ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JEAN VAILLANT

Systèmes fortement hyperboliques 4×4, dimension réduite et symétrie

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 29, nº 4 (2000), p. 839-890

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_2000_4_29_4_839_0>

Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)
Vol. XXIX (2000), pp. 839-890

Systèmes fortement hyperboliques 4×4, dimension réduite et symétrie

JEAN VAILLANT

Abstract. a is a matrix valued 4×4 strongly hyperbolic operator ; we state the following result : if the reduced dimension of a is superior or equal to 8, a is symmetric in a convenient basis.

Mathematics Subject Classification (2000): 35L40.

On considère un opérateur différentiel matriciel linéaire du 1o ordre à coefficients réels $a(D) = ID_0 + \mathrm{a}(D')$. Il est bien connu que la symétrie de la matrice $(a_j^i(D))$ implique l'hyperbolicité forte de l'opérateur. Nous nous posons le problème réciproque. P.D. Lax [2] donne un exemple d'opérateur fortement hyperbolique 3×3 tel qu'il n'existe pas de matrice T à coefficients constants telle que : $T^{-1}(a_j^i(\xi))T$ soit symétrique, pour tout ξ. G. Strang [7] a montré que tout opérateur 2×2 fortement hyperbolique est symétrisable par une matrice T convenable. J. Vaillant [9] montre que tout opérateur $m \times m$ diagonalisable peut être symétrisé dans ce sens, nous dirons est présymétrique, si sa dimension réduite [9] (la dimension de l'espace vectoriel de matrices engendré par les matrices $(I, \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_k, \mathrm{a}_n)$) est maximum, c'est-à-dire est égale à $\frac{m(m+1)}{2}$, et si une hypothèse naturelle, mais inutile, comme le montrera Nishitani [3], est vérifiée. T. Nishitani [3] montre que tout opérateur $m \times m$ diagonalisable est présymétrique si sa dimension réduite est supérieure ou égale à : $\frac{m(m+1)}{2} - 1$. D'autre part, Oshime [6] avait complètement classifié les opérateurs 3×3 diagonalisables et uniformément diagonalisables ; en particulier, il avait montré qu'il existe des opérateurs 3×3, de dimension réduite $\frac{3\times(3+1)}{2} - 2 = 4$, non présymétriques.

Nous conjecturons que, si $m \geq 4$ et si la dimension réduite est supérieure ou égale à : $\frac{m(m+1)}{2} - 2$, les opérateurs fortement hyperboliques sont présymétriques. Les démonstrations de [9], [3] s'appuient fortement sur le cas $m = 3$. Il paraît donc naturel d'examiner d'abord le cas $m = 4$. Nous obtenons que, dans ce cas,

Pervenuto alla Redazione il 20 gennaio 2000.

la conjecture est vérifiée : tout opérateur 4×4, de dimension réduite supérieure ou égale à 8 est présymétrique.

L'intérêt des résultats à coefficients constants est d'une part, qu'ils ont une extension naturelle au cas des coefficients réguliers ; en effet dans [5], T. Nishitani et J. Vaillant montrent, dans le cas $m \times m$, $m \geq 3$, que, si pour chaque x, l'opérateur a (x, D) est diagonalisable et si sa dimension réduite d est supérieure ou égale à : $\frac{m(m+1)}{2} - 1$, alors il est régulièrement symétrisable au sens précédent ($T(x)$ est régulière) ; pour $m = 2$ on suppose : $d \geq 3$. D'autre part, ils présentent un intérêt en semi-linéaire où ils permettent de remplacer l'hypothèse usuelle de symétrie de la partie principale par celle d'hyperbolicité forte.

0. – Définitions, notations, rappels et résultats

E et F sont des espaces vectoriels réels de dimensions $n+1$ et m. a est une application linéaire de E dans l'espace vectoriel des applications linéaires de F dans F.

Définition 0.1. On appelle dimension réduite de a le rang de a :

$$d = \operatorname{rang} a .$$

On notera : ξ un élément de E ; la valeur de a pour ξ est : $a(\xi)$.

Définition 0.2. Soit $N \in E$; on dit que N n'est pas caractéristique pour a si et seulement si : $\operatorname{dét} a(N) \neq 0$.

Posons : $a^\# = a^{-1}(N)a$; la dimension réduite de $a^\#$ est encore d et l'on a : $a^\#(N) = I$. On supposera plus simplement dans la suite que a est de dimension réduite d et telle que : $a(N) = I$.

Si on choisit une base de E de 1° vecteur N, on a :

$$a(\xi) = \xi_0 I + \sum_{1 \leq k \leq n} \mathsf{a}_k \xi_k = \xi_0 I + \mathsf{a}(\xi') ;$$

d est la dimension du sous espace des applications linéaires de F dans F, engendré par $\{(I, \mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_n, \dots, \mathsf{a}_n)\}$; si $\{(I, \mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_{d-1}\}$ est une base de cet espace, on a évidemment :

$$a(\xi) = \xi_0 I + \sum_{1 \leq k \leq d-1} \mathsf{a}_k \xi_k$$

et a est de dimension réduite $d-1$.

Si on choisit une base dans F, on a les matrices :

$$a^i_j(\xi) = \xi_0 I^i_j + \sum_{1 \leq k \leq n} \mathsf{a}^i_{jk} \xi_k .$$

d est la dimension du sous espace vectoriel engendré par les matrices $((I), \ldots, (\mathsf{a}_k), \ldots)$; d est aussi la dimension réduite du sous espace vectoriel engendré par les formes linéaires :

$$\xi \to a_j^i(\xi),$$

lorsque i et j varient.

DÉFINITION 0.3. a est diagonalisable (dans le réel) par rapport à N si et seulement si :

i) les zéros en τ de : dét$[\tau I + a(\xi)] = 0$, sont tous réels, quelque soit ξ
ii) lorsque $\tau(\xi)$ est un zéro, la dimension du noyau de : $\tau(\xi)I + a(\xi)$ est égale à la multiplicité du zéro $\tau(\xi)$.

Choisissons une base de E de 1° vecteur N, cette définition équivaut à dire que :

i) les valeurs propres de $\mathsf{a}(\xi')$ sont toutes réelles, $\forall \xi'$
ii) la dimension du sous espace propre correspondant à une valeur propre est égale à la multiplicité de la valeur propre.

Dans ces conditions, on notera $\Delta(\xi')$ un diagonalisateur de la matrice $\mathsf{a}(\xi')$:

$$\Delta^{-1}(\xi')(\mathsf{a}(\xi'))\Delta(\xi') = D(\xi');$$

$D(\xi')$ diagonale.

DÉFINITION 0.4. a est uniformément diagonalisable par rapport à N si et seulement si :

i) a est diagonalisable par rapport à N
ii) il existe un diagonalisateur Δ et un $\varepsilon > 0$ tels que :

$$\forall \xi' \neq 0 \qquad \|\Delta(\xi')\| = 1\,, \text{dét}\,|\Delta(\xi')| > \varepsilon\,,$$

cette définition ne dépend pas évidemment du choix de la base de E de premier vecteur N, ni du choix de la base de F.

REMARQUE 0.5. Le théorème de Kasahara - Yamaguti (Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto 33 Ser A (1960) p. 1-23) montre que l'uniforme diagonalisabilité de a par rapport à N équivaut à l'hyperbolicité forte par rapport à N de l'opérateur différentiel : $a(D)$.

DÉFINITION 0.6. a est présymétrique par rapport à N, si et seulement si : il existe une base de E de premier vecteur N et une base de F telles que, dans ces bases, les matrices :

$$(a_j^i(\xi)) \quad \text{soit symétriques} \quad \forall \xi\,.$$

Cette définition équivaut à dire que les matrices $(\mathsf{a}_j^i(\xi'))$ sont symétriques $\forall \xi'$. Autrement dit, si on a une base de E de premier vecteur N et une base de F dans lesquelles la matrice de a est $\mathsf{a}_j^i(\xi')$, il existe une matrice de changement de base T réelle telle que :

$$T^{-1}(\mathsf{a}_j^i(\xi'))T \quad \text{soit symétrique} \quad \forall \xi'\,.$$

La symétrie est évidemment ensuite conservé dans les changements de base orthonormaux de F. On démontre dans ce papier le théorème suivant :

THÉORÈME. *Si $a(D)$ est fortement hyperbolique par rapport à N, si $m = 4$, si $d \geq \frac{4\times(4+1)}{2} - 2 = 8$, alors a est présymétrique par rapport à N.*

La démonstration utilise d'abord deux lemmes.

LEMME 0.7 [1]. *Si a est diagonalisable par rapport à N, si $m = 4$, $d \geq 8$, alors il existe un $\xi' \neq 0$ tels que la plus grande valeur propre de $a(\xi')$ soit de multiplicité 3.*

La variété caractéristique de a : $\operatorname{dét} a(\xi) = 0$ a donc un point triple différent de l'origine.

LEMME 0.8 [11]. *E est de dimension* 3. *F est de dimension* 4. *On suppose que :*

i) *$a(D)$ est fortement hyperbolique par rapport à N*

ii) *il existe un $\xi' \neq 0$ tel que $\mathrm{a}(\xi')$ ait une valeur propre de multiplicité* 3.

Alors :

i) on peut choisir une base de E de premier vecteur N et une base de F telles que :

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 0 \\ & & 0 & \\ 0 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ * & & & \\ * & & C & \\ * & & & \end{pmatrix} \xi_2 ,$$

où C est une matrice 3×3 diagonalisable (dans le réel)

ii) on diagonalise C ; $(a^i_j(\xi))$ s'écrit dans la nouvelle base de F :

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 0 \\ & & 0 & \\ 0 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & \alpha_1 & & 0 \\ b_5 & & \alpha_2 & \\ b_6 & 0 & & \alpha_3 \end{pmatrix} \xi_2 .$$

On convient que : $\operatorname{sign} b_i = \operatorname{sign} b_j$, si : $b_i b_j > 0$ ou $b_i = b_j = 0$; on a alors :

1. si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont différents deux à deux

$$\operatorname{sign} b_1 = \operatorname{sign} b_4 ; \quad \operatorname{sign} b_2 = \operatorname{sign} b_5 ; \quad \operatorname{sign} b_3 = \operatorname{sign} b_6$$

2. si $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3$:

$$\Big[(b_1 b_4 + b_2 b_5 > 0) \quad \text{ou} \quad (b_1 = b_4 = b_2 = b_5 = 0)\Big]$$

et $\operatorname{sign} b_3 = \operatorname{sign} b_6$

3. si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$

$$b_1 b_4 + b_2 b_5 + b_3 b_6 > 0 \quad \text{ou} \quad (b_1 = b_4 = b_2 = b_5 = b_3 = b_6 = 0)$$

iii) on peut symétriser $(a^i_j(\xi))$: il existe une base de F telle que dans cette base : $b_1 = b_4$, $b_2 = b_5$, $b_3 = b_6$.

Un résumé de la preuve du théorème avait été donné dans [10].

1. – On notera souvent, abusivement, la matrice :

$$(a_j^i(\xi)) = a(\xi)\,.$$

Comme il résulte du lemme 0.7 qu'il existe un $\xi' \neq 0$, soit $\underline{\xi}'$ tel que $\mathsf{a}(\underline{\xi}')$ ait une valeur propre triple, en choisissant $\mathsf{a}(\underline{\xi}')$ comme matrice élément d'une base de l'espace des matrices, et en remarquant qu'elle est diagonalisable, on obtient :

$$a(\xi) = \xi_0 I + e\xi_1 + b(\xi'')\,;$$

$e = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & 0 \\ & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$; $\xi'' = (\xi_2, \dots, \xi_7)$; b est une matrice de formes linéaires en ξ'';

$b_1^1(\xi'') \equiv 0$; on a remarqué que si la dimension réduite de a est strictement supérieure à 8 , elle est présymétrique [3] et qu'il suffit donc de considérer le cas $d = 8$.

On notera :

$$b(\xi'') = \begin{pmatrix} 0 & b_1(\xi'') & b_2(\xi'') & b_3(\xi'') \\ b_4(\xi'') & & & \\ b_5(\xi'') & & C(\xi'') & \\ b_6(\xi'') & & & \end{pmatrix}$$

b est de dimension réduite 6.

On remplace ξ'' par $u\xi''$, $u \in \mathbb{R}$. Pour tout ξ'', la matrice :

$$\mathsf{a}(\xi_1, u) = e\xi_1 + ub(\xi''),$$

considérée, comme matrice de formes linéaires en (ξ_1, u) est uniformément diagonalisable.

Le lemme 0.8 implique :

i) pour tout ξ'', $C(\xi'')$ est diagonalisable ;

ii) soit $U(\xi'')$ inversible telle que :

$$D(\xi'') = U^{-1}(\xi'')C(\xi'')U(\xi'')$$

soit diagonale.

On note :

$$U(\xi'') = (U_j^i(\xi'')),\, 1 \leq i\,, j \leq 3\,.$$

On pose :

$$V(\xi'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & U(\xi'') & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

et on transforme a par $V(\xi'')$, on obtient :

$$e\xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ * & & D(\xi'') & \\ * & & & \\ * & & & \end{pmatrix} u\,.$$

La première ligne de la matrice b transformée s'écrit :

$$\left(0, \sum_{1\le i\le 3} b_i(\xi'')U_1^i(\xi''), \sum_{1\le i\le 3} b_1(\xi'')U_2^i, \sum_{1\le i\le 3} b_i(\xi'')U_3^i(\xi'')\right).$$

La première colonne s'écrit :

$$\Big(0, (U^{-1})_1^1(\xi'')b_4(\xi'') + (U^{-1})_2^1(\xi'')b_5(\xi''), (U^{-1})_3^1(\xi'')b_6(\xi''),$$
$$(U^{-1})_1^2(\xi'')b_4(\xi'') + (U^{-1})_2^2 b_5(\xi'') + (U^{-1})_3^2 b_6(\xi''),$$
$$(U^{-1})_1^3(\xi'')b_4(\xi'') + (U^{-1})_2^3 b_5(\xi'') + (U^{-1})_3^3 b_6(\xi'')\Big).$$

$\forall \xi''$ tel que les éléments de $D(\xi'')$ sont distincts, on a :

$$\begin{aligned}(1.1)\qquad &\mathrm{sign}(b_1U_1^1)(\xi'') + (b_2U_1^2)(\xi'') + (b_3U_1^3)(\xi'') \\ &\quad = \mathrm{sign}\Big(\big((U^{-1})_1^1 b_4\big)(\xi'') + \big((U^{-1})_2^1 b_5\big)(\xi'') + ((U^{-1})_3^1 b_6)(\xi'')\Big)\end{aligned}$$

et brièvement :

$$\begin{aligned}(1.2)\qquad &\mathrm{sign}\left(b_1U_2^1 + b_2U_2^2 + b_3U_2^3\right)(\xi'') \\ &\quad = \mathrm{sign}\left[(U^{-1})_1^2 b_4 + (U^{-1})_2^2 b_5 + (U^{-1})_3^2 b_6\right](\xi'')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1.3)\qquad &\mathrm{sign}\left(b_1U_3^1 + b_2U_3^2 + b_3U_3^3\right)(\xi'') \\ &\quad = \mathrm{sign}\left[(U^{-1})_1^3 b_4 + (U^{-1})_2^3 b_5 + (U^{-1})_3^3 b_6\right](\xi'').\end{aligned}$$

Notons $D(\xi'') = \mathrm{diag}\left(D_1^1(\xi'')D_2^2(\xi''), D_3^3(\xi'')\right)$;
$\forall\xi''$ tel que $D_2^2\ (\xi'') = D_3^3(\xi'')$, $D_1^1(\xi'') \neq D_2^2(\xi'')$, on a la condition (1.1). On a, de plus :

$$(1.4)\qquad \sum_{1\le i\le 3} b_i U_2^i(\xi'') = \sum_{1\le i\le 3} b_i U_3^i(\xi'') = 0$$

implique :

$$(U^1)_1^2 b_4 + (U^{-1})_2^2 b_5 + (U^{-1})_3^2 b_6(\xi'') = (U^{-1})_1^3 b_4 + (U^{-1})_2^3 b_5 + (U^{-1})_3^3 b_6(\xi'') = 0$$

$\forall \xi''$ tel que $D_1^1(\xi'') = D_2(\xi'') = D_3(\xi'')$, on a :

$$\sum_{1\leq i\leq 3} b_i U_1^i(\xi'') = \sum_{1\leq i\leq 3} b_i U_2^i(\xi'') = \sum_{1\leq i\leq 3} b_i U_3^1(\xi'') = 0$$

implique :

$$\begin{aligned}
&(U^{-1})_1^1 b_4(\xi'') + (U^{-1})_2^1 b_5(\xi'') + (U^{-1})_3^1 b_6(\xi'') \\
&= (U^{-1})_1^2 b_4(\xi'') + (U^{-1})_2^2 b_5(\xi') + (U^{-1})_3^2 b_6(\xi'') \\
&= (U^{-1})_1^3 b_4(\xi'') + (U^{-1})_2^3 b_5(\xi'') + (U^{-1})_3^3 b_6(\xi'') = 0 .
\end{aligned} \tag{1.5}$$

REMARQUE 1.1. Si $C(\xi'')$ est symétrique, alors $U(\xi'')$ est orthogonale et $(U^{-1})(\xi'') = {}^tU(\xi'')$.

REMARQUE 1.2. $C(\xi'')$ est nécessairement de dimension réduite ≥ 3. En effet si C est de dimension réduite 2, comme $b(\xi'')$ est de dimension réduite 6, par un changement de base dans E, on peut choisir deux formes de $C(\xi'')$ et 4 formes de la 1ère ligne et de la 1ère colonne de $b(\xi'')$, comme formes linéaires de base ; on peut donc écrire, par exemple :

$$b(\eta'') = \begin{pmatrix} 0 & \eta_4 & \eta_5 & \eta_6 \\ \eta_7 & & C(\eta_2, \eta_3) & \\ * & & & \\ * & & & \end{pmatrix}.$$

En posant $\eta_2 = \eta_3 = 0$, $\eta_4 = 0$, $\eta_5 = \eta_6 = 0$, $\eta_7 = 1$ et en appliquant le 0.8 lorsque les valeurs propres de $C(\eta_2, \eta_3)$ sont égales, on obtient une impossibilité. On raisonne de même si C est de dimension 0 ou 1.

$C(\xi'')$ est diagonalisable ; on en déduit aisément [9] que sa dimension réduite est inférieure ou égale à $\frac{3\times(3+1)}{2} - 1 = 5$. Nous allons examiner les différents cas possibles selon la dimension réduite de $C(\xi'')$.

2. – Cas où $C(\xi'')$ est de dimension réduite égale à 3

$C(\xi'')$ est une matrice 3×3 diagonalisable ; il résulte de [6], que l'on peut choisir un $\underline{\xi}'' \neq 0$ pour lequel $C(\underline{\xi}'')$ a une valeur propre double ; plus précisément Oshime [6] donne les formes réduites possibles de $C(\xi'')$, ce qui revient à choisir des bases convenables dans E et F.

On pose :

$$e' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I - La première forme réduite est ([6], p. 950) :

$$C(\xi'') = e'\xi_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_3 + \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_4 ,$$

$0 \leq \alpha < 1$ et :

$$\mathsf{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & b_1(\xi'') & b_2(\xi'') & b_3(\xi'') \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_3 + \alpha\xi_4 & \xi_4 \\ b_5(\xi'') & \xi_3 - \alpha\xi_4 & 0 & 0 \\ b_6(\xi'') & \xi_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Comme la dimension réduite de $b(\xi'')$ est 6, on peut prendre 3 des formes $b_i(\xi'')$ comme formes de base. Distinguons les cas possibles

a) $b_1(\xi'')$, $b_2(\xi'')$, $b_3(\xi'')$ peuvent être prises comme formes de base ; sans changer de notation, on a :

$$\mathsf{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_3 + \alpha\xi_4 & \xi_4 \\ b_5(\xi'') & \xi_3 - \alpha\xi_4 & 0 & 0 \\ b_6(\xi'') & \xi_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

notons : $b_i(\xi'') = \sum\limits_{2 \leq k \leq 7} \beta_{ik}\xi_k$, $i \in \{4, 5, 6\}$; posons : $\xi_3 = \xi_4 = 0$, $\xi_2 \neq 0$; il résulte de (1.4) que :

$$\beta_{45} > 0 , \quad \beta_{42}\xi_2 + \beta_{46}\xi_6 + \beta_{47}\xi_5 \equiv 0 ,$$

soit : $\beta_{42} = \beta_{46} = \beta_{47} = 0$.

$$\beta_{52}\xi_2 + \beta_{55}\xi_5 \equiv 0 , \quad \beta_{62}\xi_2 + \beta_{65}\xi_5 \equiv 0 ;$$

soit :

$$\beta_{52} = \beta_{55} = \beta_{62} = \beta_{65} = 0 .$$

On a donc :

$$\mathsf{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ \beta_{43}\xi_3 + \beta_{44}\xi_4 + \beta_{45}\xi_5 & \xi_2 & \xi_3 + \alpha\xi_4 & \xi_4 \\ \beta_{53}\xi_3 + \beta_{54}\xi_4 + \beta_{56}\xi_6 + \beta_{57}\xi_7 & \xi_3 - \alpha\xi_4 & 0 & 0 \\ \beta_{63}\xi_3 + \beta_{64}\xi_4 + \beta_{66}\xi_6 + \beta_{67}\xi_7 & \xi_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Nous allons, pour ξ'' convenablement choisi, diagonaliser $C(\xi'')$ et écrire les conditions du type (1.1), (1.2), (1.3)

i) On pose : $\xi_3 = 0$, $\xi_2 = (1-s^2)\sqrt{1-\alpha^2}$, $\xi_4 = s$, $s \in \mathbb{R}^*$.
On diagonalise la matrice :

$$C(s) = \begin{pmatrix} (1-s^2)\sqrt{1-\alpha^2} & \alpha s & s \\ -\alpha s & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les opposés des valeurs propres sont les valeurs distinctes :

$$\left(s^2\sqrt{1-\alpha^2}, -\sqrt{1-\alpha^2}, 0\right).$$

On détermine les vecteurs propres correspondants. On peut choisir :

$$U(s) = \begin{pmatrix} s\sqrt{1-\alpha^2} & \sqrt{1-\alpha^2} & 0 \\ \alpha & -\alpha s & -1 \\ -1 & s & \alpha \end{pmatrix}$$

dét $U(s) = (1+s^2)(1-\alpha^2)^{3/2} = s\delta(s) \neq 0$, $\delta(s) > 0$.

$$U^{-1}(s) = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\delta(s)} \begin{pmatrix} s\sqrt{1-\alpha^2} & -\alpha & -1 \\ \sqrt{1-\alpha^2} & \alpha s & s \\ 0 & -(1+s^2) & -\alpha(1+s^2) \end{pmatrix}$$

$(U^{-1}CU)(s)$ est diagonale à valeurs propres distinctes.

On suppose d'abord $\xi_5 = \xi_6 = \xi_7 = 0$ et on écrit les conditions (1.1), (1.2), (1.3) ; on obtient :

$$(U^{-1})^i_1\beta_{44} + (U^{-1})^i_2\beta_{54} + (U^{-1})^i_3\beta_{64} = 0,$$

d'où :

$$\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} = 0.$$

ξ_5, ξ_6, ξ_7 sont maintenant quelconques. La condition (1.1) s'écrit : $\forall \xi_5, \xi_6, \xi_7$, $s \neq 0$:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign}\left(s\sqrt{1-\alpha^2}\xi_5 + \alpha\xi_6 - \xi_7\right) \\ &\quad = \operatorname{sign}\left(s\sqrt{1-\alpha^2}\beta_{45}\xi_5 - (\alpha\beta_{56} + \beta_{66})\xi_6 - (\alpha\beta_{57} + \beta_{67})\xi_7\right). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\beta_{45} > 0 ; \alpha\beta_{56} + \beta_{66} = -\alpha\beta_{45} ; \alpha\beta_{57} + \beta_{67} = \beta_{45}, \tag{2.1}$$

ii) On pose : $\xi_2 = \xi_4 = 0$; $\xi_3 \neq 0$.

On diagonalise la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_3 .$$

Les valeurs propres sont : $(0, \pm\xi_3)$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$U^{-1}CU$ est diagonale à valeurs propres distinctes.

On suppose d'abord : $\xi_5 = \xi_6 = \xi_7 = 0$ et on écrit les conditions (1.1), (1.2), (1.3) ; on obtient :

$$(U^{-1})^i_1 \beta_{43} + (U^{-1})^i_2 \beta_{53} + (U^{-1})^i_3 \beta_{63} = 0 ,$$

d'où :

$$\beta_{43} = \beta_{53} = \beta_{63} = 0 .$$

On suppose $\xi_7 = 0$; on écrit la condition (1.1) :

$$\beta_{66}\xi_6 \equiv 0 ;$$

d'où :

$$\beta_{66} = 0 . \tag{2.2}$$

On suppose ξ_5, ξ_6, ξ_7 quelconques ; on écrit la condition (1.2) :

$$\operatorname{sign}(\xi_5 - \xi_6) = \operatorname{sign}(\beta_{45}\xi_5 - \beta_{56}\xi_6 - \beta_{57}\xi_7) ;$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} \beta_{57} &= 0 \\ \beta_{45} &= \beta_{56} \end{aligned} \tag{2.3}$$

d'où à l'aide des formules (2.1), (2.2), (2.3) :

1) si $\alpha \neq 0 : \beta_{45} = 0, \ \beta_{45} > 0$

ce cas est impossible

2) si $\alpha = 0 : \beta_{66} = \beta_{57} = 0$; $\beta_{45} = \beta_{56} = \beta_{67} > 0$

$$\mathsf{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ \beta_{45}\xi_5 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \beta_{45}\xi_6 & \xi_3 & 0 & 0 \\ \beta_{45}\xi_7 & \xi_7 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

On voit aisément que a est présymétrique en la transformant par :

$$T = \operatorname{diag}\left((1, \sqrt{\beta_{45}}, \sqrt{\beta_{45}}, \sqrt{\beta_{45}}\right)$$

b) Les formes $\left(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi'')\right)$ ne sont pas linéairement indépendantes, et l'ensemble :

$$\left(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi'')\right) \quad \text{est de rang 5}$$

b$_1$) $\left(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_5(\xi'')\right.$ ou $b_6(\xi'')$, $b_2(\xi'')$, $\left.b_3(\xi'')\right)$ sont linéairement indépendantes ; (par exemple, on choisit $b_5(\xi'')$, l'autre cas étant analogue) ; on les choisit comme élément d'une base

$$b(\xi'') = \begin{pmatrix} 0 & \text{c.lin. } (\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6, \xi_7) & \xi_6 & \xi_7 \\ \begin{matrix}\text{c.lin. des}\\ \text{formes de base}\end{matrix} & \xi_2 & \xi_3 + \alpha\xi_4 & \xi_4 \\ \xi_5 & \xi_3 - \alpha\xi_4 & 0 & 0 \\ \begin{matrix}\text{c.lin. des}\\ \text{formes de base}\end{matrix} & \xi_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On fait $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_6 = \xi_7 = 0$; $\xi_5 = 1$ du lemme 2, on déduit que ce cas est impossible.

b$_2$) On n'a pas l'hypothèse de b$_1$) et :

$$\left(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_4(\xi'), b_2(\xi''), b_3(\xi'')\right) \quad \text{sont linéairement indépendantes ;}$$

on a :

$$b(\xi'') = \begin{pmatrix} 0 & \text{c.lin.}(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6, \xi_7) & \xi_6 & \xi_7 \\ \xi_5 & \xi_2 & \xi_3 + \alpha\xi_4 & \xi_4 \\ \text{c.lin.}(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6, \xi_7) & \xi_3 - \alpha\xi_4 & 0 & 0 \\ \text{c.lin.}(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6, \xi_7) & \xi_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On fait : $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_6 = \xi_7 = 0$; $\xi_5 = 1$ le lemme 2 implique une impossibilité.

b$_3$) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ ne sont pas linéairement indépendantes ; $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_3(\xi''))$ sont linéairement indépendantes. On a donc :

$\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_3(\xi'')$ et une des formes $(b_4(\xi''), b_5(\xi''), b_6(\xi''))$ sont linéairement indépendantes. On a par exemple :

$$b(\xi'') = \begin{pmatrix} 0 & \xi_5 & \text{c.lin.}(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6) & \xi_6 \\ * & \xi_2 & \xi_3 + \alpha\xi_4 & \xi_4 \\ \xi_7 & \xi_3 - \alpha\xi_4 & 0 & 0 \\ * & \xi_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On fait : $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = 0$; $\xi_7 = 1$; compte tenu du lemme 2 on a une impossibilité.

b$_4$) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ ne sont pas linéairement indépendants ; $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_2(\xi''))$ sont linéairement indépendants.

Ce cas est analogue au précédent.

c) $\{\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi'')\}$ est de rang ≤ 4. Par transposition, on se ramène aux cas a) et b).

Les seuls cas possibles sont ceux où a est présymétrique par rapport à N.

II - La deuxième forme réduite est : ([6], p. 953)

$$C(\xi'') = e'\xi_2 + \begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & 1 & 0 \\ c_2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xi_3 + \begin{pmatrix} 0 & d_1 & d_2 \\ d_1 & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_4$$

$$\mathsf{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & b_1(\xi'') & b_2(\xi'') & b_3(\xi'') \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & c_1\xi_3 + d_1\xi_4 & c_2\xi_3 + d_2\xi_4 \\ b_5(\xi'') & c_1\xi_3 + d_1\xi_4 & \xi_3 & 0 \\ b_6(\xi'') & c_2\xi_3 + d_2\xi_4 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

II-1) Si $d_2 \neq 0$, on peut, par un changement de base de E, remplacer $c_2\xi_3 + d_2\xi_4$ par ξ_4. On suppose donc dans le II-1) : $c_2 = 0$, $d_2 = 1$

a) $b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi'')$ peuvent être pris comme formes de base. On a :

$$\mathsf{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & c_1\xi_3 + d_1\xi_4 & \xi_4 \\ b_5(\xi'') & c_1\xi_3 + d_1\xi_4 & \xi_3 & 0 \\ b_6(\xi'') & \xi_4 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

$b_i(\xi'') = \sum\limits_{2 \leq k \leq 7} \beta_{ik}\xi_k, 4 \leq i \leq 6.$

Comme au début de I a), on se ramène à :

$$\mathsf{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ \beta_{43}\xi_3 + \beta_{44}\xi_4 + \beta_{45}\xi_5 & \xi_2 & c_1\xi_3 + d_1\xi_4 & \xi_4 \\ \beta_{53}\xi_3 + \beta_{54}\xi_4 + \beta_{56}\xi_6 + \beta_{57}\xi_7 & c_1\xi_3 + d_1\xi_4 & \xi_3 & 0 \\ \beta_{63}\xi_3 + \beta_{64}\xi_4 + \beta_{66}\xi_6 + \beta_{67}\xi_7 & \xi_4 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

a$_1$) $c_1 \neq 0$

i) On pose : $\xi_4 = 0$; $\xi_2 = s + c_1(1 - s^2)$; $\xi_3 = s$; $s \in \mathbb{R}^*$.

On diagonalise la matrice :

$$C(s) = \begin{pmatrix} s + (1 - s^2)c_1 & c_1 s & 0 \\ c_1 s & s & 0 \\ 0 & 0 & -s\,. \end{pmatrix}$$

Les opposés des valeurs propres sont :

$$(-s + c_1 s^2, -s - c_1, s)\,;$$

elles sont distinctes si : $s \neq \frac{2}{c_1}$ et $s \neq \frac{-c_1}{2}$. On détermine les vecteurs propres correspondant et on pose :

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ ; \det U(s) = 1 + s^2\,;$$

$$U^{-1}(s) = \frac{1}{1+s^2}\,{}^tU(s)\,.$$

$(U^{-1}CU)(s)$ est diagonale à valeurs propres distinctes. On suppose d'abord : $\xi_5 = \xi_6 = \xi_7 = 0$ et on écrit les conditions (1.1), (1.2), (1.3) on obtient :

$$\beta_{43} = \beta_{53} = \beta_{63} = 0\,.$$

On suppose : $\xi_7 = 0$; la condition (1.3) donne :

$$\beta_{66} = 0\,.$$

On suppose ξ_5, ξ_6, ξ_7 quelconques ; la condition (1.1) s'écrit :

$$\mathrm{sign}(\xi_5 + s\xi_6) = \mathrm{sign}(\beta_{45} + s\beta_{56}\xi_6 + s\beta_{57}\xi_7)\ \ ;$$

on en déduit :

$$\beta_{57} = 0; \qquad \beta_{45} = \beta_{56} > 0$$

ii) On pose $\xi_2 = \xi_3 = 0$; $\xi_4 \neq 0$.

On diagonalise la matrice :

$$C = \xi_4 \begin{pmatrix} 0 & d_1 & 1 \\ d_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Les valeurs propres sont :

$$(0, \pm\sqrt{1+d_1^2}\,\xi_4)\,;$$

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{1+d_1^2} & \sqrt{1+d_1^2} & 0 \\ -d_1 & d_1 & -1 \\ -1 & 1 & d_1 \end{pmatrix}\,;$$

$$U^{-1} = \frac{1}{2(d_1^2+1)}\,{}^tU\,.$$

$U^{-1}CU$ est diagonale à valeurs propres distinctes. On suppose d'abord : $\xi_5 = \xi_6 = \xi_7 = 0$; on écrit les conditions (1.1), (1.2), (1.3) on obtient :

$$\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} = 0\,.$$

On suppose ξ_5, ξ_6, ξ_7 quelconques ; on écrit la condition (1.3) :

$$\operatorname{sign}(-\xi_6 + d_1\xi_7) = \operatorname{sign}(-\beta_{56}\xi_6 + \beta_{67}d_1\xi_7)\,.$$

– Si $d_1 \neq 0$, on a : $\beta_{56} = \beta_{67}$;
on en déduit aisément que a est présymétrique par rapport à N.

– Si $d_1 = 0$, on écrit la condition (1) :

$$\operatorname{sign}(\xi_5 - \xi_7) = \operatorname{sign}(\beta_{45}\xi_5 - \beta_{67}\xi_7)\,,$$

d'où : $\beta_{45} = \beta_{67}$
et on a le même résultat.

a$_2$) $c_1 = 0$.
Si $\xi_4 = 0$

$$C = \begin{pmatrix} \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}\,;$$

on en déduit :

$$\beta_{43} = \beta_{53} = \beta_{63} = \beta_{57} = \beta_{66} = 0\,;$$

$$\beta_{45} > 0\,, \quad \beta_{56} > 0\,, \quad \beta_{67} > 0\,.$$

Si comme au a$_1$) ii) précédent, on pose : $\xi_2 = \xi_3 = 0$; $\xi_4 \neq 0$, on obtient de même
$\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} = 0$ et à l'aide des conditions (1.3) et (1.1) :

$$\text{si} \quad d_1 \neq 0\,, \quad \beta_{45} = \beta_{56} = \beta_{67}$$

et a est présymétrique ;

si $d_1 = 0$, on a : $\beta_{45} = \beta_{67}$.

$$\mathsf{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ \beta_{45}\xi_5 & \xi_2 & 0 & \xi_4 \\ \beta_{56}\xi_6 & 0 & \xi_3 & 0 \\ \beta_{45}\xi_7 & \xi_4 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

on pose : $T = \operatorname{diag}(1, \sqrt{\beta_{45}}, \sqrt{\beta_{56}}, \sqrt{\beta_{45}})$ et en transformant $\mathsf{a}(\xi')$ par T, on obtient une matrice symétrique.

b) c) On procède comme dans les cas I b) c) lorsque les formes ξ_2, ξ_3, ξ_4, $b_1(\xi'')$, $b_2(\xi'')$, $b_3(\xi'')$ ne sont pas linéairement indépendantes et on obtient que ces cas sont impossibles ou présymétriques.

II-2) $d_2 = 0$

$d_1 \neq 0$ sinon la dimension réduite de $C(\xi'')$ serait 2. Par changement de coordonnées dans E, on se ramène à :

$$\mathsf{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & b_1(\xi'') & b_2(\xi'') & b_3(\xi'') \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_4 & c\xi_3 \\ b_5(\xi'') & \xi_4 & \xi_3 & 0 \\ b_6(\xi'') & c\xi_3 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

a) $\big(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi'')\big)$ sont linéairement indépendantes. Avec les notations précédentes on a, comme avant

$$\mathsf{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ \beta_{43}\xi_3 + \beta_{44}\xi_4 + \beta_{45}\xi_5 & \xi_2 & \xi_4 & c\xi_3 \\ \beta_{53}\xi_3 + \beta_{54}\xi_4 + \beta_{56}\xi_6 + \beta_{57}\xi_7 & \xi_4 & \xi_7 & 0 \\ \beta_{63}\xi_3 + \beta_{64}\xi_4 + \beta_{66}\xi_6 + \beta_{67}\xi_7 & c\xi_3 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

a$_1$) $c \neq 0$

On pose $\xi_4 = 0$; $\xi_3 = s$; $\xi_2 = s$; $\xi_2 = -s + c(1 - s^2)$; $s \in \mathbb{R}^*$.

$$U(s) = \begin{pmatrix} -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par un calcul analogue à celui du II 1, a$_1$ i), on obtient :

$$\beta_{43} = \beta_{53} = \beta_{63} = \beta_{57} = \beta_{66} = 0; \quad \beta_{45} = \beta_{67} > 0.$$

On pose : $\xi_2 = \xi_3 = 0$; $\xi_4 \neq 0$; on obtient comme au II 1 a$_1$) ii) :

$$\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} = 0; \quad \beta_{45} = \beta_{56}.$$

On a la présymétrie de a, comme à la fin du I a)

a$_2$) $c = 0$.

En posant $\xi_4 = 0$, on obtient :

$$\beta_{43} = \beta_{53} = \beta_{63} = \beta_{57} = \beta_{66} = 0\,; \quad \beta_{45} > 0\,, \beta_{56} >\,, \beta_{67} > 0\,.$$

En posant $\xi_2 = \xi_3 = 0$; $\xi_4 \neq 0$, (cf. I a) ii)) :

$$\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} = 0\,; \quad \beta_{45} = \beta_{56}\,.$$

On transforme $\mathsf{a}(\xi')$ par :

$$T = \operatorname{diag}\left(1, \sqrt{\beta_{45}}, \sqrt{\beta_{45}}, \sqrt{\beta_{67}}\right)$$

et on obtient la présymétrie.

b) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ sont linéairement dépendantes, on obtient comme avant dans ces cas, ou bien une impossibilité ou bien la présymétrie de a.

III - La troisième forme réduite [6] (p. 954) comporte 2 cas

III$_1$

$$C(\xi'') = e'\xi_2 + \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ c_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xi_3 + \begin{pmatrix} 0 & d_1 & d_2 \\ \delta_1 & 0 & 1 \\ \delta_2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xi_4\,,$$

avec : $c_1 > 0$; $d_2 > \frac{1}{2}(c_1 + \frac{d_1^2}{c_1})$; $\delta_2 > \frac{1}{2}(c_1 + \frac{\delta_1^2}{c_1})$.

On remarque que les hypothèses impliquent :

$$\delta_2^2 - \delta_1^2 > (c_1 - \delta_2)^2 \geq 0$$

a) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ sont linéairement indépendantes.

On a, comme au début du I a) :

$$\mathsf{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ \beta_{43}\xi_3 + \beta_{44}\xi_4 + \beta_{45}\xi_5 & \xi_2 & c_1\xi_3 + d_1\xi_4 & d_2\xi_4 \\ \beta_{53}\xi_3 + \beta_{54}\xi_4 + \beta_{56}\xi_6 + \beta_{57}\xi_7 & c_1\xi_3 + d_1\xi_4 & \xi_3 & \xi_4 \\ \beta_{63}\xi_3 + \beta_{64}\xi_4 + \beta_{66}\xi_6 + \beta_{67}\xi_7 & \delta_2\xi_4 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

i) On pose : $\xi_2 = s + c_1(1 - s^2)$; $\xi_4 = 0$; $\xi_3 = s \in \mathbb{R}^*$, C et U sont les formes du II 1a)$_1$ i). On en déduit de même, comme $c_1 \neq 0$:

$$\beta_{43} = \beta_{53} = \beta_{63} = \beta_{57} = \beta_{66} = 0\,; \quad \beta_{45} = \beta_{56} > 0 \tag{2.4}$$

ii) On pose $\xi_3 = 0$; $\xi_4 = s \neq 0$

$$C(\xi_2, s) = \begin{pmatrix} \xi_2 & d_1 s & d_2 s \\ \delta_1 s & 0 & s \\ \delta_2 s & s & 0 \end{pmatrix}.$$

L'équation caractéristique s'écrit :

$$(\xi_0 + \xi_2)(\xi_0^2 - s^2) + \varphi s^3 - \psi s^2 \xi_0 = 0,$$

où l'on a posé : $\varphi = d_1\delta_2 + d_2\delta_1$; $\psi = d_1\delta_1 + d_2\delta_2$; elle a une racine nulle si :

$$\xi_2 = \varphi s;$$

on note alors : $C(\varphi s, s) = C'(s)$, les autres racines vérifient alors :

$$\xi_0^2 + \varphi s \xi_0 - s^2(1+\psi) = 0;$$

le discriminant vaut :

$$\Delta = [\varphi^2 + 4(1+\psi)]s^2.$$

Comme $C'(s)$ est diagonalisable dans le réel, on a :

$$\Delta \geq 0;$$

on pose :

$$\varphi^2 + 4(1+\psi) = \rho^2, \quad \rho \geq 0;$$

ii$_1$) Les 3 racines sont distinctes, si :

$$\rho > 0 \quad \text{et} \quad \psi \neq -1.$$

Elles valent :

$$\left(\frac{-\varphi+\rho}{2} s, -\frac{(\varphi+\rho)}{2} s, 0\right).$$

On détermine les vecteurs propres correspondants et :

$$U(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{(\rho-\varphi)^2}{4} - 1 & \dfrac{(\rho+\varphi)^2}{4} - 1 & 1 \\ \delta_2 + \dfrac{\varphi-\rho}{2}\delta_1 & \delta_2 + \dfrac{\varphi+\rho}{2}\delta_1 & -\delta_2 \\ \delta_1 + \dfrac{\varphi-\rho}{2}\delta_2 & \delta_1 + \dfrac{\varphi+\rho}{2}\delta_2 & -\delta_1 \end{pmatrix};$$

$$\text{dét}\, U(s) = \frac{\rho(\delta_2^2-\delta_1^2)(\rho^2-\varphi^2)}{4} = \delta(s) \neq 0$$

$$U^{-1}(s) = \frac{1}{\delta(s)} \times$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{(\varphi+\rho)(\delta_2^2-\delta_1^2)}{2} & \left(\dfrac{\varphi+\rho}{2}\right)\left[\delta_1\left(\dfrac{\varphi+\rho}{2}\right)+\delta_2\right] & -\left(\dfrac{\varphi+\rho}{2}\right)\left[\delta_2\left(\dfrac{\varphi+\rho}{2}\right)+\delta_1\right] \\ \left(\dfrac{\varphi-\rho}{2}\right)(\delta_1^2-\delta_2^2) & -\left(\dfrac{\varphi-\rho}{2}\right)\left[\delta_1\left(\dfrac{\varphi-\rho}{2}\right)+\delta_2\right] & \left(\dfrac{\varphi-\rho}{2}\right)\left[\delta_2\left(\dfrac{\varphi-\rho}{2}\right)+\delta_1\right] \\ \rho(\delta_2^2-\delta_1^2) & \rho(\varphi\delta_1+\delta_2)-\rho\delta_2\left(\dfrac{\rho^2-\varphi^2}{4}\right) & -\rho(\varphi\delta_2+\delta_1)+\dfrac{\rho\delta_1(\rho^2-\varphi^2)}{4} \end{pmatrix}$$

On fait $\xi_5 = \xi_6 = \xi_7 = 0$ et on écrit les conditions (1.1), (1.2), (1.3) ; on obtient comme précédemment

$$\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} = 0\,.$$

La condition (1.3) s'écrit :

$$\operatorname{sign}(\xi_5 - \delta_2\xi_6 - \delta_1\xi_7) = \operatorname{sign}\left[(U^{-1})^3_1\beta_{45}\xi_5 + (U^{-1})^3_2\beta_{56}\xi_6 + (U^{-1})^3_3\beta_{67}\xi_7\right].$$

On fait d'abord $\xi_7 = 0$ et on obtient, (comme $\delta_2 \neq 0$) et compte tenu de (2.4) :

$$\delta_2(U^{-1})^3_1 + (U^{-1})^3_2 = 0$$

soit :

$$(\delta_2^2 - \delta_1^2)\delta_2 + \left[(\varphi\delta_1 + \delta_2) - \frac{\delta_2(\rho^2-\varphi^2)}{4}\right] = 0$$

et en explicitant φ et ψ, compte tenu que $\delta_2^2 - \delta_1^2 \neq 0$, on obtient :

(2.5) $$\delta_2 = d_2\,.$$

On fait $\xi_6 = 0$ et on obtient, si $\delta_1 \neq 0$:

$$\delta_1(U^{-1})^3_1\beta_{45} + (U^{-1})^3_3\beta_{67} = 0\,;$$

d'où en explicitant :

(2.6) $$\delta_1\beta_{45} - d_1\beta_{67} = 0\,.$$

On voit que si $\delta_1 = 0$, ce résultat est encore vrai.

La condition (1.1) s'écrit pour $\xi_5 = 0$:

$$\operatorname{sign}\left[\left(\delta_2 + \frac{\varphi-\rho}{2}\delta_1\right)\xi_6 + \left(\delta_1 + \frac{\varphi-\rho}{2}\delta_2\right)\xi_7\right]$$
$$= \operatorname{sign}\left[(U^{-1})^1_2\beta_{56}\xi_6 + (U^{-1})^1_3\beta_{67}\xi_7\right].$$

La condition (1.2) s'écrit pour $\xi_5 = 0$:

$$\operatorname{sign}\left[\left(\delta_2 + \frac{\varphi+\rho}{2}\delta_1\right)\xi_6 + \left(\delta_1 + \frac{\varphi+\rho}{2}\delta_2\right)\xi_7\right]$$
$$= \operatorname{sign}\left[(U^{-1})^2_2\beta_{56}\xi_6 + (U^{-1})^2_3\beta_{67}\xi_7\right].$$

Supposons d'abord :

$$\delta_2+\frac{\varphi-\rho}{2}\delta_1 \neq 0,\quad \delta_1+\frac{\varphi-\rho}{2}\delta_2 \neq 0,\quad \delta_2+\frac{\varphi+\rho}{2}\delta_1 \neq 0,\quad \delta_1+\frac{\varphi+\rho}{2}\delta_2 \neq 0.$$

Les conditions ci-dessus donnent :

$$\text{(2.7)}\quad \begin{aligned} &(U^{-1})^1_2\beta_{56}\left(\delta_1 + \frac{\varphi-\rho}{2}\delta_2\right) - (U^{-1})^1_3\beta_{67}\left(\delta_2 + \frac{\varphi+\rho}{2}\delta_1\right) = 0\\ &(U^{-1})^2_2\beta_{56}\left(\delta_1 + \frac{\varphi-\rho}{2}\delta_2\right) - (U^{-1})^2_3\beta_{67}\left(\delta_2 + \frac{\varphi+\rho}{2}\delta_1\right) = 0. \end{aligned}$$

Considérons les comme un système en (β_{56}, β_{67}). Si le déterminant de ce système était non nul, on aurait (cf. aussi i) :

$$\beta_{45} = \beta_{56} = \beta_{67} = 0,$$

ce qui est impossible.

On a donc :

$$(U^{-1})^1_2(U^{-1})^2_3\left(\delta_1 + \left(\frac{\varphi-\rho}{2}\right)\delta_2\right)\left(\delta_2 + \left(\frac{\varphi+\rho}{2}\right)\delta_1\right)$$
$$- (U^{-1})^1_3(U^{-1})^2_2\left(\delta_2 + \left(\frac{\varphi-\rho}{2}\right)\delta_1\right)\left(\delta_1 + \left(\frac{\varphi+\rho}{2}\right)\delta_2\right) = 0$$

soit en explicitant, et simplifiant :

$$\left[\delta_1\left(\frac{\varphi+\rho}{2}\right) + \delta_2\right]^2\left[\delta_1 + \delta_2\left(\frac{\varphi-\rho}{2}\right)\right]^2$$
$$- \left[\delta_1 + \left(\frac{\varphi+\rho}{2}\right)\delta_2\right]^2\left[\delta_2 + \delta_1\left(\frac{\varphi-\rho}{2}\right)\right]^2 = 0.$$

On a donc, soit :

$$\left[\delta_1\left(\frac{\varphi+\rho}{2}\right)+\delta_2\right]\left[\delta_1+\delta_2\left(\frac{\varphi-\rho}{2}\right)\right] - \left[\delta_1+\left(\frac{\varphi-\rho}{2}\right)\delta_2\right]\left[\delta_2+\delta_1\left(\frac{\varphi-\rho}{2}\right)\right]=0$$

qui s'écrit :

$$\rho(\delta_2^2-\delta_1^2)=0$$

et est donc impossible ; soit :

$$\left[\delta_1\left(\frac{\varphi+\rho}{2}\right)+\delta_2\right]\left[\delta_1+\delta_2\left(\frac{\varphi-\rho}{2}\right)\right] = -\left[\delta_1+\left(\frac{\varphi+\rho}{2}\right)\delta_2\right]\left[\delta_2+\delta_1\left(\frac{\varphi-\rho}{2}\right)\right]$$

qui s'écrit aussi :

$$(U^{-1})_2^1\left[\delta_1+\delta_2\left(\frac{\varphi-\rho}{2}\right)\right]=-(U^{-1})_3^1\left[\delta_2+\delta_1\left(\frac{\varphi+\rho}{2}\right)\right]$$

et la condition (2.7) donne :

$$\beta_{56}=\beta_{67} \tag{2.8}$$

En considérant (2.4), (2.6), (2.8), on obtient : $\delta_2=d_2$, $\delta_1=d_1$ et a est présymétrique par transformation par $T=(1,\sqrt{\beta_{45}},\sqrt{\beta_{45}},\sqrt{\beta_{45}})$.

Ensuite, on remarque que si : $\delta_2+\frac{\varphi-\rho}{2}\delta_1=0$, on a : $\delta_1+\frac{\varphi-\rho}{2}\delta_2\neq 0$, (sinon, on aurait : $\delta_1^2-\delta_2^2=0$, ce qui est exclu par les hypothèses du cas III). La condition (1.1) donne alors :

$$\delta_1\left(\frac{\varphi+\rho}{2}\right)+\delta_2=0,$$

d'où : $\delta_1=\delta_2=0$, ce qui est exclu par les mêmes hypothèses.

De même, on ne peut avoir $\delta_1+\frac{\varphi-\rho}{2}\delta_2=0$ ou $\delta_2+\frac{\varphi+\rho}{2}\delta_1=0$ ou $\delta_1+\frac{\varphi+\rho}{2}\delta_2=0$.

ii$_2$) On suppose : $\rho=0$

$C'(s)$ a une valeur propre double : $\underline{\xi}_0;=-\frac{\varphi s}{2}$; comme elle est diagonalisable, les mineurs d'ordre 2 de $\underline{\xi}_0 I+C'(s)$ sont tous nuls ; on a donc :

$$(d_1\delta_2+d_2\delta_1)^2-4=0,\qquad (d_1\delta_2+d_2\delta_1)^2+4d_2\delta_2=0,$$

d'où : $d_2\delta_2=-1$, qui est exclu par les hypothèses.

iii$_3$) On suppose $\rho > 0$ et : $\psi = -1$

$\xi_0 = 0$ est au moins valeur propre double de $C(s)$; comme la matrice $C(s)$ est diagonalisable, tous les mineurs d'ordre 2 de $C'(s)$ sont nuls, ce qui est impossible.

b) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ sont linéairement dépendantes ; on obtient, comme avant, dans ce cas, ou bien une impossibilité ou bien la présymétrie de a.

III$_2$ $\quad C(\xi'')$ est symétrique ([6], p. 954) :

$$C(\xi'') = e'\xi_2 + \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ c_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xi_3 + \begin{pmatrix} 0 & d_1 & d_2 \\ d_1 & 0 & 1 \\ d_2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xi_4$$

a) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ sont linéairement indépendantes. On a, comme dans le cas III$_1$:

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ \beta_{43}\xi_3 + \beta_{44}\xi_4 + \beta_{45}\xi_5 & \xi_2 & c_1\xi_3 + d_1\xi_4 & d_2\xi_4 \\ \beta_{53}\xi_3 + \beta_{54}\xi_4 + \beta_{56}\xi_6 + \beta_{57}\xi_7 & c_1\xi_3 + d_1\xi_4 & \xi_3 & \xi_4 \\ \beta_{63}\xi_3 + \beta_{64}\xi_4 + \beta_{66}\xi_6 + \beta_{67}\xi_7 & d_2\xi_4 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

i) On pose $\xi_4 = 0$. Si $c_1 \neq 0$, comme au III$_1$ a) i), on pose : $\xi_2 = s + c_1(1 - s^2)$; $\xi_3 = s$; $s \in \mathbb{R}^*$; on obtient de même :

$$\beta_{43} = \beta_{53} = \beta_{63} = \beta_{66} = \beta_{57} = 0; \quad \beta_{45} = \beta_{56} > 0.$$

Si $c_1 = 0$, on a directement :

$$\beta_{43} = \beta_{53} = \beta_{63} = \beta_{66} = \beta_{57} = 0; \quad \beta_{45} > 0, \beta_{56} > 0, \beta_{57} > 0.$$

ii) Comme au III$_1$ a) ii), avec les mêmes notations, on pose : $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = s$; $s \in \mathbb{R}^*$; $\xi_2 = \varphi s$:

$$C(s) = \begin{pmatrix} \varphi & d_1 & d_2 \\ d_1 & 0 & 1 \\ d_2 & 1 & 0 \end{pmatrix} s.$$

L'équation caractéristique de C a une racine nulle ; les autres racines vérifient :

$$\xi_0^2 + \varphi s \xi_0 - s^2(1 + \psi) = 0.$$

Le discriminant Δ vaut :

$$\Delta = \rho^2 s^2 ;$$

$$\rho^2 = \varphi^2 + 4(1 + \psi) = 4(d_1^2 d_2^2 + 1 + d_1^2 + d_2^2) > 0$$

et les trois racines caractéristiques sont distinctes.

ii$_1$) On obtient comme précédemment, si $d_1^2 - d_2^2 \neq 0$

$$\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} = 0\,; \quad \beta_{45} = \beta_{56} = \beta_{67} > 0$$

et a est présymétrique.

ii$_2$) Si $d_1^2 - d_2^2 = 0$ on a : $d_2 = \varepsilon d_1$, $\varepsilon = \pm 1$; $\varphi = 2\varepsilon d_1^2$

$$U(s) = \begin{pmatrix} (\varepsilon - 1)d_1 & (\varepsilon + 1)d_1 & 1 \\ 1 & 1 & -\varepsilon d_1 \\ -1 & 1 & -d_1 \end{pmatrix} s$$

dét $U(s) = 2(2d_1^2 + 1)$.

On obtient à l'aide des conditions (1.1), (1.2), (1.3) :

$$\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} = 0\,; \quad \beta_{56} = \beta_{67}\,; \quad \text{si} \quad d_1 \neq 0\,,\ \beta_{45} = \beta_{56} = \beta_{67}\,;$$

et a est présymétrique dans tous les cas.

b) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ sont linéairement dépendantes ; on obtient, comme avant, ou bien une impossibilité ou bien la présymétrie de a.

IV - La quatrième forme réduite ([6], p. 959) est :

$$C(\xi'') = e'\xi_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_3 + \begin{pmatrix} 0 & d_1 & -d_2 \\ d_1(1-\delta) & 1 & 0 \\ -2\delta & 0 & -1 \end{pmatrix} \xi_4$$

avec : $0 < \delta < 1$, $d_2 > \frac{d_1^2}{8}$

a) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_s(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ sont linéairement indépendants. On a, comme au début du I a :

$$\mathrm{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ \beta_{43}\xi_3 + \beta_{44}\xi_4 + \beta_{45}\xi_5 & \xi_2 & \xi_3 + d_1\xi_4 & -d_2\xi_4 \\ \beta_{53}\xi_3 + \beta_{54}\xi_4 + \beta_{56}\xi_6 + \beta_{57}\xi_7 & \xi_3 + d_1(1-\delta)\xi_4 & \xi_4 & \xi_3 \\ \beta_{63}\xi_3 + \beta_{64}\xi_4 + \beta_{66}\xi_6 + \beta_{67}\xi_7 & -2\delta\xi_4 & 0 & -\xi_4 \end{pmatrix}$$

On pose : $\xi_4 = 0$; $\xi_2 = 1 - s^2$; $\xi_3 = s$, $s \in \mathbb{R}^*$; on a alors :

$$U(s) = \begin{pmatrix} s & s & 1 \\ s^2 - 1 & -1 & s \\ -s & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En écrivant la condition 1-1, on a une impossibilité.

b) En raisonnant comme dans le cas b) précédent, on voit que ce cas est impossible.

3. – Cas où $C(\xi'')$ est de dimension réduite 4

Il résulte de [6] que $C(\xi'')$ est présymétrique ; on se ramène donc aisément au cas où $C(\xi'')$ est symétrique

I ([6], p. 963-4) donne une première forme réduite :

$$C(\xi'') = \begin{pmatrix} \xi_2 & c_1\xi_3 + d_1\xi_4 + f_1\xi_5 & c_1\xi_3 + d_2\xi_4 + f_2\xi_5 \\ c_1\xi_3 + d_1\xi_4 + f_1\xi_5 & \xi_3 & 0 \\ c_2\xi_3 + d_2\xi_4 + f_2\xi_5 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

Comme la dimension réduite de C est 4, on peut écrire :

$$C(\xi'') = \begin{pmatrix} \xi_2 & \xi_4 & \xi_5 \\ \xi_4 & \xi_3 & 0 \\ \xi_5 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathsf{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & b_1(\xi'') & b_2(\xi'') & b_3(\xi'') \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_4 & \xi_5 \\ b_5(\xi'') & \xi_4 & \xi_3 & 0 \\ b_6(\xi'') & \xi_5 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

a) On suppose que $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ est de rang 6

a$_1$) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''), b_2(\xi''))$ sont linéairement indépendants. On peut écrire :

$$\mathsf{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_6 & \xi_7 & \beta_{32}\xi_2 + \beta_{33}\xi_3 + \beta_{34}\xi_4 + \beta_{35}\xi_5 + \beta_{36}\xi_6 + \beta_{37}\xi_7 \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_4 & \xi_5 \\ b_5(\xi'') & \xi_4 & \xi_3 & 0 \\ b_6(\xi'') & \xi_5 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

$\xi'' = (\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7)$.

On pose : $\xi_4 = \xi_5 = 0$; $\xi_2 \neq 0$, $\xi_3 \neq 0$, $\xi_2 \neq \pm\xi_3$; il résulte du lemme 0.8, que :

$$b_4(\xi'') = \beta_{44}\xi_4 + \beta_{45}\xi_5 + \beta_{46}\xi_6, \quad \beta_{46} > 0$$

$$b_5(\xi'') = \beta_{54}\xi_4 + \beta_{55}\xi_5 + \beta_{57}\xi_7, \quad \beta_{57} > 0$$

et :

$$b_6(\xi'') = k(\beta_{32}\xi_2 + \beta_{33}\xi_3 + \beta_{36}\xi_6 + \beta_{37}\xi_7) + \beta_{64}\xi_4 + \beta_{65}\xi_5, \quad k > 0.$$

i) Posons $\xi_5 = 0$; $\xi_4 = s$; $\xi_2 = \xi_3 + s^2 - 1$, $s \in \mathbb{R}^*$; on diagonalise la matrice :

$$C(\xi_3, s) = \begin{pmatrix} \xi_3 + s^2 - 1 & s & 0 \\ s & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

Les opposées des valeurs propres sont :

$$(-\xi_3 + 1, -\xi_3 - s^2, \xi_3)\,;$$

elles sont distinctes si : $\xi_3 \neq \frac{1}{2}$ et $\xi_3 \neq -\frac{s^2}{2}$.

On détermine les vecteurs propres correspondants et on pose :

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,;$$

$$U^{-1}(s) = \frac{1}{1+s^2}\,{}^tU(s)\,.$$

$U^{-1}CU(s)$ est diagonale à valeurs propres distinctes.

La condition (1.1) s'écrit :

$$\operatorname{sign}(\xi_6 - s\xi_7) = \operatorname{sign}\Big[(\beta_{44}s + \beta_{46}\xi_6 - s(\beta_{54}s + \beta_{57}\xi_7)\Big]$$

$\xi_6 = \xi_7 = 0$ implique : $\beta_{44} - \beta_{54}s \equiv 0$, d'où : $\beta_{44} = \beta_{54} = 0$; on a aussi :

$$\beta_{46} = \beta_{57} > 0\,.$$

La condition (1.3) s'écrit :

$$\operatorname{sign}\Big[\beta_{32}(\xi_3 + s^2 - 1) + \beta_{33}\xi_3 + \beta_{34}s + \beta_{36}\xi_6 + \beta_{37}\xi_7\Big]$$
$$= \operatorname{sign}\Big[k(\beta_{32}(\xi_3 + s^2 - 1) + \beta_{33}\xi_3 + \beta_{36}\xi_6 + \beta_{37}\xi_7) + \beta_{64}s\Big]\,.$$

• Si $\beta_{32} + \beta_{33} \neq 0$, ou $\beta_{36} \neq 0$ ou $\beta_{37} \neq 0$, on en déduit :

$$k\beta_{32}(s^2 - 1) + \beta_{64}s \equiv k\Big[\beta_{32}(s^2 - 1) + \beta_{34}s\Big]\,,$$

d'où :

$$\beta_{64} = k\beta_{34}\,.$$

• Si $\beta_{36} = \beta_{37} = \beta_{32} + \beta_{33} = 0$, on a :

$$\operatorname{sign}\Big[\beta_{32}(s^2 - 1) + \beta_{34}s\Big] = \operatorname{sign}\Big[k\beta_{32}(s^2 - 1) + \beta_{64}s\Big]\,, \quad \forall s \in \mathbb{R}^*,.$$

• Si $\beta_{32} \neq 0$, en prenant pour s une racine non nulle du 1er membre, on obtient encore :

$$\beta_{64} = k\beta_{34}\,.$$

• Si $\beta_{32} = 0$,

$$b_3(\xi'') = \beta_{34}\xi_4 + \beta_{35}\xi_5\,; \quad b_6(\xi'') = \beta_{64}\xi_4 + \beta_{65}\xi_5\,;$$

la condition (1.3) donne : $\operatorname{sign}\beta_{64} = \operatorname{sign}\beta_{34}$; on pose donc encore :

$$\beta_{64} = k\beta_{34} \qquad k > 0\,.$$

ii) Posons $\xi_4 = 0$; $\xi_5 = s$; $\xi_2 = -\xi_3 + s^2 - 1$, $s \in \mathbb{R}^*$; on diagonalise la matrice :

$$C(\xi_3, s) = \begin{pmatrix} -\xi_3 + s^2 - 1 & 0 & s \\ 0 & \xi_3 & 0 \\ s & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}\,;$$

$$U(s) = \begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -s & 0 \end{pmatrix}\,.$$

$U^{-1}CU(s)$ est diagonale à valeurs propres distincts, pour $\xi_3 = -\frac{1}{2}$, $\xi_3 \neq \frac{s^2}{2}$.

La condition (1.3) donne : $\beta_{55} = 0$. La condition (1.1) s'écrit :

$$\operatorname{sign}\Big[s\xi_6 + \beta_{32}(-\xi_3 + s^2 - 1) + \beta_{33}\xi_3 + \beta_{35}s + \beta_{36}\xi_6 + \beta_{37}\xi_7\Big]$$

$$= \operatorname{sign}\Big[s(\beta_{45}s + \beta_{46}\xi_6) + k(\beta_{32}(-\xi_3 + s^2 - 1) + \beta_{33}\xi_3 + \beta_{36}\xi_6 + \beta_{37}\xi_7) + \beta_{65}s)\Big]\,.$$

Si $\beta_{36} \neq 0$, comme on doit avoir :

$$\operatorname{sign}(s + \beta_{36}) = \operatorname{sign}(s\beta_{46} + k\beta_{36})\,,$$

on obtient :

$$\beta_{46} = k\,;$$

d'où : $\beta_{65}s + \beta_{45}s^2 = k\beta_{35}s$ et :

$$\beta_{65} = k\beta_{35}\,, \quad \beta_{45} = 0\,.$$

Si $\beta_{36} = 0$, comme $\beta_{46} \neq 0$, on a, si $\beta_{37} \neq 0$, ou $\beta_{33} - \beta_{32} \neq 0$:

$$\beta_{46} = k\,,$$

d'où encore :

$$\beta_{65} = k\beta_{35}\,, \quad \beta_{45} = 0\,.$$

Si $\beta_{36} = \beta_{37} = 0$, $\beta_{33} - \beta_{32} = 0$, on a, si $\beta_{32} \neq 0$:

$$\beta_{46} = k\,; \quad \beta_{45} = 0\,, \quad \beta_{65} = k\beta_{35}\,.$$

Dans tous ces cas, on a aisément la présymétrie de a.

iii) Si $\beta_{32} = \beta_{33} = \beta_{36} = \beta_{37} = 0$, on a :

$$\beta_{45} = 0, \quad \beta_{65} = \beta_{46}\beta_{35};$$

on a donc dans ce cas :

$$\mathrm{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_6 & \xi_7 & \beta_{34}\xi_4 + \beta_{35}\xi_5 \\ \beta_{46}\xi_6 & \xi_2 & \xi_4 & \xi_5 \\ \beta_{46}\xi_7 & \xi_4 & \xi_3 & 0 \\ k\beta_{34}\xi_4 + \beta_{46}\beta_{35}\xi_5 & \xi_5 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

Si $\beta_{34} = 0$, on obtient la présymétrie de a.

Si $\beta_{34} \neq 0$, on pose : $\xi_1 = \xi_6 = \xi_7 = 0$, $\xi_3 = \xi_5 = 1$,

$$\xi_4 = -\frac{\beta_{35}}{\beta_{34}}, \qquad \xi_2 = \left[\left(\frac{\beta_{35}}{\beta_{34}}\right)^2 - 1\right],$$

alors 0 est valeur propre double de $\mathrm{a}(\xi')$, on en déduit que les mineurs d'ordre 3 sont nuls, d'où :

$$(\beta_{46} - k)\beta_{35} = 0.$$

Si $\beta_{35} \neq 0$, on obtient $\beta_{46} = k$ et la présymétrie.

Si $\beta_{35} = 0$, on pose : $\xi_2 = \xi_3 = 0$; $\xi_4 = \xi_5 \neq 0$, on diagonalise $C(\xi_4)$, on écrit la condition (1.1) et on obtient :

$$\beta_{46} = k$$

et la présymétrie de a.

a_2) $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''), b_2(\xi''))$ sont linéairement dépendantes.
$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''))$ sont linéairement indépendantes, on a donc aussi :
$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''), b_3(\xi'))$ sont linéairement indépendantes, et on peut écrire :

$$\mathrm{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_6 & \beta_{22}\xi_2 + \beta_{23}\xi_3 + \beta_{24}\xi_4 + \beta_{25}\xi_5 + \beta_{26}\xi_6 & \xi_7 \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_4 & \xi_5 \\ b_5(\xi'') & \xi_4 & \xi_3 & 0 \\ b_6(\xi'') & \xi_5 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

$\xi'' = (\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8)$.

En échangeant les deux dernières lignes et les deux dernières colonnes de la matrice en échangeant ξ_4 et ξ_5, en changeant ξ_3 en $-\xi_3$ on se ramène au a_1) ; de même les seuls cas possibles sont ceux où a est présymétrique.

a₃) $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''))$ sont linéairement dépendantes

$$\mathsf{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \beta_{12}\xi_2 + \ldots + \beta_{15}\xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_4 & \xi_5 \\ b_5(\xi'') & \xi_4 & \xi_3 & 0 \\ b_6(\xi'') & \xi_5 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

$\xi'' = (\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8)$.

On procède comme au a₁). On a d'abord :

$$b_5(\xi'') = \beta_{54}\xi_4 + \beta_{55}\xi_5 + \beta_{56}\xi_6, \qquad \beta_{56} > 0$$

$$b_6(\xi'') = \beta_{64}\xi_4 + \beta_{65}\xi_5 + \beta_{67}\xi_7, \qquad \beta_{67} > 0$$

$$b_4(\xi'') = k(\beta_{12}\xi_2 + \beta_{13}\xi_3) + \beta_{44}\xi_4 + \beta_{45}\xi_5, \quad k > 0.$$

En posant $\xi_5 = 0$, $\xi_4 = s$, $\xi_2 = \xi_3 + s^2 - 1$, $s \in \mathbb{R}^*$, on obtient comme au a₁) i) :

$$\beta_{54} = \beta_{64} = 0, \quad \beta_{44} = \beta_{56}\beta_{41}, \quad k = \beta_{56}.$$

En posant $\xi_4 = 0$, $\xi_5 = s$, $\xi_2 = -\xi_3 + s^2 - 1$, $s \in \mathbb{R}^*$, on obtient comme au a₁) ii) :

si $\beta_{12} \neq \beta_{13}$ ou si $\beta_{12} = \beta_{13} \neq 0$, $k = \beta_{67}$, $\beta_{55} = \beta_{65} = 0$, $\beta_{45} = \beta_{56}\beta_{15}$ et la présymétrie de a :

si $\beta_{12} = \beta_{13} = 0$, on a :

$$\mathsf{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \beta_{14}\xi_4 + \beta_{15}\xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ \beta_{56}\beta_{14}\xi_4 + \beta_{67}\beta_{15}\xi_5 & \xi_2 & \xi_4 & \xi_5 \\ \beta_{56}\xi_6 & \xi_4 & \xi_3 & 0 \\ \beta_{67}\xi_7 & \xi_5 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

Si $\beta_{15} \neq 0$, on pose : $\xi_1 = \xi_6 = \xi_7 = 0$; $\xi_3 = \xi_4 = 1$; $\xi_5 = -\frac{\beta_{14}}{\beta_{15}}$ et ξ_2 est choisi de sorte que $\xi_0 = 0$ soit valeur propre double ; on obtient : $\beta_{14}(\beta_{56} - \beta_{67}) = 0$.

- Si $\beta_{14} \neq 0$, on a la présymétrie de a.

- Si $\beta_{14} = 0$, comme à la fin du a₁), on pose : $\xi_2 = \xi_3 = 0$, $\xi_4 = \xi_5 = 1$, on obtient : $\beta_{56} = \beta_{67}$ et la présymétrie.

Si $\beta_{15} = 0$, on procède exactement comme pour $\beta_{14} = 0$ et on obtient la présymétrie.

b) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ est de rang 5. On peut choisir une des formes b_1, b_2, b_3 comme forme de base, soit ξ_6 ; une des formes b_4, b_5, b_6 est aussi choisie comme forme de base soit ξ_7.

On pose : $\xi_4 = \xi_5 = 0$; le cas où ξ_6 et ξ_7 sont en position symétrique par rapport à la diagonale est évidemment impossible (poser $\xi_6 = -\xi_7 = 1$) ; les autres cas se traitent tous de la même façon ; soit par exemple, $b_1(\xi'') = \xi_6$; $b_5(\xi'') = \xi_7$:

$$\mathsf{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_6 & \beta_{22}\xi_2 + \ldots + \beta_{26}\xi_6 & \beta_{32}\xi_2 + \ldots + \beta_{36}\xi_6 \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & 0 & 0 \\ \xi_7 & 0 & \xi_3 & 0 \\ b_6(\xi'') & 0 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix};$$

on doit avoir :

$$\operatorname{sign} \xi_7 = \operatorname{sign}(\beta_{22}\xi_2 + \beta_{23}\xi_3 + \beta_{26}\xi_6),$$

ce qui est évidemment impossible.

c) Si $b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi'')$ dépendent linéairement de $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5), \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ et deux des formes b_4, b_5, b_6 sont linéairement indépendantes ; par symétrie autour de la 1ère diagonale ce cas se traite comme le a) .

II - La deuxième forme réduite pour $C(\xi'')$ est ([6], p. 964) :

$$C(\xi'') = \begin{pmatrix} \xi_2 & c_1\xi_3 + d_1\xi_4 + f_1\xi_5 & c_2\xi_3 + d_2\xi_4 + f_2\xi_5 \\ c_1\xi_3 + d_1\xi_4 + f_1\xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ c_2\xi_3 + d_2\xi_4 + f_2\xi_5 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

Si $f_1 \neq 0$, on peut aussi bien écrire, par changement de base dans E, et comme la dimension réduite de C est 4

$$C(\xi'') = \begin{pmatrix} \xi_2 & \xi_5 & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5 \\ \xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

Si $f_1 = 0$, $f_2 \neq 0$, on remplace de même $c_2\xi_3 + d_2\xi_4 + f_2\xi_5$ par ξ_5 ; ensuite par échange des deux dernières colonnes et des deux dernières lignes, et en échangeant ξ_3 et $-\xi_3$, on se ramène au cas précédent (avec $\tau = 0$).

Le cas $f_1 = f_2 = 0$ est impossible, compte tenu de l'hypothèse sur la dimension réduite de C.

On considère donc C sous la forme (3.1) et :

$$\mathsf{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & b_1(\xi'') & b_2(\xi'') & b_3(\xi'') \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_5 & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5 \\ b_5(\xi'') & \xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ b_6(\xi'') & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

$\xi'' = (\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7)$.

a) On suppose que $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ est de rang 6 .

a$_1$) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''), b_2(\xi''))$ sont linéairement indépendantes.
On a, par un changement de base :

$$\mathrm{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_6 & \xi_7 & \beta_{32}\xi_2 + \ldots + \beta_{37}\xi_7 \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_5 & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5 \\ b_5(\xi'') & \xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ b_6(\xi'') & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

On pose : $\xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = 0$, $\xi_2 \neq 0$, on obtient :

$$\beta_{42} = \beta_{47} = 0, \quad \beta_{46} > 0.$$

En posant de plus $\xi_7 = 0$, on déduit du lemme 0.8 que :

$$b_6(\xi'') = k(\beta_{32}\xi_2 + \beta_{36}\xi_6) + \beta_{63}\xi_3 + \beta_{64}\xi_4 + \beta_{65}\xi_5 + \beta_{67}\xi_7, \quad k > 0.$$

On distingue les cas

1) $\rho \neq 0$

i) Posons : $\xi_4 = \xi_5 = 0$; $\xi_2 = -s + \rho(1 - s^2)$; $\xi_3 = s$; $s \in \mathbb{R}^*$. C a la forme du § 2 II 2 a$_1$). On obtient U et les conditions (1.3) et (1.1) donnent :

$$\beta_{43} = 0; \quad \beta_{52} = \beta_{53} = \beta_{56} = 0; \quad \beta_{57} > 0;$$

$$\beta_{63} = \beta_{46}\beta_{43}, \quad \beta_{67} = \beta_{46}\beta_{37};\ \text{si} \quad \beta_{32} \quad \text{ou} \quad \beta_{36} \neq 0, \quad k = \beta_{46} > 0.$$

On a donc dans tous les cas :

$$b_4(\xi'') = \beta_{44}\xi_4 + \beta_{45}\xi_5 + \beta_{46}\xi_6, \quad \beta_{46} > 0$$

$$b_5(\xi'') = \beta_{54}\xi_4 + \beta_{55}\xi_5 + \beta_{57}\xi_7, \quad \beta_{57} > 0$$

$$b_6(\xi') = \beta_{46}\Big[\beta_{32}\xi_2 + \beta_{33}\xi_3 + \beta_{36}\xi_6 + \beta_{37}\xi_7\Big] + \beta_{64}\xi_4 + \beta_{65}\xi_5$$

ii) Posons $\xi_4 = 0$, $\xi_3 = -\frac{\tau}{\rho}s$, $\xi_5 = s$, $\xi_2 = -\frac{2\tau}{\rho}s + 1 - s^2$, $s \in \mathbb{R}^*$.

$$C(s) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2\tau}{\rho}s + 1 + s^2 & s & 0 \\ s & -\dfrac{\tau}{\rho}s & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\tau}{\rho}s \end{pmatrix}.$$

Les opposées des valeurs propres sont :

$$\left(-\frac{\tau}{\rho}s\,,\ \frac{\tau}{\rho}s+s^2\,,\ \frac{\tau}{\rho}s-1\right)$$

$$U(s)=\begin{pmatrix} s & 1 & 0\\ -1 & s & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\text{dét}\,U(s)=s^2+1\neq 0.$

On diagonalise $C(s)$; la condition (1.1) donne :

$$\beta_{45}=\beta_{55}=0;\quad \beta_{46}=\beta_{57}>0\,.$$

La condition (1.3) donne si : β_{32} ou β_{36} ou $\beta_{37}\neq 0$:

$$\beta_{65}=\beta_{46}\beta_{35}$$

iii) Posons $\xi_5=0$, $\xi_3=-\frac{\sigma}{\rho}s$, $\xi_4=s$, $s\in\mathbb{R}^*$

$$C(s)=\begin{pmatrix} \xi_2 & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{\sigma}{\rho}s & s\\ 0 & s & \dfrac{\sigma}{\rho}s\end{pmatrix}.$$

Les opposées des valeurs propres sont :

$$\left(-\xi_2\,,\ \pm s\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\rho^2}}\right)$$

$$U(s)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & \dfrac{\sigma}{\rho}-\sqrt{1+\dfrac{\sigma^2}{\rho^2}} & \dfrac{\sigma}{\rho}+\sqrt{1+\dfrac{\sigma^2}{\rho^2}}\end{pmatrix}$$

$\text{dét}\,U(s)=2\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\rho^2}}\neq 0.$

On diagonalise $C(s)$; la condition (1.1) donne : $\beta_{44}=0$. Les conditions (1.2) et (1.3), après quelques calculs donnent si : $\beta_{32}\neq 0$ ou si : $\beta_{36}\neq 0$:

$$\beta_{54}=0\,,\quad \beta_{64}=\beta_{46}\beta_{34}\,.$$

Si $\beta_{32}\neq 0$ ou si $\beta_{36}\neq 0$, il résulte du ii) et du iii) que :

$$\beta_{44}=\beta_{54}=\beta_{45}=\beta_{55}=0;\quad \beta_{64}=\beta_{46}\beta_{34};\quad \beta_{65}=\beta_{46}\beta_{35}$$

et on obtient que a est présymétrique.

Il reste donc à étudier les cas $\beta_{32} = \beta_{36} = 0$

iv) On pose : $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$; $\xi_5 = s$, $s \in \mathbb{R}^*$

$$C(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \tau \\ 1 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{pmatrix} s$$

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\tau^2} & \sqrt{1+\tau^2} & 0 \\ -1 & 1 & -\tau \\ -\tau & \tau & 1 \end{pmatrix}, \text{dét}\, U \neq 0$$

$U^{-1} = \dfrac{1}{2(1+\tau^2)}\,{}^tU.$

On diagonalise $C(s)$; la condition (1.1) donne :

$$\tau(\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35}) = 0$$

donc si $\tau \neq 0$, on a : $\beta_{65} = \beta_{46}\beta_{35}$.

v) On pose $\xi_2 = \xi_3 = \xi_5 = 0$; $\xi_4 = s$, $s \in \mathbb{R}^*$

$$C(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 1 \\ \sigma & 1 & 0 \end{pmatrix} s$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \sigma & \sigma \\ -\sigma & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{1+\sigma^2} & \sqrt{1+\sigma^2} \end{pmatrix}.$$

$\text{dét}\, U \neq 0$.

Les conditions (1.1) et (1.2) impliquent, si $\sigma \neq 0$:

$$\beta_{54} = 0, \quad \beta_{64} = \beta_{46}\beta_{34}.$$

• Si $\sigma = 0$, on obtient :

si $\beta_{37} \neq 1$, $\beta_{54} - (\beta_{64} - \beta_{46}\beta_{34}) = 0$;
si $\beta_{37} \neq 1$, $\beta_{54} + \beta_{64} - \beta_{46}\beta_{34} = 0$.

On obtient donc que, si $\tau \neq 0$ et $[\sigma \neq 0$ ou $(\sigma = 0$ et $\beta_{37} \neq \pm 1)]$, on a :

$$\beta_{65} = \beta_{46}\beta_{35}, \quad \beta_{54} = 0, \quad \beta_{64} = \beta_{46}\beta_{34}$$

a est donc présymétrique.

Il reste si $\tau \neq 0$, à examiner le cas $\sigma = 0$, $\beta_{37} = \pm 1$.

vi) On pose alors : $\xi_2 = -2s$, $\xi_3 = 2s$, $\xi_4 = (s^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\tau^2}}$, $\xi_5 = -\frac{2\rho s}{\tau}$, $s \in \mathbb{R}^*$.

$$C(s) = \begin{pmatrix} -2s & -\dfrac{2\rho s}{\tau} & 0 \\ -\dfrac{2\rho s}{\tau} & 2s & (s^2-1)\sqrt{1+\dfrac{\rho^2}{\tau^2}} \\ 0 & (s^2-1)\sqrt{1+\dfrac{\rho^2}{\tau^2}} & -2s \end{pmatrix}.$$

Les opposées des valeurs propres de $C(s)$ sont :

$$(s^2+1)\sqrt{1+\frac{\rho^2}{\tau^2}}, \quad -(s^2+1)\sqrt{1+\frac{\rho^2}{\tau^2}}, \quad 2s$$

et sont génériquement distinctes.

$$U(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{2\rho s}{\tau} & \dfrac{2\rho s}{\tau} & (s^2-1)\sqrt{1+\dfrac{\rho^2}{\tau^2}} \\ (s^2+1)\sqrt{1+\dfrac{\rho^2}{\tau^2}} - 2s & (s^2+1)\sqrt{1+\dfrac{\rho^2}{\tau^2}} - 2s & 0 \\ -(s^2-1)\sqrt{1+\dfrac{\rho^2}{\tau^2}} & (s^2-1)\sqrt{1+\dfrac{\rho^2}{\tau^2}} & \dfrac{2\rho s}{\tau} \end{pmatrix}$$

dét $U(s) \neq 0$.

On écrit la condition (1.3) :

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign}(s^2-1)\sqrt{1+\frac{\rho^2}{\tau^2}}\beta_{46}\xi_6 + \frac{2\rho s}{\tau}\left\{\beta_{46}\left[2\beta_{33}s - 2\frac{s\rho}{\tau}\beta_{35} + \beta_{37}\xi_7\right]\right. \\ &\qquad \left. + \beta_{64}(s^2-1)\sqrt{1+\frac{\rho^2}{\tau^2}}\right\} \\ &= \operatorname{sign}(s^2-1)\sqrt{1+\frac{\rho^2}{\tau^2}}\xi_6 + \frac{2\rho s}{\tau}\left\{2\beta_{33}s - \frac{2s\rho}{\tau}\beta_{35} + \beta_{37}\xi_7 + \beta_{34}(s^2-1)\sqrt{1+\frac{\rho^2}{\tau^2}}\right\} \end{aligned}$$

d'où

$$\beta_{64} = \beta_{46}\beta_{34}$$

et d'après la fin du V :

$$\beta_{54} = 0,$$

a est donc présymétrique.

vii) On considère maintenant le cas $\tau = 0$. Il résulte du i), ii), iii) que :

$$\mathsf{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_6 & \xi_7 & \beta_{33}\xi_3 + \beta_{34}\xi_4 + \beta_{35}\xi_5 + \beta_{37}\xi_7 \\ \beta_{46}\xi_6 & \xi_2 & \xi_5 & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 \\ \beta_{54}\xi_4 + \beta_{46}\xi_7 & \xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ \begin{array}{c}\beta_{46}(\beta_{33}\xi_3 + \beta_{37}\xi_7) \\ +\beta_{64}\xi_4 + \beta_{65}\xi_5\end{array} & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

Si $\sigma \neq 0$, on a de plus : $\beta_{54} = 0$, $\beta_{64} = \beta_{46}\beta_{34}$.

On pose : $\xi_2 = \frac{2\sigma}{\rho}s$, $\xi_3 = -\xi_2$; $\xi_4 = 2s$; $\xi_5 = \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\tau^2}}(s^2 - 1)$, $s \in \mathbb{R}$; on a : $\rho\xi_3 + \sigma\xi_4 = 0$ et :

$$U(s) = \begin{pmatrix} -2s & (s^2-1)\sqrt{1+\dfrac{\sigma^2}{\rho^2}} & (s^2-1)\sqrt{1+\dfrac{\sigma^2}{\rho^2}} \\ 0 & -(s^2+1)\sqrt{1+\dfrac{\sigma^2}{\rho^2}}-2\dfrac{\sigma}{\rho}s & (s^2+1)\sqrt{1+\dfrac{\sigma^2}{\rho^2}}-2\dfrac{\sigma}{\rho}s \\ (s^2 - 1)\sqrt{1 + \dfrac{\sigma^2}{\rho^2}} & 2s & 2s \end{pmatrix}$$

$\text{dét}\, U(s) \neq 0$; la condition (1.1) implique :

$$\beta_{65} = \beta_{46}\beta_{35}$$

et la présymétrie.

viii) Si $\sigma = 0$, on pose d'abord : $\xi_5 = 0$; $\xi_2 = \xi_3 = s^2 - 1$; $\xi_4 = 2s\sqrt{1 + \rho^2}$; on obtient

$$U(s) = \begin{pmatrix} 2s\sqrt{1+\rho^2} & \rho(s^2 - 1) & \rho(s^2 - 1) \\ \rho(1 - s^2) & 2s\sqrt{1+\rho^2} & 2s\sqrt{1+\rho^2} \\ 0 & -(s^2+1)\sqrt{1+\rho^2}+1 - s^2 & (s^2+ 1)\sqrt{1+\rho^2}+1 - s^2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit de (1.1) et (1.3) :

$$\beta_{54} = 0; \quad \beta_{64} = \beta_{46}\beta_{34}$$

Si $\beta_{37} \neq 0$, on a vu que : $\beta_{65} = \beta_{46}\beta_{35}$ et la présymétrie est obtenue. Il reste le cas : $\beta_{37} = 0$. On pose $\xi_4 = 0$; $\xi_3 = \xi_5$; $\xi_2 = \xi_3(1 - \rho^2)$

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ -1 & * & * \\ \rho & * & * \end{pmatrix} \text{ ; on en déduit :}$$

$\beta_{65} = \beta_{46}\beta_{35}$; d'où la présymétrie est obtenue.

2) $\rho = 0$

On pose : $\xi_4 = \xi_5 = 0$; on en déduit que :

$$\beta_{43} = \beta_{52} = \beta_{53} = \beta_{56} = 0; \quad \beta_{57} > 0$$

et que :

$$b_6(\xi'') = k(\beta_{32}\xi_2 + \beta_{33}\xi_3 + \beta_{36}\xi_6 + \beta_{37}\xi_7) + \beta_{64}\xi_4 + \beta_{65}\xi_5\,, \quad k > 0$$

i) On pose $\xi_5 = 0$

$$\xi_2 = \xi_3 = (s^2 - 1)\sqrt{1+\sigma^2}, \quad \xi_4 = 2s\,, \quad s \in \mathbb{R}^*\text{; on obtient :}$$

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & \sigma & s\sigma \\ -\sigma & 1 & s \\ 0 & -s\sqrt{1+\sigma^2} & \sqrt{1+\sigma^2} \end{pmatrix},$$

la condition (1.1) implique :

$$\operatorname{sign}\left[2\beta_{44}s + \beta_{46}\xi_6 - \sigma(2\beta_{54}s + \beta_{57}\xi_7)\right] = \operatorname{sign}\xi_6 - \sigma\xi_7\ ;$$

d'où : $\beta_{44} - \sigma\beta_{54} = 0$ et :

$$\sigma(\beta_{46} - \beta_{57}) = 0; \quad \beta_{46} > 0;$$

la condition (1.2) implique :

$$\operatorname{sign}\Big\{(\sigma - s\sqrt{1+\sigma^2}\beta_{36})\xi_6 + (1 - s\sqrt{1+\sigma^2}\beta_{37})\xi_7$$
$$- s\sqrt{1+\sigma^2}\Big[(\beta_{33}+\beta_{32})(s^2-1)\sqrt{1+\sigma^2} + 2\beta_{34}s\Big]\Big\}$$
$$= \operatorname{sign}\Big\{(\sigma\beta_{46} - s\sqrt{1+\sigma^2}k\beta_{36})\xi_6 + (\beta_{57} - s\sqrt{1+\sigma^2}k\beta_{37})\xi_7$$
$$- s\sqrt{1+\sigma^2}\Big[k(\beta_{33}+\beta_{32})(s^2-1)\sqrt{1+\sigma^2} + 2\beta_{64}s\Big] + 2(\sigma\beta_{44}+\beta_{54})s\Big\}$$

d'où si $\beta_{36} \neq 0$, $\sigma(\beta_{46} - k) = 0$ et si : $\beta_{37} \neq 0 : \beta_{57} = k$. On a : si : $\sigma \neq 0$ et ($\beta_{36} \neq 0$ ou $\beta_{37} \neq 0$) :

$$\beta_{46} = \beta_{57} = k\,; \quad \beta_{44} = \beta_{54} = 0; \quad \beta_{64} = \beta_{46}\beta_{34}\,;$$

si $\sigma \neq 0$ et $\beta_{36} = \beta_{37} = 0$:

$$\beta_{46} = \beta_{57}\,, \quad \beta_{44} = \beta_{54} = 0\,, \quad \beta_{64} = \beta_{46}\beta_{34}\,;\ \text{si, de plus :}$$

on a : $\beta_{33}+\beta_{32} \neq 0$, on a aussi : $\beta_{46}=k$;
si $\sigma=0$ et ($\beta_{36} \neq 0$ ou $\beta_{37} \neq 0$) :

$$\beta_{57}=k\,, \quad \beta_{44}=\beta_{54}=0; \quad \beta_{64}=\beta_{57}\beta_{34};$$

si $\sigma=\beta_{36}=\beta_{37}=0$: $\beta_{44}=\beta_{54}=0$, $\beta_{64}=\beta_{57}\beta_{34}$;
si de plus, on a : $\beta_{33}+\beta_{32} \neq 0$, on a : $\beta_{57}=k$.

ii) On pose : $\xi_2=\xi_3=\xi_4=0$; $\xi_5=s$, on a :

$$C(s)=\begin{pmatrix} 0 & s & \tau s \\ s & 0 & 0 \\ \tau s & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U=\begin{pmatrix} \sqrt{1+\tau^2} & \sqrt{1+\tau^2} & 0 \\ -1 & 1 & -\tau \\ -\tau & \tau & 1 \end{pmatrix} ; \text{dét}\, U>0\,.$$

Les conditions (1.1), (1.2), (1.3) s'écrivent :

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign}\big(\sqrt{1+\tau^2}-\tau\beta_{36}\big)\xi_6-(1+\tau\beta_{37})\xi_7-\tau\beta_{35}s \\ &\quad=\operatorname{sign}\big(\sqrt{1+\tau^2}\beta_{46}-\tau k\beta_{36}\big)\xi_6-(\beta_{37}+\tau k\beta_{37})\xi_7 \\ &\qquad+(\sqrt{1+\tau^2}\beta_{45}-\beta_{55}-\tau\beta_{65})s\,, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign}\big(\sqrt{1+\tau^2}+\tau\beta_{36}\big)\xi_6+(1+\tau\beta_{37})\xi_7+\tau\beta_{35}s \\ &\quad=\operatorname{sign}\big(\sqrt{1+\tau^2}\beta_{46}+\tau k\beta_{36}\big)\xi_6+(\beta_{37}+\tau k\beta_{37})\xi_7 \\ &\qquad+(\sqrt{1+\tau^2}\beta_{45}+\beta_{55}+\tau\beta_{65})s\,, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign}\beta_{36}\xi_6+(\beta_{37}-\tau)\xi_7+\beta_{35}s \\ &\quad=\operatorname{sign}k\beta_{36}\xi_6+(k\beta_{37}-\tau\beta_{57})\xi_7+(-\tau\beta_{55}+\beta_{65})s\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

On doit distinguer des cas :
ii)′ $\tau \neq 0$,

ii$_1$)′ $\beta_{36} \neq 0$.
On obtient de (3.3) :

$$\begin{aligned} k&=\beta_{57}\,, \\ -\tau\beta_{55}+\beta_{65}-\beta_{57}\beta_{35}&=0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$\mathrm{ii}_{1.1})'$ Si de plus : $\tau\beta_{37} \neq 1$.

On déduit de (3.1) que : $\beta_{46} = \beta_{57}$ et que :

$$\sqrt{1+\tau^2}\beta_{45} - \beta_{55} - \tau(\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35}) = 0\,,$$

il résulte de (3.2) que :

$$\sqrt{1+\tau^2}\beta_{45} + \beta_{55} + \tau(\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35}) = 0\ :$$

on a donc :

$$\beta_{45} = \beta_{55} = \beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35} = 0\,.$$

$\mathrm{ii}_{1.2})'$ $\quad \tau\beta_{37} = -1$

Si $\sqrt{1+\tau^2} \neq \pm\tau\beta_{36}$, on déduit de (3.1), (3.2) et (3.4) que :

$$\tau\beta_{36}\beta_{55} + \beta_{45} = 0\,,$$

et que :

$$\tau(\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35}) + \tau\beta_{45}\beta_{36} + \beta_{55} = 0\,.$$

Si $\sqrt{1+\tau^2} = \varepsilon\tau\beta_{36}$, $\varepsilon = \pm 1$, on déduit de (3.1) et (3.2) que :

$$\beta_{46} = k$$

et que :

$$\sqrt{1+\tau^2}\beta_{45} + \varepsilon\Big[\beta_{55} + \tau(\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35})\Big] = 0$$

$\mathrm{ii})'_2$ $\quad \beta_{36} = 0$

On déduit de (3.1) et (3.2) que :

$$\beta_{57} - \beta_{46} + \tau\beta_{37}(k - \beta_{46}) = 0$$

$$\beta_{45} = 0\,, \quad \beta_{55} + \tau(\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35}) = 0\,..$$

De (3.3) on déduit :

si $\tau \neq \beta_{37} : \beta_{37}(\beta_{65} - k\beta_{35}) - \tau(\beta_{65} - \beta_{57}\beta_{35}) - \tau\beta_{55}(\beta_{37} - \tau) = 0\,,$

si $\tau = \beta_{37} : \beta_{57} = k\,.$

$\mathrm{ii})''$ $\tau = 0$

Il résulte de (3.1), (3.2) que : $\beta_{46} = \beta_{57}$, $\beta_{45} = \beta_{55} = 0$ et de (3.3) que : si β_{36} ou $\beta_{37} \neq 0$, $\beta_{65} = k\beta_{35}$.

En récapitulant les résultats obtenus en i) et ii), on obtient la présymétrie de $a(\xi)$ excepté dans les cas suivants

A $\sigma \neq 0$ et $\tau \neq 0$

A_1 $\beta_{36} \neq 0,\ \tau\beta_{37} = -1,\ \sqrt{1+\tau^2} = \varepsilon\tau\beta_{36}$

A_2 $\beta_{36} = 0,\ \tau = \beta_{37} \neq 0$

A_3 $\beta_{36} = \beta_{37} = \beta_{32} + \beta_{33} = 0.$

B $\sigma = 0$ et $\tau \neq 0$

B_1 $\beta_{36} \neq 0,\ \tau\beta_{37} = -1$

B_2 $\beta_{36} = 0,\ \beta_{37} = \tau$

B_3 $\beta_{36} = 0,\ \tau\beta_{37} = -1$

B_4 $\beta_{36} = \beta_{37} = \beta_{32} + \beta_{33} = 0.$

C $\tau = 0,\ \beta_{36} = \beta_{37} = 0.$

Pour traiter le cas **A**, on considère, comme $\tau \neq 0$, le cas iii).

iii) On pose : $\xi_2 = -\xi_3 = -(s^2-1)\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\tau^2}},\ \xi_4 = 2s,\ \xi_5 = -\frac{2\sigma}{\tau}s,\ s \in \mathbb{R}^*$

$$C(s) = \begin{pmatrix} -(s^2-1)\sqrt{1+\dfrac{\sigma^2}{\tau^2}} & -\dfrac{2\sigma}{\tau}s & 0 \\ -\dfrac{2\sigma}{\tau} & (s^2-1)\sqrt{1+\dfrac{\sigma^2}{\tau^2}} & 2s \\ 0 & 2s & -(s^2-1)\sqrt{1+\dfrac{\sigma^2}{\tau^2}} \end{pmatrix}$$

$$U(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma}{\tau}s & -\dfrac{\sigma}{\tau} & \tau \\ \sqrt{1+\dfrac{\sigma^2}{\tau^2}} & \sqrt{1+\dfrac{\sigma^2}{\tau^2}}s & 0 \\ -s & 1 & \sigma \end{pmatrix}.$$

Dans les cas A_1 et A_2, on sait que : $\beta_{46} = \beta_{57} = k$,

$$\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} - \beta_{46}\beta_{34} = 0.$$

La condition (1.1) donne :

$$\operatorname{sign}\left(\frac{\sigma}{\tau}-\beta_{36}\right)s\xi_6+\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\tau^2}}-\beta_{37}s\right)\xi_7$$
$$-s\left[\beta_{33}-\beta_{32})\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\tau^2}}(s^2-1)+2\beta_{34}s-\frac{2\sigma}{\tau}\beta_{35}s\right]$$
$$=\operatorname{sign}\beta_{46}\left(\frac{\sigma}{\tau}-\beta_{36}\right)s\xi_6+\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\tau^2}}\beta_{37}s\right)\beta_{46}\xi_7-2\beta_{45}\frac{\sigma^2}{\tau^2}s^2-2\beta_{55}\frac{\sigma}{\tau}\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\tau^2}}s$$
$$-s\beta_{46}\left[(\beta_{33}-\beta_{32})\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\tau^2}}(s^2-1)+2\beta_{34}s\right]-2\beta_{65}\frac{\sigma}{\tau}s^2$$

d'où :

$$\beta_{45}\frac{\sigma}{\tau}s+\beta_{55}\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\tau^2}}+(\beta_{65}-\beta_{46}\beta_{35})s\equiv 0$$

et

$$\beta_{55}=0\,,\quad \beta_{45}\frac{\sigma}{\tau}+\beta_{65}-\beta_{46}\beta_{35}=0\,;$$

du ii)$'$, on déduit : $\beta_{45}=\beta_{55}=\beta_{65}-\beta_{46}\beta_{35}=0$ et la présymétrie.

Dans le cas A_3, on considère la condition (1.3)

$$\operatorname{sign}\tau\xi_6+\sigma\left[-2\beta_{32}(s^2-1)\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\tau^2}}+2\beta_{34}s-2\beta_{35}\frac{\sigma}{\tau}s\right]$$
$$=\operatorname{sign}\beta_{46}\tau\xi_6+\sigma k\left[-2\beta_{32}(s^2-1)\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\tau^2}}\right]+\sigma\beta_{46}\left[2\beta_{34}s-2\beta_{35}\frac{\sigma}{\tau}s\right]$$

on obtient, si $\beta_{32}\neq 0$, $k=\beta_{46}$ et la présymétrie ; si $\beta_{32}=0$, on a évidemment aussi la présymétrie.

Pour traiter le cas **B**, on pose :

iv) $\xi_4=0$, $\xi_2=(1-\tau^2)s$, $\xi_3=\xi_5=s$

$$C(s)=\begin{pmatrix}(1-\tau^2) & 1 & \tau\\ 1 & 1 & 0\\ \tau & 0 & -1\end{pmatrix}s\,.$$

On note : $\delta = \sqrt{(1+\tau^2)^2+8}$; on remarque que : $\tau^2-3-\delta \neq 0$;

$$U = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{\tau^2+1+\delta}{2} & \dfrac{\tau^2+1-\delta}{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ -\tau & \dfrac{-\tau(\tau^2+1+\delta)}{\tau^2+\delta-3} & \dfrac{-\tau(\tau^2+1-\delta)}{\tau^2-\delta-3} \end{pmatrix},$$

$\det U > 0$.

Dans les cas B_1, B_2, B_3 on a : $\beta_{57} = k$; la condition (1.2) donne :

$$\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} - \beta_{57}\beta_{34} = 0$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} \frac{\tau^2+1+\delta}{2}\xi_6 - \xi_7 - \frac{\tau(\tau^2+1+\delta)}{\tau^2+\delta-3}\Big[\beta_{32}(1-\tau^2)s+\beta_{33}s+\beta_{35}s+\beta_{36}\xi_6+\beta_{37}\xi_7\Big] \\ = \operatorname{sign} \frac{\tau^2+1+\delta}{2}\Big[\beta_{45}s+\beta_{46}\xi_6\Big] - (\beta_{55}s+\beta_{57}\xi_7) \\ - \frac{\tau(\tau^2+1+\delta)}{\tau^2+\delta-3}\Big\{\beta_{32}\big[(1-\tau^2)s+\beta_{33}s+\beta_{36}\xi_6+\beta_{37}\xi_7\big]+\beta_{65}s\Big\} \end{aligned}$$

la condition (1.1) donne :

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}\xi_6 - \xi_7 + \tau\Big[\beta_{32}(1-\tau^2)s+\beta_{33}s+\beta_{35}s+\beta_{36}\xi_6+\beta_{37}\xi_7\Big] \\ = \operatorname{sign}\beta_{45}s+\beta_{46}\xi_6-\beta_{55}s-\beta_{57}\xi_7 \\ + \tau\beta_{57}\Big[\beta_{32}(1-\tau^2)s+\beta_{33}s+\beta_{36}\xi_6+\beta_{37}\xi_7\Big]+\tau\beta_{65}s\,. \end{aligned}$$

Dans le cas B_1, on utilise d'abord la condition (1.2) ; comme $\tau\beta_{37} = -1$, le coefficient de ξ_7 dans le premier membre est : $-1+\frac{\tau^2+\delta+1}{\tau^2+\delta-3} \neq 0$; on considère les coefficients de ξ_6 et on en déduit :

$$\beta_{46} = \beta_{57}\,;$$

si $\sqrt{1+\tau^2} \neq \varepsilon\tau\beta_{36}$, il résulte des résultats précédents que l'on a :

$$-\tau\beta_{55}+\beta_{65}-\beta_{46}\beta_{35} = 0\,,\ \tau\beta_{36}\beta_{55}+\beta_{45} = 0\,,\ \tau(\beta_{65}-\beta_{46}\beta_{55})+\tau\beta_{45}\beta_{36}+\beta_{55} = 0$$

d'où la présymétrie.

Si $\sqrt{1+\tau^2} = \varepsilon\tau\beta_{36}$, on a :

$$-\tau\beta_{55}+\beta_{65}-\beta_{46}\beta_{35} = 0; \quad \beta_{45}+\varepsilon\sqrt{1+\tau^2}\beta_{55} = 0\,,$$

la condition (1.1) donne, comme $\tau\beta_{36} \neq -1$

$$\beta_{45} - \beta_{55} + \tau(\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35}) = 0 .$$

Si $\tau^2 \neq 3$, on obtient : $\beta_{45} = \beta_{55} = \beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35} = 0$ et la présymétrie.

Si $\tau^2 = 3$, la condition (1.2) donne la présymétrie.

Dans le cas B_2, on sait que : $\beta_{46} = \beta_{57} = k$ et que :

$$\beta_{45} = 0 , \quad \beta_{55} + \tau(\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35}) = 0 ;$$

la condition (1.1) donne :

$$-\beta_{55} + \tau(\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35}) = 0$$

et la présymétrie.

Dans le cas B_3, on sait que : $\beta_{57} = k$ et que : $\beta_{45} = 0$

$$\beta_{65} - \beta_{57}\beta_{35} - \tau\beta_{55} = 0$$

$$\tau(\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35}) + \beta_{55} = 0 ;$$

la condition (1.2) donne : $\beta_{46} = \beta_{57}$ et la présymétrie.

Dans le cas B_4, on sait que : $\beta_{46} = \beta_{57}$, $\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} - \beta_{46}\beta_{34} = 0$, $\beta_{45} = \beta_{55} = \beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35} = 0$; la condition (1.1) donne :

$$\operatorname{sign} \xi_6 - \xi_7 + \tau(-\tau^2\beta_{32} + \beta_{35})s = \operatorname{sign} \beta_{46}(\xi_6 - \xi_7) + \tau(-\tau^2 k\beta_{32} + \beta_{46}\beta_{35})s ,$$

d'où : $\beta_{32}(k - \beta_{46}) = 0$;

si $\beta_{32} \neq 0$, on a : $k = \beta_{46}$ et la présymétrie

si $\beta_{32} = 0$, la présymétrie résulte directement des calculs précédents.

Dans le cas **C**, distinguons 2 cas :

C_1 : $\beta_{32} + \beta_{33} \neq 0$, on a :

$$\beta_{46} = \beta_{57} = k ; \quad \beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} - \beta_{46}\beta_{34} = 0 ; \quad \beta_{45} = \beta_{55} = 0$$

C_2 : $\beta_{32} + \beta_{33} = 0$, on a :

$$\beta_{46} = \beta_{57} ; \quad \beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} - \beta_{46}\beta_{34} = 0 ; \quad \beta_{45} = \beta_{55} = 0 .$$

Posons : $\xi_4 = 0$, $\xi_2 = \xi_3 + s^2 - 1$, $\xi_5 = s$, $s \in \mathbb{R}^*$, $\xi_3 \neq \frac{1}{2}$, $\xi_3 \neq \frac{-s^2}{2}$ comme au I a i)

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dans le cas C_1, on obtient par la formule (1.3)

$$\begin{aligned}&\operatorname{sign} \beta_{32}(s^2-1)+(\beta_{32}+\beta_{33})\xi_3+\beta_{35}s \\ &\quad = \operatorname{sign} \beta_{46}\Big[\beta_{32}(s^2-1)+(\beta_{32}+\beta_{33})\xi_3\Big]+\beta_{65}s\,,\end{aligned}$$

d'où : $\beta_{65}=\beta_{46}\beta_{35}$ et la présymétrie.

Dans le cas C_2, on obtient de même

$$\beta_{65}=k\beta_{35}\,;$$

il reste à montrer que : $\beta_{46}=k$.
Supposons d'abord $\sigma \neq 0$.
On pose : $\xi_2=2\sigma^2 s^3$, $\xi_3=1+s^2$, $\xi_4=s(1+s^2)$, $\xi_5=\sigma s(1+s^2)$.
On obtient $C(s)$; la 1ère colonne de $U(s)$ est : $[1+s^2, -\sigma s(s+1), -\sigma s(s-1)]$.
La condition (1.1) donne :

$$\begin{aligned}&\operatorname{sign} \xi_6(1+s^2)-\sigma s(s+1)\xi_7-\sigma s(s-1) \\ &\quad\times \Big[\beta_{32}(2\sigma^2 s^3-1-s^2)+\beta_{34}s(1+s^2)+\beta_{35}\sigma s(1+s^2)\Big] \\ &= \operatorname{sign} \beta_{46}\xi_6(1+s^2)-\beta_{46}\sigma s(s+1)\xi_7-\sigma s(s-1) \\ &\quad\times \Big\{k\Big[\beta_{32}(2\sigma^2 s^3-1-s^2)+\beta_{35}\sigma s(1+s^2)\Big]+\beta_{46}\beta_{34}s(1+s^2)\Big\}\end{aligned}$$

d'où :

$$(k-\beta_{46})\Big[\beta_{32}(2\sigma^2 s^3-1-s^2)+\beta_{35}\sigma s(1+s^2)\Big]=0\,,\quad \forall s\,.$$

Si β_{32} ou $\beta_{35}\neq 0$, on a la présymétrie car $k=\beta_{46}$

Si $\beta_{32}=\beta_{35}=0$, on l'a directement.

Supposons $\sigma=0$.
On pose : $\xi_3=-\xi_2=s^2-1$, $\xi_4=\xi_2$, $\xi_5=2\sqrt{2}s$, $s\in\mathbb{R}$.
La première colonne de $U(s)$ est : $(s^2-1, 0, 2\sqrt{2}s)$.
La condition (1.1) donne :

$$\begin{aligned}&\operatorname{sign}(s^2-1)\xi_6+2\sqrt{2}s\Big[(2\beta_{32}+\beta_{34})(1-s^2)+2\beta_{35}\sqrt{2}s\Big] \\ &\quad= \operatorname{sign} \beta_{46}(s^2-1)\xi_6+2\sqrt{2}s\Big\{k\Big[2\beta_{32}(1-s^2)+2\beta_{35}\sqrt{2}s\Big]+\beta_{46}\beta_{34}(1-s^2)\Big\}\end{aligned}$$

d'où :

$$(k-\beta_{46})\Big[\beta_{32}(1-s^2)+\beta_{35}\sqrt{2}s\Big]=0\,,\quad \forall s\,.$$

On obtient la présymétrie.

a$_2$) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''), b_3(\xi''))$ sont linéairement indépendants ; b_2 est combinaison linéaire de $\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ et $b_1(\xi'')$.

Pour un changement de base dans E, on a :

$$\mathsf{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_6 & b_2(\xi'') & \xi_7 \\ b_4 & \xi_2 & \xi_5 & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5 \\ b_5 & \xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ b_6 & \rho\xi_3 + \sigma\xi_3 + \tau\xi_5 & -\xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

b_2 ne dépend pas de ξ_7.

Par un changement de base dans F et un changement de notations :

$$\mathsf{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_6 & \xi_7 & b_3(\xi'') \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5 & \xi_5 \\ b_5(\xi'') & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ b_6(\xi'') & \xi_5 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

Si $\tau \neq 0$, un changement de base dans E de la forme $\eta_5 = \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5$, (les autres coordonnées inchangées), ramène le cas a$_2$) au cas a$_1$).

Si $\tau = 0$, on pose : $\xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = 0$; on en déduit :

$$\beta_{42} = \beta_{47} = 0.$$

Si de plus, on pose : $\xi_7 = 0$, on en déduit :

$$b_6(\xi'') = k(\beta_{32}\xi_2 + \beta_{36}\xi_6) + \beta_{63}\xi_3 + \beta_{64}\xi_4 + \beta_{65}\xi_5 + \beta_{67}\xi_7, \quad k > 0.$$

On distingue ensuite :

i) $\rho \neq 0$. On pose $\xi_4 = \xi_5 = 0$; $\xi_2 = s + \rho(-s^2 + 1)$, $\xi_3 = s$, $s \in \mathbb{R}^*$; on a :

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La condition (1.3) donne :

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign}\beta_{32}\Big[s + \rho(1 - s^2)\Big] + \beta_{33}s + \beta_{36}\xi_6 \\ &\quad = \operatorname{sign}k\Big\{\beta_{32}\Big[s + \rho(1 - s^2)\Big] + \beta_{36}\xi_6\Big\} + \beta_{63}s + \beta_{67}\xi_7, \end{aligned}$$

d'où :

$$\beta_{67} = 0;$$

et si : $\beta_{36} \neq 0$ ou $\beta_{32} \neq 0$; $\beta_{63} = k\beta_{33}$; si $\beta_{36} = \beta_{32} = 0$, on peut poser : $\beta_{63} = k\beta_{33}$, $k > 0$.

La condition (1.1) donne :

$$\operatorname{sign} \xi_6 + s\xi_7 = \operatorname{sign} \beta_{43}s + \beta_{46}\xi_6 + s\Big\{\beta_{52}\Big[s + \rho(1-s^2)\Big] + \beta_{53}s + \beta_{56}\xi_6 + \beta_{57}\xi_7\Big\}$$

d'où :

$$\beta_{56} = 0, \quad \beta_{46} = \beta_{67}; \quad \beta_{52} = \beta_{53} = \beta_{43} = 0.$$

On pose maintenant $\xi_3 = 0$; $\xi_2 = 4\sigma s$, $\xi_4 = 1 - s^2$, $\xi_5 = 2s$. On obtient :

$$U(s) = \begin{pmatrix} \sigma(s^2+1) - 2s\sqrt{\sigma^2+1} & \sigma(s^2+1) + 2s\sqrt{\sigma^2+1} & s^2-1 \\ (s^2-1)\sqrt{\sigma^2+1} & (1-s^2)\sqrt{\sigma^2+1} & 2s \\ s^2+1 & s^2+1 & \sigma(1-s^2) \end{pmatrix}.$$

La condition (1.3) donne : $\beta_{55} = 0$. La condition (1.1) donne alors : $(k - \beta_{46})\beta_{36} = 0$, $\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} - \beta_{46}\beta_{34} = 0$; $\beta_{45} = 0$, $2\sigma\beta_{32}(k - \beta_{46}) + \beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35} = 0$.

Si $\beta_{36} \neq 0$, on a la présymétrie ; si $\beta_{36} = 0$, on pose : $\xi_4 = \xi_3 = 0$; $\xi_2 = s^2 - 1$, $\xi_5 = s$;

$$U(s) = \begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -s & 0 \end{pmatrix};$$

de la condition (1.1), on déduit :

$$\beta_{32}(k - \beta_{46}) = 0;$$

si $\beta_{32} \neq 0$, on a la présymétrie.

Si $\beta_{36} = \beta_{32} = 0$, on a seulement : $\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35} = 0$; on pose $\xi_4 = 0$; $\xi_3 = s$, $\xi_2 = (\rho^2 - 1)s$, $\xi_5 = s$.

La 1ère colonne de $U(s)$ est : $(1, -\rho, 1)$; la condition (1.1) donne :

$$(k - \beta_{46})\beta_{33} = 0;$$

dans tous les cas, on a la présymétrie

ii) $\rho = 0$. On pose : $\xi_4 = \xi_5 = 0$; on obtient :

$$\beta_{43} = \beta_{52} = \beta_{53} = \beta_{56} = \beta_{67} = 0; \quad \beta_{63} = k\beta_{33}.$$

Comme avant, on pose : $\xi_3 = 0$; $\xi_2 = 4\sigma s$; $\xi_4 = 1 - s^2$; $\xi_5 = 2s$.

La condition (1.3) donne :

$$\beta_{57} - \beta_{46} + \sigma(k - \beta_{57})\beta_{36} = 0; \quad \beta_{55} = 0.$$

La condition (1.1) donne, d'abord :

$$\sigma(\beta_{57}-\beta_{46})-(k-\beta_{57})\beta_{36}=0\,,$$

d'où : $\beta_{57}=\beta_{46}$ et : $(k-\beta_{46})\beta_{36}=0$.

On a aussi :

$$\beta_4=\beta_{54}=\beta_{64}-\beta_{46}\beta_{34}=0\,;\quad \beta_{45}=0\,,$$

$$2(k-\beta_{46})\beta_{32}\sigma+\beta_{65}-\beta_{46}\beta_{35}=0\,.$$

Si $\beta_{36}\neq 0$, on a la présymétrie ; si $\beta_{36}=0$, on pose :
$\xi_4=0$, $\xi_2=-\xi_3+s^2-1$, $\xi_5=s$; comme on l'a déjà vu (I a) ii)) :

$$U(s)=\begin{pmatrix} s & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -s & 0\end{pmatrix}.$$

La condition (1.1) donne :

$$(k-\beta_{46})\beta_{32}=0\,,\quad (k-\beta_{46})\beta_{33}=0\,,\quad \beta_{65}-\beta_{46}\beta_{35}=0\,,$$

d'où dans tous les cas la présymétrie.

a$_3$) $b_1(\xi'')$ est combinaison linéaire de ξ_2,ξ_3,ξ_4,ξ_5 ; $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\xi_5,b_2(\xi''),b_3(\xi'')$ sont linéairement indépendants.

Par un changement de base de E, on a :

$$\mathrm{a}(\xi')=$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \beta_{12}\xi_2+\beta_{13}\xi_3+\beta_{14}\xi_4+\xi_{15}\xi_5 & \xi_6 & \xi_7\\ \beta_{42}\xi_2+\ldots+\beta_{47}\xi_7 & \xi_2 & \xi_5 & \rho\xi_3+\sigma\xi_4+\tau\xi_5\\ \beta_{52}\xi_2+\ldots+\beta_{57}\xi_7 & \xi_5 & \xi_3 & \xi_4\\ \beta_{62}\xi_2+\ldots+\beta_{67}\xi_7 & \rho\xi_3+\sigma\xi_4+\tau\xi_5 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

On pose : $\xi_3=\xi_4=\xi_5=0$; on obtient :

$$\beta_{46}=\beta_{47}=0\,;\quad \operatorname{sign}\beta_{42}=\operatorname{sign}\beta_{12}$$

$$\beta_{52}=\beta_{62}=0\,.$$

On distingue des cas

i) $\rho\neq 0$

i$_1$) On pose $\xi_4=\xi_5=0$; $\xi_2=s+\rho(-s^2+1)$, $\xi_3=s$, $s\in\mathbb{R}^*$ (cf. § 2-II-2a1)

$$U(s)=\begin{pmatrix} -s & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & s & 0\end{pmatrix}.$$

La condition (1.3) donne :

$$\beta_{53} = \beta_{57} = 0\,, \quad \beta_{56} > 0\,.$$

La condition (1.1) donne :

$$\beta_{66} = 0\,; \quad \beta_{42} = \beta_{67}\beta_{12}\,; \quad \beta_{63} = 0\,; \quad \beta_{43} = \beta_{67}\beta_{13}\,; \quad \beta_{67} > 0\,.$$

i_2) On pose :

$$\xi_4 = 0\,; \quad \xi_3 = -\frac{\tau}{\rho}s\,; \quad \xi_5 = s\,; \quad \xi_2 = -\frac{2\tau}{\rho}s + 1 - s^2\,; \quad s \in \mathbb{R}^*$$

(cf. § 3-II 3a_1) (1) ii), on a le même $U(s)$).

La condition (1.3) donne : $\beta_{65} = 0$.

La condition (1.1) donne :

$$\beta_{55} = 0\,; \quad \beta_{12}(\beta_{67} - \beta_{56}) = 0\,; \quad -\frac{\tau}{\rho}(\beta_{67} - \beta_{56})\beta_{13} + \beta_{45} - \beta_{56}\beta_{15} = 0\,.$$

i_3) On pose :

$$\xi_5 = 0\,; \quad \xi_3 = -\frac{\sigma}{\rho}s\,; \quad \xi_4 = s\,, \quad s \in \mathbb{R}^*$$

(cf. § 3-II a_1) (1) iii), on a le même $U(s)$.

Les conditions (1.2) et (1.3) donnent :

$$\beta_{56} = \beta_{67}\,; \quad \beta_{54} = \beta_{64} = 0\,.$$

La condition (1.1) donne :

$$\text{si} \quad \beta_{12} \neq 0 \quad \text{ou} \quad \sigma\beta_{13} \neq 0\,, \quad \text{alors} : \beta_{44} = \beta_{56}\beta_{14}\,.$$

On conclut donc que si $\beta_{12} \neq 0$ ou $\sigma\beta_{13} \neq 0$, on a la présymétrie.

i_4) Dans le cas, où $\beta_{12} = \beta_{13} = 0$, $\sigma \neq 0$, on pose :

$$\xi_2 = \xi_3 = \xi_5 = 0\,; \quad \xi_4 = s\,; \quad s \in \mathbb{R}^* \quad (\text{cf. § 3-II } a_1)\ (1)\ \text{V})\,.$$

On a le même $U(s)$; on obtient :

$$\beta_{44} = \beta_{56}\beta_{14}\,,$$

d'où la présymétrie.

i_5) Dans le cas où $\beta_{12} = \sigma = 0$, on doit distinguer.

i_5)′ On a $\tau \neq 0$.

On pose : $\xi_2 = -2s$; $\xi_3 = 2s$, $\xi_4 = (s^2-1)\sqrt{1+\frac{\rho^2}{\tau^2}}$; $\xi_5 = -\frac{2\rho}{\tau}s$; $s \in \mathbb{R}^*$ (cf. § 3-II a_1 (1) IV).

On a le même $U(s)$ et on obtient la présymétrie.

$i_5)''$ On a $\tau = 0$.

On pose : $\xi_2 = \xi_3 = 0$; $\xi_4 = 2s$; $\xi_5 = s^2 - 1$ (comme dans la fin du § 3 II a_1 (1) avec $\sigma = 0$).

On a le même $U(s)$ et on obtient la présymétrie.

ii) $\rho = 0$.

On obtient d'abord en posant : $\xi_4 = \xi_5 = 0$:

$$\beta_{53} = \beta_{57} = \beta_{63} = \beta_{66} = 0; \quad \beta_{42}\xi_2 + \beta_{43}\xi_3 = k(\beta_{12}\xi_2 + \beta_{13}\xi_3), \quad k > 0;$$

(on a obtenu avant :

$$\beta_{46} = \beta_{47} = \beta_{52} = \beta_{62} = 0).$$

On pose ensuite $\xi_5 = 0$ et comme au § 3 II a_1) (2), on pose :

$$\xi_2 = \xi_3 = (s^2-1)\sqrt{1+\sigma^2}, \quad \xi_4 = 2s, \quad s \in \mathbb{R}^* \quad \text{et}$$

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & \sigma & s\sigma \\ -\sigma & 1 & s \\ 0 & -s\sqrt{1+\sigma^2} & \sqrt{1+\sigma^2} \end{pmatrix}.$$

La condition (1.1) implique :

$$\beta_{44} - \beta_{56}\beta_{14} - \sigma\beta_{54} = 0$$

et si $\beta_{12} + \beta_{13} \neq 0 : k = \beta_{56}$.

La condition (1.2) implique alors :

$$\beta_{56} = \beta_{67}; \quad \beta_{54} = \beta_{64} = 0; \quad \beta_{44} = \beta_{56}\beta_{14}; \quad \beta_{64} = 0.$$

On pose : $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$; $\xi_5 = s$. Comme au § 3 II a_1) (1) IV :

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\tau^2} & \sqrt{1+\tau^2} & 0 \\ -1 & 1 & -\tau \\ -\tau & \tau & 1 \end{pmatrix}.$$

On déduit de (1) (2) (3) :

$$\beta_{55} = \beta_{65} = 0; \quad \beta_{45} = \beta_{56}\beta_{15}.$$

Si $\beta_{12}+\beta_{13}\neq 0$, la présymétrie est obtenue.

Si $\beta_{12}+\beta_{13}=0$, on doit distinguer les cas $\tau\neq 0$ et $\tau=0$.

Si $\tau\neq 0$, comme au § 3, II a$_1$) (1) iii), on pose :

$$\xi_2=-\xi_3=-(s^2-1)\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\tau^2}}\,;\quad \xi_4=2s\,;\quad \xi_5=-\frac{2\sigma}{\tau}s\,;\quad s\in\mathbb{R}^*.$$

$U(s)$ a la même valeur ; on déduit de la condition (3) la présymétrie lorsque $\sigma\neq 0$.
Lorsque $\sigma=0$, comme au § 3 II a$_1$) (2) IV, on pose :

$$\xi_4=0;\quad \xi_2=(1-\tau^2)s\,,\quad \xi_3=\xi_5=s\,.$$

$U(s)$ a la même valeur ; on déduit de la condition (1) la présymétrie.

Si $\tau=0$, on pose : $\xi_4=0$, $\xi_2=\xi_3+s^2-1$; $\xi_5=s$.
Comme au I a) i) on obtient $U(s)$ et de la condition (1.1), on déduit la présymétrie.

b) On suppose que : $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\xi_5,b_1(\xi''),b_2(\xi''),b_3(\xi''))$ est de rang 6.

b$_1$) $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\xi_5,b_1(\xi''))$ sont linéairement indépendants. Par un changement de base on peut se ramener à $b_1(\xi'')\equiv\xi_6$.

Si $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\xi_5,\xi_6,b_4(\xi''))$ sont linéairement indépendants ; on peut se ramener à $b_4(\xi'')\equiv\xi_7$.
On pose $\xi_3=\xi_4=\xi_5=0$; il résulte de (1.1)

$$\operatorname{sign}\xi_7=\operatorname{sign}\xi_6\,,\ \text{d'où une impossibilité.}$$

On a donc : ou bien $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\xi_5,\xi_6,b_5(\xi''))$ sont linéairement indépendants, ou bien $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\xi_5,\xi_6,b_6(\xi''))$ sont linéairement indépendants.

(1) Dans le 1er cas, on se ramène à $b_5(\xi'')=\xi_7$

$$a(\xi')=\begin{pmatrix}\xi_2 & \xi_6 & \beta_{22}\xi_2+\ldots+\beta_{27}\xi_7 & \beta_{32}\xi_2+\ldots+\beta_{37}\xi_7\\ \beta_{42}\xi_2+\ldots+\beta_{47}\xi_7 & \xi_2 & \xi_5 & \rho\xi_3+\tau\xi_4+\tau\xi_5\\ \xi_7 & \xi_5 & \xi_3 & \xi_4\\ \beta_{62}\xi_2+\ldots+\beta_{67}\xi_7 & \rho\xi_3+\sigma\xi_4+\tau\xi_5 & \xi_4 & -\xi_3\end{pmatrix}.$$

- Si $\beta_{27}\neq 0$, par un changement de base, on peut se ramener à :

$$\beta_2(\xi'')\equiv\xi_7\,,\quad \beta_5(\xi'')=\beta_{52}\xi_2+\ldots+\beta_{57}\xi_7\,;$$

c'est le cas étudié au a_1) du § 3 II. On en déduit la présymétrie.

• Si $\beta_{37} \neq 0$, on se ramène de même au cas a_2) et on obtient la présymétrie. On suppose donc $\beta_{27} = \beta_{37} = 0$.

On pose $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = 0$; $\xi_7 = 1$, il résulte de (1.5) une impossibilité.

Dans le 2ème cas, on se ramène à : $b_6(\xi'') = \xi_7$ et on procède de même qu'au cas (1) ; ce cas est impossible.

b_2) $b_1(\xi')$ dépend linéairement de $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)$. $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_2(\xi''))$ sont linéairement indépendants [le cas $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_3(\xi''))$ linéairement indépendants se ramène au précédent par échange de lignes et colonnes convenables]. On se ramène à : $b_2(\xi'') \equiv \xi_6$.

• Si $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, b_5(\xi''))$ son linéairement indépendants, on peut se ramener à $b_5(\xi'') \equiv \xi_7$.

• Si $\beta_{37} \neq 0$, on se ramène au cas a_3) précédent et on obtient la présymétrie.

• Si $\beta_{37} = 0$, on pose : $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = 0$; $\xi_7 = 1$ il résulte de (1.5), une impossibilité.

On a donc ou bien $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, b_4(\xi''))$ sont linéairement indépendants, ou bien $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, b_6(\xi''))$ sont linéairement indépendants.

Dans le 1er cas, on se ramène à $b_4(\xi'') \equiv \xi_7$.

• Si $\beta_{37} \neq 0$, on se ramène au cas a_3) et on obtient la présymétrie. Si $\beta_{37} = 0$, on a un cas impossible.

Dans le 2ème cas on se ramène à : $b_6(\xi'') \equiv \xi_7$ et on procède de même

c) On suppose que $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ est de rang 5. On a alors $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_4(\xi''), b_5(\xi''), b_6(\xi''))$ est de rang 7.

Ce cas se ramène au cas a) par transposition.

4. – Cas où $C(\xi'')$ est de dimension réduite 5

C est présymétrique ((6), p. 964) ; on se ramène donc à C sypmétrique ; on peut donc écrire :

$$C(\xi'') = \begin{pmatrix} \xi_2 & \xi_5 & \xi_6 \\ \xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ \xi_6 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathsf{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & b_1(\xi'') & b_2(\xi'') & b_3(\xi'') \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_5 & \xi_6 \\ b_5(\xi'') & \xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ b_6(\xi'') & \xi_6 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

a) On suppose que $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, b_2(\xi''))$ est de rang 6 .
Par un changement de base, on peut supposer que $b_1(\xi'') = \xi_7$. En posant : $\xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = 0$, la condition (1.1) donne : $\beta_{42} = \beta_{43} = 0$; $\beta_{47} > 0$;

$$\beta_{52}\xi_2 + \beta_{53}\xi_3 + \beta_{57}\xi_7 = k(\beta_{22}\xi_2 + \beta_{23}\xi_3 + \beta_{27}\xi_7), \quad k > 0;$$

$$\beta_{62}\xi_2 + \beta_{63}\xi_3 + \beta_{67}\xi_7 = \ell(\beta_{32}\xi_2 + \beta_{33}\xi_3 + \beta_{37}\xi_7), \quad \ell > 0.$$

On pose ensuite : $\xi_5 = \xi_6 = 0$; $\xi_3 = s^2 - 1$; $\xi_4 = 2s$; $s \in \mathbb{R}$

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 1 & s \end{pmatrix}.$$

La condition (1.1) implique : $\beta_{44} = 0$, $\beta_{47} > 0$. La condition (2) s'écrit :

$$\operatorname{sign}\Big[(sk\beta_{27}+\ell\beta_{37})\xi_7+(sk\beta_{22}+\ell\beta_{32})\xi_2+(sk\beta_{23}+\ell\beta_{33})(s^2-1)+2\beta_{54}s^2+2\beta_{64}s\Big]$$
$$=\operatorname{sign}\Big[(s\beta_{27}+\beta_{37})\xi_7+(s\beta_{22}+\beta_{32})\xi_2+(s\beta_{23}+\beta_{33})(s^2-1)+2\beta_{24}s^2+2\beta_{34}s\Big].$$

On a donc :

$$\operatorname{sign}(sk\beta_{27} + \ell\beta_{37}) = \operatorname{sign}(s\beta_{27} + \beta_{37})$$

i) Si $\beta_{27} \neq 0$, $\beta_{37} \neq 0$, on a :

(4.1) $$k = \ell; \quad \beta_{54} = k\beta_{24}; \quad \beta_{64} = k\beta_{34}$$

ii) Si $\beta_{27} \neq 0$, $\beta_{37} = 0$, on distingue :

ii$_1$) $\beta_{32} \neq 0$ ou $\beta_{33} \neq 0$, on a encore : (4.1)

ii$_2$) $\beta_{32} = \beta_{33} = 0$; on a :

(4.2) $$\beta_{54} = k\beta_{24}; \quad \beta_{64} = k\beta_{34}$$

iii) Si $\beta_{27} = 0$, $\beta_{37} \neq 0$, on distingue :

iii$_1$) $\beta_{22} \neq 0$ ou $\beta_{23} \neq 0$, on a : (4.1) iii$_2$) $\beta_{22} = \beta_{23} = 0$; on a :

(4.3) $$\beta_{54} = \ell\beta_{24}\,; \quad \beta_{64} = \ell\beta_{34}\,.$$

iv) Si $\beta_{27} = \beta_{37} = 0$, on distingue :

iv$_1$) $\beta_{22} \neq 0$, $\beta_{32} \neq 0$; on a encore (4.1)

iv$_2$) $\beta_{22} \neq 0$, $\beta_{32} = 0$
Si $\beta_{33} \neq 0$, on a : (4.1) ; si $\beta_{33} = 0$, on a : (4.2)

iv$_3$) $\beta_{22} = 0$, $\beta_{32} \neq 0$
Si $\beta_{23} \neq 0$, on a : (4.1) ; si $\beta_{23} = 0$, on a : (4.3) .

On pose : $\xi_4 = \xi_6 = 0$; $\xi_5 = s$; $\xi_2 = \xi_3 + s^2 - 1$; $s \in \mathbb{R}^*$

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La condition (1.3) donne : si $\beta_{37} \neq 0$:

$$\beta_{65} = \ell\beta_{35}\,.$$

La condition (1.1) donne si $\beta_{27} \neq 0$ ou $\beta_{22} + \beta_{23} \neq 0$ ou $\beta_{22} \neq 0$:

$$k = \beta_{47}\,; \quad \beta_{45} = 0\,; \quad \beta_{55} = \beta_{47}\beta_{25}\,;$$

si $\beta_{27} = \beta_{22} = \beta_{23} = 0$, on a :

$$\beta_{45} = 0\,; \quad \beta_{55} = \beta_{47}\beta_{25}\,.$$

On pose : $\xi_4 = \xi_5 = 0$; $\xi_2 = -\xi_3 + s^2 - 1$; $\xi_6 = s$, $s \in \mathbb{R}^*$

$$U(s) = \begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -s & 0 \end{pmatrix}.$$

La condition (1.3) donne si : $\beta_{27} \neq 0$:

$$\beta_{56} = k\beta_{26}\,.$$

La condition (1.1) donne si $\beta_{37} \neq 0$ ou $\beta_{32} \neq \beta_{33}$ ou $\beta_{32} \neq 0$:

$$\ell = \beta_{47}\,; \quad \beta_{46} = 0\,; \quad \beta_{66} = \beta_{47}\beta_{36}$$

si $\beta_{37} = \beta_{32} = \beta_{33} = 0$, on a seulement :

$$\beta_{46} = 0\,; \quad \beta_{66} = \beta_{47}\beta_{36}\,.$$

On pose : $\xi_2 = \xi_3 = \xi_6 = 0$; $\xi_4 = 2s$, $\xi_5 = s^2 - 1$, $s \in \mathbb{R}$

$$U(s) = \begin{pmatrix} 2s & 1-s^2 & s^2-1 \\ 0 & 1+s^2 & 1+s^2 \\ 1-s^2 & -2s & 2s \end{pmatrix}.$$

La condition (1.1) donne si $\beta_{37} = 0 : \beta_{64} = \beta_{47}\beta_{34}$, $\beta_{65} = \beta_{47}\beta_{35}$.

La condition (1.2) donne si $\beta_{27} = \beta_{37} = 0$:

$$\beta_{54} = \beta_{47}\beta_{24}.$$

On pose : $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$; $\xi_5 = 2s$, $\xi_6 = 1 - s^2$, $s \in \mathbb{R}$

$$U(s) = \begin{pmatrix} 0 & s^2+1 & s^2+1 \\ s^2-1 & -2s & 2s \\ 2s & s^2-1 & 1-s^2 \end{pmatrix}.$$

La condition (1.2) donne si $\beta_{27} = 0$,

$$\beta_{56} = \beta_{47}\beta_{26}.$$

On vérifie qu'on obtient la présymétrie dans tous les cas

b) b_1 est combinaison linéaire de $(\xi_1, \dots, \xi_6)$; $(\xi_1, \dots, \xi_6, b_2(\xi''))$ ou $(\xi_1, \dots, \xi_6, b_3(\xi''))$ sont indépendants.

Les 2 cas étant semblables, traitons le 1° : on se ramène à $b_2(\xi'') = \xi_7$

$$\mathrm{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & b_1(\xi'') & \xi_7 & b_3(\xi'') \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_5 & \xi_6 \\ b_5(\xi'') & \xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ b_6(\xi'') & \xi_6 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

Par échange de lignes et de colonnes, on se ramène à :

$$\mathrm{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_7 & b_2(\xi'') & b_3(\xi'') \\ b_4(\xi'') & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 \\ b_5(\xi'') & \xi_4 & -\xi_3 & \xi_6 \\ b_6(\xi'') & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \end{pmatrix}.$$

Par un changement de base conservant N, on se ramène au cas du a).

c) b_1, b_2, b_3 sont des combinaisons linéaires de $(\xi_1, \dots, \xi_6)$. Alors une des formes b_4, b_5, b_6 est linéairement indépendante de $(\xi_1, \dots, \xi_6)$; par transposition on se ramène au cas précédent.

REFERENCES

[1] H. DELQUIE —J. VAILLANT, *Dimension réduite et valeurs propres multiples d'une matrice diagonalisable* 4×4, Bull. Sci. Math. **124** (2000) 319-331.

[2] P. D. LAX, *Differential equations, difference equations and matrix theory*, Comm. Pure Appl. Math. **11** (1958), 175-194.

[3] T. NISHITANI, *Symmetrization of a class of hyperbolic systems with real constant coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **21** (1994), 97-130.

[4] T. NISHITANI, *Symmetrization of hyperbolic systems with non degenerate characteristics*, J. Func. Anal. **132** (1995), 251-272.

[5] T. NISHITANI —J. VAILLANT, *Smoothly symmetrizable systems and the reduced dimensions*, Tsukuba J. Math. (à paraître).

[6] T. OSHIME, *Canonical forms of* 3×3 *strongly hyperbolic systems with real constant coefficients*, J. Math. Kyoto Univ. **31** (1991), 937-982.

[7] G. STRANG, *On strong hyperbolicity*, J. Math. Kyoto Univ. **6** (1967), 397-417.

[8] S. SPAGNOLO, *On the uniformly diagonalisable systems*, Colloque Jean Leray, 1999, Karlskrona, Kluwer Acad. Publish. (à paraître).

[9] J. VAILLANT, *Symetrisabilité des matrices localisées d'une matrice fortement hyperbolique*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **5** (1978), 405-427.

[10] J. VAILLANT, *Systèmes fortement hyperboliques et systèmes symétriques*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328** (1999), 407-412.

[11] J. VAILLANT, *Symétrie des opérateurs fortement hyperboliques* 4×4 *ayant un point triple caractéristique dans* $\mathbb{R}^3$, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sc. Mat. Suppl. vol. **XLV** (1999) 339-363.

Université Pierre et Marie Curie, Mathématiques
Boite courrier 172
4 Place Jussieu
75252 Paris Cedex 05, France