |x-a| < R$. Soit f une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur Δ et soit (B_i) la famille d'ensembles de $\mathcal{B}$ telle que $\Delta = \bigcup B_i$ et que f soit un élément analytique sur B_i . Ainsi qu'on l'a vu (corollaire 8. 4.) on peut supposer la famille filtrante à droite. Nous noterons $\mathfrak{T}^1(B_i)$ la famille des trous T de B_i tels que la partie singulière f_T de l'élément analytique f sur B_i relative au trou T ne soit pas nulle.

Soient B_i et B_j deux ensembles de notre famille avec $B_i \subset B_j$. Si T appartient à $\mathfrak{T}^1(B_j)$, on a $T \subset \complement B_j \subset \complement B_i$ et donc T est contenu dans un trou T' de B_i . Montrons que $T' \in \mathfrak{T}^1(B_i)$.

Notons $g_{T'} = \sum\limits_{\substack{T \in \mathfrak{T}^\circ(B_j) \\ T \subset T'}} (f|B_j)_T$; on a d'après le corollaire 4. 8.

$(f|B_i)_{T'} = g_{T'}$. Or $g_{T'}$ est un élément analytique sur $B_j \cup T'$ qui est un ensemble analytique (réunion enchaînée de deux ensembles analytiques), donc si $(f|B_i)_{T'} = 0$ on a $g_{T'} = 0$ sur $\complement T'$ et par suite $g_{T'} = 0$ sur $B_j \cup \complement T'$. Or les trous intérieurs de $B_j \cup \complement T'$ sont précisément les $T \in \mathfrak{T}^\circ(B_j)$, $T \subset T'$; pour tous ces trous on a donc $(g_{T'})_T = (f|B_j)_T = 0$ ce qui contredit l'hypothèse qu'il existe $T \in \mathfrak{T}^1(B_j)$ contenu dans T' .

On a donc ainsi défini une application de $\mathfrak{T}^1(B_j)$ dans $\mathfrak{T}^1(B_i)$.

Montrons que cette application est surjective. Soit $T' \in \mathfrak{T}^1(B_i)$. Appelons $\mathfrak{T}$ l'ensemble (éventuellement vide) des trous de B_j contenus dans T' . Il faut prouver que $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{T}^1(B_j) \neq \emptyset$. Or $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{T}^1(B_j) = \emptyset$ signifie que pour $T \in \mathfrak{T}$, f se prolonge analytiquement sur $T \cup B_j$ et donc f se prolonge analytiquement sur $B_j \cup (\bigcup\limits_{T \in \mathfrak{T}} T)$ qui contient $B_i \cup T'$, ce qui singifie que $f_{T'} = 0$ et ce dernier résultat contredit l'hypothèse $T' \in \mathfrak{T}^1(B_i)$.

La famille (B_i) , ordonnée par la relation $\subset$, est filtrante.

A chaque B_i on associe l'ensemble $\mathfrak{T}^1(B_i)$ et pour $B_i \subset B_j$ on a défini une application $\mathfrak{T}^1(B_j) \to \mathfrak{T}^1(B_i)$ surjective.

Considérons une famille cohérente de trous $T_i \in \mathfrak{T}^1(B_i)$, c'est-à-dire

$E = \varprojlim (E, \alpha)$ la limite projective du système (E_α). Alors si I possède un sous-ensemble dénombrable cofinal à I, pour tout α l'application canonique $\varphi_\alpha : E \to E_\alpha$ est surjective (et donc E n'est pas vide). Autrement dit quel que soit α et quel que soit $x \in E_\alpha$, il existe une famille (x_β) de points de E_β tels que pour $\beta \leq \gamma$ on ait $\varphi_{\beta\gamma}(x_\gamma) = x_\beta$ et de plus $x_\alpha = x$. On dira que la famille (x_β) est une famille cohérente.

Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la famille cofinale à I ; c'est-à-dire que quel que soit $\beta \in I$, il existe n tel que $\beta \leq \alpha_n$. Puisque I est filtrant à droite on peut construire par récurrence une suite β_n telle que $\beta_1 = \alpha$ et telle que pour $n > 1$ et $k \leq n$ on ait $\beta_k \geq \beta_n$ et $\alpha_k \leq \beta_n$. La suite (β_n) est alors cofinale à I et forme une chaîne.

Prenons alors $x_\alpha = x_{\beta_1} = x$ et choisissons par récurrence le point $x_{\beta_n} \in E_{\beta_n}$ tel que $\varphi_{\beta_{n-1}}(x_{\beta_n}) = x_{\beta_{n-1}}$, ce qui est possible puisque l'application $\varphi_{\beta_{n-1}\beta_n}$ est surjective.

Pour $\beta \leq \beta_n$ on prend alors $x_\beta = \varphi_{\beta\beta_n}(x_{\beta_n})$. Cette définition est bien consistante puisque si $\beta \leq \beta_n \leq \beta_m$ on a

$$\varphi_{\beta\beta_n}(x_{\beta_n}) = \varphi_{\beta\beta_n}[\varphi_{\beta_n\beta_m}(x_{\beta_m})] = \varphi_{\beta\beta_m}(x_{\beta_m}) .$$

Enfin si $\beta \leq \gamma \leq \beta_n$, on a :

$$\varphi_{\beta\gamma}(x_\gamma) = \varphi_{\beta\gamma}[\varphi_{\gamma\beta_n}(x_{\beta_n})] = \varphi_{\beta\beta_n}(x_{\beta_n}) = x_\beta .$$

Comme d'autre part $x_\alpha = x$, le lemme est démontré. $\|$

telle que pour $B_i \subset B_j$ on ait $T_j \subset T_i$. Alors pour deux ensembles B_i et B_j quelconques, il existe B_k avec $B_i \subset B_k$ et $B_j \subset B_k$ et donc $T_k \subset T_i$ et $T_k \subset T_j$, donc $T_i \cap T_j \neq \emptyset$. Les T_i forment donc une famille emboîtée de disques non vides, puisque K est maximalement complet, leur intersection $T = \bigcap_i T_i$ est un disque non vide. Or comme $\bigcup_i B_i = \Delta$, on a $\bigcap_i T_i \subset \complement \Delta$. Soit x appartenant à T , et T' le trou de Δ contenant x . Pour tout i , on a $T' \subset \complement \Delta \subset \complement B_i$, et puisque $x \in T'$ et $x \in T_i$, on a $T' \subset T_i$, donc $T' \subset T$ mais comme T est un disque contenu dans Δ , $T = T'$. Ceci signifie que $\varprojlim \mathfrak{T}^1(B_i)$ peut s'identifier avec une sous-famille de l'ensemble des trous de Δ . Or Δ n'a que deux trous : le trou $|x-a| < r$ et le trou $|x-a| > R$.

Comme la famille (B_i) est dénombrable on peut appliquer le lemme 10. 5. Il en résulte que quel que soit i , il n'y a que deux trous au plus de B_i relativement auxquels f a une partie singulière non nulle, à savoir les trous de B_i contenant les trous de Δ .

Soient alors x_1 et x_2 deux points arbitraires de Δ avec $r_1 = |x_1 - a| < |x_2 - a| = r_2$. Il existe un ensemble B_i contenant x_1 et x_2 . Comme les trous de B_i contenant les trous de Δ sont contenus dans les disques $|x-a| < r_1$ et $|x-a| > r_2$, en vertu de ce que l'on vient de voir, l'élément analytique f sur B_i se prolonge sur toute la couronne $r_1 \leq |x-a| \leq r_2$ en un élément analytique qui coincide avec la fonction f . En vertu du théorème 5. 1. f se décompose donc dans cette couronne en série de Laurent absolument convergente.

On a donc prouvé que pour tout couple de points x_1 et x_2 de Δ , avec $|x_1 - a| < |x_2 - a|$, f est la somme d'une série de Laurent dans la couronne : $|x_1 - a| \leq |x-a| \leq |x_2 - a|$; en vertu de l'unicité du développement en série de Laurent dans une couronne il résulte que ce développement ne dépend pas du couple de points choisis, ce qui prouve que f est développable en série de Laurent dans la couronne Δ . ||

10. 7. - COROLLAIRE. - Si K est maximalement complet, si $\mathcal{B}$ est une famille régulière et si f est une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur K, définie par une famille cohérente dénombrable d'éléments analytiques, et si de plus f tend vers 0 à l'infini, f est identiquement nulle.

Pour la démonstration, considérez le commentaire 10. 3. 1. .

10. 8. - Remarque : Si la famille d'indices I ne possède pas de partie cofinale dénombrable, les propriétés démontrées au lemme 10. 5. sont en défaut. On trouvera dans Bourbaki, livre I, chapitre 3, §. 1, exercice 32, un exemple où la limite projective est vide.

Si l'on considère une famille B_i ne possédant pas de partie cofinale dénombrable, il peut a priori arriver que, comme dans l'exemple de la proposition 10. 2. les singularités de f deviennent "invisibles". Nous ne savons pas si en fait une telle situation peut se produire.

Quoi qu'il en soit nous considérons que c'est une limitation "raisonnable" de supposer que les fonctions analytiques sont définies par des familles cohérentes dénombrables (car c'est ce qui se passe lorsqu'on définit explicitement des fonctions analytiques). Nous utiliserons le théorème 10. 4. dans le paragraphe 11, nous supposerons donc dans ce paragraphe que les fonctions analytiques considérées sont définies sur des familles cohérentes dénombrables. Dans les paragraphes 12, 13 et 14, par contre, nous ne nous limiterons pas à ce cas.

11

LIMITE UNIFORME DE FONCTIONS ANALYTIQUES

11. 1. - Si K n'est pas maximalement complet, la limite uniforme d'une suite de fonctions $\mathcal{B}$-analytiques peut ne pas être une fonction $\mathcal{B}$-analytique.

Si l'on désigne par $\mathcal{C}$ la classe des intersections finies de couronnes, nous allons construire une suite de fonctions $\mathcal{C}$-analytiques dont la limite n'est même pas $\mathcal{a}$-analytique ce qui établira notre assertion.

Considérons l'exemple construit à la proposition 10. 2.

Soit (b_n) une suite de points de K tels que $|a_1 - b_n|$ forme une suite monotone croissante convergeant vers une limite r, avec $|a_1 - b_1| > \rho_1$ et telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{Log}\, r - \mathrm{Log}\, |b_n - a_1|)$ diverge.

Posons $f_n = \alpha_n f(x - b_n + a_1)$, où f est la fonction construite à la proposition 10. 2. et α_n est une suite convergeant vers 0.

Posons $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$

g_n est une fonction $\mathcal{C}$-analytique dans K, puisque c'est la somme de fonctions $\mathcal{C}$-analytiques, (cf. §. 9). De plus on a $g_{n+1} - g_n = f_{n+1}$ et donc

$$\sup_{x \in K} |g_{n+1}(x) - g_n(x)| \leq |\alpha_{n+1}| .$$

Cette quantité tendant vers 0 avec n, la suite g_n converge uniformément sur K vers une fonction g.

Or, comme f_n n'est un élément analytique que dans des ensembles de la forme $|x-\beta_n| \geq r_n$ avec $|\beta_n - b_n| < \rho_1$ et $r_n > \rho$, comme $\sum_{m \neq n} f_m$ est un élément analytique sur $\Delta_n = \bigcap_{m\neq n} (\complement D_m)$ avec $D_m = D(\beta_m, r_m^-)$ et comme Δ_n contient D_n si tous les r_m sont pris $< \rho_1$, on en déduit que g n'est un élément analytique que dans des ensembles de la forme $(\complement \bigcup_n D_n)$. Or un tel ensemble n'est pas analytique ([8], §. 5., exemple 3, et annexe). Donc g n'est pas $\mathfrak{A}$-analytique sur K.

11.2. - Nous supposerons donc que K est maximalement complet.

Nous allons construire une classe $\mathcal{S}$ assez vaste d'ensembles analytiques telle que les fonctions $\mathfrak{A}$-analytiques vérifient les propriétés algébriques et topologiques indiquées dans l'introduction. (Comme nous l'avons indiqué au §. 10., nous supposons que nos fonctions analytiques sont définies par des familles cohérentes dénombrales).

DEFINITION. - Soient A un ensemble ouvert, x_o un point de A. Soit (D_i) la famille des disques intérieurs des cercles de centre x_o : c'est-à-dire que D_i est de la forme $D_i = D(a_i, r_i^-)$ avec $|a_i - x_o| = r_i$. On dira que D_i est <u>bien placé relativement à</u> x_o. Soit Δ_i le plus petit disque contenant $D_i \cap \complement A$, et soit ρ_i son diamètre (on a $\rho_i \leq r_i$). On dira que A appartient à $\mathcal{S}$ s'il vérifie la condition

($\mathcal{S}$) $\left\{ \right.$ $\forall x_o \in A$, $\forall y \in A$, quelle que soit la suite de disques (D_n) bien placés relativement à x_o avec $r_n < |x_o - y|$, r_n formant une suite monotone convergeant vers r ; pour N grand la série

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{|\mathrm{Log}\, r_n - \mathrm{Log}\, r|}{\mathrm{Log}\, r_n - \mathrm{Log}\, \rho_n} \quad \text{converge.}$$

11.3. - <u>Remarques</u> :

1) Si Δ_n est vide ou réduit à un point, $\mathrm{Log}\, \rho_n = -\infty$ et le terme correspondant de la série est nul. On peut donc se limiter à un choix de D_n pour lesquels cette situation ne se produit pas.

2) Si $\Delta_n = D_n$, $\rho_n = r_n$ et si $r_n = r$ le terme correspondant sera pris nul ; mais si $r_n \neq r$ il est infini et en disant que la série converge pour N

grand on exprime qu'il n'y a qu'un nombre fini de tels termes.

3) Les ensembles quasi-connexes appartiennent à $\mathcal{S}$.

11.4. - Notation :

Soit E un ensemble de $\mathcal{S}$, et soient a et b deux points de E . On dira que y est bien situé par rapport à a si $|y-a| < |b-a|$ et si, $D_i\, |x-a_i| < |a_i-a|$ étant le disque bien placé relativement à a auquel appartient y, y n'appartient pas à Δ_i où Δ_i est le plus petit disque contenant $D_i \cap \complement E$. On notera $E_{a,b}$ l'ensemble des points bien situés par rapport à a ou par rapport à b . Il est clair que $E_{a,b}$ est contenu dans E , que la famille des $E_{a,b}$ pour $(a, b) \in E \times E$ est enchaînée et recouvre E . $E_{a,b}$ est formé des deux disques $|x-a| < |b-a|$ et $|x-b| < |b-a|$ d'où l'on a enlevé les disques Δ_i qui s'y trouvent. Les trous de $E_{a,b}$ sont les Δ_i , et Δ_i est le seul trou situé dans le disque D_i bien situé par rapport à a ou b .

11.5. - LEMME. - $E_{a,b}$ est un ensemble analytique.

En effet, soit $x_o \in E_{a,b}$ (on peut le supposer bien situé par rapport à a), et soit T_n une suite convenable de trous de $E_{a,b}$ (pour la terminologie et les conditions suffisantes d'analyticité, se reporter à l'annexe). Ces trous sont des disques $\Delta_n = D(a_n, \rho_n)$ et sauf peut-être pour l'un d'entre eux (à savoir celui qui se trouve dans le disque D_n , bien situé par rapport à a , auquel appartient x_o) on aura $|x_o - a_n| = |a - a_n| = r_n$. A cause de l'hypothèse $(\mathcal{S})$ la série

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{|\operatorname{Log}|x_o - a_n| - \operatorname{Log} r|}{\operatorname{Log}|x_o - a_n| - \operatorname{Log} \rho_n}$$

converge pour N grand ce qui prouve l'analyticité de $E_{a,b}$. (Annexe, exemple 1).

11.6. - PROPOSITION. - Les ensembles de $\mathcal{S}$ sont analytiques.

Si $E \in \mathscr{S}$, c'est la réunion de la famille enchaînée $E_{a,b}$, $(a,b) \in E \times E$. La proposition résulte alors du lemme 11. 5. et du corollaire 7. 3. (on pourrait aussi le prouver directement à l'aide de la condition (*)). ||

11. 7. - LEMME. - Soient E et F appartenant à $\mathscr{S}$ d'intersection non vide. Soient a et b appartenant à $E \cap F$. Alors $E_{a,b} \cap F_{a,b}$ est analytique.

On voit sans peine que les trous de $E_{a,b} \cap F_{a,b}$ sont, soit des trous de $E_{a,b}$, soit des trous de $F_{a,b}$. Si l'on a une suite convenable de trous de $E_{a,b} \cap F_{a,b}$, soit (T_n) , on peut construire deux sous-suites (n_k) et (m_j) telle que $(n_k) \cup (m_j) = \mathbb{N}$, T_{n_k} est un trou de $E_{a,b}$ et T_{mj} est un trou de $F_{a,b}$. Les suites (T_{n_k}) et (T_{m_j}) forment des suites convenables de trous de $E_{a,b}$ et $F_{a,b}$ respectivement. On aura alors :

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{|\mathrm{Log}\, r_n - \mathrm{Log}\, r|}{\mathrm{Log}\, r_n - \mathrm{Log}\, \rho_n} = \sum_{n_k > N} \frac{|\mathrm{Log}\, r_{n_k} - \mathrm{Log}\, r|}{\mathrm{Log}\, r_{n_k} - \mathrm{Log}\, \rho_{n_k}}$$

$$+ \sum_{m_j > N} \frac{|\mathrm{Log}\, r_m - \mathrm{Log}\, r|}{\mathrm{Log}\, r_{m_j} - \mathrm{Log}\, \rho_{m_j}}$$

et ainsi qu'on l'a vu au lemme 11. 5., ces deux séries convergent pour k et j grands. Donc la série initiale converge pour N grand et $E_{a,b} \cap F_{a,b}$ est analytique. ||

11. 8. - PROPOSITION. - La réunion $E = \bigcup_i E_i$ d'une famille enchaînée (E_i) d'ensembles de $\mathscr{S}$, appartient à $\mathscr{S}$.

Prouvons le d'abord dans le cas d'une famille à deux éléments. Soient donc $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, $E_1 \in \mathscr{S}$, $E_2 \in \mathscr{S}$, $E = E_1 \cup E_2$. Soit $x_o \in E$, on peut supposer que $x_o \in E_1$, et soit $y \in E$.

Soit une suite de disques D_n bien placés relativement à x_o avec $r_n < |x_o - y|$, r_n formant une suite monotone convergeant vers r . Si r_n est croissante (resp décroissante), l'une des deux situations suivantes se produit

a) Il existe $z \in E_1$ avec $|x_o - z| \geq r$ (resp. $|x_o - z| > r$)

b) Il existe $z \in E_2$ avec $|x_o - z| < r$ (resp. $|x_o - z| \leq r$)

car $E_1 \cap E_2$ est non vide.

Notons Δ_n, Δ_n^1, Δ_n^2 les plus petits disques contenant $D_n \cap \complement E$, $D_n \cap \complement E_1$, $D_n \cap \complement E_2$ respectivement et soient ρ_n, ρ_n^1 et ρ_n^2 leurs diamètres.

Si le cas a) se produit pour n assez grand, on a $r_n < |z - x_o|$ et comme $D_n \cap \complement E \subset D_n \cap \complement E_1$ on a $\Delta_n \subset \Delta_n^1$ et donc $\rho_n < \rho_n^1$.

La condition ($\mathcal{S}$) étant vérifiée pour E_1 relativement au couple (x_o, z) est donc vérifiée a fortiori pour E puisque l'on a :

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{|\operatorname{Log} r_n - \operatorname{Log} r|}{\operatorname{Log} r_n - \operatorname{Log} \rho_n} \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|\operatorname{Log} r_n - \operatorname{Log} r|}{\operatorname{Log} r_n - \operatorname{Log} \rho_n^1}$$

Maintenant si a) n'est pas vérifiée, alors y appartient nécessairement à E_2, d'autre part on a b) et pour n grand on a $r_n > |x_o - z|$. Alors la suite (D_n) bien placée relativement à x_o est une suite bien placée relativement à z car $|a_n - z| = \sup(|a_n - x_o|, |x_o - z|) = r_n$, et comme $\Delta_n \subset \Delta_n^2$ on a $\rho_n \leq \rho_n^2$ et donc la condition ($\mathcal{S}$) est vérifiée pour E puisqu'elle est vérifiée pour E_2 relativement au couple (z, y).

Par récurrence on en déduit que la propriété annoncée est vraie pour toute famille enchaînée finie.

Soit maintenant une famille enchaînée quelconque (E_i) et soient x_o et y appartenant à $E = \bigcup_i E_i$. On peut alors trouver une sous-famille finie (E_j) $1 \leq j \leq n$ avec $E_j \cap E_{j+1} \neq \emptyset$, $1 \leq j \leq n-1$, et $x_o \in E_1$, $y \in E_n$. Alors $F = \bigcup_{1 \leq j \leq n} E_j$ appartient à $\mathcal{S}$ ainsi qu'on vient de le prouver. Si D_n est une suite relative à (x_o, y) et si Δ_n et Δ'_n sont les plus petits disques contenant $D_n \cap E$ et $D_n \cap F$, de rayons ρ_n et ρ'_n on a $\Delta_n \subset \Delta'_n$ et $\rho_n \leq \rho'_n$, donc E vérifie la condition ($\mathcal{S}$) relativement au couple (x_o, y) puisque F vérifie cette condition. ||

11.9. - PROPOSITION. - La famille $\mathcal{S}$ est régulière.

Il est évident que les couronnes appartiennent à $\mathcal{S}$.

D'autre part il résulte de la proposition 11.8. que les réunions de familles enchaînées finies d'ensembles de $\mathcal{S}$ appartiennent à $\mathcal{S}$.

Il reste à prouver que si E et F appartiennent à $\mathcal{S}$, $G = E \cap F \neq \emptyset$ alors $G = E \cap F$ est analytique. Mais $G = \bigcup_{(a,b)\in G\times G} E_{a,b} \cap F_{a,b}$. D'après le lemme 11.7. les ensembles $E_{a,b} \cap F_{a,b}$ sont analytiques, comme la famille $(E_{a,b} \cap F_{a,b})$, $(a,b) \in G \times G$, est enchaînée, l'ensemble G est analytique d'après le corollaire 7.3. ||

Les résultats du paragraphe 8 s'appliquent donc à la famille $\mathcal{S}$. On notera que la famille $\mathcal{S}$ n'est pas stable par intersection. Donnons un critère assurant que l'intersection de deux éléments de $\mathcal{S}$ appartiennent à $\mathcal{S}$.

11.10. - LEMME. - Soient E et F appartenant à $\mathcal{S}$, et soit $G = E \cap F \neq \emptyset$ leur intersection. Si pour tout couple $(a,b) \in G \times G$, $G_{a,b} = E_{a,b} \cap F_{a,b}$, alors G appartient à $\mathcal{S}$.

Cette condition signifie que si le disque D est un disque bien placé relativement à a situé entre a et b , Δ^E, Δ^F et Δ^G étant les plus petits disques contenant $D \cap \complement E$, $D \cap \complement F$, $D \cap \complement G$, alors si $\Delta^E \neq \emptyset$ et $\Delta^F \neq \emptyset$ on a $\Delta^E \cap \Delta^F \neq \emptyset$, ce qui implique $\Delta^G = \Delta^E \cup \Delta^F$.

Alors si on a la suite de disques D_n bien placés relativement à a entre a et b , on peut la partager en deux sous-suites (D_{n_k}) et (D_{m_j}) telle que $\Delta^G_{n_k} = \Delta^E_{n_k}$ et $\Delta^G_{m_j} = \Delta^F_{m_j}$. On a donc

$$\sum_{n>N} \frac{|\operatorname{Log} r_n - \operatorname{Log} r|}{\operatorname{Log} r_n - \operatorname{Log} \rho^G_n} = \sum_{k>K} \frac{|\operatorname{Log} r_{n_k} - \operatorname{Log} r|}{\operatorname{Log} r_{n_k} - \operatorname{Log} \rho^E_{n_k}} + \sum_{j>J} \frac{|\operatorname{Log} r_{m_j} - \operatorname{Log} r|}{\operatorname{Log} r_{m_j} - \operatorname{Log} \rho^F_{m_j}}$$

et ces deux séries convergent pour K et J grands d'après ($\mathcal{S}$) . ||

11. 11. - THEOREME. - Soient E et $F \in \mathcal{S}$, $F \subset E$. Soit f une fonction $\mathcal{S}$-analytique sur E , alors f est $\mathcal{S}$-analytique sur F . Si f et g sont deux fonctions $\mathcal{S}$-analytiques sur E , $f+g$ est $\mathcal{S}$-analytique.

Ainsi qu'il résulte de la proposition 9. 1. la deuxième partie du théorème est une conséquence de la première partie. Nous utiliserons le :

11. 12. - LEMME. - Soit f une fonction $\mathcal{S}$-analytique sur $E \in \mathcal{S}$. Il existe une famille filtrante (E_i) d'éléments de $\mathcal{S}$ telle que $\bigcup_i E_i = E$, que f soit un élément analytique sur E_i et que de plus, pour tout couple de points (x_o, y) de E_i, tout disque D , bien placé relativement à x_o , entre x_o et y et contenu dans E , soit contenu dans E_i .

On sait déjà que, puisque la famille $\mathcal{S}$ est régulière, f peut être définie sur une famille filtrante (F_i) (corollaire 8. 4.).

(Puisqu'on suppose que la base est dénombrable on pourrait même supposer que la famille F_i est une suite croissante).

Soit $\mathfrak{T}_i$ la famille des trous de F_i . On a sur F_i

$$f = \sum_{T \in \mathfrak{T}_i} f_T$$

la série convergeant uniformément sur $\complement \left(\bigcup_{f_T \neq 0} T \right)$.

Or soient x_o et y deux points de F_i , et soit D un disque, bien placé relativement à x_o , entre x_o et y , tel que D soit contenu dans E . Si T est un trou de F_i contenu dans D , comme f se prolonge dans T en une fonction $\mathcal{S}$-analytique, et comme K est maximalement complet, il résulte du théorème 10. 4. et de ses conséquences que l'on a $f_T = 0$. Enfin il est clair que $F_i \cup D$ vérifie la condition ($\mathcal{S}$) si F_i la vérifie.

Si alors l'on considère la famille (D_j) des disques bien placés entre deux points de F_i, $E_i = F_i \cup (\cup D_j) = \cup (F_i \cup D_j)$ appartient à $\mathcal{S}$ puisque c'est la réunion d'une famille enchaînée d'éléments de $\mathcal{S}$ (proposition 11. 8.). De plus la série $\sum_{T \in \mathfrak{T}_i} f_T$ converge uniformément sur E_i, comme la somme de cette série coïncide avec f sur F_i, elle coïncide avec f sur E_i, donc f est un élément analytique sur E_i.

Les E_i vérifient bien les conditions de l'énoncé. ||

11. 13. - Démonstration du théorème 11. 11.

Soit f une fonction $\mathcal{S}$-analytique sur E et soit E_i la famille définie au lemme 11. 12. . Soit enfin $F \in \mathcal{S}$, $F \subset E$.

Alors la famille formée des intersections $E_i \cap F$ non vides est filtrante, sa réunion est F, et f est un élément analytique sur chaque $E_i \cap F$. Il reste à prouver que les $E_i \cap F$ appartiennent à $\mathcal{S}$, ce qui va résulter du lemme 11. 10.

a et b étant deux points de $E_i \cap F$, soit D un disque bien placé entre a et b. Δ^E, Δ^{E_i} et Δ^F étant les plus petits disques contenant $D \cap \complement E$, $D \cap \complement E_1$, $D \cap \complement F$, si $\Delta^E \neq \emptyset$ on a $\Delta^E \subset \Delta^F$, d'autre part les conditions du lemme 11. 12. signifient que si $\Delta^{E_i} \neq \emptyset$ alors on a $\Delta^E \neq \emptyset$ et $\Delta^E \subset \Delta^{E_i}$. Donc si $\Delta^{E_i} \neq \emptyset$ et $\Delta^F \neq \emptyset$, on a $\Delta^{E_i} \cap \Delta^F \supset \Delta^E \neq \emptyset$ et le lemme 11. 10. s'applique. ||

11. 14. - THEOREME. - Soit $E \in \mathcal{S}$, soit f_n une suite de fonctions $\mathcal{S}$-analytiques convergeant uniformément sur E vers une limite f. Alors f est une fonction $\mathcal{S}$-analytique sur E.

Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas où les f_n sont bornées sur E. En effet, on peut trouver N tel que pour $n > N$ on ait $|f_n(x) - f_N(x)| \leq 1$ sur E. Posons alors $g_n = f_n - f_N$. g_n converge uniformément sur E vers une limite g et les g_n sont bornées sur E. Si on a prouvé que g est une fonction $\mathcal{S}$-analytique sur E, alors $f = f_N + g$ en sera une aussi d'après le théorème 11. 11. .

Nous allons prouver qu'il existe une famille enchaînée fixe (E_i) de sous-ensembles de E, appartenant à $\mathcal{S}$ et engendrant E telle que toute fonction $\mathcal{S}$-analytique bornée sur E soit un élément analytique sur chaque E_i.

Admettons provisoirement ce résultat. Alors les g_n sont des éléments analytiques sur E_i, donc leur limite uniforme g aussi (proposition 6. 1.), et donc g est une fonction $\mathcal{S}$-analytique sur E.

Soient a et b deux points de E. Appelons D_a et D_b les disques $D_a = |x-a| < |b-a|$ et $D_b : |x-b| < |b-a|$. Soit (D_i^a) (resp. (D_j^b)) les familles des disques bien placés par rapport à a, (resp. b) et situés dans D_a (resp. D_b). Soit Δ_i^a (resp. Δ_j^b) le plus petit disque contenant $D_i^a \cap E$ (resp. $D_j^b \cap E$). Nous nous limiterons à la famille d'indices pour lesquels Δ_i^a (resp. Δ_j^b) n'est pas vide. Δ_i^a est le disque : $|x-a_i| < \rho_i^a$, avec $|a-a_i| = r_i^a$; Δ_j^b est le disque : $|x-b_j| < \rho_j^b$, avec $|b-b_j| = r_j^b$.

Posons $\rho_i^{a^*} = \sqrt{\rho_i^a r_i^a}$ et $\rho_j^{b^*} = \sqrt{\rho_j^b r_j^b}$ et notons $\Delta_i^{a^*}$ le disque $|x-a_i| < \rho_i^{a^*}$ et $\Delta_j^{b^*}$ le disque $|x-b_j| < \rho_j^{b^*}$.

Soit $E^*_{a,b} = (D_a \cap \complement \bigcup_{i\in I} \Delta_i^{a^*}) \cup (D_b \cap \complement \bigcup_{j\in J} \Delta_j^{b^*})$. On voit sans peine que l'on a $E^*_{a,b} \subset E_{a,b} \subset E$ et que d'autre part $E^*_{a,b} \in \mathcal{S}$ car pour toute suite r_n^a convergeant vers r on a :

$$\Sigma \frac{|\operatorname{Log} r_n^a - \operatorname{Log} r|}{\operatorname{Log} r_n^a - \operatorname{Log} \rho_n^{a^*}} < 2\,\Sigma \frac{|\operatorname{Log} r_n^a - \operatorname{Log} r|}{\operatorname{Log} r_n^a - \operatorname{Log} \rho_n^a} < +\infty$$

et pour toute suite r_n^b convergeant vers r' on a

$$\Sigma \frac{|\operatorname{Log} r_n^b - \operatorname{Log} r'|}{\operatorname{Log} r_n^b - \operatorname{Log} \rho_n^{b^*}} < 2\,\Sigma \frac{|\operatorname{Log} r_n^b - \operatorname{Log} r'|}{\operatorname{Log} r_n^b - \operatorname{Log} \rho_n^b} < +\infty \; .$$

Enfin il est évident que la famille $(E_{a,b})_{(a,b)\in E\times E}$ est enchaînée et que l'on a $\bigcup_{(a,b)\in E\times E} E^*_{a,b} = E$.

Soit h une fonction $\mathcal{S}$-analytique bornée sur E. Prouvons que h est un élément analytique sur $E^*_{a,b}$.

Remarquons d'abord que h est une fonction $\mathcal{S}$-analytique sur $E_{a,b}$ d'après le théorème 11. 11.

On peut trouver $F \in \mathcal{S}$, avec $F \subset E_{a,b}$, $a \in F$, $b \in F$ et tel que h soit un élément analytique sur F.

Soit $\mathfrak{T}$ la famille des trous de F. $\mathfrak{T}$ se partage en deux familles : $\mathfrak{T}_1$ est la famille des trous T de F qui contiennent des trous Δ de $E_{a,b}$; $\mathfrak{T}_2$ est la famille des trous T de F contenus dans $E_{a,b}$.

Un trou T de $\mathfrak{T}_1$ est pris en sandwich entre un D^a_i (resp. D^b_j) et un Δ^a_i (resp. Δ^b_j) on notera ce trou T^a_i (resp. T^b_j) ; on a $\Delta^a_i \subset T^a_i \subset D^a_i$ (resp. $\Delta^b_j \subset T^b_j \subset D^b_j$).

On a sur F : $h = \sum_{T \in \mathfrak{T}} h_T$, la série convergeant uniformément sur $\complement\left(\bigcup_{h_T \neq 0} T \right)$. Pour $T \in \mathfrak{T}_2$; on a $h_T = 0$ car h se prolonge en une fonction analytique dans $T \cup F$, et K est maximalement complet (conséquence du théorème 10. 4.). On a donc sur F : $h = \sum_{T \in \mathfrak{T}_1} h_T$, la série convergeant uniformément sur $\complement\left(\bigcup_{T \in \mathfrak{T}_1} T \right)$.

Notons que pour $T \in \mathfrak{T}_1$:

$$\sup_{x \in \complement T} |h_T(x)| = \sup_{x \in F} |h_T(x)| \leq \sup_{x \in F} |h(x)| \leq \sup_{x \in E_{a,b}} |h(x)| .$$

On remarque d'autre part que $h_{T^a_i}$ (resp. $h_{T^b_i}$) ne dépend que de Δ^a_i, c'est-à-dire que pour un autre $F' \in \mathcal{S}$, $F' \subset E_{a,b}$, $a \in F'$, $b \in F'$ tel que h soit un élément analytique sur F', si T'^a_i est le trou des F' contenant Δ^a_i, $h_{T'^a_i} = h_{T^a} = h_{\Delta^a_i}$.

On peut trouver une suite F_n telle que $\bigcap T^a_{i,n} = \Delta^a_i$ et donc

$$\sup_{x \in \complement \Delta^a_i} |h_{\Delta^a_i}(x)| = \sup_n \sup_{x \in \complement T^a_{i,n}} |h_{\Delta^a_i}(x)| \leq \sup_{x \in E_{a,b}} |h(x)| = m .$$

Mais d'autre part $s_i^a = \sup_{x \in \complement D_i^a} |h_{\Delta_i^a}(x)| \leq \sup_{x \in \complement T_i^a} |h_{\Delta_i^a}(x)| = \sup_{x \in F} |h_{\Delta_i^a}(x)|$ et $s_i^a \to 0$ puisque la série $\sum_{T \in \mathfrak{T}_1} h_T$ converge uniformément sur F.

Le polygone de valuation de $h_{\Delta_i^a}(x)$ relatif au point a_i (centre de Δ_i^a) étant convexe pour $r > \rho_i^a$, on a

$$\operatorname{Log}|h_{\Delta_i^a}|_{a_i}(\rho_i^{a^*}) \leq \frac{1}{2}(\operatorname{Log}|h_{\Delta_i^a}|_{a_i}(\rho_i^a) + \operatorname{Log}|h_{\Delta_i^a}|_{a_i}(r_i^a)) \leq \frac{1}{2}(m + s_i^a)$$

et donc

$$s_i^{a^*} = |h_{\Delta_i^a}|(\rho_i^{a^*}) = \sup_{x \in \complement \Delta_i^a} |(h_{\Delta_i^a}(x)| \leq \sqrt{m\, s_i^a} \ .$$

Donc $s_i^{a^*} \to 0$; on voit de même que $s_j^{b^*} = \sup_{x \in \complement \Delta_j^{b*}} |h_{\Delta_j^b}(x)|$ converge vers 0, ce qui prouve que la série $\sum_{T \in \mathfrak{T}_1} h_T$ converge uniformément sur $E^*_{a,b}$. Comme la somme de cette série coïncide avec h sur F, elle coïncide avec h sur $E^*_{a,b}$ ce qui prouve que h est un élément analytique sur $E^*_{a,b}$. ||

12

INVERSE D'UNE FONCTION ANALYTIQUE
PRODUIT DE FONCTIONS ANALYTIQUES

12. 1. - La donnée d'un point a de K et d'un nombre réel ρ définit une partition de K par les disques intérieurs du disque $|x-a| \leq \rho$ (il n'y en a qu'un si ρ n'appartient pas au groupe des valeurs) et le disque extérieur de centre ∞ : $|x-a| > \rho$. La réunion d'un nombre quelconque de ces disques définit un ensemble analytique.

On appellera $\mathfrak{R}$ la classe des intersections finies d'ensembles du type précédent.

On voit sans peine qu'un ensemble de $\mathfrak{R}$ est analytique et même quasi-connexe puisque c'est l'intersection d'un nombre fini de quasi-connexes ; il en résulte donc que l'intersection d'un ensemble analytique A avec un ensemble R de $\mathfrak{R}$ est un ensemble analytique (annexe, exemple 4).

La classe régulière $\mathcal{B}$ sera dite complètement régulière si quel que soit l'ensemble B de $\mathcal{B}$ et quel que soit l'ensemble R de $\mathfrak{R}$, $B \cap R$ appartient à $\mathcal{B}$. (En particulier $\mathfrak{R} \subset \mathcal{B}$ si $K \in \mathcal{B}$ ce qu'on peut toujours supposer).

12. 2. - Dans ce paragraphe nous considérons une classe $\mathcal{B}$ complètement régulière. On ne perd rien en faisant cette supposition car plus la classe est vaste, plus la classe des fonctions $\mathcal{B}$ analytiques est vaste et d'autre part on a la

PROPOSITION. - Si $\mathcal{B}$ est une classe régulière, il existe une classe $\mathcal{B}'$ complètement régulière contenant $\mathcal{B}$.

Notons $\mathcal{B}'$ la classe formée des ensembles du type $B \cap R$ où $B \in \mathcal{B}$ et $R \in \mathcal{R}$ et des réunions de familles enchaînées finies d'ensembles de ce type.

Comme $K \in \mathcal{R}$, on a $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$. De plus d'après ce qu'on vient de voir, les $B \cap R$ $(B \in \mathcal{B}, R \in \mathcal{R})$ appartiennent à $\mathcal{A}$, donc les réunions de familles enchainées finies aussi, donc $\mathcal{B}' \subset \mathcal{A}$. Il est évident que les couronnes appartiennent à $\mathcal{B}'$ et que les réunions enchaînées finies d'ensembles de $\mathcal{B}'$ appartiennent à $\mathcal{B}'$.

Enfin si $(A_i \cap R_i)_{i \in I}$ $(A_i \in \mathcal{B}, R_i \in \mathcal{R})$ et $(B_j \cap Q_j)_{j \in J}$ $(B_i \in \mathcal{B}, Q_j \in \mathcal{R})$ sont deux familles enchaînées finies, il faut prouver que

$$\bigcup_{i \in I} (A_i \cap R_i) \cap \bigcup_{j \in J} (B_j \cap Q_j) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \cap R_i \cap B_j \cap Q_j$$

est analytique. Or notons que pour $(i,j) \in I \times J$, $A_i \cap R_i \cap B_j \cap Q_j$ appartient à $\mathcal{A}$ puisque $A_i \cap B_j \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$ régulière) et $R_i \cap Q_j \in \mathcal{R}$. Si la famille $(A_i \cap R_i \cap B_j \cap Q_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est enchaînée, alors la propriété est démontrée. Malheureusement, ce cas favorable peut ne pas se produire, et il nous faut établir quelques lemmes supplémentaires pour démontrer cette propriété.

12.3. - Si A et B sont deux ensembles analytiques d'intersection non vide, leur réunion est analytique (corollaire 7.3.). Nous allons chercher, plus généralement, à quelle condition la réunion de deux ensembles analytiques est analytique.

DEFINITION. - A étant un sous-ensemble de K, nous noterons Δ^A le plus petit disque (ouvert ou fermé) contenant A. Nous dirons que les ensembles analytiques non vides A et B sont faiblement enchaînés si l'un des cas suivants se produit :

a) $\Delta^A \cap B \neq \emptyset$ et $\Delta^B \cap A \neq \emptyset$

b) Δ^A est un trou (ou un trou intérieur) de B et $\Delta^A \cup B$ ainsi que $A \cup \complement \Delta^A$ sont analytiques

c) Δ^B est un trou (ou un trou intérieur) de A et $\Delta^B \cup A$ ainsi que $B \cup \complement \Delta^B$ sont analytiques.

Remarques :

1) Indiquons un cas simple dans lequel le critère b ou le critère c est vérifié. Soit $T = D(a, r^-)$ un trou de A analytique. Si le cercle $C(a, r)$ n'est pas vide (et alors $A \cap C(a, r) \neq \emptyset$ car sinon T ne serait pas un trou de A), $T \cup A$ est analytique.

En effet, les trous de $A \cup T$ sont les trous de A à l'exception du trou T. Soit $x_o \in A \cup T$ et T_{nj} une suite convenable de trous de $A \cup T$. Si $x_o \in A$ la condition (*) (cf. annexe) est vérifiée puisqu'elle est vérifiée pour A ; si $x_o \in T$, soit $x'_o \in C(a, r) \cap A$ alors la condition (*) relative à x_o et à la suite T_{nj} est la même que la condition (*) relative à x'_o et à la suite T_{nj} et elle est donc vérifiée puisque A est analytique. $A \cup T$ est donc analytique.

2) Soit $T = D(a, r^+)$ un trou de A analytique et T' le trou intérieur $T' = D(a, r^-)$. Alors si $T' \cup A = (T \cup A) \cap \complement C(a, r)$, si $T \cup A$ est analytique, son intersection avec $\complement C(a, r) \in \mathfrak{R}$ l'est aussi. La réciproque résulte de la remarque 1). En effet, si $C(a, r) \neq \emptyset$ (c'est le seul cas intéressant car autrement $T = T'$), les disques intérieurs T_i de $C(a, r)$, $T_i = D(a_i, r^-)$ sont des trous de $T' \cup A$, et donc pour chaque i d'après la remarque précédente $T_i \cup T' \cup A$ est analytique, et alors $(\bigcup_i T_i) \cup T' \cup A = T \cup A$ est analytique. Ces résultats se conservent si T est un trou de centre ∞.

12. 4. - LEMME. - Soient A et B appartenant à $\mathfrak{a}$. Pour que $A \cup B$ soit analytique il faut et il suffit que A et B soient faiblement enchaînés.

Soient A et B faiblement enchaînés. Supposons qu'ils vérifient la condition b . Alors les trous de $A \cup B$ sont formés de la réunion des trous de $\Delta^A \cup B$ et de ceux de $A \cup \complement \Delta^A$. Soit $x_o \in A \cup B$ et (T_{nj}) une suite convenable de trous de $A \cup B$. Soit d'abord $x_o \in A$. Si la suite des distances $d(x_o, T_{nj})$ n'est pas constante à partir d'un certain rang, on voit alors que, sauf un nombre fini, les trous T_{nj} forment ou une suite convenable de trous de $A \cup \complement \Delta^A$ ou une suite convenable de trous de $B \cup \Delta^A$ (car la suite des distances $d(x_o, T_{nj})$ est monotone quand n croit, et, pour $T_{nj} \in \mathfrak{T}(A \cup \complement \Delta^A)$, $d(x_o, T_{nj}) \leq$ diamètre de Δ^A

et, pour $T_{nj} \in \mathfrak{T}\ (B \cup \complement \Delta^A)$, $d(x_o, T_{nj}) \geq$ diamètre de Δ^A). La condition (*) est alors vérifiée puisque $A \cup \complement \Delta^A$ et $B \cup \Delta^A$ sont analytiques. On démontre de même que la condition (*) est encore vérifiée si $x_o \in B$. Finalement la condition (*) étant toujours vérifiée $A \cup B$ est analytique.

Si A et B vérifient la condition c, B et A vérifient la condition b et donc $A \cup B$ est analytique.

Supposons alors que A et B vérifient $a \in A \cap \Delta^B$ et $b \in B \cap \Delta^A$. Posons $A' = A \cap D(a, |a-b|^-)$, $B' = B \cap D(b, |a-b|^-)$. Alors A' et A sont analytiques ainsi qu'on l'a remarqué plus haut. D'autre part $\Delta^{A'} = D(a, |a-b|^-)$ car $D(à, |a-b|^-) \subset \Delta^A$ et A est infraconnexe. De même $\Delta^{B'} = D(b, |a-b|^-)$. La condition b est donc réalisée pour A' et B'. En vertu de ce que l'on vient de prouver $A' \cup B'$ est analytique. Mais comme $A \cap A' \neq \emptyset$ et $B \cap B' \neq \emptyset$, $A \cup (A' \cup B') \cup B = A \cup B$ est analytique.

Pour démontrer la réciproque, remarquons d'abord que si Δ^A (resp. Δ^B) de diamètre r est contenu dans un trou T de B (resp. A) de diamètre ρ avec $r<\rho$, alors $A \cup B$ n'est pas infraconnexe et donc n'est pas analytique.

Si Δ^A (resp. Δ^B) est un trou (ou un trou intérieur) de B (resp. A) et si $A \cup B$ est analytique, alors on a $\complement \Delta^A \cap B \neq \emptyset$, (resp. $\complement \Delta^B \cap A) \neq \emptyset$) et donc $A \cup \complement \Delta^A = (A \cup B) \cup \complement \Delta^A$ et $\Delta^A \cup B = \Delta^A \cup (A \cup B)$ (resp. $B \cup \complement \Delta^B$ et $A \cup \Delta^B$) sont analytiques. $\|$

12.5. - On dira que la famille $(A_i)_{i \in I}$ d'ensembles analytiques est <u>faiblement enchaînée</u> si pour tous i et $j \in I$ on peut trouver $i_o \dots i_n \in I$ tels que $A_{i_o} = A_i$; $A_{i_n} = A_j$ et que A_{i_k} et $A_{i_{k+1}}$ soient faiblement enchaînés pour $0 \leq k \leq n-1$.

COROLLAIRE. - <u>Si la famille</u> $(A_i)_{i \in I}$ <u>d'ensembles analytiques est faiblement enchaînée</u> $\bigcup_{i \in I} A_i$ <u>est analytique.</u>

En effet, d'après le lemme 12.4., pour toute sous famille finie $(A_i)_{i \in J}$ faiblement enchaînée, $\bigcup_{i \in J} A_i$ est analytique. Mais ces ensembles $\bigcup_{i \in J} A_i$ forment une famille enchaînée (et même filtrante) et leur réunion, égale à $\bigcup_{i\in I} A_i$, est donc analytique. ||

12. 6. - LEMME. - Soit $\mathcal{B}$ une classe régulière. Soient $A\in\mathcal{B}$, $B\in\mathcal{B}$ et $a\in K$. Alors :

si $\mathrm{Pr}_a(A\cap B)\neq\emptyset$ on a $\mathrm{Pr}_a(A\cap B)=\mathrm{Pr}_a(A)\cap\mathrm{Pr}_b(B)$;

si $\mathrm{Im}_a(A\cap B)$ est réduit à un point, on a $\mathrm{Im}_a(A\cap B)=\mathrm{Im}_a(A)\cap\mathrm{Im}_a(B)$;

si $A\cap B=\emptyset$, $\mathrm{Pr}_a(A)\cap\mathrm{Pr}_b(B)$ est vide ou réduit à un point.

La démonstration est calquée sur celle du lemme 8. 2.

Notons que l'on a $\mathrm{Im}_a(A\cap B)\subset\mathrm{Im}_a(A)\cap\mathrm{Im}_a(B)$ et donc $\mathrm{Pr}_a(A\cap B)\subset\mathrm{Pr}_a(A)\cap\mathrm{Pr}_a(B)$, et par suite, si $\mathrm{Pr}_a(A\cap B)\neq\emptyset$, $\mathrm{Pr}_a(A)\cap\mathrm{Pr}_b(B)$ est un intervalle ni vide ni réduit à un point. Tout revient donc à prouver que si $\mathrm{Pr}_a(A)\cap\mathrm{Pr}_b(B)$ est un intervalle ni vide ni réduit à un point, on a

$$\overline{\mathrm{Im}_a(A\cap B)}=\mathrm{Pr}_a(A)\cap\mathrm{Pr}_a(B)\ .$$

Soit alors $\mathrm{Pr}_a(A)=[\alpha,\alpha']$ et $\mathrm{Pr}_a(B)=[\beta,\beta']$ avec $\sup(\alpha,\beta)<\inf(\alpha',\beta')$. Supposons que $\overline{\mathrm{Im}_a(A\cap B)}=[\gamma,\gamma']$ soit non vide et soit strictement contenu dans $\mathrm{Pr}_a(A)\cap\mathrm{Pr}_a(B)$; soit par exemple $\gamma>\sup(\alpha,\beta)$. Il existe donc r avec $\sup(\alpha,\beta)<r<\gamma$. On a donc $D(a,r)\cap A\neq\emptyset$ et $D(a,r)\cap B\neq\emptyset$ et puisque $\mathcal{B}$ est régulière $A'=D(a,r)\cup A$ et $B'=D(a,r)\cup B$ appartiennent à $\mathcal{B}$, on a donc $A'\cap B'$ analytique, mais

$$\overline{\mathrm{Im}_a(A'\cap B')}=[0,r]\cup[\gamma,\gamma']\ ,$$

donc $A'\cap B'$ n'est pas infraconnexe. Il y a contradiction. Si on a $\gamma'<\inf(\alpha',\beta')$ on considère les ensembles $A'=\complement D(a,r)\cup A$ et $B'=\complement D(a,r)\cup B$ avec $\gamma'<r<\inf(\alpha',\beta')$. Enfin, si $\mathrm{Im}_a(A\cap B)=\emptyset$ (soit $A\cap B=\emptyset$) on considère les ensembles $A'=D(a,r)\cup A\cup\complement D(a,\rho)$ et $B'=D(a,r)\cup B\cup\complement D(a,\rho)$ avec $\sup(\alpha,\beta)<r<\rho<\inf(\alpha',\beta')$. ||

12. 7. - LEMME. - Si $A = A' \cap R$ et $B = B' \cap Q$ où A' et B' appartiennent à $\mathcal{B}$ et R et Q appartiennent à $\mathcal{R}$, alors les conclusions du lemme 12. 6. subsistent.

On remarque d'abord qu'elles subsistent si A est infraconnexe et B appartient à $\mathcal{R}$. En effet, $\mathrm{Im}_a(A' \cap B')$ et $\mathrm{Im}_a(A) \cap \mathrm{Im}_a(B)$ coïncident sauf peut être pour un nombre fini de points.

Dans le cas général on voit que si

$$A \cap B = (A' \cap R) \cap (B' \cap Q) = (A' \cap B') \cap (R \cap Q) \neq \emptyset$$

$$\overline{\mathrm{Im}_a(A \cap B)} = \overline{\mathrm{Im}_a(A' \cap B')} \cap \overline{\mathrm{Im}_a(R \cap Q)} =$$

$$= \overline{\mathrm{Im}_a(A')} \cap \overline{\mathrm{Im}_a(B')} \cap \overline{\mathrm{Im}_a(R)} \cap \overline{\mathrm{Im}_a(Q)} =$$

$$= \overline{\mathrm{Im}_a(A' \cap R)} \cap \overline{\mathrm{Im}_a(B' \cap Q)},$$

et que si $\mathrm{Im}_a(A) \cap \mathrm{Im}_a(B)$ est un intervalle non réduit à un point, alors $A \cap B$ est non vide. ||

12. 8. - LEMME. - Soient (A_i), $1 \leq i \leq n$, et (B_j), $1 \leq j \leq m$, deux familles d'ensembles de la forme $A_i = A'_i \cap R_i$ et $B_j = B'_j \cap Q_j$ où A'_i et B'_j appartiennent à $\mathcal{B}$ et R_i et Q_j appartiennent à $\mathcal{R}$. Supposons que l'on ait $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, $1 \leq i < n$, $B_j \cap B_{j+1} \neq \emptyset$, $1 \leq j < m$, $A_1 \cap B_1 \neq \emptyset$; $A_n \cap B_m \neq \emptyset$ et $A_i \cap B_j = \emptyset$ dans tous les autres cas. Alors $A_1 \cap B_1$ et $A_n \cap B_m$ sont faiblement enchaînés.

Soit $a \in A_1 \cap B_1$ et soit $\mathrm{Pr}_a(A_1 \cap B_1) = [0, \alpha]$. Nous allons montrer que $\overline{\mathrm{Im}_a(A_n \cap B_m)} \cap [0, \alpha] \neq \emptyset$.

Si $\overline{\mathrm{Im}_a(A_n)} \subset [0, \alpha]$ ou $\overline{\mathrm{Im}_a(B_m)} \subset [0, \alpha]$, on a

$$\overline{\mathrm{Im}_a(A_n \cap B_m)} = \overline{\mathrm{Im}_a(A_n)} \cap \overline{\mathrm{Im}_a(B_m)} \subset [0, \alpha] \quad \text{et comme}$$

$$\overline{\mathrm{Im}_a(A \cap B_m)} \neq \emptyset, \text{ on a } \quad \overline{\mathrm{Im}_a(A_n \cap B_m)} \cap [0, \alpha] \neq \emptyset .$$

Supposons alors que ni $\overline{\mathrm{Im}_a(A_n)}$ ni $\overline{\mathrm{Im}_a(B_n)}$ ne soient contenus dans $[0,\alpha]$. Nous allons prouver que $\overline{\mathrm{Im}_a(B_n)}$ contient le point α.

D'après les hypothèses et le lemme 12. 7. on a $\overline{\mathrm{Im}_a(A_1)} \cap \overline{\mathrm{Im}_a(B_1)}$, et pour $(i,j) \neq (1,1)$ et $(i,j) \neq (n,m)$ $\overline{\mathrm{Im}_a(A_i)} \cap \overline{\mathrm{Im}_a(B_j)}$ est vide ou réduit à un point.

Si $m = 1$, $\overline{\mathrm{Im}_a(B_m)} \cap [0,\alpha] = \overline{\mathrm{Im}_a(B_1)} \cap [0,\alpha] = [0,\alpha] \neq \emptyset$.

Si $m > 1$, $I = \Big(\bigcup\limits_{1\leq i\leq n} \overline{\mathrm{Im}_a(A_i)}\Big) \cap \Big(\bigcup\limits_{1\leq j<m} \overline{\mathrm{Im}_a(B_j)}\Big) = \bigcup\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j<m}} \big(\overline{\mathrm{Im}_a(A_i)} \cap \overline{\mathrm{Im}_a(B_j)}\big)$

est formé de la réunion de l'intervalle $[0,\alpha]$ et d'un nombre fini de points.

Mais comme $\overline{\mathrm{Im}_a(A_i)} \cap \overline{\mathrm{Im}_a(A_{i+1})} \neq \emptyset$, $\bigcup\limits_{1\leq i\leq n} \overline{\mathrm{Im}_a(A_i)}$ est un intervalle, de même $\bigcup\limits_{1\leq j<m} \overline{\mathrm{Im}_a(B_j)}$ est un intervalle, donc I est un intervalle et par conséquent

$$\Big(\bigcup_{1\leq i\leq n} \overline{\mathrm{Im}_a(A_i)}\Big) \cap \Big(\bigcup_{1\leq j<m} \overline{\mathrm{Im}_a(B_j)}\Big) = [0,\alpha] .$$

Comme $\overline{\mathrm{Im}_a(A_n)}$ n'est pas contenu dans $[0,\alpha]$, alors $\Big[\bigcup\limits_{1\leq i\leq n} \overline{\mathrm{Im}_a(A_i)}\Big] = [0,\alpha']$ avec $\alpha' > \alpha$, et donc d'après ce qu'on vient de voir $\mathrm{Im}_a(B_{m-1}) \subset \bigcup\limits_{1\leq j<m} \overline{\mathrm{Im}_a(B_j)} = [0,\alpha]$, comme $\mathrm{Im}_a(B_{m-1}) \cap \mathrm{Im}_a(B_m) \neq \emptyset$, on a $\mathrm{Im}_a(B_m) \cap [0,\alpha] \neq \emptyset$. Comme $\overline{\mathrm{Im}_a(B_m)}$ est un intervalle non contenu dans $[0,\alpha]$, il doit contenir le point α.

Comme les A_i et les B_j jouent des rôles symétriques, on prouve de même que $\overline{\mathrm{Im}_a(A_n)}$ contient le point α. Alors

$$\overline{\mathrm{Im}_a(A_n \cap B_m)} = \overline{\mathrm{Im}_a(A_n)} \cap \overline{\mathrm{Im}_a(B_m)}$$

contient le point α et a donc une intersection non vide avec $[0,\alpha]$.

Prouvons enfin que $A_1 \cap B_1$ et $A_n \cap B_m$ sont faiblement enchaînés.

Si $\Delta^{A_1\cap B_1} \cap (A_n \cap B_m) \neq \emptyset$ et $\Delta^{A_n\cap B_m} \cap (A_1 \cap B_1) \neq \emptyset$, la proposition est démontrée. Supposons alors par exemple que $\Delta^{A_1 \cap B_1} \cap (A_n \cap B_m) = \emptyset$ (si c'est l'autre cas qui se produit, on se ramène à ce cas en inversant les numérotations des A_i et des B_j). Alors nécessairement $\overline{Im_a(A_n \cap B_m)} \cap [0, \alpha]$ est réduit au point α. Si $\overline{Im_a(A_n \cap B_m)} = [\alpha, \beta]$, avec $\beta > \alpha$; on voit que $\Delta^{A_1 \cap B_1}$ est un trou (ou un trou intérieur) de $A_n \cap B_m$. Si $\overline{Im_a(A_n \cap B_m)}$ est réduit au point α, alors nécessairement $\Delta^{A_1 \cap B_1} = D(a, \alpha^-)$. Soit alors $b \in A_n \cap B_m$, on a $\overline{Im_b(A_n \cap B_m)} = [0, \gamma]$, avec $\gamma \leq \alpha$, $Im_b(A_1 \cap B_1)$ est réduit au point α. Mais le raisonnement fait ci-dessus prouvait que $\overline{Im_b(A_1 \cap B_1)} \cap [0, \gamma] \neq \emptyset$ ce qui entraîne que $\alpha = \gamma$, et on voit donc que dans ce cas aussi $\Delta^{A_1 \cap B_1}$ est un trou intérieur de $A_n \cap B_m$.

Montrons que $\Delta^{A_1 \cap B_1} \cup (A_n \cap B_m)$ est analytique. Si $\alpha \in Im(A_n \cap B_m)$ alors $\Delta^{A_1 \cap B_1} = D(a, \alpha^-)$ est un trou de $A_n \cap B_m$ et d'après la remarque 12. 3. 1. $\Delta^{A_1 \cap B_1} \cup (A_n \cap B_m)$ est analytique. Si $\alpha \notin Im(A_n \cap B_m)$, alors $T = D(a, \alpha^+)$ est un trou de $A_n \cap B_m$. Mais on a vu que $T \cap B_n \neq \emptyset$ (car $[0, \alpha] \cap Im\ B_m \neq \emptyset$) et pour les mêmes raisons $T \cap A_n \neq \emptyset$. On a en particulier $T \cap A'_n \neq \emptyset$, $T \cap B'_m \neq \emptyset$, $R \cap R_n \neq \emptyset$, $T \cap Q_m \neq \emptyset$. Comme A'_n et B'_m appartiennent à $\mathcal{B}$, $T \cup A'_n$ et $T \cup B'_m$ appartiennent aussi à $\mathcal{B}$ et donc $(T \cup A'_n) \cap (T \cup B'_n)$ est analytique. $T \cup R_n$ et $T \cup Q_m$ appartiennent à $\mathcal{R}$ et donc $T \cup (A_n \cap B_m) = [(T \cup A'_n) \cap (T \cup B'_m)] \cap (T \cup R_n) \cap (T \cup Q_m)$ est analytique.

Comme $\Delta^{A_1 \cap B_1}$ est soit T soit un disque intérieur de T, il résulte de la remarque 12. 3. 2. que $\Delta^{A_1 \cap B_1} \cup (A_n \cap B_m)$ est analytique. Un raisonnement analogue prouve que $(A_1 \cap B_1) \cup \Delta^{A_1 \cap B_1}$ est analytique. (Comme étape intermédiaire on prouve que $\alpha \in Im_a(A_1)$ et $\alpha \in Im_a(B_1)$.) $\|$

12. 9. - Fin de la démonstration de la proposition 12. 2.

Il résulte du lemme 12. 8. que la famille formée de $A_i \cap R_i \cap B_j \cap Q_j$ non vides est faiblement enchaînée. La proposition résulte alors du corollaire 12. 5. . ||

12. 10. - PROPOSITION. - Soit $\mathcal{B}$ une famille complètement régulière. Soient $B \in \mathcal{B}$ et f un élément analytique sur B . Notons B° l'ensemble des $x \in B$ pour lesquels $f(x) \neq 0$. Alors $1/f(x)$ est une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur B° .

Soient y et z deux points de B° . Considérons le polygone de valuation f relatif à y . Puisque $f(y) \neq 0$, pour $0 \leq r \leq |y-z|$, on a $|f|_y(r) \geq \alpha > 0$. Soit $R(x)$ une fraction rationnelle approchant f à moins que $\alpha/2$, c'est-à-dire que $\sup |f(x)-R(x)| \leq \alpha/2$. Pour $0 \leq r \leq |y-z|$ on a alors $|R|_y(r) = |f|_y(r)$. Comme R n'a qu'un nombre fini de zéros et de pôles, sauf pour un nombre fini de valeurs $r_1, \ldots, r_n$ on a pour $|x-y| = r$, $0 \leq r < |y-z|$, $|R(x)| = |R|_y(r) \geq \alpha$ et donc $|f(x)| \geq \alpha$. Le même raisonnement relatif au point z , montre qu'il existe $\beta > 0$, $0 < r'_1 < r'_2 < \ldots < r'_m < |y-z|$ tels que pour $|x-z| = r$, $0 \leq r < |y-z|$, $r \neq r'_j$ $(1 \leq j \leq m)$ on a $|f(x)| \geq \beta$.

Notons $Q_{y,z}$ l'ensemble des $x \in K$ tels que l'on ait soit $|x-y| < |y-z|$ et $|x-y| \neq r_i$ $(1 \leq i \leq n)$, soit $|x-z| < |y-z|$ et $|x-z| \neq r'_j$ $(1 \leq j \leq m)$. Il est clair que $Q_{y,z} \in \mathcal{R}$. Puisque $\mathcal{B}$ est complètement régulière il en résulte que $B \cap Q_{y,z}$ appartient à $\mathcal{B}$. D'après ce qu'on vient de voir on a $\inf_{x \in B \cap Q_{y,z}} |f(x)| > 0$. Il résulte alors de la proposition 6. 7. que $1/f$ est un élément analytique sur $B \cap Q_{y,z}$. Comme il est clair que la famille $(B \cap Q_{y,z})_{(y,z) \in B^\circ \times B^\circ}$ est enchaînée et engendre B° , il en résulte que f est une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur B° . ||

12. 11. - COROLLAIRE. - Soient $\mathcal{B}$ une famille complètement régulière et f une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur B . Si B° désigne l'ensemble des points x de B pour lesquels $f(x) \neq 0$, $1/f$ est une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur B° .

En effet si $(B_i)_{i\in I}$ est une famille enchaînée d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $\bigcup_{i\in I} B_i = B$ et que f soit un élément analytique sur B_i, alors $\bigcup_{i\in I} B_i^\circ = B^\circ$ et la famille (B_i°) est enchaînée (car les zéros de f sont isolés). Comme $1/f$ est une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur B_i°, c'est une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur B (proposition 7. 8.). ||

12. 12. - PROPOSITION. - Soient $\mathcal{B}$ une famille complètement régulière, f une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur B et g un élément analytique sur B, alors fg est une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur B.

Considérons d'abord le cas où f et g sont tous deux des éléments analytiques sur $B \in \mathcal{B}$. Pour prouver que fg est une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur B, en vertu de la remarque faite au paragraphe 6. 3., il suffit de prouver que le produit d'un élément analytique borné h sur B et de la fonction $\frac{1}{x-a}$, avec $a \notin B$, a adhérent à B, est une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur B. Or comme $\mathcal{B}$ est complètement régulière $B \cap D(a, r)$ appartient à $\mathcal{B}$. Mais pour $r > 0$, $\frac{1}{x-a}$ est bornée sur $B \cap D(a, r)$ et donc $\frac{h(x)}{x-a}$ est un élément analytique sur $B \cap D(a, r)$. $\frac{h(x)}{x-a}$ est donc une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur B.

Si maintenant f est une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur B, f est un élément analytique sur B_i, où les $B_i \in \mathcal{B}$ et $\bigcup B_i = B$. fg est donc une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur B_i ; c'est donc une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur B. ||

12. 13. - COROLLAIRE. - Si $\mathcal{B}$ est complètement régulière et si pour toute fonction f $\mathcal{B}$-analytique, la restriction de f à un ensemble B de $\mathcal{B}$ contenu dans le support de f est une fonction $\mathcal{B}$-analytique, alors le produit de deux fonctions $\mathcal{B}$-analytiques de même support est une fonction $\mathcal{B}$-analytique.

Ce sera en particulier le cas si $\mathcal{B}$ est stable par intersection ou encore le cas de la famille $\mathcal{S}$.

13

FONCTIONS MEROMORPHES

13. 1. - Deux méthodes nous permettent de définir les fonctions $\mathcal{B}$ -méromorphes. ($\mathcal{B}$ désigne une sous famille de $\mathcal{A}$).

Première méthode :

On procède comme dans le cas complexe. Soit f une fonction $\mathcal{B}$ -analytique sur B . Soit a un point isolé de B . Si f se développe en série de Laurent au voisinage de a (ce qui sera toujours le cas si K est maximalement complet et f définie par une famille cohérente dénombrable au voisinage de a : théorème 10. 4.) et si tous les coefficients des termes d'exposant négatif sont nuls, f se prolonge en une fonction analytique dans $B \cup \{a\}$; si tous les coefficients sauf un nombre fini de termes d'exposant négatif sont nuls, sans être tous nuls, on dit que f a un pôle au point a . L'exposant le plus petit des termes à coefficient non nul, changé de signe, sera appelé l'ordre du pôle.

DEFINITION M_1 . - Si f est une fonction $\mathcal{B}$ -analytique sur B privé d'une famille discrète de points a_i et si pour chaque i , f a un pôle en a_i , on dit que f est une fonction $\mathcal{B}$ -méromorphe dans B .

Deuxième méthode :

On ajoute à K le point à l'infini, soit $\overline{K} = K \cup \{\infty\}$; $\overline{K}$ est muni d'une topologie qui sur K coïncide avec celle de K , une base de voisinages du point ∞ est formée des ensembles $|x| > r$, $r \in \mathbb{R}^+$. On définit sur $\overline{K}$ une structure uniforme compatible avec sa topologie : un système fondamental d'entourages est formé des

$$V_\alpha = \{ (x, y) \in \overline{K} \times \overline{K} : (|x-y| < \alpha) \text{ ou } (|x| > \frac{1}{\alpha} \text{ et } |y| > \frac{1}{\alpha}) \}$$

pour $0 < \alpha < 1$.

(on pose $|\infty| = \infty$). Si $(x, y) \in V_\alpha$ nous dirons que x et y sont <u>voisins d'ordre</u> α. Pour cette structure uniforme K est complet (puisque $\overline{K}$ est complet pour la valuation $|\ |$).

Enfin il est bien connu qu'une fraction rationnelle $R(x)$ se prolonge sur $\overline{K}$ tout entier en une fonction à valeurs dans $\overline{K}$ uniformément continue.

DEFINITION M_2. - Soit A un ensemble analytique contenu dans K. Une limite uniforme sur A (au sens de $\overline{K}$) de fractions rationnelles sera appelée un <u>élément méromorphe</u> sur A. Soit (B_i) une famille enchaînée d'éléments de la classe $\mathcal{B}$, $B = \bigcup_i B_i$, si la restriction de f sur chaque B_i est un élément méromorphe on dira que f est <u>une fonction</u> $\mathcal{B}$-<u>méromorphe sur</u> B.

13. 2. - LEMME. - <u>Soit</u> $\mathcal{B}$ <u>une famille régulière. Alors une fonction</u> $\mathcal{B}$-<u>méromorphe au sens</u> M_1 <u>est</u> $\mathcal{B}$-<u>méromorphe au sens</u> M_2.

Soit donc f une fonction $\mathcal{B}$-analytique au sens de M_1 sur B. Soit B' l'ensemble B privé des pôles a_i. Pour chaque i il existe un disque D_i de centre a_i contenu dans B tel que dans $D_i \setminus \{a_i\}$ f se développe en série de Laurent n'ayant qu'un nombre fini de termes d'exposants négatifs. f est donc un élément méromorphe dans D_i. Donc sur $B' \cup (\bigcup_i D_i) = B$, f est une fonction méromorphe. $\|$

13. 3. - Nous verrons par la suite (proposition 13. 16.) qu'une fonction $\mathcal{B}$-méromorphe au sens M_2 l'est aussi au sens M_1. L'avantage de la définition M_2 est qu'elle nous permet de raisonner sur les fonctions méromorphes comme nous l'avons fait sur les fonctions analytiques moyennant quelques adaptations. En

particulier, nous obtiendrons un théorème sur la répartition des pôles analogue à celui établi pour les zéros d'une fonction analytique. Auparavant, nous allons établir que certaines assertions valables pour les fonctions analytiques restent vraies pour les fonctions méromorphes. Dorénavant les fonctions considérées sont méromorphes au sens M_2 .

La fonction de valuation et le polygone de valuation d'un élément méromorphe (et donc d'une fonction méromorphe) se définissent comme dans le cas des fonctions analytiques.

13.4. - PROPOSITION. - Les fonctions $\mathfrak{a}$-méromorphes vérifient le principe du prolongement analytique.

Il suffit évidemment de le démontrer pour les éléments méromorphes. La démonstration est calquée sur celle de [8] théorème 1. Nous ne refaisons pas la démonstration complètement, mais indiquerons seulement les modifications à apporter.

Soit donc un élément méromorphe f sur l'ensemble A analytique, tel que f soit identiquement nul dans un ouvert contenu dans A et non identiquement nul dans A . Puisque A est analytique, A vérifie la condition $(*)$.

On voit comme dans la démonstration du théorème 1 de [8] qu'il existe un point x_o de A tel que le polygone de valuation de f relatif à x_o atteigne la valeur $-\infty$ en un point r de $\mathrm{Im}(A)$, mais ne soit pas confondu avec la droite d'ordonnée $-\infty$. Pour ce faire, ce polygone a une infinité de changement de pentes en des points $r_1, \dots, r_n, \dots$ formant une suite monotone convergeant vers r , que nous supposerons croissante pour simplifier. Nous pouvons aussi supposer que $x_o = 0$.

On peut donc trouver $r' < r$ tel que pour $r' < \rho < r$, on ait $|f|(\rho) < \frac{1}{2}$. Alors si R est une fonction méromorphe approximant f à $\frac{1}{2}$ près, on peut trouver r'' , $r' < r'' < r$, tel que R n'ait aucun pôle dans la couronne $C : r'' < \rho < r$, et donc f n'aura aucun pôle dans $A \cap C$. f est donc un élément analytique dans $A \cap C$, c'est-à-dire la limite uniforme dans $A \cap C$ de fractions rationnelles sans pôles dans $A \cap C$. Or précisément ce que l'on a démontré dans le théorème 1 de [8] c'est que si A vérifie la condition (*) il n'existe pas d'élément analytique dans $A \cap C$ tel que $|f|(\rho) \neq 0$ pour $r'' < \rho < r$ et $|f|(r) = 0$. Il y a donc une contradiction, ce qui achève la démonstration. ||

13.5. - Nous allons étudier maintenant comment sont répartis les zéros et les pôles des éléments méromorphes.

Soit $Q(x)$ une fraction rationnelle, soit Δ un sous-ensemble de K, nous noterons $z_\Delta(Q)$ (ou $z(Q)$ ou z_Δ s'il n'y a pas d'ambiguité) et $p_\Delta(Q)$ (ou $p(Q)$ ou p_Δ) respectivement le nombre de zéros et le nombre de pôles de Q situés dans Δ.

Prenons pour Δ le disque ouvert $D(a, r^-)$, alors la pente du polygone de valuation de Q relatif à a à gauche du point d'abscisse $\operatorname{Log} r$ représente $z_\Delta(Q) - p_\Delta(Q)$. Si alors la fraction rationnelle $R(x)$ approxime Q sur Δ à α près avec $\alpha < |Q|_a(r) < 1/\alpha$, les polygones de R et de Q coïncident au voisinage gauche du point d'abscisse $\operatorname{Log} r$, et on a donc

$$z_\Delta(Q) - p_\Delta(Q) = z_\Delta(R) - p_\Delta(R) .$$

On obtient le même résultat pour le disque fermé $\Delta = D(a, r^+)$ en raisonnant séparément sur chacun des disques intérieurs de Δ et en remarquant que quel que soit le point b de Δ on a alors

$$|Q|_b(r) = |Q|_a(r) .$$

Si Δ est la couronne ouverte $r < |x-a| < r'$, la différence des pentes du polygone de Q à gauche de $\operatorname{Log} r'$ et à droite de $\operatorname{Log} r$ nous donne $z_\Delta(Q) - p_\Delta(Q)$. Si donc R approxime Q sur Δ à α près avec

$$\alpha < \inf(|Q|_a(r) , |Q|_a(r')) \leq \max(|Q|_a(r) , |Q|_a(r')) < \frac{1}{\alpha} ,$$

on voit que les polygones de Q et R coïncident au voisinage droit de $\operatorname{Log} r$ et au voisinage gauche de $\operatorname{Log} r$ et donc $z_\Delta(Q) - p_\Delta(Q) = z_\Delta(R) - p_\Delta(R)$. On obtient un résultat analogue sur les couronnes fermées ou semi-fermées en raisonnant séparément sur la couronne ouverte "intérieure" et les disques intérieurs des cercles "frontière". Nous allons améliorer ces résultats.

13. 6. - LEMME. - Soient Q une fraction rationnelle, Δ le disque $D(a, r)$ (resp. la couronne : $r < |x-a| < r'$), soit R une fraction rationnelle approximant uniformément Q sur Δ à α près avec $\alpha < |Q|_a(r) < 1/\alpha$ (resp. $\alpha < \inf(|Q|_a(r), |Q|_a(r')) \leq \max(|Q|_a(r), |Q|_a(r')) < 1/\alpha$), on a alors $z_\Delta(Q) = z_\Delta(R)$, $p_\Delta(Q) = p_\Delta(R)$.

On sait déjà que $z_\Delta(Q) - p_\Delta(Q) = z_\Delta(R) - p_\Delta(R)$.

Nous allons raisonner par récurrence sur le nombre $z_\Delta(Q) + p_\Delta(Q)$ de pôles et de zéros de Q dans Δ.

Remarquons d'abord que si $p_\Delta(Q) = 0$, $\sup\limits_{x \in \Delta} Q(x) = Q_a(r)$ pour le disque (resp. $\sup\limits_{x \in \Delta} |Q(x)| = \max(|Q|_a(r), |Q|_a(r'))$ pour la couronne). Il en résulte que l'on a $\sup\limits_{x \in \Delta} |R(x)| = \sup\limits_{x \in \Delta} |Q(x)| \leq 1/\alpha$, donc $p_\Delta(R) = 0$ et alors $z_\Delta(Q) = z_\Delta(R)$. De même si $z_\Delta(Q) = 0$,

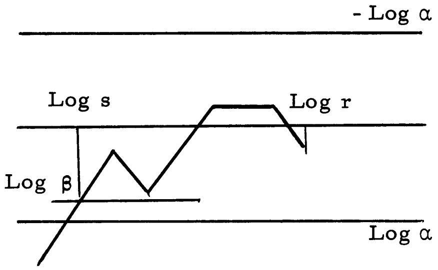
$$\inf_{x \in \Delta} |Q(x)| = |Q|_a(r) \quad (\text{resp. } \inf_{x \in \Delta} |Q(x)| = \inf(|Q|_a(r), |Q|_a(r')))$$

et donc $\inf\limits_{x \in \Delta} |R(x)| = \inf\limits_{x \in \Delta} |Q(x)| > \alpha$, donc $z_\Delta(R) = 0$ et alors $p_\Delta(Q) = p_\Delta(R)$.

La propriété est donc prouvée pour $z_\Delta(Q)$, $p_\Delta(Q) = 0$ et donc en particulier pour $z_\Delta(Q) + p_\Delta(Q) = 0$ ou 1.

Supposons alors la propriété prouvée pour $z_\Delta(Q) + p_\Delta(Q) \leq n$ (et ce pour toute fraction rationnelle et tout disque ou couronne), et soient Δ et Q avec $z_\Delta(Q) + p_\Delta(Q) = n+1$. D'après ce qu'on vient de voir on peut supposer que Q a au moins un zéro et au moins un pôle dans Δ.

Soit d'abord $\Delta = D(a, r^-)$ et supposons $p_\Delta(Q) \geq z_\Delta(Q)$. Soit b un zéro de Q dans Δ. Comme $|Q|_b(0) = 0$, étant donné β avec $\alpha < \beta < |Q|_b(r) = |Q|_a(r)$, il existe s avec $0 < s < r$ tel que $|Q|_b(s) = \beta$. Comme d'autre part, le polygone de Q a une pente négative ou nulle à gauche du point r, il doit avoir un changement de pente entre s et r. Dans le disque $\Delta' = D(b, s^-)$ Q a donc au moins un zéro (à savoir b) et dans la couronne Δ'' : $s \leq |x-b| < r$, Q a au moins un pôle. Comme



Polygone de Q relatif à b

$z_{\Delta'}(Q) + p_{\Delta'}(Q) + z_{\Delta''}(Q) + p_{\Delta''}(Q) = z_\Delta(Q) + p_\Delta(Q)$ on a $z_{\Delta'}(Q) + p_{\Delta'}(Q) \leq n$ et $z_{\Delta''}(Q) + p_{\Delta''}(Q) \leq n$. Comme d'autre part $\alpha < |Q|_b(s) < |Q|_b(r) < 1/\alpha$, d'après l'hypothèse de récurrence

$$z_{\Delta'}(R) = z_{\Delta'}(Q)\ ,\quad p_{\Delta'}(R) = p_{\Delta'}(Q)\ ,\quad z_{\Delta''}(R) = z_{\Delta''}(Q)\ ,\quad p_{\Delta''}(R) = p_{\Delta''}(Q)\ ,$$

et donc $z_\Delta(R) = z_\Delta(Q)$ et $p_\Delta(R) = p_\Delta(Q)$.

Dans le cas où $p_\Delta(Q) < z_\Delta(Q)$ on raisonne de même en considérant un pôle b de Q et en prenant $1/\alpha > \beta > |Q|_a(r)$.

Si $\Delta = D(a, r^+)$ on raisonne séparément sur chacun des disques intérieurs Δ_i de Δ où l'on a bien sûr

$$z_{\Delta_i}(Q) + p_{\Delta_i}(Q) \leq z_\Delta(Q) + p_\Delta(Q) = n+1\ .$$

Supposons alors que Δ est la couronne $r < |x-a| < r'$. Soit $\beta = \inf(|Q|_a(r)\ ,\ |Q|_a(r'))$, $\beta' = \max(|Q|_a(r)\ ,\ |Q|_a(r'))$.

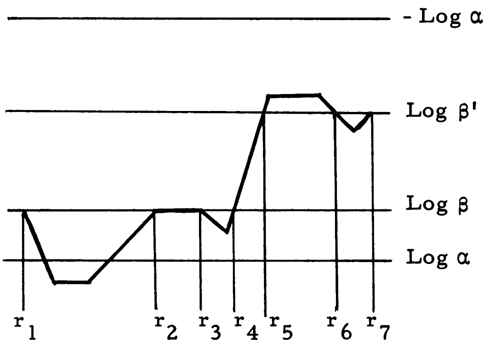
On peut trouver un nombre fini de nombres $r = r_1 < r_2 < \ldots < r_n = r'$ tels que $|Q|_a(r_i) = \beta$ ou β' et que dans l'intervalle $]r_i\ ,\ r_{i+1}[$ on ait toujours $|Q|_a(\rho) > \beta'$ ou toujours $|Q|_a(\rho) < \beta$ ou toujours $\beta \leq |Q|_a(\rho) \leq \beta'$

On peut alors partager la couronne Δ en les couronnes $\Delta_i r_i < |x-a| < r_{i+1}$ et les cercles $C_i(a, r_i)$. On a bien

$$z_{\Delta_i}(Q) + p_{\Delta_i}(Q) \leq z_\Delta(Q) + p_\Delta(Q) = n+1$$

$$z_{C_i}(Q) + p_{C_i}(Q) \leq z_\Delta(Q) + p_\Delta(Q) = n+1$$

pour ce qui est des cercles on raisonne sur chacun des disques intérieurs séparément et la propriété résulte de ce qu'on vient de voir ci-dessus. Il reste donc à étudier les trois cas :



Polygone de Q relatif à a

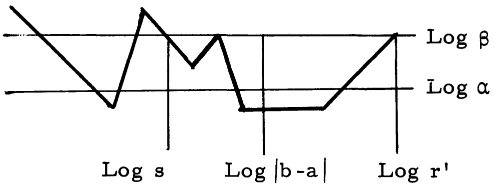
- Dans la couronne Δ : $r < |x-a| < r'$, pour $r < \rho < r'$ on a

$$\alpha < \inf(|Q|_a(r), |Q|_a(r')) \leq |Q|_a(\rho) \leq \sup(|Q|_a(r), |Q|_a(r')) < \frac{1}{\alpha}.$$

Si tous les zéros et les pôles de Q ne sont pas situés sur un même cercle de centre a, on peut trouver r'', avec $r < r'' < r'$ tel que dans la couronne Δ'', $r'' < |x-a| < r'$. Si C est le cercle $C(a, r'')$, on voit que $z_{\Delta'}(Q) + p_{\Delta'}(Q) \leq n$, $z_C(Q) + p_C(Q) \leq n$ et $z_{\Delta''}(Q) + p_{\Delta''}(Q) \leq n$, comme d'autre part $\alpha < |Q|_a(r'') < 1/\alpha$, on a $z_{\Delta'}(R) = z_{\Delta'}(Q)$, $p_{\Delta'}(R) = p_{\Delta'}(Q)$, ... et donc $z_\Delta(R) = z_\Delta(Q)$ et $p_\Delta(R) = p_\Delta(Q)$. Si tous les zéros et pôles de Q sont sur le cercle $C = C(a, r'')$, alors $z_\Delta(Q) = p_{\Delta'}(Q) = z_{\Delta''}(Q) = p_{\Delta''}(Q) = 0$ et il en est donc de même pour R. Pour le cercle, on obtient $z_C(Q) = z_C(R)$ et $p_C(Q) = p_C(R)$ en raisonnant sur les disques intérieurs ainsi qu'on l'a déjà dit. D'où encore $z_\Delta(Q) = z_\Delta(R)$ et $p_\Delta(Q) = p_\Delta(R)$.

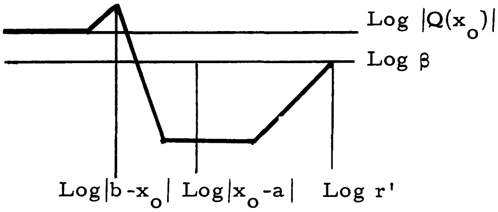
- Dans la couronne Δ : $r < |x-a| < r'$, pour $r < \rho < r'$ on a $|Q|_a(\rho) < \beta$ et $|Q|_a(r) = |Q|_a(r') = \beta$. Alors le polygone de valuation de Q relatif à a a nécessairement une pente négative à droite de $\operatorname{Log} r$ et une pente positive à gauche de $\operatorname{Log} r'$ donc plus de zéros que de pôles : $z_\Delta(Q) > p_\Delta(Q)$. Soit b un pôle de Q dans Δ (s'il n'y en a pas on a déjà résolu le problème).

Comme $|Q|_b(0) = +\infty$, que $|Q|_b(\rho) < \rho < \beta$ pour $|b-a| < \rho < r'$, il existe s, $0 < s < |b-a|$, tel que $|Q|_b(\rho) = \beta$ et $|Q|_b(\rho) < a$ pour $s < \rho < r'$ et $|Q|_b(\rho) \geq \beta$ au voisinage gauche de s.



Polygone de Q relatif à b

Le polygone de Q relatif à b a alors une pente négative ou nulle à gauche de Log s et donc dans le disque $D = D(b, s^-)$, $p_D(Q) \geq z_D(Q)$ et donc $p_D(Q) + z_D(Q) < p_\Delta(Q) + z_\Delta(Q)$, donc $p_D(Q) + z_D(Q) \leq n$. Comme d'autre part $\alpha < |Q|_b(s) = \beta < 1/\alpha$, on a donc $p_D(Q) = p_D(R)$. En raisonnant de même avec les autres pôles de Q situés dans Δ on trouve un nombre fini de cercles $D_1, \dots, D_m$ (qui peuvent coïncider pour des pôles différents) et pour lesquels on a $p_{D_i}(Q) = p_{D_i}(R)$. D'autre part pour $x \in \Delta$, $x \notin D_i$, $1 \leq i \leq m$, on a $|Q(x)| \leq \beta$; en effet, si $\beta < |Q(x_o)| < +\infty$ comme au voisinage de x_o, $|Q(x)|$ reste constant, et que $|Q|_{x_o}(|x_o - a|) = |Q|_a(|x_o - a|) < \beta$ le polygone doit avoir un changement de pente négatif au-dessus de la droite d'ordonnée Log β, donc Q a un pôle en b tel que $|Q|_{x_o}(|b-x_o|) > \beta$, donc $|Q|_b(|b-x_o|) > \beta$ ce qui prouve que x_o appartient au disque $D(b, s^-)$.



Polygone de Q relatif à x_o

Puisque $\sup\limits_{x \in \Delta \cap \complement(\bigcup\limits_i D_i)} |Q(x)| \leq \beta < 1/\alpha$, on a aussi $\sup\limits_{x \in \Delta \cap \complement(\bigcup\limits_i D_i)} |R(x)| \leq \beta$, donc R n'a pas de pôles dans $\Delta \cap \complement(\bigcup\limits_i D_i)$. Donc :

$$p_\Delta(R) = \sum_i p_{D_i}(R) = \sum_i p_{D_i}(Q) = p_\Delta(Q)$$

et puisque $z_\Delta(Q) - p_\Delta(Q) = z_\Delta(R) - p_\Delta(R)$ on a aussi $z_\Delta(Q) = z_\Delta(R)$.

- Dans la couronne Δ : $r < |x-a| < r'$, pour $r < \rho < r'$ on a $|Q|_a(\rho) > \beta'$ et $|Q|_a(r) = |Q|_a(r') = \beta'$.

Le même raisonnement que dans le cas précédent, où on permute le rôle des zéros et des pôles, nous prouve que la propriété annoncée est encore vérifiée.

Enfin si Δ est une couronne semi-fermée ou fermée, la propriété se démontre en considérant séparément la couronne ouverte et les disques intérieurs des cercles extrémaux. ||

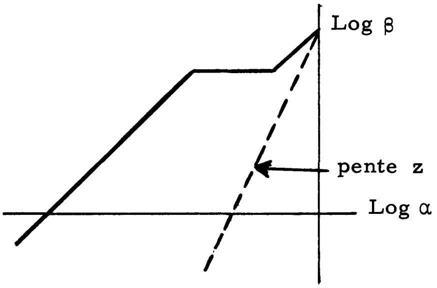
13. 7. - THEOREME. - Soit f un élément méromorphe non identiquement nul ou infini sur un disque ou une couronne Δ. Il existe une fraction rationnelle Q et un élément méromorphe g sur Δ sans pôles ni zéros dans Δ, tel que $f = Qg$.

De plus, si la fraction rationnelle R approxime f suffisamment sur Δ, R et f ont même nombre de pôles et de zéros et si la suite R_n converge uniformément sur Δ vers f, les pôles et les zéros de f sont les limites des pôles et zéros des R_n.

Soit Δ le disque $D(0,r)$ (resp. la couronne $r' < |x| < r$), et soit R_n une suite de fractions rationnelles convergeant vers f uniformément sur Δ (au sens de $\overline{K}$). Remarquons d'abord qu'il résulte de la démonstration de la proposition 13. 4. que l'on a $0 < |f|(r) < +\infty$ (resp. $0 < \inf_{r' \leq \rho \leq r}(|f|(\rho)) \leq \sup_{r' \leq \rho \leq r}(|f|(\rho)) < +\infty$, sauf éventuellement si $r' = 0$ mais alors f se prolonge dans tout le disque $D(0,r)$ en un élément méromorphe et on est ramené au cas précédent).

Soit alors α tel que $\alpha < |f|(r) < 1/\alpha$ (resp. $\alpha < \inf_{r' \leq \rho \leq r}(|f|(\rho)) \leq \sup_{r' \leq \rho \leq r}(|f|(\rho)) < 1/\alpha$). Soit R une fraction rationnelle approximant f uniformément sur Δ à α près. Comme alors pour ρ tel que $\alpha < |f|(\rho) < 1/\alpha$ on a $|f|(\rho) = |R|(\rho)$, R vérifie la condition précédente. Si R' approxime aussi f à α près, R' approxime R à α près et en vertu du lemme 13. 6. on voit que R et R' ont le même nombre z de zéros et le même nombre p de pôles dans Δ.

Posons $\beta = |f|(r)$ (resp. $\beta = \inf\limits_{r' \leq \rho \leq r} |f|(\rho)$). Soit a un zéro de R et considérons le polygone de valuation de R relatif à a.



Polygone de R relatif à a
(cas du disque)

- Cas où Δ est un disque.

Alors pour $\rho < r$, le polygone a une pente toujours inférieure ou égale à z, et donc le polygone de R est situé au-dessus de la droite de pente z passant par le point de coordonnées $(\mathrm{Log}\ r, \mathrm{Log}\ \beta)$. On a donc pour $0 < \rho < r$

$$|R|_a(\rho) \geq \beta \left(\frac{\rho}{r}\right)^z$$

et donc pour $\rho = r\left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)^{1/z}$, on a $|R|_a(\rho) \geq 2\alpha > \alpha$.

Donc il existe $\eta \leq r\left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)^{1/z}$ tel que $\alpha < |R|_a(\eta) < 1/\alpha$.

Si R' approxime aussi f (et donc R) à α près sur Δ il résulte du lemme 13. 6. que R et R' ont autant de zéros dans le disque $D(a, \eta)$. En raisonnant ainsi pour tous les zéros de R, on voit qu'on peut trouver un nombre fini de disques de diamètres inférieurs à $r\left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)^{1/z}$, contenus dans Δ, dans lesquels R et R' ont exactement le même nombre de zéros, et qui contiennent tous les zéros de R (et R'). On peut donc numéroter les zéros de R et R', à savoir $a_1, \dots, a_z$, $a'_1, \dots, a'_z$ de telle sorte que

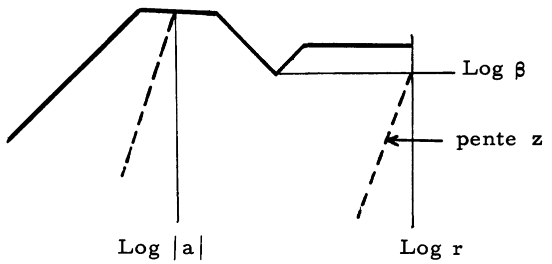
$$|a_k - a'_k| < r\left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)^{1/z}, \quad 1 \leq k \leq z .$$

- Cas où Δ est une couronne.

Alors pour $\rho < |a|$ le polygone de R relatif à a est situé au-dessus de la droite de pente z passant par le point $(\text{Log } |a| , \text{Log } |R| (|a|))$, il est donc au-dessus de la droite de pente z passant par le point $(\text{Log } r , \text{Log } \beta)$ puisque $\text{Log } r \geq \text{Log } |a|$ et $\text{Log } |R| (|a|) > \text{Log } \beta$ donc $|R|_a(\rho) > \beta (\frac{\rho}{r})^z$, et il existe

$$\eta \leq \inf \left(r\left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)^{1/z} , |a|\right)$$

tel que $\alpha < |R|_a(\eta) < 1/\alpha$.
Le disque $D(a, \eta)$ est alors contenu dans Δ et le raisonnement se termine comme dans le cas du disque.



Polygone de R relatif à a
(cas de la couronne)

On démontre de la même façon que l'on peut numéroter les p pôles de R et R', à savoir $b_1, \dots, b_p$, $b'_1, \dots, b'_p$, de telle sorte que

$|b_j - b'_j| < r(2\alpha\beta')^{1/p}$ avec

$\beta' = |f| (r)$ (resp. $\beta' = \sup\limits_{r' \leq \rho \leq r} |f|(\rho)$).

Soit alors (α_n) une suite de nombres tendant vers 0 en décroissant, et soit $(R_n(x))$ une suite de fractions rationnelles telles que R_n approche f à α_n près sur Δ. D'après ce qu'on vient de voir à partir d'un certain rang N tous les R_n ont le même nombre de zéros et de pôles, et on peut numéroter les zéros et les pôles de R_n soit, $a_1^n, \dots, a_z^n$, $b_1^n, \dots, b_p^n$, de sorte que l'on ait

$$|a_i^n - a_i^{n+1}| < r \quad \left(2\frac{\alpha_n}{\beta}\right)^{1/z} \qquad 1 \leq i \leq z ,$$

$$|b_j^n - b_j^{n+1}| < r \quad (2\alpha_n \beta')^{1/p} \qquad 1 \leq j \leq p .$$

Les suites $(a_i^n)_n$ et $(b_j^n)_n$ forment donc des suites de Cauchy puisque K est complet, ces suites convergent vers des limites a_i et b_j ; Δ étant fermé a_i et b_j appartiennent à Δ .

D'autre part puisque R_n converge uniformément vers f sur Δ , on a $f(a_i) = \lim\limits_{n\to\infty} R_n(a_i^n) = 0$, $f(b_j) = \lim\limits_{n\to\infty} R_n(b_j^n) = \infty$, ce qui montre que les a_i et les b_j sont des zéros et des pôles de f respectivement et donc que $\inf\limits_{i,j} |a_i - b_j| > 0$.

Posons alors

$$Q_n(x) = \frac{\prod_i (x-a_i^n)}{\prod_j (x-b_j^n)} \quad , \qquad Q(x) = \frac{\prod_i (x-a_i)}{\prod_j (x-b_j)} \; .$$

Nous montrerons plus loin (lemme 13. 8.) que Q_n converge uniformément sur $\overline{K}$ de Q . Ecrivons $R_n(x) = Q_n(x)\, P_n(x)$. $P_n(x)$ n'a ni zéros ni pôles dans Δ . On a donc si Δ est un disque

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\Delta} |P_n(x) - P_{n+1}(x)| &= |P_n - P_{n+1}|(r) = |\frac{R_n}{Q_n} - \frac{R_{n+1}}{Q_{n+1}}|(r) \\
&= |\frac{R_n - R_{n+1}}{Q_n} + \frac{R_{n+1}(Q_{n+1} - Q_n)}{Q_n\, Q_{n-1}}|\ (r) \\
&\leq \max\left(\frac{|R_n - R_{n+1}|(r)}{|Q_n|\ (r)} \ ,\ \frac{|R_{n+1}|\ (r)}{|Q_n|(r)\, |Q_{n+1}|(r)}\, |Q_{n+1} - Q_n|(r)\right)
\end{aligned}$$

et cette dernière quantité tend vers 0 quand $n\to\infty$ puisque R_n et Q_n convergent uniformément sur Δ quand $n\to\infty$, et que $|R_n|\,(r)$ et $1/|Q_n|(r)$ sont bornés.

Dans le cas de la couronne on a

$$\sup_{x\in\Delta} |P_n(x) - P_{n+1}(x)| = \max(|P_n - P_{n+1}|(r')\ ,\ |P_n - P_{n+1}|(r))\ ,$$

et le même calcul montre que cette dernière quantité tend vers 0 quand $n\to\infty$.

Il en résulte que la fraction rationnelle P_n converge uniformément sur Δ vers un élément méromorphe g . On a d'autre part pour tout $x\in\Delta$

$|P_n(x)| = |P_n|(r)$ et donc $|g(x)| = \lim_{n\to\infty} |P_n(x)| = \lim_{n\to\infty} |P_n|(r) \neq 0$, $\neq \infty$, g n'a donc ni zéro ni pôle dans Δ .

On a bien $f = \lim_n R_n = \lim_n Q_n P_n = \lim_n Q_n \lim_n P_n = Q g$. ||

13. 8. - Prouvons le lemme annoncé.

LEMME. - <u>Si l'on a</u> z+p <u>suites</u> $(a_i^n)_{n\in \mathbb{N}}$ $1 \leq i \leq z$, et $(b_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $1 \leq j \leq p$, <u>convergeant vers les limites</u> a_i <u>et</u> b_j <u>(différentes de l'infini) telles que</u> $\inf_{i,j} |a_i - b_j| \neq 0$, <u>la suite de fractions rationnelles</u>

$$Q_n(x) = \frac{\prod_{i=1}^{z} (x-a_i^n)}{\prod_{j=1}^{p} (x-b_j^n)} ,$$

<u>converge uniformément sur</u> $\overline{K}$ <u>vers la limite</u>

$$Q(x) = \frac{\prod_i (x-a_i)}{\prod_j (x-b_j)}$$

(Remarquons que si $a^n \to a$ et $b^n \to a$, $\dfrac{x-a^n}{x-b^n}$ ne converge pas uniformément vers 1 sauf si $a^n = b^n$ pour tout n assez grand).

Donnons-nous $\alpha < 1$, il faut prouver qu'il existe N tel que pour $n > N$, et pour tout $x \in K$, $Q_n(x)$ et $Q(x)$ soient voisins d'ordre α .

Soit $\gamma > |a_i|$, $\gamma > |b_j|$ pour tous i et j . On peut trouver N tel que pour $n > N$ on ait $\gamma > |a_i^n|$ et $\gamma > |b_j^n|$ pour tous i et j , alors pour $|x| > \gamma$ on aura

$$|Q_n(x)| = |Q(x)| = |x|^{z-p}$$

Si $z > p$, on aura pour $|x| > \max(\gamma , (\frac{1}{\alpha})^{1/z-p})$,

$$|Q_n(x)| > \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad |Q(x)| > \frac{1}{\alpha}$$

donc $Q_n(x)$ et $Q(x)$ sont voisins d'ordre α .

Si $z < p$, on aura pour $|x| > \max(\gamma, (\frac{1}{\alpha})^{1/p-z})$

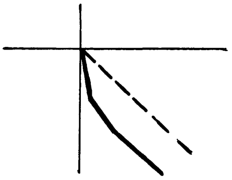
$$|Q_n(x)| < \alpha \quad \text{et} \quad |Q(x)| < \alpha ,$$

donc $|Q_n(x) - Q(x)| < \alpha$, $Q_n(x)$ et $Q(x)$ sont voisins d'ordre α .

Si $z = p$, $Q_n - Q = P_n$ est une fraction rationnelle dont le numérateur a un degré inférieur à celui du dénominateur, qui n'a pas de pôles dans la couronne $|x| > \gamma$, et telle que $|P_n|(\gamma) \leq 1$, le polygone de P_n étant convexe pour $r > \gamma$, on aura $|P_n|(r) \leq \frac{\gamma}{r}$, et

donc pour $|x| \geq \frac{\gamma}{\alpha}$,

$$|P_n(x)| = |P_n|(|x|) \leq \frac{\gamma}{|x|} \leq \alpha .$$



En résumé, on peut trouver N et β tels que $n > N$ et $|x| > \beta$ impliquent que $Q_n(x)$ et $Q(x)$ soient voisins d'ordre α .

Voyons ce qui se passe pour $x \leq \beta$.

Soient $\delta < \inf_{i,j} |a_i - b_j|$, $\lambda = \max(\sup_{i,k} |a_i - a_k| , \sup_{j,\ell} |b_j - b_\ell|)$
$\mu = \inf(\delta, \alpha \frac{\delta^p}{\lambda^{z-1}}, \alpha \frac{\delta^z}{\lambda^{p-1}}, \lambda)$ et soit $N' > N$ tel que pour $n > N'$,
$|a_i^n - a_i| < \mu$, $|b_j^n - b_j| < \mu$. Alors on a $|a_i - b_j^n| > \delta$ et $|b_j - a_i^n| > \delta$ pour tous i et j , $n > N'$; et pour tous $ijk\ell$ et $n > N'$

$$|a_i^n - a_k^n| < \lambda , \quad |b_j^n - b_\ell^n| < \lambda .$$

On a donc pour $|x - a_i| < \mu$

$$|Q(x)| < \mu \frac{\lambda^{z-1}}{\delta^p} < \alpha \quad \text{et} \quad |Q_n(x)| < \alpha ,$$

donc $|Q(x)-Q_n(x)| < \alpha$, et on a pour $|x-b_j| < \mu$

$$|Q(x)| > \frac{\delta^z}{\mu\,\lambda^{p-1}} > \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad |Q_n(x)| > \frac{\delta^z}{\mu\,\lambda^{p-1}} > \frac{1}{\alpha} .$$

Donc dans $D = (\cup D(a_i, \mu^-)) \cup (\cup D(b_j, \mu^-)$, pour $n > N'$, $Q_n(x)$ approxime $Q(x)$ uniformément à α près.

Il reste à voir ce qui se passe dans $D(0, \beta^+) \cap \complement D$.

Soient S_n , S les numérateurs de Q_n , Q et T_n , T les dénominateurs de Q_n , Q . Posons $a_i^n = a_i + \varepsilon_i^n$, $b_j^n = b_j + \varepsilon_{z+j}^n$. Alors

$$Q_n(x) - Q(x) = \frac{S_n(x)\,T(x) - S(x)\,T_n(x)}{S_n(x)\,S(x)} = \frac{P(\varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_{z+p}^n)}{S_n(x)\,S(x)}$$

où P est un polynôme en $\varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_{z+p}^n$ sans terme constant et à coefficients fonctions polynômes de x . On a, pour $x \in D(0, \beta^+) \cap \complement D$ et $n > N'$, $|S_n(x)| = |S(x)| > \mu^p$. Comme $|x| < \beta$, les coefficients de P sont bornés uniformément en x , et pour $|\varepsilon_k^n|$ assez petit, $1 \leq k \leq z+p$, ou encore $n > N'' > N'$; on aura

$$|P(\varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_{z+p}^n)| < \frac{\alpha}{\mu^{2p}} , \qquad \text{et donc}$$

$$|Q_n(x) - Q(x)| < \alpha .$$

Finalement pour $n > N''$, $Q_n(x)$ approxime $Q(x)$ à α près dans $\bar{K}$. ||

13.9. - COROLLAIRE. - <u>Si</u> f <u>est un élément méromorphe sur un disque ou une couronne</u> f <u>est le quotient de deux éléments analytiques.</u>

En effet, il résulte de la démonstration que g est un élément analytique (on a la convergence uniforme de P_n vers g au sens ordinaire). Donc

$$f = \varphi/\psi \quad \text{avec} \quad \varphi = g \prod_{i=1}^{z} (x-a_i) \quad \psi = \prod_{j=1}^{p} (x-b_j) . \quad ||$$

13.10. - COROLLAIRE (Théorème de factorisation) - Soit f un élément analytique sur un ensemble A. Si le cercle $C(y,r)$ est contenu dans A et si r est un point intérieur de $Pr_y(A)$, si m est le changement de pente du polygone de valuation f relatif à y au point d'abscisse $\operatorname{Log} r$ (m peut être nul), f a exactement m zéros (éventuellement confondus) dans ce cercle. Si (a_k) sont ces zéros on peut décomposer f sous la forme

$$f(x) = (x-a_1) \ \dots \ (x-a_m)\, g(x)$$

où g est un élément analytique sur A ne s'annulant pas sur le cercle $C(y,r)$.

En effet un élément analytique est un élément méromorphe (la convergence uniforme au sens ordinaire entraînant la convergence uniforme au sens de $\bar{K}$). De plus f n'a pas de pôles. Or si R approxime f suffisamment, au voisinage du point d'abscisse $\operatorname{Log} r$ son polygone de valuation relatif à y coïncidera avec celui de f, et le changement de pente m prouve que R a m zéros sur le cercle $C(y,r)$ donc f aussi. Nous savons aussi que f se décompose sur ce cercle sous la forme $f(x) = Q(x)\, g(x)$, où $Q(x) = (x-a_1), \dots, (x-a_m)$ et $g(x)$ est un élément analytique sur $C(y,r)$, il faut vérifier que cette décomposition est vraie sur tout A.

Or si l'on considère la suite de fractions rationnelles sans pôles dans A, telle que $\sup\limits_{x\in A} |R_n(x) - f(x)| = \alpha_n$, α_n tendant vers 0, et si l'on écrit $R_n = Q_n P_n$, $Q_n(x) = (x-a_1^n), \dots, (x-a_m^n)$, (a_k^n) étant les zéros de R_n situé dans le cercle $C(y,r)$ on a vu que P_n convergeait uniformément vers g sur $C(y,r)$, montrons que P_n converge uniformément sur A vers un élément analytique g. Or dans $\complement C(y,r)$ $\frac{1}{Q_n}$ converge uniformément vers $\frac{1}{Q}$. Donc dans $A \cap C(y,r)$ on a

$$\sup_{x\in A\cap \complement C(y,r)} |P_n(x) - P_{n+1}(x)| \leq$$

$$\sup_{x\in A\cap \complement C(y,r)} \left|(R_n(x) - R_{n+1}(x)) \frac{1}{Q_n(x)} - R_{n+1}(x) \left(\frac{1}{Q_n(x)} - \frac{1}{Q_{n+1}(x)}\right)\right|$$

et ceci tend vers 0 quand $n \to \infty$, donc la suite P_n converge uniformément sur $A \cap \complement C(y,r)$, donc converge uniformément sur A vers l'élément analytique g. ||

Habituellement ce théorème est démontré pour les éléments analytiques dans les couronnes en utilisant des techniques de séries entières [6] .

13. 11. - PROPOSITION (Continuité des zéros et des pôles). - Soit f un élément méromorphe sur Δ , non identiquement nul ou infini, où Δ est le disque $D(0,r)$ (resp. la couronne $0 < r' < |x| < r$) . Posons $\beta = \beta' = |f|(r)$ (resp. $\beta = \inf_{r' \leq \rho \leq r} |f|(\rho)$ et $\beta' = \sup_{r' \leq \rho \leq r} |f|(\rho)$ (on a $0 < \beta \leq \beta' < +\infty$).

Soit α avec $0 < \alpha < \beta \leq \beta' < 1/\alpha$. Si g est un élément méromorphe sur Δ qui approche f uniformément sur Δ à α près, g a le même nombre z de zéros et le même nombre p de pôles que f dans Δ . On peut faire correspondre les zéros a_i et a'_i et les pôles b_j et b'_j de f et g respectivement de sorte que l'on ait :

$$|a_i - a'_i| < r \quad (2\frac{\alpha}{\beta})^{1/z} \qquad 1 \leq i \leq z$$

$$|b_j - b'_j| < r \quad (2\alpha\beta)^{1/z} \qquad 1 \leq j \leq p \quad .$$

Cette proposition résulte directement de la démonstration du théorème 13. 7.. Si R_n et Q_n sont des fractions rationnelles qui approchent f et g respectivement à α près sur Δ , alors R_n et Q_n sont proches d'ordre α et les estimations précédentes ont été établies en 13. 7. pour les zéros et les pôles de R_n et Q_n . Si R_n et Q_n convergent uniformément sur Δ vers f et g respectivement les estimations restent vraies à la limite pour les zéros et les pôles de f et g qui sont limites des zéros et pôles de R_n et Q_n . ||

13. 12. - PROPOSITION. - La limite uniforme sur A d'une suite d'éléments méromorphes sur A est un élément méromorphe sur A .

On applique le procédé diagonal. ||

13. 13. - PROPOSITION. - *Soit* f *un élément méromorphe sur* A *prenant ses valeurs dans* $B \subset \overline{K}$, *et soit* g *un élément méromorphe sur* B . *Alors* $g \circ f$ *est un élément méromorphe sur* A .

On voit d'abord que si g est une fraction rationnelle Q , et si la suite de fractions rationnelles R_n converge uniformément sur A vers f , comme Q est uniformément continue, $Q \circ R_n$ converge uniformément vers $Q \circ f$ qui est un élément méromorphe sur A . Si alors la suite (Q_n) converge uniformément sur B vers g , $Q_n \circ f$, qui est un élément méromorphe, converge uniformément sur A vers $g \circ f$ qui est donc un élément méromorphe sur A . ||

13. 14. - COROLLAIRE. - *L'inverse d'un élément méromorphe méromorphe.*

13. 15. - Comme l'addition et la multiplication ne se prolongent pas par continuité partout dans $K \times K$ (l'addition n'est pas continue au point (∞ , ∞) et la multiplication n'est pas continue aux points $(0 , \infty)$ et $(\infty , 0)$, la somme et le produit de deux éléments méromorphes peuvent ne pas être des éléments méromorphes, même dans des bons cas (par exemple si A est quasi-connexe).

Exemple : Soit (a_n) une suite de points convergeant vers 0 et soit A l'ensemble des $x \neq 0$ tels que $|x| \neq a_n$ pour tout n (A est quasi-connexe). Soit a un point de K tel que $|a| > 1$. Posons $f(x) = a + \sum_n \frac{a_n}{x-a_n}$. On voit sans peine que cette série converge pour $x \in A$, et que si $x \in A$, $|f(x)| = |a|$, mais cette série ne converge pas uniformément sur A . Si cependant f était un élément méromorphe sur A , ce serait un élément analytique (puisque uniformément borné sur A) et donc d'après le théorème 4. 7. la somme uniforme de ses parties singulières, donc la somme de la série ci-dessus. Par contre la série converge uniformément pour $|x| > \varepsilon > 0$.

La fonction $g(x) = f(x) + \frac{1}{x}$ est un élément méromorphe sur A étant donné $\alpha < \frac{1}{|a|}$, pour $|x| < \frac{1}{\alpha}$ on a $|g(x)| > \frac{1}{\alpha}$, et pour tout

$$\left|\frac{1}{x} + a + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x-a_k}\right| > \frac{1}{\alpha} ,$$

et on peut trouver N tel que pour $n > N$ et $|x| \geq \frac{1}{\alpha}$

$$\left|g(x) - \frac{1}{x} - a - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x-a_k}\right| < \alpha ,$$

donc $\left(g(x) , \frac{1}{x} + a + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x-a_k}\right) \in V_\alpha$ pour $n > N$ ce qui démontre notre assertion.

Par contre $g(x) - \frac{1}{x}$ n'est pas un élément méromorphe ainsi qu'on vient de le voir.

De même $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ est un élément méromorphe sur A, mais $x\, h(x)$ n'en est pas un.

Par contre, lorsqu'il s'agit des fonctions méromorphes tous les résultats établis pour les fonctions analytiques se généralisent au cas des fonctions méromorphes. Pour le prouver nous nous ramenons au cas des fonctions analytiques en démontrant la réciproque du lemme 13. 2. .

13. 16. - PROPOSITION. - Soit $\mathcal{B}$ une famille complètement régulière. Une fonction $\mathcal{B}$ méromorphe au sens M_1 est $\mathcal{B}$-méromorphe au sens M_2 et réciproquement.

La partie directe a été prouvée (lemme 13. 2.). Pour prouver la réciproque il suffit de montrer qu'un élément méromorphe f sur $B \in \mathcal{B}$ (au sens M_2) est une fonction $\mathcal{B}$-méromorphe sur $\mathcal{B}$.

Soient a et b deux points de B tels que $f(a) \neq \infty$, $f(b) \neq \infty$. Alors les fonctions de valuation $|f|_a(r)$ et $|f|_b(r)$ sont majorées par un nombre M pour $r \leq |b-a|$. Soit R une fraction rationnelle approximant f à α près avec

$\alpha < \frac{1}{M}$. Alors $|R|_a(r) \leq M$ et $|R|_b(r) \leq M$ pour $r \leq |b-a|$. D'autre part R n'a qu'un nombre fini de zéros $a_1, \dots, a_k$ dans le disque $D(b, |b-a|^-)$ et un nombre fini de pôles $b_1, \dots, b_\ell$ dans le disque $D(b, |b-a|^-)$. Donc pour $|x-a| < |b-a|$ et $|x-a| \neq |x-a_1|$, $1 \leq i \leq k$, on a $|f(x)| \leq |f|_a(r) \leq M$. De même pour $|x-b| < |b-a|$, $|x-b| \neq |x-b_j|$, $1 \leq j \leq \ell$, on a $|f(x)| \leq |f|_b(r) \leq M$.

Notons B_{ab} l'ensemble des $x \in B$ tels que $|x-a| < |b-a|$ et $|x-a| \neq |x-a_i|$ $1 \leq i \leq k$, ou tels que $|x-b| < |b-a|$ et $|x-b| \neq |x-b_j|$ $1 \leq j \leq \ell$. Sur B_{ab} f est un élément méromorphe borné donc un élément analytique. D'autre part, puisque la classe $\mathcal{B}$ est complètement régulière $B_{ab} \in \mathcal{B}$. Enfin si $B°$ représente l'ensemble des points de B où f n'est pas infini, on voit que la famille $(B_{a,b})_{(a,b) \in B° \times B°}$ est enchaînée et que $\bigcup_{(a,b) \in B° \times B°} (B_{a,b}) = B°$.
Enfin si $f(a) = \infty$, il résulte du théorème 13. 7. que a est bien un pôle de f au sens de M_1 . (On peut aussi le voir en remarquant que $1/f(x)$ est un élément analytique au voisinage de a). ||

14

COMPOSEE DE DEUX FONCTIONS ANALYTIQUES

Les résultats de ce paragraphe découlent immédiatement du paragraphe précédent.

THEOREME. - Soit $\mathcal{B}$ une famille complètement régulière. Soient f une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur B, et g un élément analytique sur $A \supset f(B)$. Alors $g \circ f$ est une fonction $\mathcal{B}$-analytique sur B.

Supposons d'abord que f soit un élément analytique sur $B \in \mathcal{B}$. Alors f et g sont des éléments méromorphes et en vertu de la proposition 13. 13, $g \circ f$ est un élément méromorphe. Comme d'après la proposition 13. 16 $g \circ f$ est une fonction $\mathcal{B}$-méromorphe au sens M_1 et que de plus $g \circ f$ n'a pas de pôles dans B (puisque ni f ni g n'en ont) $g \circ f$ est une fonction $\mathcal{B}$-analytique.

Supposons maintenant que f soit une fonction $\mathcal{B}$-analytique définie par la famille cohérente f_n d'éléments analytiques sur $B_n \in \mathcal{B}$.

D'après ce qu'on vient de voir $g \circ f_n$ est une fonction $\mathcal{B}$-analytique pour tout n, or $(g \circ f_n)$ est une famille cohérente définissant $g \circ f$, et donc d'après la proposition 7. 8, $g \circ f$ est une fonction $\mathcal{B}$-analytique. ||

Remarques :

1) Un cas particulier du théorème précédent est celui où f ne s'annule pas dans B et $g(x) = \frac{1}{x}$. Il résulte donc de l'étude du paragraphe 12 sur l'inverse d'une fonction analytique qu'il faut supposer la famille $\mathcal{B}$ complètement régulière.

2) Le composé de deux éléments analytiques peut ne pas être un élément analytique. Prenons le cas particulier $g(x) = 1/x$; on a déjà vu que l'inverse d'un élément analytique ne s'annulant pas pouvait ne pas être un élément analytique.

15

PROLONGEMENT ANALYTIQUE

15. 1. - Soit une fonction analytique définie au voisinage d'un point a, par exemple par sa série de Taylor. Soit b un autre point de K. On se demande si f est prolongeable analytiquement au point b, c'est-à-dire s'il existe un ensemble analytique A contenant a et b et un élément analytique g sur A coïncidant avec f au voisinage de a, ou plus généralement s'il existe une suite finie $A_1, \dots, A_n$ d'ensembles analytiques avec $a \in A_1$, $b \in A_n$, $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, $1 \leq i < n$, et des éléments analytiques f_i sur A_i tels que $f_i = f_{i+1}$ sur $A_i \cap A_{i+1}$ et que f_1 coïncide avec f au voisinage de a.

On a vu que la valeur du prolongement de f en b pouvait dépendre de l'ensemble considéré A (car $\mathcal{A}$ n'est pas stable par intersection) ou de la suite A_i choisie (proposition 8. 6.). Par contre, si on précise que A (ou les A_i) doit appartenir à une famille $\mathcal{B}$ régulière, le deuxième cas se ramène au premier cas (théorème 8. 3.) et le prolongement de f en b ne dépend pas de l'ensemble considéré (principe du prolongement uniforme, théorème 8. 5.).

Pour simplifier nous supposerons que f est donnée au voisinage de 0. En la développant en série de Taylor à l'origine, on peut la prolonger dans tout le disque de convergence de sa série de Taylor $D = D(0, r)$. Si $f(x) = \Sigma\, a_n x^n$, $r = \dfrac{1}{\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}}$. Si $|a_n|\; r^n \to 0$ quand $n \to \infty$, $D = D(0, r^+)$ et f est un élément analytique sur D. Si $|a_n| r^n$ ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$, $D = D(0, r^-)$. Pour que f se prolonge en dehors de D nous obtenons le premier critère :

15.2. - PROPOSITION. - Si f se prolonge en dehors de son disque de convergence, f est un élément analytique sur son disque de convergence D.

Si le disque de convergence D est fermé, il n'y a rien à prouver, puisqu'alors la série entière converge uniformément sur D, et définit donc un élément analytique.

Supposons alors que $D = D(0, r^-)$. Soient $y \in K$, $|y| \geq r$, A un ensemble analytique contenant 0 et y, g un élément analytique sur A coïncidant avec f au voisinage de 0. Soit T un trou intérieur de A contenu dans D. Il existe alors $\rho < r$ tel que T soit contenu dans $D(0, \rho^+)$. Sur l'ensemble analytique $A \cap D(0, \rho^+)$, f et g sont deux éléments analytiques coïncidant au voisinage de 0, donc coïncidant partout. Comme d'autre part f est un élément analytique sur $(A \cap D(0, \rho^+)) \cup T$, on a $g_T = 0$. On a donc

$$g = \sum_{T \in \mathfrak{T}^\circ(A)} g_T = \sum_{\substack{T \in \mathfrak{T}^\circ(A) \\ T \cap D = \emptyset}} g_T ,$$

et cette dernière série converge uniformément sur D vers un élément analytique sur D qui coïncide avec f. ||

15.3. - Nous donnerons plus loin des conditions sur les coefficients de Taylor de f pour que f soit un élément analytique dans son disque de convergence.

Soit alors f un élément analytique sur D. D'après le théorème 4.7., f se décompose suivant ses parties singulières. Mais que sont les trous intérieurs de D ?

15.3.1. - Si D est fermé, $D = D(0, r^+)$, D n'a qu'un trou T_0 qui est le trou de centre infini. On a $f = f_{T_0}$, où f_{T_0} est un élément analytique sur $\complement T_0 = D$. On le savait déjà !

Remarque : Si l'on cherche un prolongement de f sur un quasi-connexe A, et si le disque de convergence D est fermé, on sait ([5]) qu'il n'existe pas de tel prolongement. La situation est différente lorsqu'on cherche un prolongement de f sur un ensemble analytique A. Donnons l'exemple d'un élément analytique f dont la série de Taylor à l'origine a un disque de convergence fermé $D(0, r^+)$ et qui se prolonge sur un ensemble analytique A contenant le disque de convergence.

Soit a_n une suite de points de K, telle que $|a_n|$ forme une suite strictement décroissante convergeant vers r. Soit ρ_n une suite de nombres réels, avec $0 < \rho_n < |a_n|$. Soit A l'ensemble des x de K, tels que $|x-a_n| > \rho_n$. Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log |a_n| - \operatorname{Log} r}{\log |a_n| - \operatorname{Log} \rho_n} < +\infty ,$$

$A \in \mathcal{S}$, donc est analytique. Nous supposerons cette condition réalisée. Soit b_n une suite de points de K, telle que $|b_n - a_n| \neq 0$ pour tout n, et telle que $\dfrac{|b_n - a_n|}{\rho_n} \to 0$ quand $n \to \infty$. Alors le produit infini

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-b_n}{x-a_n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a_n - b_n}{x - a_n}\right)$$

converge uniformément sur A vers un élément analytique $f(x)$, puisque

$$\sup_{x \in A} \left|\frac{x-b_n}{x-a_n}\right| = \frac{|a_n - b_n|}{\rho_n} \to 0 \text{ quand } n \to \infty .$$

On voit que f est un élément analytique dans $D(0, r^+)$, mais n'est un élément analytique dans aucun disque plus grand. Le disque de convergence de sa série de Taylor en 0 est donc $D(0, r^+)$.

Nous ne connaissons pas de critère permettant de dire si une série entière, dont le disque de convergence est fermé, se prolonge ou non en dehors de son disque de convergence.

15.3.2. - Si D est ouvert, $D = D(0, r^-)$, et si r n'appartient pas au groupe des valeurs, D n'a qu'un trou intérieur T_0 qui est le trou de centre ∞. On a $f = f_{T_0}$, où f_{T_0} est un élément analytique sur $T_0 = D(0, r^+)$, ce qui signifie que le disque de convergence de f doit être $D(0, r^+)$. Il y a contradiction. D'où la proposition suivante.

PROPOSITION. - <u>Si le rayon de convergence</u> r <u>de la série entière</u>

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

<u>n'appartient pas au groupe des valeurs, et si</u>

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| r^n \neq 0 ,$$

<u>la fonction</u> $f(x)$ <u>ne se prolonge pas analytiquement en dehors de son disque de convergence.</u>

15.3.3. - Si D est ouvert, $D = D(0, r^-)$, et si r appartient au groupe des valeurs, les trous intérieurs de D sont d'une part le trou de centre infini $T_0 = \{x \mid |x| > r\}$, d'autre part les trous $T_i = D(\alpha_i , r^-)$ avec $|\alpha_i| = r$, $|\alpha_i - \alpha_j| = r$, $i \neq j$.

Comme on a alors, pour $T \in \mathfrak{T}^\circ(D)$,

$$f = f_T + \sum_{\substack{T' \in \mathfrak{T}(D) \\ T' \neq T}} f_{T'}$$

et que $\sum_{\substack{T' \in \mathfrak{T}^\circ(D) \\ T' \neq T}} f_{T'}$ est un élément analytique sur $D \cup T$, pour savoir si f se prolonge dans T, il suffit d'étudier si f_T se prolonge dans T.

Mais f_T se développe en série de Taylor autour de 0 si T est le trou T_0 de centre ∞, et en série de Laurent autour de α_i n'ayant que des termes d'exposant négatif si T est le trou $T_i = D(\alpha_i , r^-)$.

On peut alors recommencer le même raisonnement pour f_T (tout ce que l'on a dit sur les séries entières, s'applique, moyennant des changements évidents, aux séries de Laurent).

Si l'on s'intéresse au prolongement sur un quasi-connexe, le processus s'arrête lorsque la série entière ou la série de Laurent n'est pas un élément analytique dans son domaine de convergence, ou a un domaine de convergence fermé.

Si f se prolonge au point y sur un quasi-connexe, ce prolongement est obtenu en un nombre fini d'étapes.

15.4. - Cherchons des critères assurant que f est un élément analytique dans son disque de convergence. Comme on l'a vu, il suffit de considérer le cas où le disque est ouvert, et où le rayon de convergence appartient au groupe des valeurs. Par homothétie, on peut se ramener au cas où $r = 1$. Soit donc $D = D(0, 1^-)$. Si f est un élément analytique sur D, $|f(x)|$ est borné et donc les coefficients de Taylor de f sont bornés.

Soit S l'espace vectoriel des suites bornées d'éléments de K. Pour $a = (a_n)$, on pose $\|a\| = \sup_n |a_n|$. S est alors un espace de Banach ultramétrique [10]. Muni de la norme $\|f\| = \|f\|_D$, $H(D)$ est un espace de Banach ultramétrique. Considérons l'application linéaire de $H(D)$ dans S, qui à f associe la suite de ses coefficients de Taylor à l'origine $a(f)$. Notons SH l'image de cette application. Il est bien connu que $\|f\| = \|a(f)\|$. SH est donc un sous-espace fermé de S. Si E est un espace de Banach ultramétrique, nous dirons que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est <u>une base orthonormale</u> de E [10] si tout élément x de E se décompose de façon unique sous la forme $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$, avec $\|x\| = \sup_i |\lambda_i|$, et $\lambda_i \to 0$ quand $i \to \infty$ (c'est-à-dire suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I).

Notons $\mathfrak{k}$ le corps de restes de K, $x \to \overline{x}$ l'application canonique de $D(0, 1^+)$ dans $\mathfrak{k}$. Pour tout $\alpha \in \mathfrak{k}' = \mathfrak{k} - \{0\}$, choisissons un relèvement $\widetilde{\alpha}$ de cette application ; on a donc $\overline{\widetilde{\alpha}} = \alpha$. Doit $D_\alpha = D(\widetilde{\alpha}, 1^-)$. Alors

$$f = f_0 + \sum_{\alpha\in\mathfrak{k}} f_\alpha \quad , \text{ où } \quad f_0 \in H(D(0, 1^+)) \quad \text{et} \quad f_\alpha \in H(\complement D) \ ,$$

et de plus

$$\|f\| = \sup\left(\|f_0\| , \ \sup_\alpha \|f_\alpha\|\right) \quad \text{et} \quad \|f_\alpha\| \to 0 \quad \text{quand } \alpha \to \infty .$$

D'autre part, il est bien connu que

$$f_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i x^i \quad , \text{ avec } \|f_0\| = \sup_i |\lambda_i| \quad \text{et} \quad |\lambda_i| \to 0 \quad \text{quand } i \to \infty$$

et que

$$f_\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{j\alpha} \frac{\tilde{\alpha}^{j-1}}{(\tilde{\alpha}-x)^{j-1}} ,$$

avec $\quad \|f_\alpha\| = \|f_\alpha\|_{\complement D_\alpha} = \sup_j |\lambda_{j\alpha}| \quad$ et $\quad |\lambda_{j\alpha}| \to 0 \quad$ quand $\quad j \to \infty$.

Donc

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i x^i + \sum_{\alpha \in \mathcal{I}'} \sum_{j=0} \lambda_{j\alpha} \frac{\tilde{\alpha}^{j-1}}{(\tilde{\alpha}-x)^{j-1}}$$

avec

$$\|f\| = \sup_{i,j,\alpha} (|\lambda_i| , |\lambda_{j\alpha}|) ,$$

et

$$|\lambda_i| \to 0 \quad \text{quand } i \to \infty , \quad |\lambda_{j\alpha}| \to 0 \quad \text{quand } (j,\alpha) \to \infty .$$

Ceci prouve que les fonctions

$$e_i(x) = x^i \ , \ i \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad e_{j\alpha}(x) = \frac{\tilde{\alpha}^{j-1}}{(\tilde{\alpha}-x)^{j-1}} \ , \ j \in \mathbb{N} \ , \ \alpha \in \mathcal{I}'$$

forment une base orthonormale de $H(D)$. Notons s_i et $s_{j\alpha}$ les suites des coefficients de Taylor en 0 de ces fonctions.

PROPOSITION. - *L'espace* SH *est l'espace vectoriel fermé engendré par les suites*

$$s_i = (\delta_{in})_{n \in \mathbb{N}} \quad \underline{\text{et}} \quad s_{j\alpha} = \left(\binom{n+j}{j} \tilde{\alpha}^{-n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \ , \ i \in \mathbb{N} \ , \ j \in \mathbb{N} \ , \ \alpha \in \mathcal{I}' .$$

On notera que s_i et $s_{j\alpha}$ forment une base orthonormale de SH .

Nous allons établir quelques propriétés des éléments de SH .

15. 5. - LEMME. - *Soient* p *un entier* > 0 *et* j *un entier* ≥ 0 . *L'application* π_j *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : n \to \binom{n+j}{j} \bmod p$, *est périodique, de période* p^j . *Si* p *est premier et* $j \leq p^m - 1$, *cette application est périodique, de période* p^m .

Notons d'abord que

$$\frac{1}{(1-X)^j} = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_j(n)\, X^n .$$

Alors $\pi_j(n)$ périodique mod p , de période N , signifie que

$$\pi_j(n+sN) \equiv \pi_j(n) \quad \text{mod } p \quad \text{pour tous } n \text{ et } s$$

ce qui équivaut à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_j(n)\, X^n \equiv \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{\infty} \pi_j(n)\, X^{n+sN} \quad \text{mod } p$$

soit

$$\frac{1}{(1-X)^j} \equiv \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \pi_j(n)\, X^n}{1 - X^N} \quad \text{mod } p \quad .$$

Donc $\pi_j(n)$ périodique mod. p , de période N , équivaut donc à dire que $\dfrac{1-X^N}{(1-X)^j}$ est, modulo p, un polynôme de degré inférieur à N .

Si p est premier on a

$$1 - X^{p^m} \equiv (1-X)^{p^m} \quad \text{mod. } p$$

et donc pour $j \leq p^m - 1$

$$\frac{1-X^{p^m}}{(1-X)^j} \equiv (1-X)^{p^m - j} \quad \text{mod. } p$$

est donc bien, modulo p, identique à un polynôme de degré inférieur à p^m ce qui prouve la deuxième partie du lemme.

Soit maintenant p un entier quelconque. Posons $1 - X = Y$. Alors

$$\frac{1-X^N}{(1-X)^j} = \frac{1-(1-Y)^N}{Y^j} = \frac{1 - \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} (-Y)^i}{Y^j}$$

$$= \frac{1 - \sum_{i=0}^{j-1} \binom{N}{i} (-Y)^i}{Y^j} + Q(Y)$$

où $Q(Y)$ est un polynôme en Y de degré $N-j$ et donc $Q(1-X)$ est un polynôme en X de degré $N-j$.

La première somme est

$$\sum_{i=1}^{j-1} (-1)^i \binom{N}{i} \frac{Y^i}{Y^j} .$$

Pour montrer que $\pi_j(n)$ est de période N , mod p , il suffit donc de montrer que $\binom{N}{i} \equiv 0 \mod p$ pour $1 \leq i \leq j-1$.

Mais pour $i > 0$, $\binom{N}{i} = \frac{N!}{i!}$, et pour avoir $\binom{N}{i} \equiv 0 \mod p$, il suffit que le nombre rationnel $\frac{N}{i!}$ mis sous forme irréductible ait son numérateur divisible par p . Ceci a lieu si, pour tout premier q divisant p on a

$$\mathrm{ord}_q N - \mathrm{ord}_q(i!) \geq \mathrm{ord}_q p \quad .$$

Or pour $1 \leq i \leq j-1$ on a $\mathrm{ord}_q(i!) \leq j-1$. Si on prend alors $N = p^j$ on a $\mathrm{ord}_q N = j \ \mathrm{ord}_q p$ et on vérifie bien que pour $1 \leq i \leq j-1$,

$$\mathrm{ord}_q p^j - \mathrm{ord}_q(i!) \geq j \ \mathrm{ord}_q p - (j-1) \geq \mathrm{ord}_q p$$

car $(j-1)\ (\mathrm{ord}_q p - 1) \geq 0$ puisque $\mathrm{ord}_q p \geq 1$. Ceci achève la démonstration du lemme.

(Cette démonstration, due à M. Dwork, remplace la démonstration primitive moins élégante).

15. 6. - LEMME. - <u>Soient</u> $N\,M\,L$ <u>trois entiers, soient</u> $(x_i)_{0 \leq i \leq M-1}$ M <u>variables indépendantes. Posons</u>

$$\omega_m^n(N) = \binom{N+n+k}{k} x_i^{n+N} \quad ,$$

<u>avec</u>

$$m = i\,L+k \ , \ 0 \leq k \leq L-1 \ , \ 0 \leq i \leq M-1 \ , \ 0 \leq n \leq M\,L-1 \ , \ 0 \leq m \leq M\,L-1 \ .$$

<u>On a</u>

$$\det(\omega_m^n) = \prod_{i=0}^{M-1} \prod_{k=0}^{L-1} \binom{iL+k}{k} \cdot \prod_{i=0}^{M-1} x_i^{LN + \frac{L(L-1)}{2}} \prod_{0 \leq j < i \leq M-1} (x_i - x_j)^{L^2} \quad .$$

Pour $m \neq iL$ retranchons la ligne $m-1$ de la ligne m, on obtient la nouvelle matrice $(\omega'^{n}_{m}(N))$ avec

$$\omega'^{n}_{iL}(N) = \binom{N+n}{0} x_i^{n+N} = x_i \, \omega^{n}_{iL}(N-1) ,$$

$$\omega'^{n}_{iL+k}(N) = \omega^{n}_{iL+k}(N) - \omega^{n}_{iL+k-1}(N) = \binom{N+n+k}{k} x_i^n$$

$$- \binom{N+n+k-1}{k-1} x_j^n = \binom{N-1+n+k}{k} x_i^n = x_i \, \omega^{n}_{iL+k}(N-1) .$$

Donc

$$\det(\omega^{n}_{m}(N)) = \det(\omega'^{n}_{m}(N)) = \prod_i x_i \det(\omega^{n}_{m}(N-1))$$
$$= \det(\omega^{n}_{m}(0)) \prod x_i^{NL} .$$

Nous considérons alors le cas $N = 0$, $\omega^n_m = \omega^n_m(0)$.

Démontrons la formule

$$(1) \qquad \binom{n+k}{k} = \binom{n}{k} + \Sigma \, (-1)^{k-s+1} \binom{k}{s}\binom{n+s}{s} .$$

Soit X une indéterminée, on a

$$\sum_{n\geq 0} \binom{n}{k} X^n = X^k \sum_{m\geq 0} \binom{m+k}{k} X^m = \frac{X^k}{(1-X)^{k+1}} =$$
$$= \frac{1}{1-X}\left(\frac{1}{1-X} - 1\right)^k = \frac{1}{1-X} \sum_{s=0} \binom{k}{s} (-1)^{k-s} \frac{1}{(1-X)^s} =$$
$$= \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} (-1)^{k-s} \frac{1}{(1-X)^{s+1}} = \sum_{n\geq 0} \left[\sum_{s=0}^{k} (-1)^{k-s} \binom{k}{s}\binom{s+n}{s} \right] X^n .$$

En identifiant les coefficients de X^n on obtient la formule (1).

Posons $\Omega^n_{iL+k} = \binom{n}{k} x_i^{n-k}$ (rappelons que $\binom{n}{k} = 0$ pour $n < k$).

Il résulte de la formule (1) que

$$x_i^k \, \Omega^n_{iL+k} = [\omega^n_{iL+k} + \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^{k-s} \binom{k}{s} \omega^n_{iL+s}]$$

et par suite

$$\det(\omega^n_m) = \det(\Omega^n_m) \prod_i x_i^{\frac{L(L-1)}{2}}$$

Posons alors $x_o = x_1 + h$, on obtient

$$\Omega^n_{0+k} = \binom{n}{k} \sum_{s=0}^{n-k} x_1^{n-k-s} h^s \binom{n-k}{s}$$

$$= \sum_{s=0}^{n-k} x_1^{n-k-s} h^s \binom{k+s}{s}\binom{n}{k+s} = \sum_{t=k}^{n} \binom{n}{t} x_1^{n-t} \binom{t}{t-k} h^{t-k}$$

Posons

$$\Omega'^n_k = \sum_{t=L}^{n} \binom{n}{t}\binom{t}{t-k} x_1^{n-t} h^{t-L} \qquad n \geq L > k$$

$$\Omega'^n_k = 0 \qquad n \leq L-1 \ , \ \ k \leq L-1$$

$$\Omega'^n_m = \Omega^n_m \qquad m > L \ .$$

On a

$$\Omega^n_k - \sum_{t=k}^{L-1} \binom{t}{t-k} h^{t-k} \Omega^n_{L+t} = h^{L-k} \Omega'^n_k \qquad k \leq L-1$$

Donc

$$\det(\Omega^n_m) = h^{\frac{L(L+1)}{2}} \det(\Omega'^n_m)$$

Développons les L premières lignes de $\det(\Omega'^n_m)$, on obtient

$$\det(\Omega'^n_m) = \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{t_k=L}^{ML-1} \Delta_{t_o, \dots, t_{L-1}}$$

où $\Delta_{t_o,\dots,t_{L-1}}$ est le déterminant de la matrice (Ω''^n_m) avec

$$\Omega''^n_k = \binom{n}{t_k}\binom{t_k}{k} x_1^{n-t_k} h^{t_k-L} \qquad 0 \leq k \leq L-1$$

$$\Omega''^n_m = \Omega'^n_m \qquad m \geq L$$

On voit que si $t_j = t_k$ les lignes j et k sont proportionnelles et donc $\Delta_{t_o,\dots,t_{L-1}}$ est nul. De plus dans la ligne k on peut mettre $h^{t_k - L}$ en facteur, donc dans $\Delta_{t_o,\dots,t_{L-1}}$ on peut mettre $h^{\sum_k (t_k - L)}$ et par suite dans $\det(\Omega'^n_m) = \sum_{t_j \neq t_k} \Delta_{t_o,\dots,t_{L-1}}$ on peut mettre

$$h^{\sum_{k=0}^{L-1} k} = h^{\frac{L(L-1)}{2}}$$

en facteur.

Il en résulte que dans $\det(\Omega^n_m)$ on peut mettre $(x_o - x_1)^{L^2}$ en facteur et par raison de symétrie $(x_j - x_i)^{L^2}$, pour $i \neq j$, se met aussi en facteur dans $\det(\Omega^n_m)$.

En résumé nous avons montré que le polynôme en $x_o,\dots,x_{M-1}$ $\det(\omega^n_m(0))$ est divisible par le polynôme

$$Q(x_o,\dots,x_{M-1}) = \prod_i x_i^{\frac{L(L-1)}{2}} \prod_{i>j} (x_i - x_j)^{L^2}$$

Comme ces deux polynômes sont tous deux des polynômes homogènes de degré $\frac{M^2L^2 - ML}{2}$, c'est que l'on a $\det(\omega^n_m(0)) = C\,Q(x_o,\dots,x_{M-1})$. Pour déterminer la constante C il suffit de déterminer le coefficient du terme $x_{M-1}^{(M-1)L^2} x_{M-2}^{(M-2)L^2} \dots x_1^{L^2}$ dans le polynôme $\det(\Omega^n_m)$; or ce terme s'obtient en faisant le produit des éléments diagonaux. On trouve donc

$$C = \prod_{i=0}^{M-1} \prod_{k=0}^{L-1} \binom{iL+k}{k} . \quad \|$$

15. 7. - Dorénavant, si $\mathfrak{k}$ est de caractéristique nulle, p désignera un entier arbitraire, et sinon la caractéristique de $\mathfrak{k}$.

Notons Σ l'espace des suites d'éléments de $\mathfrak{k}$. Pour $a \in S$, $\|a\| \leq 1$, posons $\bar{a} = (\bar{a}_n) \in \Sigma$.

LEMME. - <u>Soit</u> $\bar{a} = \sum_{\text{finie}} \overline{\lambda_{j\alpha}}\, \overline{s_{j\alpha}}$, <u>où</u> $\bar{a} \in \Sigma$, $\overline{\lambda_{j\alpha}} \in \mathfrak{k}$, <u>et où les</u> $\overline{\lambda_{j\alpha}}$ <u>ne sont pas tous nuls. Soit</u> J <u>le sous-ensemble de</u> $\mathbb{N}$ <u>formé des</u> n <u>tels que</u> $a_n \neq 0$. <u>Il existe</u> τ <u>tel que, quel que soit</u> $N \in \mathbb{N}$, $J \cap (N, N+\tau) \neq \emptyset$.

On peut supposer que

$$\bar{a} = \sum_{0 \leq j \leq p^{\mu}-1} \; \sum_{0 \leq i \leq M-1} \lambda_{j\alpha_i}\, s_{j\alpha_i} ,$$

où $\mu \in \mathbb{N}$. Prenons $\tau = Mp^{\mu}-1$. S'il existe N tel que $J \cap [N, N+\tau] = \emptyset$, on a pour $N \leq n \leq N+Mp^{\mu}-1$, $\bar{a}_n = 0$, c'est-à-dire

$$\sum_{0 \leq j \leq p^{\mu}-1} \; \sum_{0 \leq i \leq M-1} \overline{\lambda}_{j\alpha_i} \binom{N+n+j}{j} \alpha_i^{-(N+n)} = 0 \leq n \leq Mp^{\mu}-1 .$$

Le déterminant de ce système linéaire en $\bar{\lambda}$ a été calculé au lemme 15. 6. , il vaut

$$\Delta = \prod_{j=0}^{p^{\mu}-1} \prod_{i=0}^{M-1} \binom{ip^{\mu}+j}{j} . \prod_{i=0}^{M-1} \alpha_i^{-p^{\mu}-N-\frac{p^{\mu}(p^{\mu}-1)}{2}}$$

$$\prod_{0 \leq k < i \leq M-1} (\alpha_i^{-1} - \alpha_k^{-1})^{p^2}$$

Il faut distinguer deux cas :

a) $\mathfrak{k}$ est de caractéristique 0, alors le facteur constant n'est pas nul et, puisque $\alpha_i \neq \alpha_k$, pour $i \neq k$, on a $\Delta \neq 0$.

b) $\mathfrak{k}$ est de caractéristique p. En vertu du lemme 15. 5. on a alors

$$\binom{ip^{\mu}+j}{j} = \binom{j}{j} = 1 \mod p ,$$

le facteur constant n'est donc pas nul et Δ n'est pas nul.

Il en résulte dans tous les cas que l'on doit avoir

$$\lambda_{j\alpha_i} = 0 \qquad 0 \leq j \leq p^{\mu}-1 \qquad 0 \leq i \leq M-1$$

ce qui contredit l'hypothèse. ||

15.8. - LEMME. - Soit $a \in SH$. Alors $\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| = \sup_{j,\alpha} |\lambda_{j\alpha}(a)|$.

Si $\sup_{j,\alpha} |\lambda_{j\alpha}(a)| = 0$, $a = \Sigma \lambda_i(a) s_i$, et $a_n = \lambda_n(a)$, donc $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Si $\sup |\lambda_{j\alpha}(a)| = |\lambda_{j_0\alpha_0}(a)| = \lambda \neq 0$, posons $b = a - \sum_{|\lambda_i| \geq \lambda} \lambda_i s_i$, et et $c = \dfrac{b}{\lambda_{j_0\alpha_0}(a)}$. On a, pour $n > n_0$, $|b_n| = |a_n|$ et $\|c\| = 1$. On a $\lambda_i(c) < 1$, et donc $\overline{c} = \sum_{\text{finie}} \overline{\lambda_{j\alpha}}(c)\overline{s_{j\alpha}}$ avec $\overline{\lambda_{j_0\alpha_0}}(c) \neq 0$. D'après le lemme 15.7. il existe τ tel que, dans tout intervalle $[N, N+\tau]$, il existe un n avec $\overline{c}_n \neq 0$, et donc $|c_n| = 1$, ou encore $|b_n| = \lambda$. On a donc $\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| = \overline{\lim_{n\to\infty}} |b_n| = \lambda$. ||

15.9. - DEFINITION. - Le sous-ensemble J de $\mathbb{N}$ est dit lacunaire, si, quel que soit $\tau \in \mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $J \cap [N, N+\tau] = \emptyset$.

15.10. - THEOREME. - Soit $a \in S$ telle que $\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| = \lambda \neq 0$. Soit J (resp. I) l'ensemble des n tels que $|a_n| = \lambda$ (resp. $|a_n| > \lambda$). Si J est lacunaire, ou si I n'est pas borné, a n'appartient pas à SH.

Soit $a \in SH$. Il résulte du lemme 15.8. que I est borné. Construisons la suite c, comme au lemme 15.8.. Soit J l'ensemble des n tels que $|a_n| = \lambda$, et J' l'ensemble des n tels que $|c_n| = 1$. Il résulte de la démonstration du lemme 15.8. que J' n'est pas lacunaire. Or

$$J' \cap [n_0, \infty] = J \cap [n_0, \infty],$$

et donc J n'est pas lacunaire. ||

15.11. - COROLLAIRE. - Soit r le rayon de convergence de la série entière

$$f(x) = \Sigma \; a_n x^n ,$$

et supposons que

$$\lim_{n \to \infty} |a_n| r^n = \lambda \neq 0 .$$

Soit J (resp. I) l'ensemble des n tels que $|a_n| r^n = \lambda$ (resp. $|a_n| r^n > \lambda$) .

Si J est lacunaire, ou si I n'est pas borné, f ne se prolonge pas analytiquement en dehors de son disque de convergence.

15.12. - Exemples :

1) $J = \emptyset$, cela se produit s'il existe N et une suite croissante n_k telle que l'on ait pour $N \leq n < n_k, |a_n| r^n < |a_{n_k}| r^{n_k}$.

Cela se produit aussi s'il existe une suite croissante n_k telle que l'on ait pour $n > n_k, |a_n| r^n < |a_{n_k}| r^{n_k}$ et $\lim_{n \to \infty} |a_{n_k}| r^{n_k} \neq 0$.

2) Les fonctions $f(x) = \Sigma_n x^{n^2}$ et $g(x) = \Sigma_n x^{2^n}$ ne se prolongent pas en dehors du disque unité $D(0, 1^-)$.

3) Soit K de caractéristique 0 et $\mathfrak{k}$ de caractéristique p . Considérons la fonction $\exp(x) = \Sigma \frac{x^n}{n!}$. Le rayon de convergence de cette série est $p^{-\frac{1}{p-1}}$. On trouve $\lambda = \lim |\frac{1}{n!}| p^{-\frac{n}{p-1}} = p^{-\frac{1}{p-1}}$. Pour $n = p^k$ on a $|\frac{1}{p^k!}| = p^{\frac{p^k-1}{p-1}}$ et donc $|\frac{1}{p^k!}| p^{-\frac{p^k}{p-1}} = p^{-\frac{1}{p-1}}$. L'ensemble J est l'ensemble $\{p^k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Cet ensemble est lacunaire. L'exponentielle n'est pas un élément analytique dans son disque de convergence.

4) Soit toujours K de caractéristique 0 et $\mathfrak{k}$ de caractéristique $p \neq 2$.

Considérons la fonction $1-(1-x)^{1/2} = \frac{1}{2}x + \frac{1/2\,.\,1/2}{2}x^2 + \ldots$. On a $a_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$. Le rayon de convergence de la série est 1 . De plus $|a_n| = |\binom{2n}{n}|$.
Il résulte du lemme 15.5. que pour $n = p^m$ $|a_n| = 1$ et pour $\frac{p^m-1}{2} < n \leq p^m - 1$, $|a_n| < 1$. On a donc $\lambda = 1$ et on voit que J est lacunaire puisque pour tout m l'intervalle $[\frac{p^m+1}{2}, p^m - 1] \cap J = \emptyset$.

15.13. - Nous allons améliorer nos résultats moyennant des hypothèses supplémentaire sur K . Nous supposerons que $\mathfrak{k}$ est de caractéristique p et que dans $\mathfrak{k}$ tout élément est une racine de l'unité. Ces conditions sont réalisées dans le cas de $\hat{\Omega}_p$, la clôture algébrique de Q_p . On sait [6] qu'on peut construire une extension maximalement complète $\overline{\Omega}_p$ de $\hat{\Omega}_p$ qui ne change pas le corps de restes. $\overline{\Omega}_p$ vérifie donc nos hypothèses.

LEMME. - <u>Quels que soient le nombre réel positif</u> ε <u>et l'élément</u> β <u>de</u> Ω_p <u>avec</u> $|\beta| = 1$; <u>il existe</u> M <u>tel que</u> $|\beta^M - 1| < \varepsilon$.

On sait que dans le corps de restes $\mathfrak{k}$ de $\overline{\Omega}_p$ tout élément est une racine primitive de l'unité, donc qu'il existe un entier μ tel que $\beta^\mu - 1 < 1$.

Mais alors

$$|\beta^{\mu p} - 1| = |(1+\beta^\mu-1)^p - 1| = |p(\beta^\mu-1) + \frac{p(p-1)}{2}(\beta^\mu-1)^2 + \ldots + (\beta^\mu-1)^p|$$

$$\leq \sup\left(|\beta^\mu - 1|^p, \frac{|\beta^\mu-1|}{p}\right),$$

et donc $\beta^{\mu p^n} - 1 \to 0$ quand $n \to \infty$. On peut donc trouver un entier ν tel que $|\beta^{\mu p^\nu} - 1| < \varepsilon$. On pose alors $M = \mu p^\nu$. $\|$

15.14. - THEOREME. - Soient $K = \overline{\Omega}_p$, $a \in SH$, λ un nombre réel positif. Il existe deux entiers n_o et m tels que pour $n > n_o$ on ait $|a_{n+m} - a_n| < \lambda$.

Par homothétie, on peut se ramener au cas où $\|a\| \leq 1$ et $0 < \lambda < 1$.

Soit

$$a = \sum_i \lambda_i s_i + \sum_j \lambda_{j\alpha} s_{j\alpha} .$$

On a $|\lambda_i| \leq 1$, $|\lambda_{j\alpha}| \leq 1$. Posons

$$b = \sum_{|\lambda_{j\alpha}| \geq \lambda} \lambda_{j\alpha} s_{j\alpha}$$

(c'est une somme finie).

Soit

$$n_0 = \sup_{|\lambda_i| \geq \lambda} i .$$

Pour $n > n_0$, on a $|b_n - a_n| < \lambda$.

Soit μ tel que $\frac{1}{p^\mu} < \lambda$. Alors, d'après le lemme 15.5. on a, pour $N = p^{\mu j}$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\left| \binom{n + KN + j}{j} - \binom{n+j}{j} \right| \leq \frac{1}{p^\mu} < \lambda .$$

D'autre part il résulte du lemme 15.13. qu'il existe $M(\alpha) \in \mathbb{N}$ tel que $|\tilde{\alpha}^{-M} - 1| < \lambda$, et donc pour $k \in \mathbb{N}$ $|\tilde{\alpha}^{-kM} - 1| < \lambda$.

Si on pose

$$m = \prod_{|\lambda_{j\alpha}| \geq \lambda} p^{\mu j} M(\alpha) ,$$

il résulte de ce qu'on vient de montrer que

$$|b_{n+m} - b_n| < \lambda , \text{ et donc } |a_{n+m} - a_n| < \lambda . \quad \|$$

On déduit de ce théorème le résultat suivant de F. Bertrandias [3] :

Soit $f(x) = \sum_n a_n x^n$ une fraction rationnelle ; supposons que les coefficients a_n soient rationnels et soit ρ le rayon de convergence de cette série entière. Notons $|\ |_p$ la valuation p-adique. Alors il existe k_0 tel que, si pour $k > k_o$ $a_k \neq 0$, il existe M et n_o tels que pour $n = k + Mn' > n_o$ $(n' \in \mathbb{N})$ on ait

$$\rho^n |a_n|_p = Cte \ .$$

Comme ci-dessus on en déduit un critère assurant qu'une série de Taylor n'est pas prolongeable en dehors de son disque de convergence.

15. 15. - Soit $a \in SH$. Nous allons donner une méthode "explicite" de calcul des coefficients de a relatifs à la base $(s_i, s_{j\alpha})$ dans le cas où $\mathfrak{k}$ est dénombrable (c'est le cas de $\overline{\Omega}_p$).

LEMME. - Munissons K^N de la norme $\|a\| = \sup_{0 \leq n \leq N-1} |a_n|$. Pour que $e_0, \dots, e_{N-1}$ de K^N forment une base orthonormale de K^N, il faut et il suffit que l'on ait $\|e_i\| = 1$, $0 \leq i \leq N-1$ et que les images $\overline{e_i}$ des e_i, dans l'application canonique de la boule unité B_N de K^N dans $\mathfrak{k}^N$, forment une base de $\mathfrak{k}^N$.

La condition sur la norme des e_i est évidemment nécessaire. Si alors $a \in B_N$, on a $a = \sum \lambda_i e_i$ avec $|\lambda_i| \leq 1$ et donc $\overline{a} = \sum \overline{\lambda_i}\, \overline{e_i}$ ce qui prouve que les $\overline{e_i}$ engendrent $\mathfrak{k}^N$, comme $\mathfrak{k}^N$ est de dimension N les e_i forment une base de $\mathfrak{k}^N$.

Maintenant si N vecteurs (e_i) vérifient $\|e_i\| = 1$, mais ne forment pas une base orthonormale de K^N, c'est qu'il existe a, avec $\|a\| < 1$ tel que $a = \sum \lambda_i e_i$ et $\sup |\lambda_i| = 1$. On aura alors $0 = \sum \overline{\lambda_i}\, \overline{e_i}$ où les $\overline{\lambda_i}$ ne sont pas tous nuls. Les $\overline{e_i}$ ne forment donc pas une base de $\mathfrak{k}^N$. $\|$

15. 16. - Puisque $\mathfrak{k}$ est supposé dénombrable, numérotons ses éléments non nuls, soit $\alpha_k \neq \alpha_m$ si $k \neq m$ et $\mathfrak{k} \setminus \{0\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{\alpha_k\}$. Nous poserons $s_{j\alpha_k} = s_{jk}$.

Comme convenu en 13. 7. si $\mathfrak{k}$ est de caractéristique nulle p désigne un entier fixe ≥ 2 , sinon la caractéristique de $\mathfrak{k}$.

Si $a \in S$, nous noterons $\hat{a}_N$ ou $\hat{a}$ s'il n'y a pas de confusion avec le vecteur de K^N de composantes $(a_o, \dots, a_{N-1})$.

Les vecteurs $\overline{s_i}$, $0 \leq i \leq p^n - 1$, et $\overline{s}_{jk}$, $0 \leq j \leq p^n - 1$, $0 \leq k \leq p^n - 1$, forment une base de $\mathfrak{k}^{p^n + p^{2n}}$. En effet si $\overline{a} = \sum_i \overline{\lambda}_i \overline{s}_i + \sum_{j,k} \overline{\lambda}_{jk} \overline{s}_{jk} = 0$ les coordonnées de a d'indice m avec $p^n \leq m \leq p^{2n} + p^n - 1$ ne font pas intervenir les $\overline{\lambda}_i$, il résulte alors de la démonstration du lemme 13. 7. que tous les $\overline{\lambda_{jk}}$ sont nuls, on a alors $\overline{a}_i = \overline{\lambda}_i = 0$.

Il résulte alors du lemme 13. 15. que les vecteurs $\hat{s}_i$, $0 \leq i \leq p^n - 1$ et $\hat{s}_{jk}$, $0 \leq j \leq p^n - 1$ $0 \leq k \leq p^n - 1$, forment une base orthonormale de $K^{p+p^{2n}}$.

Pour $i \leq p^n - 1$, $j \leq p^n - 1$, $k \leq p^n - 1$, nous noterons $\lambda_j^n(a)$ et $\lambda_{jk}^n(a)$ respectivement les coordonnées de $\hat{a}$ relativement à la base $\hat{s}_i$ $\hat{s}_{jk}$ de $K^{p^n + p^{2n}}$. Pour $i \geq p^n$ ou $j \geq p^n$ ou $k \geq p^n$ nous poserons $\lambda_i^n(a) = 0$, $\lambda_{jk}^n(a) = 0$

15. 17. - PROPOSITION. - Si $a \in SH$, $\lambda_i^n(a)$ et $\lambda_{jk}^n(a)$ convergent, lorsque $n \to \infty$ vers les coordonnées $\lambda_i(a)$ et $\lambda_{jk}(a)$ de a relatives à la base orthonormale (s_i , s_{jk}) de SH .

Il est clair que $\lambda_i^n(a)$ et $\lambda_{jk}^n(a)$ sont des formes linéaires sur S puisque ce sont les composées de l'application linéaire $a \to \hat{a}$ et d'une forme linéaire. De plus on a $\|\lambda_i^n\| \leq 1$ et $\|\lambda_{jk}^n\| \leq 1$ pour tous n i j et k , car l'application de restriction $a \to \hat{a}$ est de norme 1 et que les formes coordonnées sont de norme 1 puisque la base (s_i , s_{jk}) de $K^{p^n + p^{2n}}$ est orthonormale.

De plus il est évident que $\lim_{n\to\infty} \lambda_i^n(s_{i'}) = \lambda_i(s_{i'}) = \delta_{ii'}$,
$\lim_{n\to\infty} \lambda_i^n(s_{jk}) = \lambda_i(s_{jk}) = 0$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_{jk}^n(s_i) = \lambda_{jk}(s_i) = 0$, et
$\lim_{n\to\infty} \lambda_{jk}^n(s_{j'k'}) = \lambda_{jk}(s_{j'k'}) = \delta_{jj'}\delta_{kk'}$.

Comme les vecteurs (s_i, s_{jk}) forment une famille totale de SH (proposition 13. 4.) il résulte d'un théorème classique sur les espaces normés que pour tout $a \in$ SH $\lim_{n\to\infty} \lambda_i^n(a) = \lambda_i(a)$ et $\lim_{n\to\infty} \lambda_{jk}^n(a) = \lambda_{jk}^n(a)$. ||

15. 18. - <u>Remarques</u> :

1) Le calcul des formes λ_i^n et λ_{jk}^n relève du calcul matriciel.

2) Cette méthode permet de voir si un élément de S appartient à SH . Soit $a \in S$, considérons les suites $\lambda_i^n(a)$ et $\lambda_{jk}^n(a)$. Si pour un i ou un couple (j, k) l'une de ces suites ne converge pas c'est que $a \notin$ SH . Si ces suites convergent toutes vers des limites $\lambda_i(a)$ et $\lambda_{jk}(a)$ respectivement et si la famille $(\lambda_i(a)\ ,\ \lambda_{jk}(a))$ ne tend pas vers 0 à l'infini, c'est que $a \notin$ SH . Enfin si la famille $(\lambda_i(a)\ ,\ \lambda_{jk}(a))$ tend vers 0 à l'infini, mais si l'on a alors $a \neq \sum_i \lambda_i(a)\, s_i + \sum_{jk} \lambda_{jk}(a)\, s_{jk}$, c'est que $a \notin$ SH .

Il semble cependant que ce critère ne soit guère utilisable en pratique.

15. 19. - Rappelons les résultats déjà obtenus dans ce domaine.

Dans sa thèse [9] , W. Schöbe donne un critère pour que la fonction analytique f(x) définie par sa série de Taylor dans le disque unité $D(0, 1^-)$ se prolonge dans le complémentaire du disque $D(1, 1^-)$, $\Delta = \complement D(1, 1^-)$. Sa méthode consiste à faire une inversion φ qui conserve le disque $D(0, 1^-)$ et envoie $D(1, 1^-)$ dans le complémentaire du disque unité fermé à savoir l'ensemble des x tels que $|x| > 1$. Alors la série de Taylor de $f \circ \varphi^{-1}$ doit converger dans le disque

$D(1, 1^+)$, donc ses coefficients doivent tendre vers 0 . On peut ainsi calculer les coefficients du développement de Laurent de f autour du point 1 . W. Schöbe donne aussi un critère pour que f se développe en série de Laurent dans une couronne de centre 1 et donne des formules permettant de calculer les coefficients de cette série de Laurent à partir des coefficients de la série de Taylor de f autour de 0 .

Plus récemment Y. Amice [2] , remarquant que les fonctions $n \to \binom{n+k}{k}$ sont les polynômes d'interpolation de la suite très bien répartie $u_k = -k$ [1] , a montré que la fonction analytique dans $D(0, 1^-)$ $f(x) = \Sigma\, a_n x^n$ se prolongeait dans $\complement D(1, 1^-)$ si et seulement si la fonction $n \to a_n$ était uniformément continue pour $\mathbb{N}$ muni de la valuation p-adique (on suppose $K = \overline{\Omega}_p$) . Le coefficient du développement de Laurent de f autour du point 1 s'obtient à partir des coefficients a_n grâce aux formules d'interpolations [1] . Elle généralise ce critère au cas où f se prolonge dans le complémentaire de la réunion d'un nombre fini de disques intérieurs du cercle unité.

ANNEXE

Pour la commodité de l'exposition nous rappelons ici la caractérisation géométrique des ensembles analytiques.

Soit A un sous-ensemble ouvert de K . Etant donné un couple de points (x_o, y) de A on dira que la suite de trous disjoints $D_{n,j} = D(a_{nj}, \rho_{nj})$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq J_n$, est convenable si l'on a :

$$|a_{nj} - x_o| = r_n \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq J_n ,$$

$$|a_{nj} - a_{mk}| = \sup (r_n , r_m) \quad \text{pour} \quad n \neq m$$

et

$$|a_{nj} - a_{nk}| < r_n \quad \text{pour} \quad j \neq k ,$$

si la suite (r_n) forme une suite monotone convergeant vers une limite r et si $r_n \leq x_o - y$ pour tout n .

THEOREME. - Pour que l'ensemble ouvert A soit analytique, il faut et il suffit que la condition suivante soit réalisée.

Pour tout couple de points (x_o, y) de A , pour toute suite convenable de trous D_{nj} et pour toute suite d'entiers ≥ 0 (p_{nj}) , la suite

$$(*) \quad \left(\sum_{m-1}^{n-1} p_m \,|\mathrm{Log}\ r_n - \mathrm{Log}\ r_m|\right) - \sup_{1 \leq j \leq J_n} \left[p_{nj}(\log r_n - \log \rho_{nj}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{J_n} p_{nk}(\log r_n - \log |a_{nk} - a_{nj}|)\right]$$

(où $p_m = \sum_{j=1}^{J_m} p_{mj}$) ne tend pas vers $+\infty$ quand $n \to \infty$.

La suffisance de la condition $(*)$ a été démontrée dans [8]. Dans [8] on donnait une condition nécessaire plus faible moyennant des hypothèses supplémentaires sur le corps de restes. La nécessité de la condition $(*)$ a été prouvée de façon tout à fait générale par A. Escassut, [5].

Exemples :

Dans [8] on donne de nombreux exemples. Nous utilisons dans cet article les exemples suivants :

1) Les disques $D(a,\rho)$ et $D(b,r)$ sont dits indiscernables si $|a-b| = \rho = r$.

L'ensemble ouvert A est analytique si la condition suivante est réalisée.

$(\tilde{*})$ Pour tout couple (x_o, y) de points de A, pour toute suite de trous discernables de A, $D(a_n, \rho_n)$, telle que $|x_o - a_n| < |x_o - y|$ pour tout n et que la suite $|x_o - a_n|$ forme une suite monotone convergeant vers la limite r, la série

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{|\operatorname{Log} r - \operatorname{Log} |x_o - a_n||}{\operatorname{Log} |x_o - a_n| - \operatorname{Log} \rho_n}$$

converge pour N assez grand.

2) Soit A un ouvert tel que $\complement A$ soit la réunion d'une suite de disques $D(a_n, \rho_n)$, où $|a_n|$ est une suite monotone convergeant vers r, avec :

$$\operatorname{Log} \rho_n \leq \operatorname{Log} |a_n| - \sum_{k=1}^{n-1} |\operatorname{Log} |a_n| - \operatorname{Log} |a_k|| + c$$

où c est une constante arbitraire vérifiant $c < \sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Log} r - \operatorname{Log} |a_k||$. Alors A est analytique.

3) S'il existe un couple de points (x_o, y) de A et une suite de trous $D(a_n, \rho_n)$ de A tels que $|a_n - x_o| \leq |x_o - y|$ pour tout n, que $|a_n - a_m| = \sup(|a_n - x_o|, |a_m - x_o|)$ pour tout $m \neq n$, que $|x_o - a_n|$ forme une suite monotone convergeant vers r, que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} r - \operatorname{Log} |a_n|$ soit divergente et que

$$\text{Log}\ \rho_n \geq \text{Log}\,|x_o - a_n| - \lambda \sum_{k=1}^{n-1} \big|\text{Log}\,|x_o - a_n| - \text{Log}\,|x_o - a_k|\big|$$

avec $\lambda < 1$, A n'est pas analytique.

En effet, la suite $D(a_n, \rho_n)$ est convenable (avec $J_n = 1$, $\forall n$) et en prenant $p_n = 1$, on voit que :

$$\sum_{m=1}^{n-1} \big|\text{Log}\,|x_o - a_n| - \text{Log}\,|x_o - a_m|\big| - (\text{Log}\,|x_o - a_n| - \text{Log}\ \rho_n)$$
$$\geq (1-\lambda) \sum_{m=1} \big|\log|x_o - a_n| - \log|x_o - a_m|\big|$$

qui tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$, donc $(*)$ n'est pas vérifié.

4) Si A est analytique et B est quasi-connexe, alors $A \cap B$ est analytique (si $A \cap B \neq \Phi$).

En effet, si x_o et y appartiennent à $A \cap B$, ils appartiennent à A ; d'autre part, si la suite de trous D_{nj} de $A \cap B$ est convenable, les D_{nj} sont des trous de A sauf pour un nombre fini d'indices n et la condition $(*)$ est vérifiée pour $A \cap B$ puisqu'elle l'est pour A .

INDEX TERMINOLOGIQUE

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. AMICE. - Interpolation p-adique. Bull. Soc. Math. France, 92, 1964.

[2] Y. AMICE. - Fonctions analytiques dans le complémentaire d'une famille de disques. Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 1968-1969, (polycopié).

[3] F. BERTRANDIAS. - Séries de Taylor à coefficients rationnels. Séminaire Delange-Pisot, 4e année, 1962-1963, n° 17, (polycopié).

[4] N. BOURBAKI. - Théorie des ensembles, livre 1, chapitre 3, Hermann.

[5] A. ESCASSUT. - Algèbres de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner. Thèse 1970, (polycopié).

[6] M. KRASNER. - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Colloque C. N. R. S. , Clermont Ferrand, 1964.

[7] M. LAZARD. - Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet, I. H. E. S. Publications mathématiques, n° 14, 1962.

[8] E. MOTZKIN et Ph. ROBBA. - Prolongement analytique en analyse p-adique. Séminaire de Théorie des Nombres, Bordeaux 1968-69, (polycopié).

[9] W. SCHOBE. - Bertrage zur Funktionentheorie in nichtarchimedisch bewerteten Körpen. Thèse Münster, 1930.

[10] J.P. SERRE. - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. I. H. E. S. Publications mathématiques, n° 12, 1962.

[11] M. KRASNER. - Comptes Rendus, p. 244 (1957), p. 2570-2573.

Philippe ROBBA

U.E.R. de Mathématiques
Université de Paris VI
4, place Jussieu
75230 PARIS CEDEX-05