ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MOHAMED KADDAR

Intégration d'ordre supérieur sur les cycles en géométrie analytique complexe

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 29, nº 2 (2000), p. 421-455

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_2000_4_29_2_421_0>

Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)
Vol. XXIX (2000), pp. 421-455

Intégration d'ordre supérieur sur les cycles en géométrie analytique complexe

MOHAMED KADDAR

Abstract. This paper is devoted to give a strong generalization of the application ρ^0 introduced by A. Andreotti and F. Norguet in [A.N]. For all p, q, n integers, with $q \geq n$ and $p \geq 0$, we give an optimal theorem of integration on analytic family of n cycles of cohomology classes of type (p, q) with values in a particular sheaf of L^2 - forms.

Mathematics Subject Classification (1991): 33G13 (primary), 32C30, 32C36 (secondary).

0. – Introduction

En 1937, W.L Chow et B. L. Van der Waerden ([C.W]) ont muni l'ensemble $\mathcal{C}_n(Z)$ des cycles positifs de dimension pure n d'une variété algébrique projective Z (c.à.d. des combinaisons linéaires finies à coefficients entiers positifs de sous variétés algébriques irréductibles de Z) d'une structure de variété algébrique complexe se traduisant, en terme d'espace de modules, par le fait que dans l'ensemble des familles algébriques de n-cycles de Z paramétrées par des variétés algébriques complexes, il existe une famille privilégiée, appelée universelle, induisant n'importe quelle autre famille algébrique de n-cycles de Z.

Au passage, attirons l'attention du lecteur sur le caractère, à priori, non intrinsèque de cette structure. En effet, pour Z quasi projective, par exemple, la méthode de Chow - Van der Waerden permet d'exhiber une structure analytique sur $\mathcal{C}_n(Z)$, dépendant naturellement de la réalisation de Z en tant que sous ensemble analytique d'un certain espace projectif lisse. L'indépendance de cette structure (qui, à notre connaissance, n'a jamais pu être établie directement au moyen de la méthode de ces auteurs) nécessitait, en fait, une sérieuse et profonde compréhension de l'espace des cycles compacts d'un espace complexe donné.

Le présent travail puise ses origines dans les travaux de Aldo Andreotti et François Norguet sur les différentes notions de convexité ainsi que leurs

Pervenuto alla Redazione l'8 aprile 1999 e in forma definitiva il 13 dicembre 1999.

généralisations et, plus précisement dans l'article s'intitulant "La convexité holomorphe dans l'espace analytique des cycles d'une variété algébrique", paru en 1967 (cf. [A.N]). Ils y introduisaient une application, notée ρ^0 (que le lecteur averti ne manquera pas de rapprocher de la transformation de Penrose [P.R]), consistant à intégrer des représentants de Dolbeault de type (n, n) de classes de $\bar{\partial}$-cohomologie sur une famille analytique de n-cycles d'une variété quasi projective lisse Z. Cette opération leur permettait de construire des fonctions méromorphes continues sur $\mathcal{C}_n(Z)$ et par suite, holomorphes sur son normalisé faible dont la structure analytique est, cette fois, indépendante du plongement choisi pour Z.

Alors, sous l'hypothèse de n-complétude de Z, ils étaient en mesure d'en déduire que le normalisé faible était de Stein et donc $\mathcal{C}_n(Z)$ aussi.

Cette application ρ^0 a suscité l'interêt de plus d'un auteur, l'utilisant, pour la plus part, dans le cadre restrictif introduit dans [A.N]. Il est bien évident que définir ρ^0 pour un espace analytique complexe arbitraire Z présentait de sérieuses difficultés à savoir celle de munir $\mathcal{C}_n(Z)$ d'une structure d'espace analytique et celle de contourner l'isomorphisme de Dolbeault qui fait défaut dans le cas singulier (il va sans dire que la première difficulté est incommensurablement plus compliquée à traiter que la seconde).

Il fallut attendre la construction de la variété de Chow dans la catégorie des espaces analytiques réduits donnée, en 1974, par D. Barlet dans sa fameuse thèse ([B1]) pour se débarrasser du premier obstacle. Une grande partie de [B1] est consacrée à la donnée d' une bonne définition de la notion de famille analytique de cycles, sur laquelle reposait fondamentalement l'élaboration de la structure analytique complexe réduite de l'espace des cycles d'un espace analytique complexe arbitraire. Nous noterons dorénavant $B_n(Z)$, l'espace de Barlet des n cycles compacts de Z.

Une conséquence importante de cette construction est que la structure analytique de $\mathcal{C}_n(Z)$ (au sens de [C.W]) est indépendante du plongement choisi pour Z quasi projective. Par ailleurs, cette "bonne" notion de famille analytique de cycles se traduisait par le fait que l'image de ρ^0 est à valeurs dans le faisceau structural de $B_n(Z)$, ce qui représentait un pas important dans la généralisation de cette application puisque l'on évite, ainsi, tout recours à la normalisation.

Un corollaire de [B2], redonné plus tard par [B4], permettait d'abandonner la condition projective, portée par Z, en considérant le cas d'une variété analytique complexe lisse, d'où la seconde étape dans la généralisation de ρ^0. La dernière étape consistait à la définir sur un espace analytique complexe arbitraire, pour lequel, comme chacun sait, l'isomorphisme de Dolbeault fait généralement défaut en présence de singularités. On doit, donc, d'une part, donner un sens précis par ce que l'on entend par représentant d'une classe de cohomologie donnée, et d'autre part savoir localiser puis globaliser (ce qui revient à utiliser un découpage convenable de classes de cohomologie).
C'est en 1989 que D. Barlet et J. Varouchas donnent, dans [B.V], la construction finale de ρ^0 dans un cadre tout à fait général.

Dans ce même contexte, on s'est demandé si cette intégration appliquée aux classes de cohomologie de type $(n+q, n+p)$ donnait des classes de cohomologie à valeurs dans le faisceau des formes holomorphes sur l'espace des cycles, généralisant, ainsi, l'application ρ^1 appelée "dérivée première de ρ^0" dans [A.N].

L'objet de cet article est d'apporter une réponse, aussi complète que possible, à ce type d' interrogation.

Avant d'énoncer clairement le problème, convenons de noter :

- n, p, q et k quatre entiers naturels.

Pour Y un espace analytique complexe réduit de dimension pure,

- Ω^k_Y le faisceau des k-formes différentielles holomorphes sur Y induites par restriction à partir d'un plongement dans un espace ambiant lisse.
- $\mathcal{L}^k_Y$ le faisceau des k-formes méromorphes sur Y qui se prolongent analytiquement sur toute désingularisée de Y (que l'on peut aussi appeler k-formes méromorphes de type L^2 sur Y)
- ω^k_Y, le faisceau des courants $\bar{\partial}$-fermés de type $(k, 0)$ définis modulo $\mathcal{O}_Y$-torsion (cf. [B3]).

Problème. Etant donnée une famille analytique de n-cycles $F = (X_s)_{s\in S}$ de Z espace complexe paracompact, paramétrée par un espace complexe réduit de dimension pure S, dont le graphe sera noté X, et Φ une famille paracompactifiante de supports de Z telle que $(S\times\Phi)\cap X$ soit contenu dans la famille des fermés S-propres de $S\times Z$, existe-t-il une flèche canonique

$$\rho^{q,p}_\Phi : H^{n+p}_\Phi(Z, \Omega^{n+q}_Z) \longrightarrow H^p(S, \Omega^q_S)$$

vérifiant

i) Si S est lisse et si X désigne le graphe de cette famille, alors, en notant p_Z (resp. p_S) les projections canoniques de ce graphe sur Z (resp. S), elle coincide avec l'application

$$\rho^{q,p}_F : H^{n+p}_\Phi(Z, \Omega^{n+q}_Z) \longrightarrow H^p(S, \Omega^q_S)$$

définie de la façon suivante :

Si $\sigma = [\alpha] \in H^{n+p}_\Phi(Z, \Omega^{n+q}_Z)$, est une classe de $\bar{\partial}$-cohomologie représentée par la forme α. Alors $p_{S*}p_Z{}^*(\alpha)$ est un courant $\bar{\partial}$-fermé de type (q, p), qui représente donc, une unique classe β de $H^p(S, \Omega^q_S)$, en vertu du lemme de Dolbeault-Grothendieck. On pose alors $\rho^{q,p}_{\Phi,F}(\sigma) := \beta$.

ii) Le morphisme $\rho^{q,p}_\Phi$ doit vérifier que pour tout espace lisse S et tout morphisme $\eta : S \to B_n(Z)$,

$$\rho^{q,p}_{\Phi,F} = \eta^*\rho^{q,p}_\Phi$$

si F est l'image réciproque de la famille universelle.

Le contre exemple donné dans le Paragraphe 2.1 montre que cette question admet une réponse négative en termes du faisceau des formes holomorphes sur S; cependant, nous avions remarqué dans un premier temps, qu' il est possible de pallier cette pathologie en remplaçant $\Omega_S^\bullet$ par le faisceau $\omega_S^\bullet$. Malheureusement, le défaut de fonctorialité par image réciproque de ce dernier, conférait à cette intégration un mauvais comportement par changement de base sur S.

Nous avons donc montré dans [K], [K1], l'existence d'un morphisme

$$\sigma_\Phi^{q,0} : H_\Phi^n(Z, \Omega_Z^{n+q}) \longrightarrow H^0(S, \omega_S^q)$$

compatible avec la construction du faisceau $\omega_S^\bullet$ et rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_\Phi^n(Z, \Omega_Z^{n+q}) & \xrightarrow{\sigma_\Phi^{q,0}} & H^0(S, \omega_S^q) \\ {\scriptstyle \rho_\Phi^{q,0}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ & & H^0(Reg(S), \Omega_S^q) \end{array}$$

dans lequel $Reg(S)$ désigne la partie régulière de S et **r** la restriction usuelle. Dans l'appendice, nous rappelerons brièvement cette construction.

Un contre exemple simple, qui sera donné dans 2.2, montre qu'il est, en général, impossible de remplacer Ω_Z^{n+q} par ω_Z^{n+q}, d'où l'impossibilité de factoriser, le morphisme ainsi défini, à travers $H_\Phi^n(Z, \omega_Z^{n+q})$ via la flèche canonique $\Omega_Z^{n+q} \to \omega_Z^{n+q}$.

Le but de ce qui suit est de donner, dans un premier temps, un énoncé optimal, à notre sens, à savoir l'existence de la flèche $H_\Phi^n(Z, \mathcal{L}_Z^{n+q}) \longrightarrow H^0(S, \mathcal{L}_S^q)$ vérifiant toutes les propriétés fonctorielles voulues puis, dans un second temps, d'en déduire un résultat général d'intégration sur les cycles de classes de cohomologie de type (q, p) avec $p \geq n$ et $q \geq 0$. La difficulté majeure consiste à définir la restriction à un sous espace quelconque d'une section de ces faisceaux $\mathcal{L}_Z^\bullet$ et $\mathcal{L}_S^\bullet$, ce qui suffira à assurer leur fonctorialité relativement aux morphismes d'espaces analytiques de dimension pures.

Nous montrerons les résultats suivants :

THÉORÈME 1. *Soient*

- *Z et S deux espaces analytiques complexes de dimension pure avec Z dénombrable à l'infini et S réduit.*
- *$(X_s)_{s\in S}$ une famille analytique de n-cycles de Z paramétrée par S, dont le graphe sera noté X dans $S \times Z$.*
- *$\pi : X \to S$ est le morphisme de projection de ce graphe sur S.*
- *Φ et Ψ deux familles de supports vérifiant*
  - i) *Φ paracompactifiante*
  - ii) *$\Phi \cap \Psi$ contenue dans la famille des compacts de Z*
  - iii) *$\forall s \in S$, $X_s \in \Psi$*
  - iv) *$X \cap (S \times \Phi)$ contenu dans la famille des fermés S-propres.*
  - v) *$\mathcal{L}_Z^j$ (resp. $\mathcal{L}_S^j$) le faisceau des formes méromorphes sur Z (resp. S) dont les relèvements par toute désingularisation de Z (resp. S) se prolongent en formes holomorphes sur les désingularisées.*

Alors il existe un morphisme trace ou d'intégration d'ordre supérieur sur les cycles

$$\tilde{\sigma}^{q,0}_{\Phi,X} : H^n_\Phi(Z, \mathcal{L}^{n+q}_Z) \longrightarrow H^0(S, \mathcal{L}^q_S)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

a) **Compatibilité avec les inclusions ouvertes sur** Z :

Soit U un ouvert de Z et S' un ouvert de S formé des points pour lesquels les cycles associés sont dans U. Si $j : U \to Z$ est l'injection naturelle, on a la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^n_\Phi(Z, \mathcal{L}^{n+q}_Z) \arrow[d, "\tilde{\sigma}^{q,0}_{\Phi,X}"'] & H^n_{\Phi|U}(U, \mathcal{L}^{n+q}_U) \arrow[l] \arrow[d, "\tilde{\sigma}^{q,0}_{\Phi,X}|U"] \\
H^0(S, \mathcal{L}^q_S) \arrow[r] & H^0(S', \mathcal{L}^q_{S'})
\end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches horizontales supérieures et inférieures désignent respectivement le prolongement par zéro des sections à supports et la restriction usuelle.

b) **Compatibilité avec les images directes de cycles**

Soit $f : Z \to T$ est un morphisme propre et surjectif d'espaces analytiques complexes réduits et $\tilde{\Phi}$ une famille paracompactifiante de fermés de T vérifiant la condition iv) ci-dessus pour la famille analytique $(f_* X_s)_{s\in S}$ dont le graphe sera noté $\hat{X}$ et telle que $f^{-1}\tilde{\Phi}$ soit contenue dans Φ, alors on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^n_{\tilde{\Phi}}(T, \mathcal{L}^{n+q}_T) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\tilde{\sigma}^{q,0}_{\tilde{\Phi},\hat{X}}"'] & H^n_\Phi(Z, \mathcal{L}^{n+q}_Z) \arrow[d, "\tilde{\sigma}^{q,0}_{\Phi,X}"] \\
H^0(S, \mathcal{L}^q_S) & {}
\end{tikzcd}$$

c) **Compatibilité avec les changements de bases sur** S

Soit $\phi : \tilde{S} \to S$ un morphisme d'espaces analytiques complexes réduits. Si $\tilde{X}$ désigne le graphe de la famille $(X_{\tilde{s}})_{\tilde{s}\in\tilde{S}}$ obtenue par changement de base sur S, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^n_\Phi(Z, \mathcal{L}^{n+q}_Z) \arrow[d, "\tilde{\sigma}^{q,0}_{\Phi,X}"] & {} \arrow[d, "\tilde{\sigma}^{q,0}_{\Phi,\tilde{X}}"] \\
H^0(S, \mathcal{L}^q_S) \arrow[r, "\phi^*"'] & H^0(\tilde{S}, \mathcal{L}^q_{\tilde{S}})
\end{tikzcd}$$

d) **Faisceautisation**

π induit un morphisme de faisceau de $\mathcal{O}_S$ modules que l'on appelle trace faisceautique

$$R^n\pi_!\mathcal{L}_X^{n+q} \to \mathcal{L}_S^q$$

fonctorielle en S et en X, qui détermine et qui est entièrement déterminé, dans $\mathbf{D}(\mathcal{O}_S)$ *(la catégorie dérivée des $\mathcal{O}_S$-modules) par la flèche*

$$R\pi_!\mathcal{L}_X^{n+q}[n] \to \mathcal{L}_S^q.$$

e) **Compatibilité avec "les cas usuels"**

i) *Pour Z et S lisses, sa construction coincide avec celle faite en termes d'image directe au sens des courants.*

ii) *Pour $q = 0$, le lien avec le morphisme $\rho^0_{\Phi,X}$ construit dans* [B.V] *est donné par le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} H^n_\Phi(Z,\Omega^n_Z) & \longrightarrow & H^n_\Phi(Z,\mathcal{L}^n_Z) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \rho^0_{\Phi,X}} & & {\scriptstyle \tilde{\sigma}^{0,0}_{\Phi,X}}\Big\downarrow \\ H^0(S,\mathcal{O}_S) & \longrightarrow & H^0(S,\mathcal{L}^0_S) \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales supérieures et inférieures découlent respectivement des morphismes canoniques $\Omega^n_Z \to \mathcal{L}^n_Z$ et $\mathcal{O}_S \to \mathcal{L}^0_S$.

REMARQUE. Dans le cas d'un espace normal S, on peut conjecturer que l'image du morphisme d'intégration

$$H^n_\Phi(Z,\Omega_Z^{n+q}) \to H^0(S,\mathcal{L}_S^q)$$

soit à valeurs dans le groupe de cohomologie $H^0(S,\bar{\Omega}^q_S)$. Pour $q = 1$, le faisceau $\bar{\Omega}^1_S$ est le faisceau des formes méromorphes vérifiant une relation de dépendance intégrale sur $\mathcal{O}_S$, ou des formes méromorphes, qui sur le tangent de Zariski, correspondent aux fonctions méromorphes localement bornées (cf. I.4). Signalons que si S et son fibré tangent de Zariski sont normaux (ce qui est le cas, par exemple, pour S Cohen Macaulay avec un lieu singulier de codimension strictement supérieure à 3), cette intégration nous donne des formes holomorphes usuelles.

En convenant de noter $\mathcal{L}_S^{-j} := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{L}^j_S,\mathcal{L}^0_S)$, le faisceau $\mathcal{O}_S$-cohérent de profondeur au moins deux sur S (cf. 1.4). On a le

COROLLAIRE 1. *Avec les mêmes hypothèses que précedemment, on a, pour tout entier $q \geq 0$ et tout entier $p \geq n$, un morphisme canonique :*

$$\hat{\sigma}^{q,p}_{\Phi,X} : H^p_\Phi(Z,\mathcal{L}^q_Z) \longrightarrow H^{p-n}(S,\mathcal{L}_S^{q-n})$$

tel que :

i) *Pour tout* $q \geq n$, $\hat{\sigma}^{q,0}_{\Phi,X} = \tilde{\sigma}^{q,0}_{\Phi,X}$.

ii) *Pour* $q \geq n$ *et* $p \geq n$, $\hat{\sigma}^{q,p}_{\Phi,X}$ *est ce que l'on appelle le morphisme dérivé d'ordre supérieur du morphisme d'intégration. Il vérifie les propriétés* a), b) *et* c) *du Théorème* 1 *et coincide, pour* $p \geq n+1$, $q = 0$ *et* Z *variété analytique complexe, avec celui qui était donné dans* [B4] *et qui généralisait la dérivée première de* ρ^0 *introduite dans* [A.N].

iii) *Pour* $q < n$, *les propriétés* a) *et* b) *du Théorème* 1 *sont encore valables.*

iv) *Il est compatible aux changements de bases donnés par les inclusions ouvertes sur* S.

v) *Tout morphisme plat d'espaces analytiques réduits* $\phi : T \to S$ *induit le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} H^p_\Phi(Z, \mathcal{L}^q_Z) & \xrightarrow{\hat{\sigma}^{q,p}_{\Phi,\tilde{X}}} & H^{p-n}(T, \mathcal{L}^{q-n}_T) \\ \downarrow{\scriptstyle \hat{\sigma}^{q,p}_{\Phi,X}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\phi}^*} \\ H^{p-n}(S, \mathcal{L}^{q-n}_S) & \xrightarrow[\phi^*]{} & H^{p-n}(T, \phi^*\mathcal{L}^{q-n}_S) \end{array}$$

dans lequel $\tilde{\phi}^*$ *est le morphisme naturel déduit de* $\phi^* : \mathcal{L}^{q-n}_T \to \phi^*\mathcal{L}^{q-n}_S$ *et* $\tilde{X}$, *le graphe de la nouvelle famille issue du changement de base donné par* ϕ.

Remarques.

i) Il n'est pas difficile de donner un énoncé de ce corollaire avec une cohomologie sur S indexée par une famille de support convenable.

ii) Soit Θ_S le faisceau des 1-champs de vecteurs sur S. Alors Si S est normal, les isomorphismes $\mathcal{L}^{-j}_S \simeq \Omega^{-j}_S$ donnent en particulier les morphismes

$$\hat{\sigma}^{n-1,p}_{\Phi,X} : H^p_\Phi(Z, \mathcal{L}^{n-1}_Z) \longrightarrow H^{p-n}(S, \Theta_S)$$

qu' il serait intéressant d'étudier et d'exploiter dans les cas où $p = n$ et $p = n+1$, puisqu'ils font apparaitre un lien avec l'espace des déformations sur S. En effet, en désignant par $T^1(S)$ la cohomologie de degré 1 du **complexe tangent** (cf. [P]), par $\mathbf{D}$, le point double décrit par l'espace analytique $(*, \mathcal{D})$ dans lequel $\mathcal{D} = \mathbb{C}\{t\}/(t^2)$ (qui peut être représenté par l'algèbre analytique $\{a + b\epsilon : a, b \in \mathbb{C}\, et\, \epsilon^2 = 0\}$) et en identifiant $T^1(S)$ à $\mathcal{D}ef_{\mathbf{D}}(S)$, ensemble des classes d'isomorphismes des germes de déformations au dessus de $\mathbf{D}$, l'injectivité de la flèche $H^1(S, \Theta_S) \to T^1(S)$ permet d'identifier l'image de $H^1(S, \Theta_S)$ aux déformations triviales sur $\mathbf{D}$ (en fait chaque germe (S, s) est déformé trivialement).

Les preuves du Théorème 1 et de son corollaire reposent essentiellement sur le résultat suivant :

THÉORÈME 1$'$. *Soient*

- *Z un espace analytique complexe de dimension pure et T un sous espace analytique de Z.*
- *$\pi : \tilde{Z} \to Z$ un morphisme propre et surjectif d'une variété analytique complexe sur Z. On notera $\Sigma := \pi^{-1}(T)$, π' la restriction de π à Σ, $X_t := \pi'^{-1}(t)$ les fibres de π' et $n := \dim\Sigma - \dim T$, la dimension générique de ce morphisme.*
- *Soit ω une forme de Kähler relative au morphisme π'. D'après* [Sc], *une telle forme représente une classe de $H^1(\tilde{Z}, \Omega^1_{\tilde{Z}})$ qui est en fait une section de $H^0(T, R^1\pi'_*\Omega^1_{\Sigma/T})$ dont la restriction à chaque fibre est une classe de Kähler. On suppose que $\int_{X_t} \omega^n = 1, \forall t \in T$*

Alors pour tout entier q, et tout ouvert U de Stein dans Z, il existe un morphisme

$$\mathcal{R}_{Z,T} : \Gamma(U, \mathcal{L}^q_Z) \to \Gamma(U \cap T, \mathcal{L}^q_T)$$

défini génériquement par $\mathcal{R}_{Z,T}(\sigma) := \int_{X_t} \pi^*(\sigma) \wedge \omega^n$ et vérifiant

a) *Il est indépendant de la résolution π et de la forme de Kähler ω choisies.*
b) *Si Z est lisse, ce morphisme n'est autre que la restriction usuelle des formes holomorphes.*
c) *Si l'on désigne par $\mathbf{i}$ l'inclusion naturelle de T dans Z, on a, pour toute forme holomorphe α et toute forme σ section du faisceau $\mathcal{L}^q_Z$ sur Z,*

$$\mathcal{R}_{Z,T}(\alpha \wedge \sigma) = \mathbf{i}^*(\alpha) \wedge \mathcal{R}_{Z,T}(\sigma)$$

d) *Soient $T' \hookrightarrow T \hookrightarrow Z$ des inclusions de sous ensembles analytiques complexes. Alors*

$$\mathcal{R}_{T,T'} o \mathcal{R}_{Z,T} = \mathcal{R}_{Z,T'}$$

Remarquons que cette restriction coincide avec celle qui serait naturellement donnée par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{j} & \tilde{Z} \\ {\scriptstyle \pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ X & \xrightarrow[i]{} & Z \end{array}$$

dans lequel $\tilde{Z}$ (resp. X') est une résolution de Z (resp. de la préimage stricte de X dans $\tilde{Z}$).

Une conséquence immédiate de ce résultat est le

COROLLAIRE 1′. *Pour tout $q \geq 0$, les faisceaux $\mathcal{L}_Y^q$ sont fonctoriels relativement aux morphismes d'espaces analytiques complexes réduits et de dimension pure; c'est-à-dire tout morphisme $f : X \to Y$ induit un morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_X$-cohérents, $f^* : f^*\mathcal{L}_Y^q \to \mathcal{L}_X^q$.*

Le plan de cet article s'articule de la façon suivante :
Dans les premier et second paragraphes, nous ferons un bref rappel concernant l'espace des cycles, énoncerons quelques résultats plus ou moins connus sur les faisceaux $\mathcal{L}_Z^\bullet$ et $\omega_Z^\bullet$ et donnerons un théorème d'intégration locale. Les derniers paragraphes seront consacrés à la démonstration des Théorèmes 1 et I'et de leurs corollaires. Enfin, l'Appendice est consacré à expliquer cette intégration sur les cycles et à montrer, par un exemple simple, l'optimalité du Théorème 1.

REMERCIEMENT. Je remercie D. Barlet pour ses précieux conseils.

1. – Préliminaires

Pour lire cet article, il n'est pas nécessaire de connaître toute la terminologie relative à l'espace des cycles ([B1]), c'est pourquoi nous donnons seulement les définitions suivantes :

1.1. – Quelques définitions

DÉFINITION 1. Un n-cycle analytique, d'un espace analytique complexe Z, sera la donnée d'une combinaison linéaire formelle localement finie

$$X := \sum_{i \in I} n_i X_i$$

où les X_i sont des sous ensembles analytiques complexes irréductibles de dimension pure n dans Z, et n_i des entiers strictement positifs appelés multiplicités. Le support de X est par définition $\cup X_i$.

DÉFINITION 2. Une écaille, sur un espace analytique complexe Z, est la donnée d'un ouvert, V, relativement compact dans Z, de deux polydisques U et B relativement compacts dans $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^p$ respectivement, et d'un isomorphisme, σ, de V sur un sous ensemble analytique d'un voisinage ouvert de $\overline{U} \times \overline{B}$ dans $\mathbb{C}^{n+p}$. Elle sera dite adaptée à un n-cycle de Z si

$$\sigma(|X| \cap V) \cap (\overline{U} \times \partial B) = \emptyset$$

DÉFINITION 3. Si Z et S sont deux espaces analytiques complexes avec S réduit de dimension finie, et $(X_s)_{s\in S}$ une famille de n-cycles de Z paramétrée par S, on dira que cette famille est analytique locale en $s_0 \in S$, si pour **toute** écaille E adaptée à X_{s_0}, il existe un voisinage ouvert, S_0, de s_0 dans S pour lequel on ait

i) Pour tout $s \in S_0$, E est adaptée à X_s et $deg_E(X_s) = deg_E(X_{s_0})$ (en désignant, par $deg_E(X_s)$, le degré du revêtement ramifié sous jacent au cycle X_s dans l'écaille E.

ii) Pour toute écaille, E, adaptée à X_{s_0}, L'application $F_E : S_0 \times U \to \mathrm{Sym}^k(B)$ est analytique.

Cette dernière condition, appelée isotropie dans le cas de la dimension infinie, est exactement ce que l'on doit imposer à une famille analytique de revêtements ramifiés pour qu'elle provienne d'une famille analytique de cycles.

Avant de donner les contres exemples, on va rappeler quelques propriétés des faisceaux $\omega_Z^\bullet$ et $\mathcal{L}_Z^\bullet$ intervenants dans nos constructions.

1.2. – Propriétés des faisceaux ω_Z^k

Pour k fixé, nous commençons par donner la définition ω_Z^k, qui ne nous sera pas utile pour la suite de l'exposé et dégagerons les principales propriétés dont nous aurons besoin. Z sera supposé réduit de dimension pure m, dont le lieu singulier sera noté Σ et j l'inclusion naturelle de la partie lisse dans Z. Si ce dernier est localement plongé avec la codimension r dans une variété lisse de Stein W, pour tout $k \geq 0$, on pose, d'après [B3] :

$$\omega_Z^k := Ker\{j_*j^*\Omega_Z^k \to \mathcal{H}_S^1(\mathcal{E}xt^r(\mathcal{O}_Z, \Omega_W^{k+r}))\}$$

qui n'est rien d'autre que le noyau de la composée des flèches canoniques suivantes :

$$\partial : j_*j^*\Omega_Z^k \to \mathcal{H}_\Sigma^1(\Omega_Z^k)$$

$$\mathcal{H}_\Sigma^1(\Omega_Z^k) \to \mathcal{H}_\Sigma^1(\mathcal{E}xt^r(\mathcal{O}_Z, \Omega_W^{k+r}))\}$$

Ce dernier morphisme découle de l'application cup produit par la classe fondamentale de Z dans W

$$\Omega_Z^k \to \mathcal{E}xt^r(\mathcal{O}_Z, \Omega_W^{k+r})$$

Cette définition "brute" est peu utilisée en pratique, en revanche les propriétés et caractérisations suivantes sont souvent utiles.

i) Les sections de ce faisceau vérifient *la propriété de la trace*. Plus précisement soit σ une telle section. Alors pour toute paramétrisation locale (revêtement ramifié de degré k) $\phi : Z \to U$ dont les branches locales seront notées

$(f_l)_{l\in\{1,2,\cdots,k\}}$ et toute forme holomorphe α sur Z, la forme méromorphe (holomorphe sur $U - R(Z)\cap U$, $R(Z)$ étant le lieu de ramification)

$$\sum_{l=1}^{l=k} f_l{}^*(\alpha\wedge\sigma)$$

se prolonge analytiquement sur tout U. Réciproquement toute forme méromorphe vérifiant cela est une section de $\omega^{\cdot}_Z$

ii) Soit C_Z^W, la classe fondamentale de Z dans W. Alors σ est une section de ce faisceau si et seulement si $\sigma\wedge C_Z^W$ définit une section du faisceau $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}_W}(\mathcal{O}_Z, \Omega_W^{j+r})$.

PROPOSITION. *On a les propriétés suivantes :*

1) *pour tout* $j\geq 0$, ω_Z^j *est de profondeur au moins* 2 *dans* Z.
2) *Si* Z *est une* V*-variété, ces faisceaux coincident avec ceux introduits par Steenbrink* [St].
3) $\omega_Z^k \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\Omega_Z^{m-k}, \omega_Z^m)$
4) ω_Z^m *est le faisceau de Grothendieck, dualisant au sens de Kunz.*
5) *Si* Z *est un espace de Cohen Macaulay, le complexe* $\omega_Z^m[m]$ *est quasi isomorphe au complexe dualisant de la géométrie analytique construit par Ramis et Ruget.*

Nous renvoyons à [B3] pour la preuve des propriétés 1 et 3, à [St] pour 2, à [L] pour 4 et à [R.R] pour 5.

1.3. – Les faisceaux $\mathcal{L}_Z^k$

Soit Z un espace analytique complexe réduit et de dimension pure m. On notera Σ son lieu singulier ou un sous ensemble analytique rare contenant le lieu singulier de Z.

Si Z est une hypersurface à singularités isolées d'un certain espace numérique $\mathbb{C}^{m+1}$, la considération de m-formes méromorphes n 'ayant des pôles qu'en les singularités de Z et dites de **première espèce** intervenait, depuis déjà fort longtemps, dans divers travaux et en particulier dans [P.S] (tome 1 p. 178). Rappelons qu'étant donnés $f : (\mathbb{C}^{m+1}, 0)\to(\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe ayant une singularité isolée à l'origine,
$V := \{z\in\mathbb{C}^{m+1}/\mid z\mid<\epsilon; \mid f(z)\mid<\eta\}$ et Z l'ensemble d'annulation de f sur V, on dit qu'une forme holomorphe ω sur $V-\{0\}$ est de **première espèce** s'il existe une désingularisation de V dans laquelle ω se prolonge holomorphiquement.

Dans [Gr], Greuel a montré que toute forme holomorphe sur $V-\{0\}$ dont le degré est strictement inférieur à $m-1$, est automatiquement de première espèce. Le résultat générale donné par Flenner ([F]) dit que toute q-forme holomorphe sur la partie régulière est de première espèce si $q+1$ est strictement inférieur à la codimension de Σ.

Nous ne citerons que l'article de Merle et Teissier (M.T), dans lequel le lecteur trouvera toutes les références utiles et nécessaires, et celui de Steenbrinck et Van Straten [S.S] utilisant une approche originale. La particularité fondamentale de ces formes est qu'elles sont de carré sommable (ce qui implique que leurs images directes par tout morphisme fini local de Z sur un ouvert lisse de $\mathbb{C}^m$ est holomorphe). Sur un espace ayant une singularité isolée, les formes de première espèce de degrés $m-1$ et m jouent un rôle particulièrement important puisqu'elles sont attachées à deux invariants fondamentaux, à savoir, les genres géométriques et arithmétiques :

$$p_g := \dim \frac{\Gamma(V, \omega_V^m)}{\Gamma(V, \mathcal{L}_V^m)}$$

qui est le nombre de conditions d'adjonctions associés à la singularité, et

$$q := \dim \frac{\Gamma(V, \omega_V^{m-1})}{\Gamma(V, \mathcal{L}_V^{m-1})}.$$

L'étude de ces invariants fait l'objet de plusieurs articles à savoir, par exemple [S.Y] auquel nous renvoyons le lecteur. Dans un contexte différent, relatif au degré maximal, elles interviennent aussi dans les théorèmes d'annulations de Grauert et Riemmenschneider [G-R]. Signalons la caractérisation suivante de [S.S] dont l'analogue en dimension maximale se trouve énoncé dans [M.T] p. 231 .1.3

THÉORÈME. *Pour toute q-forme holomorphe ω sur $Z - \Sigma$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Pour toute application $\gamma : \Delta^q \to Z$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le q-simplexe Δ^q, l'intégrale $\int_\gamma \omega$ existe si $\gamma^{-1}(\Sigma)$ est d'intérieur vide.*
ii) *Il existe un morphisme de résolution des singularités $\pi : \tilde{Z} \to Z$ tel que $\pi^*(\omega)$ se prolonge holomorphiquement à $\tilde{Z}$ tout entier.*
iii) *L'assertion ii) est vraie pour toute désingularisation.*
iv) *Il existe une modification $\pi : \tilde{Z} \to Z$, avec $\tilde{Z}$ lisse, pour laquelle $\pi^*(\omega)$ se prolonge holomorphiquement à $\tilde{Z}$ tout entier.*
v) iv) *est vraie pour toute modification avec espace "modifié" lisse.*

1.4. – Quelques différences entre les faisceaux $\mathcal{L}_Z^j$ et ω_Z^j

1) $\mathcal{L}_Z^j \subset \omega_Z^j$.

2) L'inclusion est en général stricte : Considérons $f(a,b,c) = a^2 - b^2.c$, une fonction analytique définie sur $\mathbb{C}^3$ et, $Z = \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 / f(a,b,c) = 0\}$, la surface de Whitney. Alors la forme méromorphe $\sigma := \dfrac{db \wedge dc}{a}$ définit une section du faisceau ω_Z^2 mais pas de $\mathcal{L}_Z^2$ sur Z.

En effet, le cup produit avec la classe fondamentale de Z dans $\mathbb{C}^3$ donne $\dfrac{2da \wedge db \wedge dc}{f}$, qui se prolonge en une section globale de $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3}}(\mathcal{O}_Z, \Omega^3_{\mathbb{C}^3})$, prouvant clairement la première partie de l'assertion. Considérons le morphisme de normalisation $\pi : \mathbb{C}^2 \to Z$ qui à (u, v) associe (uv, u, v^2). Il est alors clair que $\pi^*(\sigma) = 2\dfrac{du \wedge dv}{u}$ ne se prolonge pas analytiquement sur tout $\mathbb{C}^2$.

3) Pour tout $k \geq 0$ et tout espace analytique Z, réduit de dimension pure, le faisceau ω^k_Z est de profondeur au moins 2. En général, cette propriété n'est pas vérifiée pour les faisceaux $\mathcal{L}^k_Z$ sauf pour $\mathcal{L}^0_Z$ et les cas suivants :

i) $0 \leq k \leq codim(sing(Z)) - 2$ d'après [F].

ii) Z est un espace analytique réduit, non normal et admettant un normalisé lisse.

iii) Z est une V-variété ou un espace de Cohen Macauley à singularitées rationnelles.

4) Les faisceaux $\mathcal{L}^k_Z$ sont naturellement munis d'un cup produit alors que ce n'est généralement pas le cas pour les faisceaux ω^k_Z. On notera cependant que ce cup produit existe pour Z normal.

5) ω^k_Z n'est pas fonctoriel relativement aux morphismes d'espaces analytiques complexes réduits de dimension pure. En effet, si tel était le cas, la forme méromorphe $\dfrac{da}{b}$ définit sur l'exemple ci-dessus, se relèverait en une forme holomorphe sur la normalisée, qui est lisse; or ceci est manifestement faux. En fait, en considérant une désingularisation de l'espace analytique réduit Z, il n'est pas difficile de voir que, si ω^k_Z admettait une image réciproque, alors $\mathcal{L}^k_Z = \omega^k_Z$ et ce, quelque soit l'entier k; ce qui est généralement faux, en dehors des cas déjà invoqués de Z, Gorenstein à singularités rationnelles, ou Z, V-variété.

6) Pour Z de dimension m, le faisceau $\mathcal{L}^m_Z$ n'est généralement pas dualisant.

7) L'isomorphisme $\omega^k_Z \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\Omega^{m-k}_Z, \omega^m_Z)$ n'est généralement pas vrai si l'on remplace les faisceaux $\omega^\bullet_Z$ par les faisceaux $\mathcal{L}^\bullet_Z$. Mais il reste toutefois vrai, au moins, dans les cas suivants :

- Z est une V-variété.
- Z est à singularités rationnelles.
- Z admet un normalisé lisse.
- Z admet une désingularisation "semi-small" (i.e. qui soit un isomorphisme en dehors d'un sous ensemble de codimension au moins 2 dans la désingularisée).

Si $\pi : \tilde{Z} \to Z$ est un morphisme de résolution des singularités de Z normal et de dimension pure m et si $\mathcal{K} := \dfrac{\Omega^k_{\tilde{Z}}}{\pi^*(\mathcal{L}^k_Z)}$ est le faisceau cohérent supporté par le diviseur exceptionnel E, alors l'obstruction, à l'existence d'un tel isomorphisme, est claire, au vu de la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{L}^{m-k}_Z \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{L}^k_Z, \mathcal{L}^m_Z) \to \pi_*\mathcal{E}xt^1(\mathcal{K}, \Omega^m_{\tilde{Z}}) \to R^1\pi_*\Omega^{m-k}_{\tilde{Z}} \to \cdots$$

D'autant plus que, si Z est de Stein, on a

$$\Gamma(Z,\pi_*\mathcal{E}xt^1(\mathcal{K},\Omega^m_{\tilde Z}))\simeq (H^{m-1}_c(\tilde Z,\mathcal{K}))'\simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{K},\omega^{m-1}_E)$$

8) Signalons le résultat classique (cf. par exemple [Gr] ou [S.Y]) : Si Z est normal à singularités isolées, les faisceaux Ω^k_Z (au sens de Grothendieck), ω^k_Z et $\mathcal{L}^k_Z$ coincident pour tout $k < dim(Z)-1$.

9) Il existe un autre faisceau noté $\bar\Omega^1_Z$ défini sur tout espace analytique complexe réduit de dimension pure et normal. Ce faisceau étudié dans [Sp], au moyen de la modification de Nash, a pour sections les formes méromorphes qui, sur le tangent de Zariski de Z, correspondent aux fonctions méromorphes localement bornées. En fait, si $\pi : \bar Z \to Z$ est 1 éclatement de Nash normalisé et Z^0 désigne la partie régulière de Z, il existe un fibré canonique, $\tilde T$, prolongeant le fibré $\pi^*(T^1(Z))\,|_{Z^0}$. Alors, si $\tilde T^\nu$ désigne le fibré dual, on a $\pi_*\tilde T^\nu = \bar\Omega^1_Z$. Rappelons que la modification de Nash se construit de la manière suivante :

Considérons sur Z, espace analytique réduit de dimension m, le faisceau des 1-formes holomorphes, Ω^1_Z (qui est localement libre sur la partie lisse, $Z-S$, de Z). On lui associe, d'après Grothendieck, la grassmanienne, $Gr_m(\Omega^1_Z)$, des quotients localement libres de rang m et un morphisme $\pi : Gr_m(\Omega^1_Z) \to Z$. $\pi^*\Omega^1_Z$ a un quotient localement libre et l'adhérence, dans $Gr_m(\Omega^1_Z)$, de l'image de la section naturelle $s : Z - S \to Gr_m(\Omega^1_Z)$ est un sous espace analytique fermé réduit $N(Z)$ muni d'un morphisme propre et biméromorphe sur Z, que l'on appelle modification de Nash de Z.

On voit donc que $\bar\Omega^1_Z$ n'est rien d'autre que l'image directe du faisceau localement libre associé à Ω^1_Z. Il est bien entendu $\mathcal{O}_Z$-cohérent, sans torsion et vérifie les inclusions, en général strictes $\bar\Omega^1_Z \subset \mathcal{L}^1_Z \subset \omega^1_Z$.

Ces sections sont aussi caractérisées par le fait qu'elles vérifient des relations de dépendance intégrale sur $\mathcal{O}_Z$.

REMARQUE. Ces faisceaux coincident dans le cas d'une singularité rationnelle, normale et Cohen Macauley. Dans l'appendice, on donne un exemple d'espace complexe, Z, Cohen Macauley et normal à singularités non isolées, pour lequel les faisceaux ω^k_Z et $\mathcal{L}^k_Z$ coincident pour tout k alors que l'inclusion $\bar\Omega^1_Z \subset \mathcal{L}^1_Z$ est vraiment stricte. Cela traduit une différence fondamentale que nous ne pouvons pas aborder ici.

2. – Les contre exemples

2.1. – Non existence de $\rho^{1,n}$

a. Soient $S = \{(a,b,c)\in\mathbb{C}^3 : a^2 = cb^2\}$, la surface faiblement normale de $\mathbb{C}^3$ (communément appelée "parapluie de Whitney") dont le lieu singulier est la droite

$\Sigma = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 : a = b = 0\}$, et D un disque centré en 0 et relativement compact dans $\mathbb{C}$.

Soient $\mathrm{Sym}^2(\mathbb{C}^2)$, le quotient de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ par le groupe symétrique $\sigma_2 = \{Id, -Id\}$, et $\mathrm{Sym}_0^2(\mathbb{C}^2)$, la partie homogène de degré 2 de ce quotient, pouvant aussi être identifiée au cône de $\mathbb{C}^3$ isomorphe à $\mathbb{C}^2/\{id, -id\}$.

Soient $\Gamma = \{(u, v, a, b, c, t) \in \mathbb{C}^2 \times S \times D : u^2 = ct^2, v^2 = b^2, uv = at\}$ et $f : S \times D \to \mathrm{Sym}_0^2(\mathbb{C}^2)$, l'application donnée par $(a, b, c, t) \to (ct^2, b^2, at)$.

Il n'est alors pas difficile de voir que Γ, qui n'est que le produit fibré de $S \times D$ par $\mathbb{C}^2$ au dessus de $\mathrm{Sym}_0^2(\mathbb{C}^2)$, s'identifie, après quotient par l'involution $(a, b, c, t, u, v) \to (a, b, c, t, -u, -v)$, au graphe de cette application. Nous désignerons par $\pi : \Gamma \to S$ le morphisme induit par les projections canoniques de $S \times D \times \mathbb{C}^2 \to S \times D \to S$, et $X_s := \pi^{-1}(s)$ sa fibre en un point s de S.

On constate que, pour s générique, X_s est constitué d'un couple de droites en position générale,dont les équations sont

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{a}{b}t \\ rv_1 = b \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_2 = -u_1 \\ v_2 = -v_1 \end{cases}$$

En faisant varier s on obtient une famille analytique de revêtements ramifiés de degré 2 et de codimension 2 de D dans $D \times \mathbb{C}^2$, dont le morphisme associé est $f : S \times D \to \mathrm{Sym}_0^2(\mathbb{C}^2)$, associant à tout (s, t) les branches locales $f_1 = (u_1, v_1)$ et $f_2 = -f_1$

b. Un calcul simple montre que les traces $\mathrm{Tr}_{/S\times D}(w) = \sum\limits_{1\leq j\leq 2} f_j^*(w)$ sont holomorphes sur S et ce pour toute forme holomorphe w de $\mathbb{C}^3$, ce qui signifie exactement que $(X_s)_{s\in S}$ est une famille analytique locale de 1-cycles de $\mathbb{C}^3$.

c. L'intégration partielle consiste à intégrer un représentant $\bar{\partial}$-fermé à support $\mathbb{C}^2$-propre dans $D \times \mathbb{C}^2$ d'une classe de cohomologie de $H^1_{c\times\mathbb{C}^2}(D \times \mathbb{C}^2, \Omega^2_{D\times\mathbb{C}^3})$ sur la famille de cycles précédemment construite.

Considérons,la forme $\bar{\partial}$-fermée donnée par $\xi = \alpha(t)(udv - vdu)dt \wedge d\bar{t}$ dont le coefficient $\alpha(t)$ est une fonction C^∞ à support compact dans D choisie de telle sorte que $\int_D t.\alpha(t)dt \wedge d\bar{t} = 1$.

En évaluant $\mathrm{Tr}_{/S\times D}(\xi)$, nous obtenons la forme

$$\tilde{\xi} = 2\alpha(t)\left(2\frac{a}{b}db - da\right)tdt \wedge d\bar{t}$$

qui par intégration sur D, nous donne la forme

$$\sigma = 2\left(2\frac{a}{b}db - da\right).$$

En raisonnant sur $\mathbb{C}^2$, la normalisée de S, on montre aisément que cette forme méromorphe n'admet pas de prolongement analytique sur S; ce qui nous enlève tout espoir de définir $\rho^{q,p}$ à valeurs dans le faisceau des formes holomorphes usuelles. On remarque alors que la partie méromorphe de la forme ainsi construite définit une section du faisceau ω_S^1 et plus précisement de $\mathcal{L}_S^1$ puisque ce n'est rien d'autre que l'image directe de la forme vdu, par le morphisme de normalisation $\pi : \mathbb{C}^2 \to Z$ qui à (u, v) associe (uv, u, v^2).

REMARQUES.

1) Il est intéressant de noter qu'il est possible de donner une version projective de ce contre exemple.

2) Il n'est pas difficile d'adapter ce qui précède au cas où $S = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 : a^2 = cb\}$. On obtient alors une forme méromorphe vérifiant une relation de dépendance intégrale donc une section du faisceau $\bar{\Omega}_S^1$ (cf. 1.4) qui ne se prolonge pas en une section du faisceau Ω_S^1 puisque S est à singularité isolée de codimension 2. (Le tangent de Zariski n'est pas normal dans ce cas!). Malheureusement, cet exemple ne permet pas de préciser ou de caractériser l'image de ce morphisme d'intégration, puisque, dans le cas des V-variétés les faisceaux $\bar{\Omega}_S^\bullet$, $\omega_S^\bullet$ et $\mathcal{L}_S^\bullet$ coincident.

3) L'étude de plusieurs exemples montrent que l'intégration des classes de cohomologie de $H_\Phi^n(Z, \Omega_Z^{n+1})$ fournit en fait des sections de $\Gamma(S, \bar{\Omega}_S^1)$ pour S normal. On peut, par ailleurs, construire un exemple, d'une famille analytique de 1-cycles d'une surface normale de $\mathbb{C}^3$, paramétrée par une surface normale, pour lequel l'intégration de classe de type L^2 donne des classes de type strictement L^2.

2.2. – Défaut de fonctorialité

L'exemple qui va suivre montre que l'existence du morphisme canonique de faisceaux cohérents $\Omega^\cdot_Z \to \omega^\cdot_Z$, induisant la flèche

$$H_\Phi^n(Z, \Omega_Z^{n+q}) \to H_\Phi^n(Z, \omega_Z^{n+q}),$$

n'assure en rien la factorisation de $\sigma_\Phi^{q,0}$ (cf. Introduction) à travers $H_\Phi^n(Z, \omega_Z^{n+q})$.

Soient D un polydisque relativement compact de $\mathbb{C}^2$, $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / x^2 - z.y^2 = 0\}$, et $\eta : D \to \mathbb{C}^3$ donné par $(a, b) \to (ab, a, b^2)$, le morphisme de normalisation de Z. Il est facile de voir que le sous ensemble analytique $\Gamma = \{(x, y, z, a, b) \in Z \times D / x = ab; y = a; z = b^2\}$, muni du morphisme $\pi : \Gamma \to D$ induit par les projections canoniques, définit une famille analytique de 0-cycles de Z paramétrée par D.

Il suffit alors d'intégrer la forme méromorphe $\dfrac{dx \wedge dz}{y}$, section du faisceau ω_Z^2, pour obtenir sur D, la forme $2.\dfrac{b^2 da \wedge db}{a}$, qui n'est manifestement pas holomorphe.

3. – Intégration L^2

3.1. – La démonstration du Théorème 1′

Ce résultat fondamental, assurant la fonctorialité des faisceaux $\mathcal{L}^{\cdot}_Z$ et par suite le bon comportement du morphisme d'intégration par changement de base, nécessite quelques lemmes préliminaires.

LEMME 1. *Soient Z une variété analytique complexe connexe et Y un espace analytique complexe réduit de dimension pure. Soient $\phi : Z \to Y$ un morphisme propre et surjectif et σ une section du faisceau $\mathcal{L}^q_Y$. Alors $\phi^*(\sigma)$ est une forme holomorphe sur Z.*

DÉMONSTRATION. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \tilde{Y} \\ {\scriptstyle \tilde{\pi}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ Z & \xrightarrow[\phi]{} & Y \end{array}$$

Dans lequel $\tilde{Y}$ et $\tilde{Z}$ désignent respectivement des désingularisées de Y et du produit fibré $Z \times_Y \tilde{Y}$.

Comme $\tilde{\pi}^*\phi^*(\sigma) = \tilde{\phi}^*\pi^*(\sigma)$ est holomorphe et Z lisse, le lemme de Dolbeault - Grothendieck et le fait que $\tilde{\pi}_*\tilde{\pi}^* = id_Z$ suffisent à assurer la preuve de ce lemme.

LEMME 2. *Soit q un entier positif ou nul, Z un espace analytique réduit de dimension pure et T un sous ensemble analytique fermé de Z.*

i) *$\mathcal{L}^q_Z$ est un sous faisceau cohérent de ω^q_Z, sans $\mathcal{O}_Z$ torsion.*

Si $\pi : \tilde{Z} \to Z$ est une modification d'espaces analytiques réduits de dimension pure, on a

ii) $\pi_*\mathcal{L}^q_{\tilde{Z}} = \mathcal{L}^q_Z$

iii) *il existe un morphisme $\pi^* : \pi^*\mathcal{L}^q_Z \to \mathcal{L}^q_{\tilde{Z}}$, prolongeant l'image réciproque définie au niveau des formes holomorphes.*

Autrement dit ces faisceaux sont fonctoriels relativement aux modifications d'espaces analytiques réduits de dimension pure.

LEMME 3. *Si $\pi : Z \to Y$ est un morphisme fini d'espaces analytiques complexes réduits et de dimension pure, il existe une image directe (ou morphisme trace) $\pi_* : \pi_*\mathcal{L}^q_Z \to \mathcal{L}^q_Y$.*

DÉMONSTRATION. En considérant, le diagramme précédent :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \tilde{Y} \\ {\scriptstyle \tilde{\phi}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ Z & \xrightarrow[\pi]{} & Y \end{array}$$

La preuve s'en déduit immédiatement puisque :

$$\pi_* \tilde{\phi}_* \Omega^j_{\tilde{Z}} = \phi_* \tilde{\pi}_* \Omega^j_{\tilde{Z}} \to \mathcal{L}^j_Y$$

sera défini comme étant cette trace.

LEMME 4. *Soit $p : Y \times Z \to Y$ la projection canonique. Alors, il existe un morphisme image inverse $p^* : p^* \mathcal{L}^q_Y \to \mathcal{L}^q_{Y \times Z}$*

LEMME 5. *Soit $E := (V, \sigma, U \times B)$ une écaille adaptée aux cycles d'un ouvert S' de S. Soient X_E le graphe de la famille $(X_s)_{s \in S'}$ relatif à S', et $\pi_E : X_E \to S'$, le morphisme de projection naturel. Alors à ces données est associé de manière canonique un morphisme trace*

$$\sigma^q_E : R^n \pi_{E!} \Omega^{n+q}_{X_E} \to \mathcal{L}^q_{S'}$$

compatible aux changement de bases sur S donnés par

i) *les inclusions ouvertes dans S', ou*
ii) *les modifications de S'.*

DÉMONSTRATION. La famille analytique $(X_s)_{s \in S}$ définit, sur chaque écaille adaptée à une partie S' de S, une famille analytique de revêtements ramifiés. Signalons que la donnée de cette dernière est loin de suffire à déterminer la première, si l'on impose pas la condition d'isotropie.

Pour simplifier l'écriture, nous posons $X := X_E$, $S := S'$ et $\pi := \pi_E$ et faisons le raisonnement pour des formes holomorphes sur X alors qu'en toute rigueur on doit considérer les sections du faisceau image réciproque des formes holomorphes de $Z = U \times B$ par la projection de X sur Z.
Nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & S \times U \times B \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ S & \xrightarrow[p']{} & S \times U \end{array}$$

dans lequel g est un morphisme fini, p et p' sont les projections canoniques.

Remarquons qu' étant donné un morphisme $\pi : X \to S$ dont la fibre en un point s_0 est de dimension pure n, il est toujours possible de l'installer, localement près de s_0, dans un tel diagramme.

La finitude de g implique, en vertu du Lemme 3, l'existence d'un morphisme trace

$$g_* : g_* \Omega^{n+q}_X \to \mathcal{L}^{n+q}_{S \times U}$$

La suite spectrale associée au morphisme $\pi = p' o g$ et donnée par

$$R^\alpha p'_! R^\beta g_! \Omega^{n+q}_X \Rightarrow R^{\alpha+\beta} \pi_! \mathcal{L}^{n+q}_X$$

dégénère en E_2, puisque g est fini.
D'où l'isomorphisme

$$R^n p'_! g_! \Omega_X^{n+q} \simeq R^n \pi_! \Omega_X^{n+q}$$

L'exactitude à droite du foncteur $R^n p'_!$, induit un morphisme

$$R^n p'_! g_* \Omega_X^{n+q} \to R^n p'_! \mathcal{L}_{S\times U}^{n+q},$$

duquel résulte, grâce à la dégénérescence de la suite spectrale ci-dessus, le morphisme

$$R^n \pi_! \Omega_X^{n+q} \to R^n p'{}_! \mathcal{L}_{S\times U}^{n+q}.$$

La décomposition $\mathcal{L}_{S\times U}^{n+q} = \bigoplus_{i+j=n+q} \mathcal{L}_S^i \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \Omega_U^j$, qui, pour une désingularisée $\tilde{S}$, résulte de la décompostion $\Omega_{\tilde{S}\times U}^{n+q} = \bigoplus_{i+j=n+q} \Omega_{\tilde{S}}^i \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \Omega_U^j$ et de la formule de Künneth, permet, grâce à l'intégration sur U, donnée par la flèche $H_c^n(U, \Omega_U^n) \to \mathbb{C}$, de définir le morphisme désiré.

Dans le Chapitre 2 de [K], en nous inspirant de [B.V], on propose une construction plus explicite, et donc plus technique, au moyen d'un calcul en termes de cochaines de Čech.

Le fait qu'elle soit de formation compatible aux changements de bases désignés sur S résulte simplement de la stabilité par changement de base de l'analyticité d'une famille de cycles et de la fonctorialité des faisceaux $\mathcal{L}_{S\times U}^{n+q}$ et $\mathcal{L}_S^q$ relativement aux inclusions ouvertes et aux modifications en vertu du Lemme 2. D'où la preuve du lemme.

Pour pouvoir globaliser sur X, c'est à dire être capable de recoller ces précédents morphismes locaux, l'outil fondamental dont nous avons besoin est la conséquence importante du théorème de Reiffen [R], pour laquelle nous renvoyons le lecteur à [B.V] (cf. Annexe) :

Soient $\pi : X \to S$ un morphisme surjectif d'espaces analytiques complexes dont les fibres sont de dimension au plus égales à n, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X et $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement ouvert de X. Si l'on désigne par π_α et $\mathcal{F}_\alpha$, les restrictions de π et $\mathcal{F}$ à X_α, alors

$$\bigoplus_{\alpha\in A} R^n \pi_{\alpha !} \mathcal{F}_\alpha \to R^n \pi_! \mathcal{F}$$

est surjectif.

D'où l'analogue global de ce qui précède :

LEMME 6. *Les notations étant celles de l'introduction et $\pi : X \to S$ désignant le morphisme géométriquement plat associé à la famille analytique $(X_s)_{s\in S}$. On a*

i) *Le morphisme σ_Φ^q se factorise à travers $H^0(S, \mathcal{L}_S^q)$*

ii) *$\sigma_\Phi^{q,0}$ induit une trace*

$$R^n \pi_! \Omega_X^{n+q} \to \mathcal{L}_S^q$$

de formation compatible aux changements de bases sur S donnés par

i) *les inclusions ouvertes dans S ou*

ii) *les modifications de S.*

DÉMONSTRATION. Le premier point résulte de la construction entreprise dans [K] et des simples constatations suivantes :
Nous savons que si S est un espace lisse, $\sigma_{\Phi}^{q,0}$, noté dans ce cas $\rho_{\Phi}^{q,0}$, est à valeurs dans le groupe $H^0(S, \Omega_S^q)$.
Dans le cas général, on considère une résolution des singularités $\eta : \tilde{S} \to S$ et le diagramme suivant de changement de base associé

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\eta}} & X \\ {\scriptstyle\tilde{\pi}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \tilde{S} & \xrightarrow[\eta]{} & S \end{array}$$

La propriété d'analyticité d'une famille étant stable par tout changement de base sur S, il en découle que le morphisme de désingularisation induira l'analyticité de $(X_s)_{s \in \tilde{S}}$; or l'integration sur cette nouvelle famille fournit des formes holomorphes sur la désingularisée et par suite une section de $\eta_* \Omega_{\tilde{S}}^q = \mathcal{L}_S^q$ et donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{\Phi}^n(Z, \Omega_Z^{n+q}) & \xrightarrow{\rho_{\Phi}^{q,0}} & H^0(\tilde{S}, \Omega_{\tilde{S}}^q) \\ {\scriptstyle\sigma_{\Phi}^{q,0}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle r} \\ & & H^0(S, \omega_S^q) \end{array}$$

avec $H^0(\tilde{S}, \Omega_{\tilde{S}}^q) \simeq H^0(S, \mathcal{L}_S^q)$ et r application injective.

Pour prouver ii), on considère la projection canonique $p : X \to Z$ et l'on commence par remarquer que, si S est de Stein, la suite spectrale de Leray

$$E_2^{i,j} = H^i(S, R^j \pi_! p^* \Omega_Z^{n+q}) \Longrightarrow H^{i+j}(X, p^* \Omega_Z^{n+q})$$

donnant un morphisme latéral

$$H^n{}_{S-propre}(X, p^* \Omega_Z^{n+q}) \to \Gamma(S, R^n \pi_! p^* \Omega_Z^{n+q})$$

(qui est un isomorphisme si π est propre), combinée avec le Lemme 5 et la version faisceautique du théorème de Reiffen, suffisent à montrer l'existence de la composée :

$$H_{S-propre}^n(X, p^* \Omega_Z^{n+q}) \to \Gamma(S, R^n \pi_! p^* \Omega_Z^{n+q}) \to \Gamma(S, \mathcal{L}_S^q).$$

D' où, pour tout ouvert de Stein S' dans S, un morphisme

$$\Gamma(S', R^n \pi_* p^* \Omega_Z^{n+q}) \to \Gamma(S', \mathcal{L}_S^q)$$

donnant ainsi la flèche désirée.

La compatibilité avec les changements de bases précisés se vérifie tout comme dans le Lemme 5.

3.2. – Preuve du Théorème $1'$

Soit

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\pi'"'] & \tilde{Z} \arrow[d, "\pi"] \\ T \arrow[r, "i"'] & Z \end{tikzcd}$$

le diagramme commutatif (qui est un carré cartésien) dans lequel i et j sont les inclusions naturelles, $\Sigma := \pi^{-1}(T)$ et $\pi^{'}$ la restriction de π à Σ. D'après ([H1]), on peut supposer que π est une résolution des singularités de Z.

Le problème étant de nature locale sur T, on peut le supposer de Stein. Nous commencerons par établir le résultat génériquement sur T.

π' étant propre, surjectif et $\dim\Sigma - \dim T = n$, il existe, en vertu du théorème de Cartan - Remmert sur la semi continuité de la dimension des fibres, un sous ensemble analytique fermé de codimension au moins deux dans T en dehors duquel il est n-équidimensionnel; ce que nous supposerons dorénavant.

On peut d'ailleurs utiliser un théorème du type Bertini (cf. [Ve], [F2]) pour se ramener au cas où Σ est lisse.

Enfin, grâce au Lemme 2, π' sera supposé à fibres connexes. Pour résumer, nous supposons ce morphisme lisse, à fibres lisses, connexes de dimension n, au dessus de T pouvant être lisse.

a. **Indépendance de la construction vis à vis de la forme de Kähler choisie**

Nous renvoyons le lecteur à [Fu-Sc] et [Va] pour la définition des formes de Kähler relatives. Soient donc ω_1 et ω_2 deux formes de Kähler relatives vérifiant : $\int_{X_t} \omega_1^n = \int_{X_t} \omega_2^n = 1,\ \forall t \in T$. Alors $[\omega_1]^n = [\omega_2]^n$.

En effet, π' étant lisse à fibres connexes, les faisceaux $R^{2n}\pi_*\mathbb{C}$ et $R^n\pi_*\Omega^n_{\Sigma/T}$ sont, respectivement, localement constant et localement libre de rang 1 sur T, de plus on a les isomorphismes canoniques, définis par intgration

$$R^{2n}\pi'_*\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$$
$$R^n\pi_*\Omega^n_{\Sigma/T} \simeq \mathcal{O}_T,$$

Cela signifie que pour tout t_0, fixé, dans T, V un voisinage ouvert de $\pi\prime - 1(t_0)$ que l'on peut choisir n-complet d'après [B4] et α une forme T relative, $\bar\partial$-fermée de type (n, n) sur V, il existe une fonction holomorphe $f(t)$ définie sur un voisinage ouvert de t_0 dans T et β une $(n, n-1)$ forme relative telle que

$$f(t).\omega_1^n - \alpha = \bar\partial\beta.$$

Posons $\alpha = \omega_2^n$, notons r, la dimension de T et choisissons f telle que $f(t_0) = 1$, ce qui est possible puisque $\int_{X_t} \omega_1^n = \int_{X_t} \omega_2^n = 1$ et donc $(\omega_1^n - \omega_2^n) \mid X_t$ est

$\bar{\partial}$ exacte. Soit ϕ une forme C^∞ de type $(r-q, r)$ sur T. Alors

$$\int_\Sigma \pi^*(\sigma) \wedge {\omega_2}^n \wedge \pi'^*(\phi) = \int_\Sigma \pi^*(\sigma) \wedge \{f(t)\omega_1^n - \bar{\partial}\beta\} \wedge \pi'^*(\phi)$$

Mais

$$\int_\Sigma \pi^*(\sigma) \wedge \bar{\partial}\beta \wedge \pi'^*(\phi) = \int_\Sigma \bar{\partial}\{\pi^*(\sigma) \wedge \beta \wedge \pi'^*(\phi)\}$$

Et pour des raisons de type, on a

$$\int_\Sigma \bar{\partial}\{\pi^*(\sigma) \wedge \beta \wedge \pi'^*(\phi)\} = \int_\Sigma d\{\pi^*(\sigma) \wedge \beta \wedge \pi'^*(\phi)\} = 0$$

D' où finalement,

$$\int_\Sigma \pi^*(\sigma) \wedge \omega_2^n \wedge \pi'^*(\phi) = \int_\Sigma \pi^*(\sigma) \wedge f(t)\omega_1^n \wedge \pi'^*(\phi).$$

Pour montrer que les sections obtenues génériquement sur S se prolongent en sections L^2, il suffit de se ramener au cas où π' est un morphisme plat grâce au théorème d'applatissement de Hironaka (cf. [H2]) et d'utiliser le Lemme 6 de II. Il suffit, en effet, d'écrire le diagramme de changement de base relatif à la modification de T et simplement constater que la section L^2 que l'on obtient est en fait l'unique prolongement à T de la section "générique", construite précedemment, en vertu de l'abscence de torsion du faisceau $\mathcal{L}_T^q$.

b. **Indépendance vis à vis du morphisme choisi**

Elle découle presqu'immédiatement du paragraphe précédent en se servant des résultats suivants :

i) Si $\pi_1 : Z_1 \to Z$ et $\pi_2 : Z_2 \to Z$ sont deux morphismes propres et surjectifs avec Z_1, Z_2 variétés analytiques complexes connexes, il est toujours possible de construire un troisième morphisme d'une variété complexe sur Y et dominant les deux premiers (considérer simplement, par exemple, la désingularisée du produit fibré $Z_1 \times_Z Z_2$).

ii) L'image directe par un morphisme géométriquement plat d'une forme de Kähler est encore une forme de Kähler au sens de Varouchas [Va]. D'où le caractère intrinsèque de la construction.

c. **Compatibilité avec le cas lisse, preuve de i) et ii)**

Supposons Z lisse et soit σ une forme holomorphe sur Z. Alors, pour tout sous espace lisse T de Z, la formule de projection bien connue donne $\mathcal{R}_{Z,T}(\sigma) = \sigma|_T$, d'où l'assertion i). Le point ii) se déduit facilement de cette même formule de projection.

d. **Formule de transitivité**

Soit

$$\begin{tikzcd} \Sigma' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\pi''"] & \Sigma \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\pi'"] & \tilde{Z} \arrow[d, "\pi"] \\ T' \arrow[r, "i'"] & T \arrow[r, "i"] & Z \end{tikzcd}$$

le diagramme commutatif dans lequel les morphismes horizontaux sont des immersions fermées.

On désire montrer que $\mathcal{R}_{T,T'} o \mathcal{R}_{Z,T} = \mathcal{R}_{Z,T'}$.

– Si $\Sigma' := \pi^{-1}(T)$ est lisse, le résultat est facile à établir.

– Dans le cas où il serait singulier, il suffit de le désingulariser grâce au théorème de Hironaka pour obtenir le diagramme

$$\begin{tikzcd} \tilde{\Sigma}' \arrow[r, "\tilde{j}'"] \arrow[d, "\phi''"] & \tilde{\Sigma} \arrow[d, "\phi'"] & \\ \Sigma' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\pi''"] & \Sigma \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\phi'"] & \tilde{Z} \arrow[d, "\pi"] \\ T' \arrow[r, "i'"] & T \arrow[r, "i"] & Z \end{tikzcd}$$

Soient ω et $\tilde{\omega}$ deux formes de Kähler sur $\tilde{Z}$ et $\tilde{\Sigma}$, relatives aux morphismes π et $\pi' o \phi'$ respectivement. Soient n et $n' = n'' + n$ les dimensions relatives des morphismes π' et $\pi'' o \phi''$. L'indépendance de la construction vis à vis de la forme choisie nous permet de prendre $[\tilde{\omega}] = [\phi \pi'^* j^* \omega]$. La preuve s'en déduit aisément grâce à un calcul simple en termes d'images directes au sens des courants.

En effet, posons $\pi' o \phi' := \tilde{\pi}$, $\pi'' o \phi'' := \tilde{\pi}'$ et

$$\sigma_T := \pi'_* \left(\pi^*(\sigma) \wedge \omega^n \mid_{\Sigma}\right)$$

$$\sigma_{T'} := \pi''_* \left(\pi^*(\sigma) \wedge \omega^n \mid_{\Sigma'}\right)$$

$$\sigma_{T,T'} := \tilde{\pi}'_* \left(\tilde{\pi}^*(\sigma_T)) \wedge \tilde{\omega}^{n''} \mid_{\tilde{\Sigma}'}\right)$$

On aura alors

$$\sigma_{T,T'} := \pi''_* \phi''_* \left\{\phi''^*(\pi'^*(\sigma_T)) \wedge \phi''^* \omega^{n''} \mid_{\Sigma'}\right\} = \pi''_* \left\{\pi'^*(\sigma_T) \mid_{\Sigma'} \wedge \omega^{n''} \mid_{\Sigma'}\right\}$$

Pour un choix convenable de ω, on aura :

$$\sigma_{T,T'} = \pi''_* (\pi'^*(\sigma_T)|_{\Sigma'})$$

Il suffit alors de remarquer que

$$\pi'^*(\sigma_T) = \pi'^* \pi'_* \left\{\pi^*(\sigma) \wedge \omega^n \mid_{\Sigma}\right\} \mid_{\Sigma'}$$

qui nous donnera au sens des courants, la compatibilité désirée.

La remarque suivant l'énoncé de ce théorème apparait clairement comme une conséquence directe de ce dernier. En effet, dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi'"'] & \tilde{Z} \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "i"'] & Z \end{tikzcd}$$

dans lequel $\tilde{Z}$ et X' sont des résolutions de Z et de la préimage stricte de X dans $\tilde{Z}$, il n' y' a qu'une manière de définir la restriction d'une section σ du faisceau des formes de type L^2, à savoir, par la formule $\pi'_* \phi^* \pi^*(\sigma)$.

COROLLAIRE 1$'$. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques complexes réduits de dimension pure. Alors, il existe un morphisme image réciproque $f^* : f^*\mathcal{L}_Y^q \to \mathcal{L}_X^q$, qui prolonge le morphisme image réciproque défini au niveau des formes holomorphes.*

DÉMONSTRATION. Comme f se factorise localement à travers une immersion fermée et une projection, il nous suffit d'appliquer le Lemme 4 et le théorème précédent pour prouver ce corollaire.

3.3. – Preuve du Théorème 1

Avec les notations de l'introduction, on doit montrer que pour Z, S, Φ, Ψ, $(X_s)_{s\in S}$ donnés, il existe un morphisme d'intégration d'ordre supérieure sur les cycles

$$\tilde{\sigma}_\Phi^{q,0} : H_\Phi^n(Z, \mathcal{L}_Z^{n+q}) \longrightarrow H^0(S, \mathcal{L}_S^q)$$

vérifiant les conditions désirées.

DÉMONSTRATION. Elle repose essentiellement sur le Théorème 1$'$ et sur la conséquence importante du théorème de Reiffen, donnée dans le paragraphe II. Le morphisme $\sigma_\Phi^{q,0}$ sera donné par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H_\Phi^n(Z, \mathcal{L}_Z^{n+q}) \arrow[r, "\eta_0"] \arrow[d, "\sigma_\Phi^{q,n}"'] & H_{\Phi\times S}^n(S\times Z, \mathcal{L}_{S\times Z/S}^{n+q}) \arrow[r, "\eta_1"] & H_{\Phi\times S}^n(S\times Z, \mathcal{L}_{S\times Z}^{n+q}) \arrow[d, "\eta_2"] \\ H^0(S, \mathcal{L}_S^q) & H^0(S, R^n\pi_!\mathcal{L}_X^{n+q}) \arrow[l, "\eta_4"'] & H_{S-propre}^n(X, \mathcal{L}_X^{n+q}) \arrow[l, "\eta_3"'] \end{tikzcd}$$

dans lequel

- η_0 et η_1 se déduisent du Lemme 4.
- η_2 découle du Théorème 1.
- η_3 est un edge de la suite spectrale

$$E_2^{i,j} = H^i(S, R^j\pi_!\mathcal{L}_X^{n+q}) \Rightarrow H^{i+j}(X, \mathcal{L}_X^{n+q})$$

vérifiant $E_2^{i,j} = 0, \quad \forall j > n$

– η_4 se construit en utilisant les trois faits suivants :

1) la nature locale du problème sur S
2) le Théorème 1
3) le corollaire du théorème de Reiffen énoncé plus haut.

En effet, 1) permet de se fixer s_0 et par suite le cycle X_{s_0} de Z au voisinage duquel on va opérer. L'intégration sur les cycles ne dépendant que du support de ces derniers, on peut donc se restreindre à travailler au voisinage du support, $| X_{s_0} |$, de X_{s_0}.

Si $[\gamma]$ est une classe de cohomologie de support F, on sait, d'après l'hypothèse faite sur les familles de supports choisies, que $| X_{s_0} | \cap F$ est un compact.

On peut donc, quitte à rétrécir S, supposer X réunion finie d'ouverts $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$.

"Rétrécir" les données implique automatiquement que l'on restreigne les faisceaux en question; ce qui a un sens en vertu du point 2).

3) assurant la surjectivité de la flèche

$$\bigoplus_{\alpha \in A} R^n \pi_{\alpha\,!} \mathcal{L}^{n+q}_{X_\alpha} \to R^n \pi_! \mathcal{L}^{n+q}_X ,$$

nous ramène à la situation du Lemme 5.

Pour de plus amples détails, nous renvoyons le lecteur au Chapitre 2 de [K] dans lequel il trouvera une construction analogue.

a) Rappelons que selon [B.M] p. 6, une **pondération géométrique** d'un morphisme équidimensionnel $g : \tilde{Z} \to S$ est la donnée d'un cycle $\tilde{X}$ de $S \times Z$ vérifiant

$$\forall\, s \in S \quad | \tilde{X} | \cap (\{s\} \times \tilde{Z}) = \{s\} \times | g^{-1}(s) | \, .$$

Nous reprenons l'exemple standard d'une pondération géométriquement plate, associée à une famille analytique de cycles, donné dans [B.M] et dans lequel $\tilde{Z}$ désigne le support du graphe de la famille $(X_s)_{s \in S}$ donné par l'ensemble $\{(s, z) \in S \times Z : z \in | X_s |\}$ muni de sa structure réduite, $f : \tilde{Z} \to S$ est la projection canonique et $\tilde{X}$ désignera le graphe de la famille analytique, $(\{s\} \times X_s)_{s \in S}$, de cycles de $\tilde{Z}$. Dans ce qui précède le rôle de $\tilde{X}$ est tenu par X.

La compatibilité de cette construction avec les inclusions ouvertes sur Z est évidente. En effet, comme tout ouvert U de Z définit un ouvert, $\tilde{U}$ de X et que $\pi : X \to S$ est géométriquement plat donc ouvert, on peut supposer $\pi(\tilde{U}) = S$. De plus le caractère local, sur $S \times \tilde{Z}$, de la notion de famille analytique de cycles assure la platitude géométrique de π restreint à $\tilde{U}$, c'est à dire que l'on a encore une famille analytique de cycles.

La preuve de b) repose essentiellement sur le fait que si $\tilde{f} : \tilde{Z} \to \tilde{T}$, est un morphisme propre d'espaces analytiques complexes réduits au dessus de

S réduit, alors toute pondération $\tilde{X}$ géométriquement plate sur $\tilde{Z}$ définit une pondération géométriquement plate sur $\tilde{T}$. D'après [B.M] p. 8, il suffit de considérer le cycle $\tilde{f}_*(\tilde{X})$ associé au graphe de la famille analytique de cycles $(\tilde{f}_*(\tilde{X}_s)_{s\in S}$.

c) La compatibilité avec les changements de bases sur S est une conséquence du Théorème 1′.

d) L'annulation des faisceaux $R^j\pi_!\mathcal{L}_X^{n+q}$ pour tout $j > n$ (cf. [B.V] par exemple) montre qu'il est équivalent de se donner l'une des deux flèches $R^n\pi_!\mathcal{L}_X^{n+q} \to \mathcal{L}_S^q$ ou $R\pi_!\mathcal{L}_X^{n+q}[n] \to \mathcal{L}_S^q$, puisque l'on a l'isomorphisme

$$\mathbf{Hom}_{D(\mathcal{O}_S)}(R\pi_!\mathcal{L}_X^{n+q}[n], \mathcal{L}_S^q) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{H}^0(R\pi_!\mathcal{L}_X^{n+q}[n]), \mathcal{H}^0(\mathcal{L}_S^q))$$

e) Ce dernier point est évident par construction. Cela achève la preuve du théorème.

4. – Dérivée p-ième de l'intégration d'ordre supérieur et intégration de type général

COROLLAIRE 2. *Avec les mêmes hypothèses que celles du Théorème* 1, *on a un morphisme*

$$\tilde{\sigma}_X^{q,p} : H_\Phi^{n+p}(Z, \mathcal{L}_Z^{n+q}) \longrightarrow H^p(S, \mathcal{L}_S^q)$$

naturellement induit par $\tilde{\sigma}_{\Phi,X}^{q,0}$ *et vérifiant des propriétés analogues à ce dernier.*

DÉMONSTRATION. Le problème étant de nature globale sur S, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que les cycles sont compacts. Dans ce cas, le graphe de la famille se projette proprement sur S et coupe $S \times \Phi$ en des fermés de $S \times Z$. Ceci dit, ce corollaire est une conséquence immédiate de l'existence du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
H_\Phi^{n+p}(Z, \mathcal{L}_Z^{n+q}) & \xrightarrow{\beta_0} & H_{S\times\Phi}^{n+p}(S\times Z, \mathcal{L}_{S\times Z/S}^{n+q}) & \xrightarrow{\beta_1} & H_{S\times\Phi}^{n+p}(S\times Z, \mathcal{L}_{S\times Z}^{n+q}) \\
{\scriptstyle \sigma^{q,p}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \beta_2} \\
H^p(S, \mathcal{L}_S^q) & \xleftarrow{\eta_4} & H^p(S, R^n\pi_*\mathcal{L}_X^{n+q}) & \xleftarrow{\beta_3} & H_{S\times\Phi\cap X}^{n+p}(X, \mathcal{L}_X^{n+q})
\end{array}$$

dans lequel β_0 et β_2 découle du Lemme 4 et du Théorème 1′ et β_3, un morphisme de suite spectrale. En effet, cette flèche n'est rien d'autre qu' un morphisme latéral de la suite spectrale de Leray, associée au morphisme $\pi : X \to S$, donné par l'annulation des faisceaux de cohomologie $R^i\pi_*\mathcal{L}_X^{n+q}$ et ce pour tout $i > n$.

COROLLAIRE 2$'$. *Posons* $\mathcal{L}_S^{-j} := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{L}_S^j, \mathcal{L}_S^0)$. *Soit* $\pi : X \to S$ *un morphisme surjectif définissant une famille analytique de n-cycles d'un certain espace analytique complexe réduit Z, paramétrée par S réduit. Alors, pour tout* $j \geq 0$, *il existe un unique morphisme*

$$R^n\pi_!\mathcal{L}_X^j \to \mathcal{L}_S^{j-n}$$

compatible avec les changements de bases sur S donnés par les inclusions ouvertes et les modifications propres.

DÉMONSTRATION. Nous allons montrer son existence, déterminer son image puis établir ses propriétés fonctorielles.

1) *Existence du morphisme* $R^n\pi_!\mathcal{L}_X^j \to \mathcal{L}_S^{j-n}$

Remarquons que cette flèche est entièrement déterminée par le morphisme pris au sens des catégories dérivées

$$R\pi_!\mathcal{L}_X^j[n] \to \mathcal{L}_S^{j-n}$$

a) π **est propre** :

i) <u>S normal</u>

Notons $\mathcal{L}_{X/S}^j$, le faisceau S relatif. S étant normal, on a $\mathcal{L}_S^{-j} := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{L}_S^j, \mathcal{O}_S)$. On aura alors la composée de morphismes canoniques

$$R\pi_*\mathcal{L}_X^j[n] \to R\pi_*\mathcal{L}_{X/S}^j[n] \to R\pi_*R\mathcal{H}om(\mathcal{L}_{X/S}^{n-j}, \mathcal{L}_{X/S}^n[n]) \to R\mathcal{H}om(\mathcal{L}_S^{n-j}, \mathcal{O}_S)$$

En prenant la cohomologie de degré 0, on obtient le morphisme

$$R^n\pi_*\mathcal{L}_X^j \to \mathcal{L}_S^{j-n}$$

ii) <u>S,quelconque</u>

Considérons le morphisme de normalisation $\eta : \tilde{S} \to S$ et le diagramme de changement de base

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\eta}} & X \\ {\scriptstyle \tilde{\pi}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \tilde{S} & \xrightarrow[\eta]{} & S \end{array}$$

Alors, le morphisme

$$R^n\tilde{\pi}_*\mathcal{L}_{\tilde{X}}^j \to \mathcal{L}_{\tilde{S}}^{j-n}$$

donne le morphisme attendu, puisque le quasi isomorphisme

$$R\eta_*R\tilde{\pi}_*\mathcal{L}_{\tilde{X}}^j[n] \simeq R\pi_*R\eta_*\mathcal{L}_{\tilde{X}}^j[n]$$

induira, grâce au Théorème 1, la flèche

$$R\pi_*\mathcal{L}_X^j[n] \to R\eta_*\mathcal{L}_{\tilde{S}}^{j-n}.$$

Il nous suffit de vérifier que

$$R\eta_*\mathcal{L}_{\tilde{S}}^{j-n} \simeq \eta_*\mathcal{L}_{\tilde{S}}^{j-n} \simeq \mathcal{L}_S^{j-n}.$$

Mais cela découle simplement du fait que η est une modification finie. En effet, pour tout entier naturel k, l'égalité $\eta_*\mathcal{L}_{\tilde{S}}^k = \mathcal{L}_S^k$ et la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{N} \to \eta^*\mathcal{L}_S^k \to \mathcal{L}_{\tilde{S}}^k \to 0$$

donnent la suite exacte

$$0 \to \mathcal{H}om(\mathcal{L}_{\tilde{S}}^k, \mathcal{O}_{\tilde{S}}) \to \mathcal{H}om(\eta^*\mathcal{L}_S^k, \mathcal{O}_{\tilde{S}}) \to \mathcal{H}om(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\tilde{S}})$$

Or le fait que η soit une modification entraine que le support du faisceau $\mathcal{N}$ est contenu dans un sous ensemble de codimension au moins 1 dans $\tilde{S}$ et par conséquent le faisceau $\mathcal{H}om(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\tilde{S}})$ est nul.
D' où, en appliquant,la formule d'adjonction, $\eta_*\mathcal{L}_{\tilde{S}}^{-k} \simeq \mathcal{L}_S^{-k}$.

b) π **non nécessairement propre**

On raisonne localement sur X en se ramenant au diagramme suivant relatif à une écaille donnée

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"] & S \times U \times B \arrow[d, "p"] \\ S & S \times U \arrow[l, "p'"] \end{tikzcd}$$

En reprenant les arguments développés dans le Lemme 5 de II, on est naturellement amené à montrer le résultat pour la projection p'. Si S est lisse, Ω_S^{n-j} étant localement libre et p' plat, on a

$$Rp'_!\Omega^j_{S\times U} \otimes \Omega_S^{n-j}[n] \simeq Rp'_!(\Omega^j_{S\times U} \otimes p\pi'^*\Omega_S^{n-j})[n]$$

que l'on composera avec la flèche d'intégration

$$Rp'_!\Omega^n_{S\times U/S}[n] \to \mathcal{O}_S.$$

Dans le cas général, il nous suffira d'écrire le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \tilde{S} \times U \arrow[r, "\tilde{\phi}"] \arrow[d, "\tilde{p}'"] & S \times U \arrow[d, "p'"] \\ \tilde{S} \arrow[r, "\phi"] & S \end{tikzcd}$$

relatif au changement de base donné par une résolution des singularités $\phi : \tilde{S} \to S$. On termine en utilisant le découpage donné par le théorème de Reiffen (cf. II ou l' appendice).

2) *Caractérisation de son image*

Soient $\phi : \tilde{S} \to S$ une résolution des singularités de S et

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \tilde{S} & \xrightarrow{\phi} & S \end{array}$$

le diagramme de changement de base associé. $R\tilde{\pi}_! \mathcal{L}^j_{\tilde{X}}[n] \to \Omega^{j-n}_{\tilde{S}}$ induit naturellement la flèche $R\pi_! \mathcal{L}^j_X[n] \to R\phi_* \Omega^{j-n}_{\tilde{S}}$, d'ailleurs entièrement déterminé par le morphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_S$ modules $R^n\pi_! \mathcal{L}^j_X \to \phi_* \Omega^{j-n}_{\tilde{S}}$. L'image de ce morphisme d'intégration est contenue dans le faisceau $\phi_* \Omega^{j-n}_{\tilde{S}}$ qui est cohérent et sans $\mathcal{O}_S$ torsion mais dépend de la résolution choisie.

5. – Preuve du Corollaire 1 du Théorème 1

Il apparait clairement que le Corollaire 2′ et les arguments développés dans le Corollaire 2 permettent, sans aucune difficulté, de prouver le corollaire du Théorème 1 énoncé dans l'introduction.

REMARQUE. Supposons π propre, pour simplifier. La donnée du morphisme

$$R\pi_* \mathcal{L}^j_X[n] \to R\mathcal{H}om(\mathcal{L}^{n-j}_S, \mathcal{L}^0_S)$$

est équivalente à la donnée du morphisme

$$R\pi_* \mathcal{L}^j_X[n] \otimes \mathcal{L}^{n-j}_S \to \mathcal{L}^0_S$$

qui est entièrement déterminé par le morphisme

$$R\pi_* \mathcal{L}^j_X[n] \otimes \mathcal{L}^{n-j}_S \to \mathcal{L}^0_S$$

et le détermine. Ce dernier est la composé des flèches canoniques suivantes :

$$R\pi_*(\mathcal{L}^j_X[n] \otimes \pi^*(\mathcal{L}^{n-j}_S) \to R\pi_*(\mathcal{L}^j_X[n] \otimes \mathcal{L}^{n-j}_X) \to R\pi_* \mathcal{L}^n_X[n] \to \mathcal{L}^0_S$$

REMARQUE. Comme nous l'avions déjà signalé, il est possible, pour $p > n$, de donner un énoncé du Corollaire 1 avec une famille de supports sur S. En effet, en notant Θ une telle famille, il nous suffira d'appliquer le foncteur de cohomologie globale $H^{p-n}_\Theta(S, --)$ au morphisme

$$R^n\pi_! \mathcal{L}^q_{\tilde{X}} \to \mathcal{L}^{q-n}_S$$

pour en déduire le morphisme

$$H^{p-n}_\Theta(S, R^n\pi_! \mathcal{L}^q_X) \to H^{p-n}_\Theta(S, \mathcal{L}^{q-n}_S),$$

Grâce à [Br] (p. 220), le lecteur se convaincra aisément que pour des choix convenables de Θ et Φ paracompactifiantes sur S et Z respectivement, que l'on pourrait dire adaptées à X, il n'est pas difficile de donner cette variante, c'est-à-dire la flèche

$$H^p_\Phi(Z, \mathcal{L}^q_Z) \to H^{p-n}_\Theta(S, \mathcal{L}^{q-n}_S),$$

définie pour tout entier $q \geq 0$ et tout entier $p \geq n$.

Appendice

1.- Généralité sur l'intégration

On conserve les notations et hypothèses du Théorème 1. L'integration sur les cycles d'un espace analytique complexe arbitraire repose essentiellement sur la manière dont on globalise, une fois que l'on a localisé sur le graphe de la famille. Cela passe nécessairement par l'utilisation de l'outil essentiel de cette construction qui est l'existence d'un "bon" découpage des classes de cohomologie qui est donné par la

PROPOSITION. *Soient $S \subset X \subset Z$ des sous ensembles analytiques complexes d'un espace analytique complexe Z tels que $\dim S < n$ et $X - S$ soit lisse de dimension pure n. Alors pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur Z, on a :*

1) $H^k_c(V, \mathcal{F}\,|_V) = 0$ *pour tout $k > n - 1$ et tout ouvert V de X.*

2) *Pour tout recouvrement ouvert $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ de X, le morphisme canonique*

$$\bigoplus_{\alpha\in A} H^n_c(V_\alpha, \mathcal{F}\,|_{V_\alpha}) \to H^n_c(X, \mathcal{F}\,|_X)$$

est surjectif.

Dans le langage des faisceaux, cela se traduit par : Soient $\pi : X \to S$ un morphisme surjectif d'espaces analytiques complexes dont les fibres sont de dimension au plus égales à n, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X et $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement ouvert de X. Si l'on désigne par π_α et $\mathcal{F}_\alpha$, les restrictions de π et $\mathcal{F}$ à X_α, alors

$$\bigoplus_{\alpha\in A} R^n\pi_{\alpha\,!}\mathcal{F}_\alpha \to R^n\pi_!\mathcal{F}$$

est surjectif.

La construction des fonctions holomorphes sur l'espace des n - cycles, (cf. [B.V]), consiste fondamentalement à se ramener à la situation locale, c'est-à-dire supposer, dans un premier temps, $Z = U \times B$, avec U et B polydisques relativement compacts de $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^p$ respectivement, ce qui est possible puisque, le problème étant de nature locale sur S, donc au voisinage du cycle donné et plus précisement au voisinage de son support (l'integration sur le cycle ne dépendant que de son support), on peut toujours installer localement le graphe,

X, de la famille, dans un diagramme (cf. Lemme 5)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & S_0 \times U \times B \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ S_0 & \xleftarrow[p']{} & S_0 \times U \end{array}$$

Cela correspond exactement à la donnée d'une écaille S_0-adaptée. On établit le résultat d'integration pour les classes de $H^n_{c\times B}(U \times B, \Omega^n_{U\times B})$, et ce par un calcul en termes de cochaines de Čech (signalons, au passage, que l'ambiguité sur la définition du support d'une cochaîne est levée dans [B.V]). Alors le théorème général se déduit du local, grâce à la proposition ci dessus.

En effet, étant donnés un cycles X_s, de support noté $|X_s|$, et une classe dans $H^n_\Phi(Z, \Omega^n_Z)$, on considère son image naturelle dans $H^n_{\Phi\cap|X_s|}(\mid X_s \mid, \Omega^n_Z \mid_{|X_s|})$. Si l'on suppose Z paracompact et complètement paracompact, l'étendue de la famille Φ est un ouvert paracompact. On peut donc, quitte à intersecter avec le support du cycle, prendre pour Z cette étendue. Dans ce cas, $\Phi\cap \mid X_s \mid = \Phi \mid_{|X_s|}$ est contenue dans la famille des compacts de X, par hypothèse sur les supports des cycles. Il suffit, alors, d'appliquer la proposition poour obtenir un nombre fini de germes, en s, de fonctions holomorphes sur S.

Cette construction s'adapte sans aucune difficulté aux faisceaux Ω^{n+q}_Z et $\mathcal{L}^{n+q}_Z$ pour $q > 0$, il faut simplement établir le résultat local pour les classes de cohomologie dans $H^n_{c\times B\times S}(S \times U \times B, \Omega^{n+q}_{S\times U\times B})$.

L'approche "faisceautique" que nous avons adopté, ici, évite le calcul en termes de cochaines de Čech, en le cachant derrière des manipulations purement fonctorielles ou conceptuelles. En effet le morphisme trace globale du Lemme 6, qui est une conséquence presqu'immédiate du Lemme 5 (qui est le théorème local) et de l'existence de ce bon découpage, ne fait référence à aucun calcul "čechiste".

Signalons que, par construction, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^n_\Phi(Z, \Omega^{n+q}_Z) & \longrightarrow & H^n_{S-propre}(X, \Omega^{n+q}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n_c(\mid X_s \mid, \Omega^{n+q}_Z \mid_{|X_s|}) & \longleftarrow & \Gamma(S, R^n\pi_!\Omega^{n+q}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{L}^q_S(s) & \longleftarrow & \Gamma(S, \mathcal{L}^q_S) \end{array}$$

dans lequel, les flèches sont les restrictions naturelles et un morphisme latétral de suite spectrale évoqué dans le Lemme 6.

2.- Optimalité du Théorème 1

On va montrer que l'image du morphisme d'intégration du Théorème 1 ne peut être strictement contenue dans le groupe $\Gamma(S, \mathcal{L}^q_S)$. Pour S normal, on convient de noter $\bar{\Omega}^q_S$, le faisceau puissance extérieure q-ème du faisceau $\bar{\Omega}^1_S$ du 1.4.

Nous allons construire une famille analytique de 1-cycles d'une hypersurface normale de $\mathbb{C}^4$, paramétrée par une hypersurface normale de $\mathbb{C}^4$, pour laquelle, l'intégration de classes de $H^1_\Phi(Z, \mathcal{L}^2_Z)$ donne des sections de $\mathcal{L}^1_S$ qui ne sont pas sections du faisceau $\bar{\Omega}^1_S$.

a.- Formes de type L^2 qui ne sont pas méromorphes localement bornées

Soit $Z := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 / xy = tz^3\}$, l'hypersurface normale de $\mathbb{C}^4$, dont le lieu singulier, Σ, est la droite $\{x = y = z = 0\}$. On considère la forme méromorphe $\xi := \dfrac{ydx - xdy}{z^2}$. Alors

1) ξ est une section du faisceau ω^1_Z :

En effet, le cup produit, avec la classe fondamentale de Z dans $\mathbb{C}^4$, donne

$$\frac{2xy}{z^2(xy - tz^3)} dx \wedge dy + \frac{\alpha}{(xy - tz^3)}$$

où α est une forme holomorphe sur $\mathbb{C}^4$. La forme, ainsi, obtenue se prolonge en une section du faisceau $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_Z, \Omega^4_{\mathbb{C}^4})$, assurant cette affirmation.

2) ξ définit une section du faisceau $\mathcal{L}^1_Z$:

Il suffit d'éclater le long de l'idéal (x, y, z) et de vérifier que dans chaque carte, l'image réciproque de ξ se prolonge holomorphiquement. C'est un calcul qui ne présente aucune difficulté.

En fait, on peut montrer que $\omega^3_Z = \mathcal{L}^3_Z$. En effet, comme Z est Gorenstein, le faisceau dualisant ω^3_Z est localement libre. Il suffit, alors, de considérer le générateur, de ce dualisant, donné par $\dfrac{dx \wedge dy \wedge dz}{z^3}$ et de vérifier qu'il se relève en une forme holomophe dans une désingularisation donnée, ce qui se fait assez aisément (on en déduit, après quelques petits calculs que $\omega^i_Z = \mathcal{L}^i_Z$ pour tout $0 \leq i \leq 3$).

3) ξ n'est pas une section du faisceau $\bar{\Omega}^1_Z$:

Remarquons que le tangent de Zariski, T^1Z, n'est pas normal puisqu'il est Cohen Macauley avec un lieu singulier de codimension 1 et que, par conséquent, l'inclusion, $\Omega^1_Z \subset \bar{\Omega}^1_Z$, est stricte. Alors, on constate que ξ n'admet pas de prolongement analytique sur Z tout entier. En effet, si tel était le cas, elle serait holomorphe sur $\{(x, y, z)/xy = z^4\}$, mais un raisonnement sur "l'homogéinisée", donnée par le morphisme $\phi : \mathbb{C}^2 \to \{(x, y, z)/xy = z^4\}$, associant à (u, v), (u^2, v^2, uv), montre, clairement, que c'est impossible. Par ailleurs, on peut aussi remarquer, d'après l'équation définissant Z, que l'on a la relation

$$\xi + \frac{2xdy}{z^2} = 3tdz + zdt$$

de laquelle, on en déduit que l'obstruction à l'existence d'une relation de dépendance intégrale réside dans le fait que la forme $\frac{2xdy}{z^2}$ n'est pas méromorphe localement bornée sur T^1Z (plusieurs façons de le voir).

b.- Famille analytique de 1-cycles et intégration

Considérons les sous ensembles analytiques suivants :
$S := \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4 / \alpha\beta = \delta\gamma^3\}$
$X := \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta,x,y,z,t,u) \in S \times Z \times D / x - \alpha u^2 = y - \beta u = z - \gamma u = t - \delta = 0\}$, dans lequel D désigne un disque relativement compact dans $\mathbb{C}$.

Alors, X est le graphe d'une famille de 1- cycles de Z paramétrée par S. Considérons, à présent, une fonction ρ, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D, vérifiant $\int_D \rho du \wedge d\bar{u} = 1$, et la forme $\omega := \dfrac{dx \wedge dy}{z^2}$, qui définit une section du faisceau $\mathcal{L}^2_Z$ (vérification par éclatement). Alors, $\rho\omega \wedge d\bar{u}$ donne, par intégration sur les cycles de cette famille la forme méromorphe $\xi := \dfrac{\beta d\alpha - 2\alpha d\beta}{\gamma^2}$, qui, d'après ce qui précède, ne peut être section du faisceau $\bar{\Omega}^1_S$.

Dans un tout autre registre, signalons, pour terminer, que l'intégration sur les cycles donne un moyen "efficace" de construction de fibré en droites et de diviseurs de Cartier sur l'espace des cycles ([K], [B.M]).

REFERENCES

[A.N] A. Andreotti – F. Norguet, *La convexité holomorphe dans l'espace analytique des cycles d'une variété algébrique*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sc. (4) **21** (1965), 31-82.

[B1] D. Barlet, *Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique réduit*, Sém. F. Norguet-Lecture Notes in Mathematics **482** (1975), 1-158.

[B2] D. Barlet, *Famille analytique de cycles et classe fondamentale relative*, Sém. F. Norguet-Lecture Notes in Mathematics **807** (1980), 1-24.

[B3] D. Barlet, *Faisceau ω_X sur un espace analytique de dimension pure*, Sém. F. Norguet-Lecture Notes in Mathematics **670** (1978), 187-204.

[B4] D. Barlet, *Convexité au voisinage d'un cycle*, Sém. F. Norguet-Lecture Notes in Mathematics **807** (1980), 102-121.

[B.M] D. Barlet – J. Magnusson, *Integration de classes de cohomologie méromorphes et diviseur d'incidence*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **31** (1998), 811-842.

[B.V] D. Barlet – J. Varouchas, *Fonctions holomorphes sur l'espace des cycles*, Bull. Soc. Math. France **117** (1989), 329-341.

[Br] G. E. BREDON, "Sheaf Theory", Graduate texts in mathemetics, Springer Verlag, NewYork, 1997.

[C.W] W. L. CHOW – B. L. VAN DER WAERDEN, *Über zugeordenete Formen in algebraische Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **113** (1937), 692-704.

[F1] H. FLENNER, *Extendability of differential forms on non isolated singularities*, Invent. Math. **94** (1998), 317-326.

[F2] H. FLENNER, *Die sätze von Bertini für lokale Ringe*, Math. Ann. **229** (1977), 97-111.

[Fu. Sc] A. FUJIKI – G. SCHUMACHER, *Moduli of extremal Kähler manifolds*, Publ. Res. Math. Sci., Kyoto University **26** (1990), 101-183.

[G.R] H. GRAUERT – O. RIEMENSCHNEIDER, *Verschwindungssätze für analytische Köhomologiegruppen auf komplexen Raümen*, Invent. Math. **11** (1970), 263-292.

[Gr] G. M. GREUEL, *Dualitätt in der lokalen Köhomologie isolierter Singularitäten*, Math. Ann. **250** (1980), 157-173.

[H1] H. HIRONAKA, *Resolution of singularities of an algebraic variety over field of characteristic zero : I et II*, Ann. Math. **79** (1964), 109-326.

[H2] H. HIRONAKA, *Flattening theorem in complex analytic geometry*, Amer. J. Math. **97** (1975), 503-547.

[K] M. KADDAR, "Construction cohomologiques dans l'espace des cycles", Thèse de doctorat d'université de Nancy I, 1994.

[K1] M. KADDAR, *Intégration partielle sur les cycles*, C.R A.S. **320** série I (1995), 1513-1516.

[K2] M. KADDAR, *Classe fondamentale relative en cohomologie de Deligne et application*, Math. Ann. **306** (1996), 285-322.

[L] J. LIPMAN, "Dualizing sheaves, differentials and residues on algebraic varieties", Asterisque **117**, 1984.

[M.T] M. MERLE – B. TEISSIER, "Conditions d'adjonctions", In : Séminaire sur les singularités des surfaces, Lecture Notes in Math. **777**, (1977), p. 230-245.

[P] V. P. PALAMODOV, *Déformations of complex spaces*, Russian Math. Surveys. **31** (1976), 129-194.

[P.R] C. PATTON – H. ROSSI, *Cohomology on complex homogeneous manifolds with compact subvarieties*, Contemp. Math. **58** Part.1 (1986), Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[P.S] E. PICARD – G. SIMART, "Théorie des fonctions algebriques de deux variables independantes", Chelsea Publ. Company, Bronx New york, 1971.

[R] H. J. REIFFEN, *Riemmansche Hebbarkeitssätze für Kohomologieklassen mit kompactem Träger*, Math. Ann. **164** (1966), 272-279.

[R.R] J. P. RAMIS – G. RUGET, *Complexes dualisants et théorème de dualité en géométrie analytique complexe*, Publ. I.H.E.S. **38** (1970), 77-91.

[Sc] G. SCHUMACHER, *Moduli of polarized Khäler Manifolds*, Math. Ann. **269** (1984), 137-144.

[Sp] A. SZPIRGLAS, *Sur des formes méromorphes localement bornées sur un espace analytique normal*, Preprint de l'université Paris Nord., fasc. 71, 1987.

[S.S] J. STEENBRINCK – D. V. STRATEN, *Extendability of holomorphic differential forms near isolated hypersurface singularities*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **55** (1985), 97-110.

[St] J. H. M. STEENBRINK, *Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology*, In: "Real and Complex singularities" Sijthoffand Noordhoff (1977), 525-563 (Sijthoff and Noordhoff).

[S.Y] STEPHEN S-T. YAU, *Various numerical invariants for isolated singularities*, Amer. J. Math. **104** (1982), 1063-1110.

[Va] J. VAROUCHAS, *Kähler spaces and proper open morphisms*, Math. Ann. **283** (1982), 13-52.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Institut E. Cartan
URA 750 CNRS. B.P 239
54 506 Vandœuvre-Lès-Nancy Cedex
kaddar@antares.iecn.u-nancy.fr