

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

SINNOU DAVID

PATRICE PHILIPPON

Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 28,
n° 3 (1999), p. 489-543

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1999_4_28_3_489_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores

SINNOU DAVID – PATRICE PHILIPPON

Abstract. We extend to the case of torii the study of small points on subvarieties of abelian varieties initiated in a previous work, and which gave an effective proof of the generalized Bogomolov conjecture. We now obtain an effective estimate for the number of « exceptional » points together with a bound for their heights. These are inverse monomial in the degree of the variety and geometric till the last step (which amounts to Lehmer's problem). Similar estimates, but « pluri-exponential » in the degree, were known, due to W. Schmidt and E. Bombieri-U. Zannier. Finally, we show how the conjectural lower bounds (in their weak form) for normalized heights of hypersurfaces can be deduced from the corresponding one for curves in \mathbb{G}_m^2 .

Mathematics Subject Classification (1991): 11G10 (primary), 11J81, 14G40 (secondary).

1. – Introduction

Soient K un corps de nombres, et A une variété abélienne définie sur K , supposée plongée dans un espace projectif. Dans [Da-Phi], nous avons établi l'existence d'une constante c , ne dépendant que de A vue comme variété plongée, telle que toute sous-variété algébrique V de A , définie sur \bar{K} , de hauteur :

$$\hat{h}(V) \leq \frac{c}{d(V)^{\max(2; 2\kappa(V)-1)}},$$

est nécessairement de torsion, i. e. est un translaté d'une sous-variété abélienne de A par un point de torsion. Ci-dessus, $d(V)$ est le degré de V , $\hat{h}(V)$ la hauteur normalisée de V telle qu'elle est définie dans [Ph1]–I, et $\kappa(V)$ est le nombre minimal de copies de $V - V$ dont la somme est une sous-variété abélienne de A : $1 \leq \kappa(V) \leq \dim(A) - \dim(V - V) + 1$. En particulier (voir [Zh2] ou [Da-Phi]), l'ensemble des points de $V(\bar{K})$ de hauteur :

$$\leq \frac{c}{d(V)^{\max(2; 2\kappa(V)-1)} (\dim(V) + 1)}$$

n'est pas Zariski dense dans V . L'objet de ce texte est de transposer dans le cadre des tores et de préciser autant que faire se peut, cette seconde assertion. En effet, si l'on sait grâce à ce type de résultat minorer de façon effective la hauteur normalisée d'une sous-variété algébrique d'un tore ou d'une variété abélienne, l'assertion « n'est pas Zariski dense » reste qualitative. Nous allons donc nous attacher à préciser les points suivants : quel est le degré d'une hypersurface contenant les points exceptionnels ? Peut-on descendre en codimension, et majorer le nombre des points exceptionnels (ou le nombre et le degré des composantes sur lesquelles ces points seraient Zariski denses) ? Peut-on donner une borne pour la hauteur des points exceptionnels qui ne sont pas de torsion ? Nous nous limiterons dans ce texte à étudier les sous-variétés algébriques d'un tore. Dans un tel contexte, ces questions ont été étudiées précédemment par W. Schmidt (voir [Sc2]) ainsi que par E. Bombieri et U. Zannier (voir [Bo-Za1]). Avant de revenir sur ces travaux, précisons quelques notations, et quantifions les questions que l'on peut poser.

La première étape du programme est de minorer aussi précisément que possible la hauteur normalisée d'une sous-variété algébrique de \mathbb{G}_m^g . On peut facilement vérifier que dans ce contexte, il est utile de supposer que V n'est pas un translaté d'un sous-groupe algébrique (ce dernier cas peut se ramener à des versions en dimension supérieure du problème de Lehmer). La question la plus précise que l'on peut poser est alors la suivante (voir [Da-Phi], Problème 1.7) :

CONJECTURE 1.1. Soit g un entier plus grand que 1 ;

- (i) il existe une constante universelle $c > 0$, telle que la propriété suivante soit vérifiée. Pour toute sous-variété algébrique V de $\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_1^g$, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, qui n'est pas un translaté d'un sous-groupe algébrique de \mathbb{G}_m^g ,

$$\hat{h}(V) \geq c$$

(version faible) ;

- (ii) de façon plus optimiste, il existe une constante $c(g) > 0$, ne dépendant que de g telle que sous-les mêmes hypothèses que ci-dessus,

$$\hat{h}(V) \geq c(g)d(V) \frac{s-d-1}{s-d},$$

où $d(V)$ est le degré de V , d est sa dimension et s la dimension du plus petit sous-groupe algébrique de \mathbb{G}_m^g qui contient V .

On pourra noter que le choix du plongement projectif $\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_1^g$ n'est pas impératif pour poser la question ; simplement il faudrait remplacer la constante $c(g)$ par $c(g, \varphi)$, où φ est le plongement considéré (ou par $c(g, \mathcal{L})$ si \mathcal{L} est le fibré hermitien définissant la hauteur canonique lorsqu'on travaille avec un formalisme à la Arakelov). On notera également que dans sa version qualitative, c'est-à-dire la non nullité de $\hat{h}(V)$, cette question, tout au moins dans le cas des hypersurfaces (le cas général s'en déduit par projection), est connu sous le

nom de « problème de Kronecker en plusieurs variables ». Il a d'ailleurs été résolu par Lawton (voir [Law]).

Passons maintenant aux points de $V(\overline{\mathbb{Q}})$, on peut penser à plusieurs séries d'invariants pour quantifier ceux-ci. La première série est dérivée de la notion de minimums essentiel et absolu ; pour $j = 1, \dots, d + 1$ on définit :

$$\mu_j(V) = \sup_Y \inf \{ h(x) ; x \in (V \setminus Y)(\overline{\mathbb{Q}}) \},$$

où le supremum est pris sur tous les sous-ensembles algébriques Y de V , définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de codimension j dans V et h est la hauteur projective. Ainsi, $\mu_1(V) = \mu^{\text{ess}}(V)$ et $\mu_{d+1}(V) = \mu^{\text{abs}}(V)$ dans les notations de [Da-Phi]. On notera encore $\hat{\mu}_j(V)$ les minimums successifs définis comme ci-dessus pour la hauteur normalisée \hat{h} .

Les séries suivantes prennent en compte le fait que V est une sous-variété d'un tore pouvant contenir quelques points de torsion, les autres points étant de grande hauteur. Les points de torsion étant denses dans les sous-variétés de torsion, il est naturel d'exclure ces dernières et d'introduire, pour $j = 1, \dots, d + 1$:

$$\hat{\mu}_j^*(V) = \sup_Y \inf \{ \hat{h}(x) ; x \in (V \setminus Y)(\overline{\mathbb{Q}}) \},$$

où le supremum est cette fois pris sur les sous-ensembles algébriques Y de V , définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$, constitués de sous-variétés de V de codimension j dans V et de sous-variétés de torsion contenues dans V , de codimension $< j$ dans V . En particulier, les $\hat{\mu}_j^*(V)$ minorent les minimums successifs de la hauteur normalisée sur le complémentaire V^* dans V de l'union des sous-variétés de torsion de \mathbb{G}_m^g contenues dans V , et $\hat{\mu}_{d+1}^*(V) = \hat{\mu}^{\text{abs}}(V^*)$.

Comme il est maintenant connu (voir [Sc2], [Bo-Za1] pour le cas des tores et [Da-Phi] pour le cas des variétés abéliennes), le comportement des sous-variétés qui sont translatées de sous-groupes algébriques (mais pas nécessairement de torsion) est spécial et de nature arithmétique, tandis que celui des variétés qui ne sont pas de ce type est de nature géométrique. Ceci nous amène à introduire notre dernière série de minimums successifs ; pour $j = 1, \dots, d$ on pose :

$$\hat{\mu}_j^\circ(V) = \sup_Y \inf \{ \hat{h}(x) ; x \in (V \setminus Y)(\overline{\mathbb{Q}}) \},$$

où le supremum est cette fois pris sur les sous-ensembles algébriques Y de V , définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$, constitués de sous-variétés de V de codimension j dans V et de translatsés de sous-tores (non nécessairement par des points de torsion) contenus dans V , de codimension $< j$ dans V . De même que précédemment, les $\hat{\mu}_j^\circ(V)$ minorent les minimums successifs de la hauteur normalisée sur le complémentaire V° dans V de l'union des translatsés (mais non nécessairement par des points de torsion) de sous-tores de \mathbb{G}_m^g contenus dans V , de dimension ≥ 1 .

L'ouvert V° apparaît déjà dans [Sc2] et [Bo-Za1], remarquons que le minimum de la hauteur normalisée sur V° peut être nul, ce dernier contenant alors

un nombre fini de points de torsion. L'intérêt de V° est que la semi-distance donnée par la hauteur induit une topologie discrète sur les points de $V^\circ(\overline{\mathbb{Q}})$, son inconvénient est qu'il est vide si le stabilisateur de V n'est pas discret. En tout cas, on a $\hat{\mu}_1(V) = \hat{\mu}_1^*(V) = \hat{\mu}_1^\circ(V)$.

Nous pouvons maintenant décrire les résultats que nous obtenons, on suppose toujours $\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_1^g$.

Dans la direction de la Conjecture 1.1, nous obtenons le résultat suivant :

THÉORÈME 1.2. *Soit V une sous-variété algébrique de \mathbb{G}_m^g définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ qui n'est pas translatée d'un sous-groupe algébrique, alors*

$$\hat{h}(V) \geq \frac{1}{2^{41} d(V)^2 \log(d(V) + 1)^2}.$$

On en déduit les théorèmes suivants sur les derniers des minimums successifs introduits précédemment. Pour les minimums intermédiaires, on pourra se reporter aux énoncés plus complets du Paragraphe 5. On se donne une sous-variété algébrique V de \mathbb{G}_m^g définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et on pose

$$q(V) = \left(2^{g+3d+18} \cdot d(V) (\log(d(V) + 1))^{\frac{2}{3}} \right)^{4 \dim(V)}.$$

THÉORÈME 1.3. *Les points $x \in V(\overline{\mathbb{Q}})$ n'appartenant à aucun translaté d'un sous-groupe algébrique de dimension ≥ 1 contenu dans V et tels que*

$$\hat{h}(x) < 1/q(V)^{\frac{3}{4}}$$

sont en nombre fini majoré par $q(V)$.

En suivant la preuve du Théorème 5 de [Sc2] (voir Paragraphe 5 de *loc. cit.*) on déduit du Théorème 1.3 le suivant :

THÉORÈME 1.4. *Soient $\Gamma \subset \mathbb{G}_m(\overline{\mathbb{Q}})^g$ un sous-groupe de type fini de rang $\leq r$ et $a \geq 1$ un réel, alors il existe au plus $q(V)(aq(V))^r$ points $x \in \Gamma \cap V(\overline{\mathbb{Q}})$, n'appartenant à aucun translaté de sous-groupe algébrique contenu dans V et satisfaisant $\hat{h}(x) \leq a$.*

Ces résultats améliorent les Théorèmes 4 et 5 de [Sc2], respectivement.

Dans le cadre de la série $\hat{\mu}^*$, on trouve pour $\hat{\mu}_{d+1}^*$:

THÉORÈME 1.5. *Supposons V définie sur \mathbb{Q} et \mathbb{Q} -irréductible, alors les points $x \in V(\overline{\mathbb{Q}})$ n'appartenant à aucune sous-variété de torsion contenue dans V satisfont*

$$\hat{h}(x) > q_1(V)^{-1} := \left(2^{2g+3d+22} \cdot d(V) \cdot (\log(d(V) + 1))^2 \right)^{-4 \dim(V)+1}.$$

Ce résultat change la nature des bornes connues pour les variétés de grande hauteur. En effet, son analogue (Théorème 3 de [Sc2]) fait intervenir de surcroît

la hauteur de la variété V (sous une forme naïve, à travers un majorant de la hauteur d'un système d'équations de V), alors que nous n'avons besoin que du degré d'un corps de définition. En effet, si W est une sous-variété de \mathbb{G}_m^g , géométriquement irréductible, définie sur un corps de nombres K , on peut lui appliquer le Théorème 1.5 en prenant pour V la réunion des conjugués de W sous l'action de $\text{Gal}(\overline{K}/\mathbb{Q})$. Le degré de V est alors égal à $[K : \mathbb{Q}]d(W)$. Ce dernier résultat fait donc intervenir une borne de nature arithmétique, ce qui est d'ailleurs inévitable (on construit facilement des exemples en prenant un point dans \mathbb{G}_m^g , mais on peut également en construire en dimension supérieure).

Comparons rapidement les constantes numériques obtenues dans les Théorèmes 1.3 et 1.5 à leurs homologues, les Théorèmes 4 et 3 de [Sc2]. A la place de $q(V)$, W. Schmidt obtient⁽¹⁾ :

$$q'(V) \geq \exp \left((4g)^2 \binom{g+d(V)^{1/\dim(V)}}{g} \right).$$

Ainsi, tandis que $q(V)$ est monomiale en $d(V)$ dans notre travail, c'est la quantité $\log(\log(q'(V)))$ qui est monomiale en $d(V)$ dans *loc. cit.*; de même pour la dépendance en g , on vérifie que $\log(\log(q'(V)))$ est de l'ordre de grandeur de $g \log(g)$ tandis que $\log(\log(q(V)))$ est linéaire en g (en majorant $\dim(V)$ par $g-1$). Mais on peut également vérifier que $q(V)$ est toujours plus petit que $q'(V)$. A titre d'exemple, dans le premier cas non trivial, i. e. $g=2$, $d(V) = \dim(V) = 1$, on trouve $q(V) \leq 10^{28}$ mais $q'(V) \geq 10^{10^5}$.

Comparons maintenant les minoration obtenues dans le cadre du Théorème 1.5. Si l'on note M un majorant de la hauteur (exponentielle) d'un système d'équations de V (on supposera pour l'instant V définie sur \mathbb{Q}), on trouve dans *loc. cit.* à la place de $q_1(V)$:

$$q_1'(V) \geq d(V)^{1/\dim(V)} \exp(3M) \binom{g+d(V)^{1/\dim(V)}}{g}.$$

On voit aisément que la borne de [Sc2] est meilleure que $q_1(V)$ tant que M est assez petit. Toutefois, en raison de la définition naïve de la hauteur qui intervient ci-dessus, la descente d'un corps de nombres K à \mathbb{Q} est très couteuse et il faut remplacer M par $[K : \mathbb{Q}]! M^{[K:\mathbb{Q}]^2}$ (alors que l'on s'attendrait à $M^{[K:\mathbb{Q}]}$). Enfin, W. Schmidt montre qu'en utilisant des méthodes de crible, la dépendance en M peut être rendue monomiale, mais dans ce cas, la dépendance en le degré redevient exponentielle.

Signalons également que même si les constantes numériques ne sont pas fournies dans [Bo-Za1], on vérifie, après calcul, qu'elles feraient intervenir environ g exponentielles itérées à la place de $q(V)$.

⁽¹⁾Dans [Sc2], le degré de V intervient sous une forme plus naïve : c'est un majorant du degré d'un système d'équations qui est utilisé.

Enfin, en généralisant la méthode de Dobrowolski, F. Amoroso et le premier auteur ont obtenu (voir [Am-Da2]) :

$$\hat{h}(V) \geq c(n) \frac{\log(\log(d(V) + 1))^{2+1/(n-s)}}{\log(d(V) + 1)^{1+2/(n-s)}},$$

où s est la dimension du stabilisateur de V , si V est une hypersurface, définie sur \mathbb{Q} et \mathbb{Q} -irréductible qui n'est pas un sous-groupe algébrique; une minoration analogue sans restriction sur la codimension, mais avec un exposant en n^{n^2} découle de [Am-Da1]. En tenant compte des lemmes de projections du Paragraphe 2.2, on déduit de la minoration précédente :

$$\hat{h}(V) \geq c(n) \frac{\log(\log(d(V) + 1))^{5/2}}{\log(d(V) + 1)^2},$$

si V est définie sur \mathbb{Q} , est \mathbb{Q} -irréductible et n'est pas un translaté d'un sous-groupe algébrique. On voit donc que cette minoration est meilleure que celle du Théorème 1.2 en le degré, mais fait intervenir le degré d'un corps de définition de V et n'est donc pas géométrique contrairement à notre résultat.

De plus, si l'on utilise cette minoration au lieu du Théorème 1.2 pour déduire le Théorème 1.5, on peut améliorer la dépendance en $d(V)$ de la quantité $q_1(V)$.

Les preuves de [Sc2] et [Bo-Za1] reposent toutes les deux sur le fait que le morphisme de Frobenius se relève en caractéristique zéro en un endomorphisme du tore (l'élévation à la puissance p), ou en un langage plus élémentaire sur les congruences liées au petit théorème de Fermat. De tels arguments donnent assez facilement la non nullité de la hauteur normalisée de la variété V étudiée (ou une estimation du « minimum essentiel » de la hauteur des points algébriques de V), mais a l'inconvénient de ne pas être géométrique (les bornes obtenues dépendent du degré d'un corps de définition de V). Pour éliminer cette dépendance, ces auteurs utilisent ensuite la méthode dite des « variétés déterminant ». Cette approche a deux inconvénients : elle n'est pas à l'heure actuelle transposable aux variétés abéliennes (sauf dans le cas de multiplication complexe (voir [Bo-Za2])), et elle donne des estimations qui font intervenir plusieurs exponentielles itérées du degré de V . Parmi les autres approches antérieures, celles de Lawton, Boyd, ne donnent pas de bonnes estimations et semblent difficilement adaptables aux variétés abéliennes. Les approches plus modernes qui, elles, sont très générales (équidistribution Szpiro, Ullmo, Zhang, Bilu) restent pour l'instant encore qualitatives.

Après une étude des hauteurs normalisées sur les tores (Paragraphe 2), nous montrons le Théorème 1.2 au Paragraphe 3. Notre stratégie reprend et affine celle adoptée dans [Da-Phi]. Tout d'abord, nous commençons par montrer que le minimum de la hauteur normalisée d'une sous-variété algébrique de \mathbb{G}_m^g est

atteint pour les courbes planes; plus précisément, nous montrons :

THÉORÈME 1.6. *Soit V une sous-variété de $\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_1^g$ définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, qui n'est pas un translaté d'un sous-groupe algébrique de \mathbb{G}_m^g . Alors, il existe une courbe $X \subset \mathbb{G}_m^2 \hookrightarrow \mathbb{P}_1^2$ définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, qui n'est pas un translaté d'un sous-groupe algébrique de \mathbb{G}_m^2 , telle que $d(X) \leq d(V)$ et $\hat{h}(X) \leq \hat{h}(V)$.*

C'est cette réduction qui permet de supposer $X - X = \mathbb{G}_m^2$, ce qui nous donne une meilleure estimation en le degré (bien que cette dernière soit encore loin d'être optimale si on la compare à la Conjecture 1.1) et de se débarrasser de la dépendance en g , obtenant ainsi une constante *universelle* dans le Théorème 1.2. Toutefois, elle s'inspire de l'approche introduite dans [Ph1]–III, et par suite, ne peut s'appliquer que lorsque le groupe algébrique est un produit de groupes de dimension 1 (i. e. tore ou produit de courbes elliptiques).

Dans le cas des courbes planes, on suit la stratégie adoptée dans [Da-Phi] (inspirée de celle de Ullmo, voir [Ul], et Zhang, voir [Zh3]). On introduit le morphisme :

$$s : X^2 \longmapsto W \\ (x, y) \longmapsto (x, y - x) ;$$

puis, une construction de transcendance permet de tirer profit de la dimension exceptionnelle de la fibre spéciale de la deuxième projection au dessus de 0; ceci conduit au Théorème 1.2.

On établit ensuite (Paragraphe 4) une minoration explicite pour la fonction de Hilbert arithmétique. Cette dernière comporte un terme principal plus faible que celui donné par exemple dans [Ab-Bo], mais comporte un terme reste explicite. Cette minoration permet de quantifier le degré d'une hypersurface de V contenant tous les points *exceptionnels* (i. e. de hauteur $< \mu^{\text{ess}}(V)$) de V , tout en restant monomial en le degré de V . Une descente (Paragraphe 5) permet alors de conclure et conduit au Théorème 1.3, puis, en appliquant le résultat de E. Dobrowolski sur le problème de Lehmer, on obtient le Théorème 1.5 et enfin on reprend les arguments de [Sc2] pour établir le Théorème 1.4.

Enfin, nous montrons le « lemme de Thue-Siegel absolu », utilisé au Paragraphe 4, en appendice (Paragraphe 6).

2. – Hauteurs normalisées

Nous allons établir ici des comparaisons quantitatives entre la hauteur projective d'une sous-variété algébrique d'un tore et la hauteur normalisée correspondante. Dans le cas des points, il s'agit là d'estimations bien connues : en effet, pour les points dans un tore, les deux notions coïncident⁽²⁾. Dans le cas

⁽²⁾Tout au moins si les métriques à l'infini sont bien choisies.

des variétés de dimension supérieure, ces questions ont été traitées dans [Ph1]–I, Paragraphe 3 (dans le cas des variétés abéliennes) ou dans [Zh2] (dans le cas général) par exemple, mais sans expliciter les constantes de comparaisons numériques. Nous reprenons ici le formalisme (et la démarche) adopté dans [Ph1]–I, pour définir la notion de hauteur normalisée et comparer cette dernière à la notion de hauteur projective pour les sous-variétés algébriques de \mathbb{G}_m^g définies sur un corps de nombres. Cette notion dépendant d'un plongement projectif de \mathbb{G}_m^g , nous nous restreindrons aux deux compactifications qui nous semblent les plus naturelles de \mathbb{G}_m^g , à savoir \mathbb{P}_1^g et \mathbb{P}_g . Toutes les comparaisons de hauteurs seront données avec des constantes *numériques*. Toutefois, les preuves étant très similaires, nous nous permettrons, pour éviter trop de redites, de reprendre ici ou là des pans de preuves de [Ph1]–I, III pour certains lemmes intermédiaires; que les lecteurs préférant un texte plus « auto-explicite » veuillent bien nous excuser.

2.1. – Les propriétés principales

Pour $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \overline{\mathbb{Q}}^m$, on notera $h_W(\mathbf{a})$ la hauteur de Weil (logarithmique et absolue) de \mathbf{a} dans \mathbb{P}^{m-1} (avec la norme du sup pour les places à l'infini). En particulier, si P est un polynôme ou M une matrice, $h_W(P)$ (resp. $h_W(M)$) sera la hauteur du point défini par les coefficients de P (resp. de M). En revanche, nous noterons $\bar{h}_W(P)$ (resp. $\bar{h}_W(M)$) la hauteur du point défini par 1 et les coefficients de P (resp. de M).

Soit F un polynôme à coefficients algébriques; nous appellerons *hauteur de Gauss-Mahler* de F , notée h_{GM} , la hauteur logarithmique obtenue par sommation des logarithmes de la norme de Gauss aux places ultramétriques et de la mesure de Mahler aux places archimédiennes. La *longueur* d'un polynôme F , notée $\lambda(F)$ sera la somme des modules des coefficients non nuls de F (lorsque la valeur absolue sous-jacente ne sera pas évidente à partir du contexte, cette dernière sera précisée en indice).

La hauteur projective, notée $h(V)$ d'une sous-variété V définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de \mathbb{P}_N est celle définie dans [Ph1]–III. Elle diffère de celle utilisée dans [Ph1]–I d'un terme positif majoré par $\sum_{i=1}^N \frac{1}{2i} \deg(V)$. Rappelons que si I est un idéal homogène de rang $N+1-r$, de $\overline{\mathbb{Q}}[X_0, \dots, X_N]$ (par exemple l'idéal de définition de V) et $f_I \in \overline{\mathbb{Q}}[1]$ est une forme résultante d'indice $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in (\mathbb{N}^*)^r$ de I (on dira encore forme de Chow si I est premier), on note $h(I)$ la hauteur de f_I définie par la formule $\sum_v \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} \log M_v(f_I)$ où K est un corps de définition de I et M_v désigne la norme de Gauss aux places ultramétriques et la mesure suivante aux places archimédiennes :

$$(1) \quad \log M_v(f_I) := \int_{S_{N+1}^r} \log |f_I(\mathbf{b})| \cdot \sigma_{N+1}^r(\mathbf{b}) + r d(I) \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{2i}$$

où S_{N+1} désigne la sphère unité de \mathbb{C}^{N+1} munie de sa mesure invariante σ_{N+1} de masse totale 1. Le degré $d(I)$ de l'idéal I coïncide avec le degré de f_I

par rapport aux variables $u_{i,1}$. Plus généralement, si $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ et si $g \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{d}]$, on définit la hauteur de g comme précédemment en utilisant la mesure suivante aux places archimédiennes :

$$\int_{S_{m_1+1} \times \dots \times S_{m_r+1}} \log |g(\mathbf{b})| \cdot \sigma_{m_1+1} \wedge \dots \wedge \sigma_{m_r+1}(\mathbf{b}) + \sum_{j=1}^r d_{u_j, d_j}^\circ(g) \cdot \sum_{i=1}^{m_j} \frac{1}{2i}$$

où $m_j + 1 = \binom{d_j + N}{N}$. Si g est une forme résultante d'indice \mathbf{d} de I , le degré de g par rapport aux variables u_{i, d_i} est égal à $d_1 \dots d_r \cdot \frac{d(I)}{d_i}$ et $h(g) = d_1 \dots d_r \cdot h(I)$. En particulier, si V est un point $\mathbf{a} \in \mathbb{P}_m(\overline{\mathbb{Q}})$,

$$h(\mathbf{a}) = \sum_v \frac{[k_v : \mathbb{Q}_v]}{[k : \mathbb{Q}]} \log \|\mathbf{a}\|_v,$$

où la sommation porte sur toutes les places v d'un corps de nombres k contenant $\mathbb{Q}(\mathbf{a})$ et où $\|\cdot\|_v$ désigne la norme du sup sur k_v^{m+1} si v est finie, et la norme euclidienne si v est archimédienne.

Soit g un entier ≥ 1 . On va considérer les deux compactifications naturelles de \mathbb{G}_m^g suivantes :

$$\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow (\mathbb{P}_1)^g \xrightarrow{\text{Segre}} \mathbb{P}_{2g-1}.$$

et

$$\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_g.$$

On désignera par ι l'un ou l'autre de ces plongements ; si V est une sous-variété algébrique de \mathbb{G}_m^g définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, on notera $d_\iota(V)$ et $h_\iota(V)$ le degré et la hauteur projective de l'adhérence de Zariski de V dans \mathbb{P}_n (avec $n = 2^g - 1$, respectivement $n = g$) relativement au plongement ι , et on désignera avec un chapeau les hauteurs normalisées correspondantes :

$$\hat{h}_\iota(V) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h_\iota([m]V)d_\iota(V)}{m d_\iota([m]V)}.$$

L'existence de la limite suit facilement des arguments utilisés pour établir le Corollaire 7 de [Ph1]–I, modulo les lemmes que nous allons établir au Paragraphe 2.2.

On dispose de toutes les propriétés attendues des hauteurs normalisées :

PROPOSITION 2.1. *Soient V une sous-variété algébrique de \mathbb{G}_m^g définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, et S_V son stabilisateur. Les hauteurs normalisées \hat{h}_ι satisfont :*

- (i) $\hat{h}_\iota([m]V) = \frac{m^{\dim(V)+1} \cdot \hat{h}_\iota(V)}{|\ker[m] \cap S_V|}$ et $d_\iota([m]V) = \frac{m^{\dim(V)} \cdot d_\iota(V)}{|\ker[m] \cap S_V|}$ où S_V désigne le stabilisateur de V ;
- (ii) $\hat{h}_\iota([m]^{-1}V) = m^{g-\dim(V)-1} \cdot \hat{h}_\iota(V)$ et $d_\iota([m]^{-1}V) = m^{g-\dim(V)} \cdot d_\iota(V)$;
- (iii) $\hat{h}_\iota(\xi \cdot V) = \hat{h}_\iota(V)$ et $d_\iota(\xi \cdot V) = d_\iota(V)$ pour tout point de torsion $\xi \in \mathbb{G}_m^g$;

- (iv) $\hat{h}_l(V) = 0$ si et seulement si V est une sous-variété de torsion de \mathbb{G}_m^g (i. e. V est translatée d'un sous-tore par un point de torsion) ;
- (v) $|\hat{h}_l(V) - h_l(V)| \leq c_0(l)(\dim(V) + 1) \cdot d_l(V)$;
- (vi) si V est réduite à un point $(x_1, \dots, x_g) \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^g$ alors :
 - si $\iota : \mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_1^g$ on a $\hat{h}_l(V) = \bar{h}_W(x_1) + \dots + \bar{h}_W(x_g)$;
 - si $\iota : \mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_g$ on a $\hat{h}_l(V) = \bar{h}_W(x_1, \dots, x_g)$;
- (vii) si V est une hypersurface de \mathbb{G}_m^g définie par un polynôme $Q \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_g]$ alors $\hat{h}_l(V)$ est la hauteur de Gauss-Mahler du polynôme Q si $\iota : \mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_g$ et $g!$ fois cette hauteur si $\iota : \mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_1^g$

Les points (i) et (v) caractérisent \hat{h}_l , de même les points (ii), (iii), (v) et l'additivité sur les cycles caractérisent \hat{h}_l .

Les points (i), (ii), (iii) et (v) seront établis au Paragraphe 2.2 suivant et des constantes $c_0(l)$ seront explicitées :

$$(2) \quad c_0(\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_1^g) = \frac{7}{2} \cdot g \log(2) \text{ et } c_0(\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_g) = \frac{7}{2} \cdot \log(g + 1).$$

On notera que le point (i) résulte de (ii) et (iii), le point (iv) est déjà connu (voir introduction pour plus de précisions) ; il résulte également du Théorème 1.2 (dont la preuve n'utilise pas cette propriété), où une minoration explicite de la hauteur normalisée d'une sous-variété non de torsion est établie.

Si \hat{h} est une application associant à toute sous-variété algébrique de \mathbb{G}_m^g un nombre ≥ 0 et satisfait les points (i) et (v), on dispose d'après (v), de l'inégalité :

$$|\hat{h}_l([m]V) - \hat{h}'([m]V)| \leq 2c_0(l) \cdot (\dim(V) + 1) \cdot d_l([m]V),$$

d'où avec (i) :

$$|\hat{h}_l(V) - \hat{h}'(V)| \leq 2c_0(l)(\dim(V) + 1) \cdot d_l(V)/m$$

et $\hat{h}' = \hat{h}_l$ en faisant tendre m vers l'infini. Finalement, pour vérifier les points (vi) et (vii) il suffit de remarquer que les expressions données satisfont les points (i) et (v) ou (ii), (iii) et (v) de la proposition.

Enfin, il est utile de noter que les hauteurs normalisées relatives aux deux plongements précités sont comparables ; plus précisément, montrons :

PROPOSITION 2.2. Soit V une sous-variété algébrique de \mathbb{G}_m^g définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, on a :

$$\hat{h}_{\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_g}(V) \leq \hat{h}_{\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_1^g}(V) \leq g^{\dim(V)+1} \cdot \hat{h}_{\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_g}(V).$$

DÉMONSTRATION. Considérons le plongement de V dans $\mathbb{P}_{2g-1} \times \mathbb{P}_g$ obtenu en combinant les plongements dans chacun des facteurs et, pour $\delta \in \mathbb{N}^*$,

$1 \leq i \leq \dim(V) + 1$, considérons les formes résultantes $f_{d_i(\delta)}$ et $f_{d_{i+1}(\delta)}$ d'indices $d_i(\delta)$ et $d_{i+1}(\delta) \in (\mathbb{N}^2)^{\dim(V)+1}$ respectivement, où pour $j = 1, \dots, \dim(V) + 2$ on a posé

$$d_j(\delta) := (d_{j,1}(\delta), \dots, d_{j,\dim(V)+1}(\delta))$$

avec :

$$\begin{cases} d_{j,\ell}(\delta) = (1, 0) & \text{si } \ell = 1, \dots, j - 1, \\ d_{j,\ell}(\delta) = (0, \delta) & \text{si } \ell = j, \dots, \dim(V) + 1, \end{cases}$$

(on consultera [Re], Chapitre 3, pour la définition et les propriétés de ces formes résultantes; les notations dans le cas projectif sont rappelées au Paragraphe 4.1). On remarquera en particulier que $d_1(\delta) = (0, \delta)^{\dim(V)+1}$ et correspond donc au plongement de V dans \mathbb{P}_g ; par contre, $d_{\dim(V)+2}(\delta) = (1, 0)^{\dim(V)+1}$ correspond à V vue dans \mathbb{P}_{2g-1} . La preuve de la proposition va se faire en comparant les hauteurs de ces deux formes « extrémales », les autres servant à les relier.

Avec ces notations, on a, par la formule de Poisson :

$$\frac{f_{d_{i+1}(\delta)}}{f_{d_i(\delta)}} = \prod_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \frac{\sum_{\mathcal{I} \subset \{1, \dots, g\}} u_{\mathcal{I}} \prod_{j \in \mathcal{I}} x_j}{\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{g+1} \\ |\alpha| = \delta}} v_{\alpha} x_1^{\alpha_1} \dots x_g^{\alpha_g}}$$

où $\mathcal{X} = V \cap \{U_1 = \dots = \widehat{U}_i = \dots = U_{\dim(V)+1} = 0\}$ est assimilé à un sous-ensemble de \mathbb{G}_m^g . On remarque que $d_{U_i}^{\circ}(f_{d_{i+1}(\delta)}) = d_{V_i}^{\circ}(f_{d_i(\delta)}) = \text{card } \mathcal{X}$ et on vérifie alors que les mesures locales de $\frac{f_{d_{i+1}(g)}}{f_{d_i(g)}}$ et $\frac{f_{d_{i+1}(1)}}{f_{d_i(1)}}$ satisfont (en prenant $\delta = g$, respectivement $\delta = 1$) :

$$\begin{aligned} \frac{M_v(f_{d_{i+1}(g)})}{M_v(f_{d_i(g)})} &\leq 1 \\ \frac{M_v(f_{d_{i+1}(1)})}{M_v(f_{d_i(1)})} &\geq 1, \end{aligned}$$

pour toute place ultramétrique v d'un corps de définition K de V , et :

$$\begin{aligned} \frac{M_v(f_{d_{i+1}(g)})}{M_v(f_{d_i(g)})} &\leq \exp \left(\left(\sum_{j=1}^{2g-1} \frac{1}{2^j} - \sum_{j=1}^g \frac{1}{2^j} \right) \cdot d_{V_i}^{\circ}(f_{d_i(g)}) \right) \leq 1 \\ \frac{M_v(f_{d_{i+1}(1)})}{M_v(f_{d_i(1)})} &\geq \exp \left(\left(\sum_{j=1}^{2g-1} \frac{1}{2^j} - \sum_{j=1}^g \frac{1}{2^j} \right) \cdot d_{V_i}^{\circ}(f_{d_i(1)}) \right) \geq 1, \end{aligned}$$

pour $i = 1, \dots, \dim(V) + 1$ et toute place archimédienne v , car $g + 1 \leq 2^g \leq \binom{2g}{g}$. On en déduit en prenant le produit sur $i = 1, \dots, \dim(V) + 1$ les inégalités suivantes :

$$\frac{M_v(f_{d_{\dim(V)+2(g)}})}{M_v(f_{d_1(g)})} \leq 1, \quad \frac{M_v(f_{d_{\dim(V)+2(1)}})}{M_v(f_{d_1(1)})} \geq 1.$$

En reportant ces inégalités dans la formule définissant la hauteur projective (voir [Re] et la formule analogue (1) pour le cas projectif), on vérifie :

$$h(f_{d_{\dim(V)+2(g)}}) \leq h(f_{d_1(g)}), \quad h(f_{d_{\dim(V)+2(1)}}) \geq h(f_{d_1(1)}).$$

Mais, $f_{d_{\dim(V)+2(g)}} = \tilde{f}_{d_{\dim(V)+2(1)}}$ et, par définition,

$$h(f_{d_{\dim(V)+2(1)}}) = h_{\mathbb{P}_{2^g-1}}(V) = h_{\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_1^g}(V)$$

tandis que l'on a :

$$h(f_{d_1(g)}) = g^{\dim(V)+1} \cdot h(f_{d_1(1)}) = g^{\dim(V)+1} \cdot h_{\mathbb{P}_g}(V) = g^{\dim(V)+1} \cdot h_{\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_g}(V).$$

On en tire donc les inégalités :

$$h_{\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_1^g}(V) \leq g^{\dim(V)+1} \cdot h_{\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_g}(V) \text{ et } h_{\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_1^g}(V) \geq h_{\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_g}(V),$$

pour toute sous-variété $V \subset \mathbb{G}_m^g$. Appliquant ces inégalités à $[m]V$, la Proposition 2.2 s'en déduit en remarquant que :

$$\hat{h}_i(V) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h_i([m]V) \cdot |\ker[m] \cap S_V|}{m^{\dim(V)+1}}.$$

où S_V est le stabilisateur de V dans \mathbb{G}_m^g . □

Comme corollaire de la Proposition 2.2, on notera qu'il suffit d'établir le point (iv) de la Proposition 2.1 (et plus précisément une minoration de la hauteur normalisée) pour l'un des plongements ι ; il se déduit alors de la Proposition 2.2 pour l'autre.

2.2. – Les lemmes principaux

On fixe et désigne par $\iota : \mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ (où $N = 2^g - 1$ ou g selon le cas) l'un des plongements décrits au paragraphe précédent (Paragraphe 2.1). Pour simplifier les notations, nous abrègerons en d , h et \hat{h} le degré d_i et les hauteurs h_i , \hat{h}_i des sous-variétés algébriques de \mathbb{G}_m^g .

Les formules de multiplication par un entier m sur \mathbb{G}_m^g sont données par :

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_g) \longmapsto (x_1^m, \dots, x_g^m).$$

Les formules de translation par un point $\mathbf{y} \in \mathbb{G}_m^g$ sont données par :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1 \cdot y_1, \dots, x_g \cdot y_g);$$

en particulier, les translations par les points de torsion sont représentées par des

multiplications des variables par des racines de l'unité. On en déduit :

LEMME 2.3. Soit $G_t^{(m)}$ le système de formes représentant la multiplication par m induit par les formules ci-dessus ; on a les inégalités :

$$\begin{cases} \frac{\|G_t^{(m)}(\mathbf{x})\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v^m} = 1, & \text{si } v \nmid \infty, \\ e^{-c_1(t)m} \leq \frac{\|G_t^{(m)}(\mathbf{x})\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v^m} \leq 1 & \text{si } v \mid \infty. \end{cases}$$

où $c_1(\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_1^g) = \frac{g}{2} \log(2)$ et $c_1(\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_g) = \frac{1}{2} \log(g + 1)$. Rappelons que la norme $\|\cdot\|_v$ est la norme du sup si $v \nmid \infty$ et la norme euclidienne sinon.

Pour tout point ξ de torsion et toute sous-variété algébrique V de \mathbb{G}_m^g définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, on a $d_t(\xi \cdot V) = d_t(V)$ et $h_t(\xi \cdot V) = h_t(V)$.

DÉMONSTRATION. La première partie de l'énoncé est une simple estimation des quantités $\prod_{i=1}^g (1 + |x_i|_v^{2m}) / (1 + |x_i|_v^2)^m$ ou $(1 + \sum_{i=1}^g |x_i|_v^{2m}) / (1 + \sum_{i=1}^g |x_i|_v^2)^m$ selon les cas. Une forme résultante de $\xi \cdot V$ est déduite d'une forme résultante de V en multipliant les variables par des racines de l'unité, ce qui ne change ni son degré, ni sa hauteur, d'où la deuxième partie de l'énoncé et le Lemme 2.3. \square

Les lemmes qui suivent permettent de contrôler la variation de la hauteur projective par image inverse et directe de la multiplication par un entier.

LEMME 2.4. Pour toute sous-variété algébrique V de \mathbb{G}_m^g , de dimension $r - 1$, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, et tout entier $m \geq 0$, on a $d(V) = \frac{d([m]^{-1}V)}{m^{g-r+1}}$ et :

$$\left| h(V) - \frac{h([m]^{-1}V)}{m^{g-r}} \right| \leq 7mr c_1(t) \cdot d(V).$$

DÉMONSTRATION (analogue à celle du Lemme 5 de [Ph1]–I). Il suffit de remplacer la constante numérique C'_S de ce lemme par sa valeur numérique $c_1(t)$ obtenue dans le Lemme 2.3. \square

LEMME 2.5. Sous les hypothèses du Lemme 2.4, on a :

$$\left| h([m]V) - \frac{m^r h(V)}{|\ker[m] \cap S_V|} \right| \leq 7r c_1(t) \frac{m^r d(V)}{|\ker[m] \cap S_V|}.$$

DÉMONSTRATION (analogue à celle du Lemme 6 de *loc. cit.*). On fait ici le calcul pour améliorer la valeur de C''_S de cette référence. On applique le Lemme 2.4 à $W = [m]V$. L'identité

$$[m]^{-1}W = \bigcup_{\xi \in \ker[m] / \ker[m] \cap S_V} (\xi \cdot V)$$

et le Lemme 2.4 donnent :

$$d(W) = \sum_{\xi \in \ker[m] / \ker[m] \cap S_V} \frac{d(\xi \cdot V)}{m^{g-r+1}} = \frac{m^{r-1}d(V)}{|\ker[m] \cap S_V|}$$

et :

$$\left| h(W) - \sum_{\xi \in \ker[m] / \ker[m] \cap S_V} \frac{h(\xi \cdot V)}{m^{g-r}} \right| \leq 7mr c_1(\iota) \cdot d(W).$$

Puis, la dernière assertion du Lemme 2.3 conduit à :

$$\sum_{\xi \in \ker[m] / \ker[m] \cap S_V} \frac{h(\xi \cdot V)}{m^{g-r}} = \frac{m^r h(V)}{|\ker[m] \cap S_V|},$$

d'où le résultat en reportant dans l'inégalité ci-dessus. □

DÉMONSTRATION DES POINTS (i), (ii), (iii) ET (v) DE LA PROPOSITION 2.1. L'existence de la limite définissant $\hat{h}(V)$ et les points (i) et (ii) se démontrent en reprenant la preuve du Corollaire 7 et de la Proposition 9 de [Ph1]–I où on substitue le Lemme 2.5 au Lemme 8 de cette référence. En particulier on a l'analogie de la formule (**) de [Ph1]–I :

$$(3) \quad \left| \frac{h([mm']V) |\ker[mm'] \cap S_V|}{(mm')^r} - \frac{h([m']V) |\ker[m'] \cap S_V|}{m'^r} \right| \leq 7r c_1(\iota) \frac{d(V)}{m'}.$$

Le point (iii) résulte de l'application du procédé de normalisation à V et $\xi \cdot V$ en notant que $[m]V = [m](\xi \cdot V)$ si m est multiple de l'ordre de ξ . Le point (v) découle de l'inégalité (3) en y posant $m' = 1$ et en faisant tendre m vers l'infini. La valeur numérique de $c_0(\iota)$ s'en déduit directement : $c_0(\iota) = 7c_1(\iota)$. □

Passons au plongement « enroulé » de [Ph1]–III; rappelons que ce dernier permet par une technique de passage à la limite de se débarrasser des constantes de comparaison entre hauteurs projectives et hauteurs normalisées. Pour raffiner les estimations, nous introduisons ici le plongement « étiré » défini par :

$$\begin{aligned} \varphi_m : \mathbb{G}_m^g &\hookrightarrow (\mathbb{G}_m^g)^2 \xrightarrow{\iota^2} (\mathbb{P}_N)^2 \xrightarrow{\text{Segre}} \mathbb{P}_{N^2+2N} \\ x &\longmapsto (x, [m]x). \end{aligned}$$

On notera h_φ (respectivement \hat{h}_φ) la hauteur relative au plongement $\varphi = \varphi_m$ (respectivement la hauteur normalisée). Nous reprenons ici les Propositions 7 et

9 de *loc. cit.* pour φ :

PROPOSITION 2.6. *Soit V une sous-variété algébrique de \mathbb{G}_m^g , définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Alors, pour tout entier m strictement positif, avec les notations précisées ci-dessus : $d_\varphi(V) = (m + 1)^{\dim(V)}d(V)$; de plus,*

$$0 \leq (m + 1)^{\dim(V)+1}h(V) - h_\varphi(V) \leq c_1(l)(\dim(V) + 1)(m + 1)^{\dim(V)+1}d(V).$$

En particulier, on a $\hat{h}_\varphi(V) = (m + 1)^{\dim(V)+1}\hat{h}(V)$.

DÉMONSTRATION. Nous suivons la preuve de la Proposition 7 de [Ph1]–III. On obtient une forme de Chow de $\varphi(V)$ en spécialisant dans une forme éliminante de V , d'indice $(m + 1, \dots, m + 1)$, les formes génériques de degré $m + 1$ en des combinaisons linéaires générales des $X_i G_j^m(X)$ (qui sont images inverses par φ_m des coordonnées de \mathbb{P}_{N^2+2N}). Le résultat s'en déduit en estimant les mesures de telles formes linéaires à l'aide du Lemme 2.3. \square

LEMME 2.7. *Soit V une sous-variété algébrique de \mathbb{G}_m^g , définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Alors, pour tout entier l strictement positif, on a :*

$$\left| h_\varphi(V) - \frac{h_\varphi([l]^{-1}V)}{l^{g-\dim(V)-1}} \right| \leq 14c_1(l)ld_\varphi(V).$$

De plus, pour tout point ξ de l torsion de \mathbb{G}_m^g , on a $h_\varphi(V) = h_\varphi(\xi \cdot V)$.

DÉMONSTRATION. Nous suivons la preuve du Lemme 8 de [Ph1]–III. Pour les translations par les points de m -torsion, on remarque qu'elles agissent sur le second facteur par l'identité et sur le premier par les transformations décrites dans la preuve du Lemme 2.3, l'égalité des hauteurs en résulte de la même façon que dans le Lemme 8 de [Ph1]–III.

Pour l'inégalité, on se ramène au cas où V est de dimension 0 (voir Lemme 5 de [Ph1]–I). Dans ce cas, la différence $\Delta = l^g h_\varphi(V) - l h_\varphi([l]^{-1}V)$ est égale à :

$$\Delta = \sum_{\mathbf{x} \in [l]^{-1}(V)} \sum_v \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log M_v \left(\frac{\sum_{0 \leq i, j \leq N} u_{i,j} G_i^{(l)}(\mathbf{x}) G_j^{(lm)}(\mathbf{x})}{\left(\sum_{0 \leq i, j \leq N} u_{i,j} x_i G_j^{(m)}(\mathbf{x}) \right)^l} \right).$$

La mesure M_v s'applique aux variables $u_{i,j}$, on calcule donc :

$$\Delta = \sum_{\mathbf{x} \in [l]^{-1}(V)} \sum_v \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \left(\frac{\|G^{(l)}(\mathbf{x})\|_v \|G^{(lm)}(\mathbf{x})\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v^l \|G^{(m)}(\mathbf{x})\|_v^l} \right),$$

le résultat suit alors du Lemme 2.3. \square

PROPOSITION 2.8. *Soit V une sous-variété algébrique de \mathbb{G}_m^g , définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Alors :*

$$\left| \hat{h}_\varphi(V) - h_\varphi(V) \right| \leq 2c_0(\iota)(\dim(V) + 1)d_\varphi(V).$$

DÉMONSTRATION. On se reportera à la preuve de la Proposition 9 de [Ph1]–III, en y substituant au Lemme 8 de *loc. cit.* le Lemme 2.7 ci-dessus. \square

2.3. – Lemmes de projections

Les lemmes suivants montrent que degré et hauteur normalisée décroissent dans certaines projections ; on s’y place dans le plongement $\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_1^g$ où les projections considérées apparaissent de façon plus naturelle.

LEMME 2.9. *Soit V une sous-variété de $\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_1^g$, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, de dimension d . Pour tout choix de $d + 1$ facteurs \mathbb{P}_1 tels que la projection W de V sur \mathbb{P}_1^{d+1} (par oubli des autres facteurs) soit une hypersurface de \mathbb{P}_1^{d+1} , on a $d(W) \leq d(V)$ et $\hat{h}(W) \leq \hat{h}(V)$.*

Si de plus V n’est pas un translaté d’un sous-groupe algébrique de \mathbb{G}_m^g , il existe $d + 1$ facteurs \mathbb{P}_1 de \mathbb{P}_1^g tels que la projection W de V sur \mathbb{P}_1^{d+1} soit une hypersurface et ne soit pas un translaté d’un sous-groupe algébrique de \mathbb{G}_m^{d+1} .

DÉMONSTRATION. Le fait qu’il existe une projection sur $d + 1$ facteurs qui soit une hypersurface est élémentaire. Nous allons commencer par vérifier que si V n’est pas un translaté d’un sous-groupe algébrique, il existe une telle projection qui ne soit pas non plus un translaté de sous-groupe algébrique. Comme il existe au moins un produit de d facteurs \mathbb{P}_1 sur lequel V se projette surjectivement, quitte à réindexer ces facteurs on peut supposer que V se projette surjectivement sur les d premiers ; supposons maintenant que la projection de V sur le produit des d premiers facteurs et de n’importe quel autre $(d + 1)$ -ième facteur est un translaté d’un sous-groupe algébrique de \mathbb{G}_m^{d+1} de codimension 1. On en déduit que pour $i = d + 1, \dots, g$, il existe des entiers $a_0^{(i)}, \dots, a_d^{(i)} \in \mathbb{Z}$ tels que pour tous points $x, x' \in V$ on ait :

$$\prod_{j=1}^d \left(\frac{x'_j}{x_j} \right)^{a_j^{(i)}} = \left(\frac{x'_i}{x_i} \right)^{a_0^{(i)}}.$$

Mais, ces équations définissent un sous-ensemble algébrique de dimension d , contenant V , dont toutes les composantes sont des translatées de sous-groupes algébriques. On en déduit que V est un translaté d’un sous-groupe algébrique contrairement à l’hypothèse du lemme.

Ainsi, lorsque V n’est pas un translaté d’un sous-groupe algébrique, il existe bien une projection linéaire de \mathbb{P}_1^g sur \mathbb{P}_1^{d+1} telle que l’image W de V par cette projection soit une hypersurface de \mathbb{P}_1^{d+1} et ne soit pas translatée d’un

sous-groupe algébrique. Il nous reste donc à établir les inégalités annoncées sur le degré et la hauteur.

On sait que le degré et la hauteur projective décroissent par projection linéaire standard, d'où $d(W) \leq d(V)$. De même, si m est un entier ≥ 1 , et si $\varphi = \varphi_m$ désigne le plongement étiré correspondant, on a (en tenant compte des Propositions 2.6 et 2.8) :

$$\begin{aligned} \hat{h}(W) &= \frac{\hat{h}_\varphi(W)}{(m+1)^{d+1}} \leq \frac{h_\varphi(W)}{(m+1)^{d+1}} + \frac{2c_0(\iota)(d+1)d(W)}{(m+1)} \\ &\leq \frac{h_\varphi(V)}{(m+1)^{d+1}} + \frac{2c_0(\iota)(d+1)d(V)}{(m+1)} \\ &\leq \frac{\hat{h}_\varphi(V)}{(m+1)^{d+1}} + \frac{4c_0(\iota)(d+1)d(V)}{(m+1)} \\ &\leq \hat{h}(V) + \frac{4c_0(\iota)(d+1)d(V)}{m+1}. \end{aligned}$$

En faisant tendre m vers l'infini, on obtient bien $\hat{h}(W) \leq \hat{h}(V)$; le Lemme 2.9 est donc entièrement établi. \square

En vertu du Lemme 2.9, on peut remarquer que pour minorer la hauteur normalisée d'une sous-variété algébrique définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de \mathbb{G}_m^g , il suffit de minorer la hauteur d'une hypersurface. Le lemme suivant montre qu'on peut de surcroît supposer que son stabilisateur est discret.

LEMME 2.10. *Soient V une hypersurface de $\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_1^g$, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et h la dimension de $H = S_V^0$. Alors il existe une sous variété $W \subset \mathbb{P}_1^{g-h}$ satisfaisant $\dim(W) = g - 1 - h$, $d(W) \leq d(V)$ et $\hat{h}_{\mathbb{G}_m^g}(V) = \hat{h}_{\mathbb{G}_m^{g-h}}(W)$, telle que le stabilisateur de W soit discret. De plus, il existe une isogénie ψ de \mathbb{G}_m^{g-h} vers \mathbb{G}_m^g/H telle que $\psi(W) = V$ et W est définie sur le même corps de nombres que V .*

DÉMONSTRATION. Soit $2i\pi \cdot (\ell_1, \dots, \ell_g) \in (2i\pi)^g \cap T_{H(\mathbb{C})}$ de sorte que

$$(x^{\ell_1}, \dots, x^{\ell_g}) \in H(\mathbb{C})$$

pour tout $x \in \mathbb{C}^*$. Si $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_g]$ est une équation de V , écrivons

$$P(x^{\ell_1}, x^{\ell_2}u_2, \dots, x^{\ell_g}u_g) = Q(x, u_2, \dots, u_g).$$

Ainsi, si $Q(x, u_2, \dots, u_g) = 0$ alors, le point $(x^{\ell_1}, x^{\ell_2}u_2, \dots, x^{\ell_g}u_g)$ appartient à V et, comme H est contenu dans le stabilisateur de V on a $(y^{\ell_1}, y^{\ell_2}u_2, \dots, y^{\ell_g}u_g) \in V$ pour tout $y \in \mathbb{C}^*$. On en déduit que le polynôme Q ne dépend pas de la variable x ; son lieu des zéros W' est donc de la forme $W' = \mathbb{G}_m \times W_1$ où W_1 est une hypersurface de \mathbb{G}_m^{g-1} .

Considérons maintenant le morphisme :

$$\begin{aligned} \psi_1 : \quad \mathbb{G}_m^g &\longrightarrow \mathbb{G}_m^g \\ (u_1, \dots, u_g) &\longmapsto (u_1^{\ell_1}, u_1^{\ell_2} u_2, \dots, u_1^{\ell_g} u_g) ; \end{aligned}$$

ψ_1 est une isogénie de \mathbb{G}_m^g (de degré ℓ_1) envoyant W' sur V . La hauteur de Gauss-Mahler de Q étant égale à celle de P (les coefficients de Q et de P étant égaux, la norme de Gauss des deux polynômes est égale et, aux places archimédiennes, on vérifie que le changement de variables considéré laisse la mesure de Mahler invariante), on en déduit que $\hat{h}_{\mathbb{G}_m^g}(V) = \hat{h}_{\mathbb{G}_m^{g-1}}(\bar{W}_1)$. Pour le degré, on a, par construction, $d_{u_i}^\circ(Q) = d_{x_i}^\circ(P)$ si $i \geq 2$. On a donc bien $d(W_1) \leq d(V)$. De plus, la dimension du stabilisateur de W_1 est $h - 1$.

Par récurrence sur h , on peut ainsi construire une hypersurface W de \mathbb{G}_m^{g-h} , telle que $\hat{h}_{\mathbb{G}_m^g}(V) = \hat{h}_{\mathbb{G}_m^{g-h}}(W)$, et $d(W) \leq d(V)$, de stabilisateur discret. Enfin, par construction, la composée des isogénies ψ_i induit par passage au quotient une isogénie ψ de \mathbb{G}_m^{g-h} vers \mathbb{G}_m^g/H , et l'image de W par cette dernière est V/H . Le Lemme 2.10 est donc entièrement établi. \square

3. – Minoration des hauteurs normalisées

Nous allons ici établir les Théorèmes 1.6 et 1.2. Dans tout ce paragraphe, nous désignerons par G le groupe multiplicatif \mathbb{G}_m^g , et nous fixerons $\bar{G} = \mathbb{P}_1^g$ comme compactification de \mathbb{G}_m^g ; on supposera alors \bar{G} plongée comme sous-variété projective d'un espace projectif \mathbb{P}_N via le plongement de Segre ($N = 2^g - 1$).

3.1. – Réduction au cas des courbes planes

Soient g, d, D des entiers strictement positifs, tels que $g > d \geq 1$. Nous allons montrer que le minimum de la hauteur normalisée d'une sous-variété V de \mathbb{G}_m^g , définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$, qui n'est pas un translaté d'un sous-groupe algébrique de \mathbb{G}_m^g , est atteint pour les courbes dans \mathbb{G}_m^2 de ce type. Dans ce contexte, introduisons les nombres :

$$\eta_0(g, d, D) = \min_V \{ \hat{h}(V) \},$$

où le minimum est pris sur toutes les sous-variétés algébriques de $\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_1^g$ définies sur $\bar{\mathbb{Q}}$, de dimension d , degré $\leq D$ et dont le stabilisateur est de dimension 0. De façon similaire, introduisons le nombre :

$$\eta(g, d, D) = \min_V \{ \hat{h}(V) \},$$

où le minimum est pris sur toutes les sous-variétés algébriques de $\mathbb{G}_m^g \hookrightarrow \mathbb{P}_1^g$ définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$, de dimension d et degré $\leq D$, qui ne sont pas translatées de sous-groupes algébriques.

Avec ces notations, le Théorème 1.6 se traduit par :

$$\eta(g, d, D) \geq \eta(2, 1, D)$$

pour tout $g, d, D \in \mathbb{N}^*$, $g > d \geq 1$. Sa preuve repose sur la combinaison des lemmes de projections du paragraphe précédent (Paragraphe 2.3) et de l'énoncé ci-dessous :

PROPOSITION 3.1. *Pour tout triplet d'entiers (g, d, D) , $g > d > 1$, $D \geq 1$, on a :*

$$\eta_0(g, d, D) \geq \eta_0(g - 1, d - 1, D).$$

DÉMONSTRATION. Soit V une sous-variété algébrique de \mathbb{G}_m^g , de dimension $d > 1$, degré D , définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et dont le stabilisateur est de dimension 0. Quitte à permuter les facteurs de \mathbb{P}_1^g on suppose que V se projette surjectivement sur le premier facteur, et l'on note π cette projection linéaire. On remarque alors qu'au plus un nombre fini des fibres $V_x := V \cap \pi^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{P}_1$, ont un stabilisateur de dimension > 0 dans \mathbb{G}_m^{g-1} . En effet, si S_{V_x} désigne le stabilisateur de V_x , on a par Bézout (géométrique) $d(S_{V_x}) \leq d(V_x)^{\dim(V_x)+1} \leq d(V)^{\dim(V)}$. Mais, il n'y a qu'un nombre fini de sous-groupes de \mathbb{G}_m^g de degré au plus $d(V)^{\dim(V)}$. Donc, si une infinité de fibres avaient un stabilisateur de dimension > 0 , il existerait un sous-groupe H de dimension > 0 de \mathbb{G}_m^g et un ensemble infini $I \subset \mathbb{P}_1$ tel que $S_{V_x} = H$ pour tout $x \in I$. Le groupe H stabiliserait alors $\bigcup_{x \in I} V_x$ et donc stabiliserait aussi son adhérence de Zariski $\overline{\bigcup_{x \in I} V_x}$ qui n'est autre que V ; une contradiction.

On fixe alors un entier $m \in \mathbb{N}^*$ assez grand tel que presque toutes les fibres (i. e. toutes sauf au plus un nombre borné indépendamment de m) au-dessus des points de m -torsion aient un stabilisateur de dimension 0. En particulier, pour presque tout point $\xi \in \mathbb{G}_m$ de m -torsion, on a : $\hat{h}(V_\xi) \geq \eta_0(g - 1, d - 1, D)$.

Écrivons le théorème de Bézout arithmétique dans le plongement étiré $\varphi = \varphi_m$ (confer Paragraphe 2.2). La réunion des fibres $\pi^{-1}(\xi)$ où ξ parcourt les points de m -torsion de \mathbb{G}_m^g est définie dans $\varphi(\mathbb{G}_m^g)$ par une forme linéaire F à coefficients dans \mathbb{Z} , de longueur ≤ 2 (si X_i, Y_i, X'_i, Y'_i sont les coordonnées du plongement étiré $\mathbb{P}_1^g \times \mathbb{P}_1^g$ alors F est simplement la forme $X'_i - Y'_i$), on a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{\xi^m=1} h(\varphi(V_\xi)) &\leq h(\varphi(V)) \cdot \mathcal{Z}(F) \\ &\leq h(\varphi(V)) + d(\varphi(V))h_{\varphi(V)}(\mathcal{Z}(F)) \leq h(\varphi(V)) + d(\varphi(V)) \log(2). \end{aligned}$$

En utilisant les Propositions 2.8 et 2.6, on en déduit :

$$\begin{aligned}
 \sum_{\xi^m=1} \hat{h}(\varphi(V_\xi)) &\leq \sum_{\xi^m=1} h(\varphi(V_\xi)) + 2c_0(\iota) d \cdot \sum_{\xi^m=1} d(\varphi(V_\xi)) \\
 &\leq h(\varphi(V)) + d(\varphi(V)) \cdot \log(2) + 2c_0(\iota) d \cdot \sum_{\xi^m=1} d(\varphi(V_\xi)) \\
 &\leq \hat{h}(\varphi(V)) + (2c_0(\iota)(d+1) + \log(2)) \cdot d(\varphi(V)) + 2c_0(\iota) d \cdot \sum_{\xi^m=1} d(\varphi(V_\xi)) \\
 &\leq (m+1)^{d+1} \cdot \hat{h}(V) + (m+1)^d \cdot (2c_0(\iota)(2d+1) + \log(2)) \cdot d(V).
 \end{aligned}$$

En divisant l'inégalité obtenue par $(m+1)^{d+1}$ et en faisant tendre m vers l'infini on trouve :

$$\hat{h}(V) \geq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} \sum_{\xi^m=1} \hat{h}(V_\xi) \geq \eta_0(g-1, d-1, D)$$

car $\sum_{\xi^m=1} \hat{h}(\varphi(V_\xi)) = (m+1)^d \sum_{\xi^m=1} \hat{h}(V_\xi)$ par la Proposition 2.6, puis, en faisant varier V :

$$\eta_0(g, d, D) \geq \eta_0(g-1, d-1, D),$$

ce qui prouve la Proposition 3.1. □

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.6. Le Lemme 2.9 nous assure que :

$$\eta(g, d, D) \geq \eta(d+1, d, D),$$

et le Lemme 2.10 nous donne :

$$\eta(d+1, d, D) \geq \min_{0 \leq h \leq d-1} \eta_0(d+1-h, d-h, D).$$

Finalement, la Proposition 3.1 donne :

$$\min_{0 \leq h \leq d-1} \eta_0(d+1-h, d-h, D) = \eta_0(2, 1, D).$$

La combinaison de ces trois inégalités donne bien le Théorème 1.6. □

3.2. – Un lemme de volume

Nous donnons dans ce sous-paragraphe une version explicite du « lemme de volume » (voir [Da-Phi], Lemme 4.3 pour la version abélienne).

Considérons l’isomorphisme :

$$s : G^2 \longrightarrow G^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x, x^{-1} \cdot y).$$

Soit V une sous-variété de G ; on pose $W = s(V^2) \subset G^2$, $d = \dim(V)$ et on considère G^2 plongé dans \mathbb{P}_N^2 . Soient maintenant $0 < r \leq 1$ un nombre réel, $B(r)$ l’image par l’application exponentielle de la boule de rayon r centrée à l’origine dans \mathbb{C} , $\Omega_{\mathbb{P}_N}$ la forme de Fubini-Study sur \mathbb{P}_N , S_V le stabilisateur de V dans G et Ω la forme de Fubini-Study sur \mathbb{P}_1^g . On note, comme c’est l’usage, $d = \partial + \bar{\partial}$ et $d^c = \left(\frac{i}{4\pi}\right) (\bar{\partial} - \partial)$; en particulier, $dd^c = \frac{-1}{2i\pi} \partial\bar{\partial}$. Avec ces notations, Ω s’écrit donc : $\Omega(x) = \sum_{j=1}^g dd^c \log(1 + |x_j|^2)$ dans G .

LEMME 3.2. Soient $m_0, m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq m_0$ et $r = 1/m_0$. Pour toute variété projective $Z \subset \bar{G}$ de dimension d , contenant l’origine de G , on a :

$$\int_{Z \cap B(r)^g} [m]^* \Omega^{\wedge d} \geq \left(\frac{mr}{10}\right)^d.$$

DÉMONSTRATION. Considérons tout d’abord le cas $m = m_0$; on écrit :

$$\Omega \circ \exp_G(mz) = \sum_{j=1}^g dd^c \log(1 + |e^{mz_j}|^2) = \frac{-m^2}{2i\pi} \cdot \sum_{j=1}^g \frac{dz_j \wedge d\bar{z}_j}{(|e^{z_j}|^m + |e^{z_j}|^{-m})^2},$$

d’où, en posant $\omega = -\sum_{j=1}^g \frac{dz_j \wedge d\bar{z}_j}{2i}$,

$$(\exp_G \circ [m])^* \Omega \geq \frac{m^2}{(e^{mr} + e^{-mr})^2} \cdot \frac{\omega}{\pi}$$

si $|z_j| \leq r$ pour tout j (rappelons que $r \leq 1$). Comme $\exp_G^{-1}(Z)$ contient l’origine, on a : $\int_{\exp_G^{-1}(Z \cap B(r)^g)} \omega^{\wedge d} \geq \pi^d \cdot r^{2d}$ (voir par exemple [Gr-Ha], pages 390-391), et puisque par hypothèse $mr = 1$, on en déduit :

$$\int_{Z \cap B(r)^g} [m]^* \Omega^{\wedge d} \geq \frac{(mr)^{2d}}{(e + e^{-1})^{2d}} \geq 10^{-d}.$$

Dans le cas général, nous allons montrer :

$$(4) \quad \int_{Z \cap B(r)^g} [m]^* \Omega^{\wedge d} \geq \left(\frac{m}{m_0}\right)^d \cdot \int_{Z \cap B(r)^g} [m_0]^* \Omega^{\wedge d} ;$$

en combinant avec ce qui précède, on en déduira bien :

$$\int_{Z \cap B(r)^g} [m]^* \Omega^{\wedge d} \geq \left(\frac{m}{m_0}\right)^d \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^d = \left(\frac{mr}{10}\right)^d,$$

ce qui nous donnera le Lemme 3.2.

Pour montrer l'inégalité (4), écrivons la formule de Stokes :

$$\begin{aligned} \int_{Z \cap B(r)^g} [m]^* \Omega^{\wedge d} &= \sum_{j=1}^g \int_{Z \cap B(r)^g} dd^c \log(1 + |x_j|^{2m}) \wedge [m]^* \Omega^{\wedge(d-1)} \\ &= \sum_{j=1}^g \int_{Z \cap \mathcal{D}_j} d^c \log(1 + |x_j|^{2m}) \wedge [m]^* \Omega^{\wedge(d-1)}, \end{aligned}$$

où \mathcal{D}_j est le produit de $g-1$ copies de $B(r)$ par le bord $S(r)$ de la copie de $B(r)$ du j -ième facteur. On remarque alors que pour $y = \rho e^{i\theta}$:

$$\frac{1}{m} \cdot d^c \log(1 + |y|^{2m}) = \frac{d^c |y|^2}{|y|^2 (1 + |y|^{-2m})} = \frac{d\theta}{2\pi(1 + \rho^{-2m})}.$$

De plus, lorsque $S(r)$ est orientée positivement $S(r) \cap \{|y| > 1\}$ est parcouru par θ croissant tandis que $S(r) \cap \{|y| < 1\}$ est parcouru par θ décroissant. D'autre part, $m \geq m_0$ et donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \cdot d^c \log(1 + |y|^{2m}) &> \frac{1}{m_0} \cdot d^c \log(1 + |y|^{2m_0}) \quad \text{si } |y| > 1, \\ \frac{1}{m} \cdot d^c \log(1 + |y|^{2m}) &< \frac{1}{m_0} \cdot d^c \log(1 + |y|^{2m_0}) \quad \text{si } |y| < 1, \end{aligned}$$

et par suite,

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \int_{Z \cap \mathcal{D}_j} d^c \log(1 + |x_j|^{2m}) \wedge [m]^* \Omega^{\wedge(d-1)} \\ \geq \frac{1}{m_0} \int_{Z \cap \mathcal{D}_j} d^c \log(1 + |x_j|^{2m_0}) \wedge [m]^* \Omega^{\wedge(d-1)}, \end{aligned}$$

car $[m]^* \Omega^{\wedge(d-1)}$ est positive.

Reportant dans l'égalité ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{Z \cap B(r)^g} [m]^* \Omega^{\wedge d} &= \sum_{j=1}^g \int_{Z \cap \mathcal{D}_j} d^c \log(1 + |x_j|^{2m}) \wedge [m]^* \Omega^{\wedge(d-1)} \\ &\geq \frac{m}{m_0} \cdot \sum_{j=1}^g \int_{Z \cap \mathcal{D}_j} d^c \log(1 + |x_j|^{2m_0}) \wedge [m]^* \Omega^{\wedge(d-1)} \\ &\geq \frac{m}{m_0} \cdot \int_{Z \cap B(r)^g} [m_0]^* \Omega \wedge [m]^* \Omega^{\wedge(d-1)}. \end{aligned}$$

Itérant l'argument pour les autres facteurs $[m]^*\Omega$ de la forme volume, et remarquant que les facteurs complémentaires $[m_0]^*\Omega^\alpha \wedge [m]^*\Omega^\beta$, $\alpha + \beta = d - 1$ apparaissant, sont des formes positives, on obtient :

$$\int_{Z \cap B(r)^g} [m]^*\Omega^{\wedge d} \geq \left(\frac{m}{m_0}\right)^d \cdot \int_{Z \cap B(r)^g} [m_0]^*\Omega^{\wedge d}$$

ce qui montre l'inégalité (4), et donc le Lemme 3.2. □

PROPOSITION 3.3. Soient $m_0, m \in \mathbb{N}^*$, tels que $m \geq m_0$ et $r = 1/m_0$; alors, avec les notations introduites au début du paragraphe, on a :

$$\int_{W \cap (G \times B(r)^g)} [m]^*\Omega_{\mathbb{P}_1^g \times \mathbb{P}_1^g}^{\wedge 2d} \geq d(V) \cdot \left(\frac{m^2 r}{10}\right)^d .$$

DÉMONSTRATION. On a :

$$\int_{W \cap (G \times B(r)^g)} [m]^*\Omega_{\mathbb{P}_1^g \times \mathbb{P}_1^g}^{\wedge 2d} \geq \int_{W \cap (G \times B(r)^g)} [m]^*\Omega^{\wedge d}(x) \wedge [m]^*\Omega^{\wedge d}(y)$$

car $\Omega_{\mathbb{P}_1^g \times \mathbb{P}_1^g}(x, y) = \Omega(x) + \Omega(y)$ et les formes $[m]^*\Omega^{\wedge \alpha}(x) \wedge [m]^*\Omega^{\wedge \beta}(y)$ sont toutes positives ; de plus :

$$\begin{aligned} \int_{W \cap (G \times B(r)^g)} [m]^*\Omega^{\wedge d}(x) \wedge [m]^*\Omega^{\wedge d}(y) &= \int_V \left(\int_{(x^{-1}V) \cap B(r)^g} [m]^*\Omega^{\wedge d}(y) \right) [m]^*\Omega^{\wedge d}(x) \\ &\geq \left(\frac{mr}{10}\right)^d \cdot \int_V [m]^*\Omega^{\wedge d} \\ &\geq d(V) \cdot \left(\frac{m^2 r}{10}\right)^d , \end{aligned}$$

car d'après le Lemme 3.2 on a : $\int_{(x^{-1}V) \cap B(r)^g} [m]^*\Omega^{\wedge d} \geq \left(\frac{mr}{10}\right)^d$ pour tout x et, d'après la formule de Wirtinger :

$$\begin{aligned} \int_V [m]^*\Omega^{\wedge d} &= |\ker[m] \cap S_V| \cdot \int_{[m]V} \Omega^{\wedge d} \\ &= |\ker[m] \cap S_V| \cdot d([m]V) = m^d d(V) . \end{aligned}$$

La Proposition 3.3 est donc établie. □

Passons au plongement « étiré » :

$$\begin{aligned} \varphi_m : G &\hookrightarrow G^2 \xhookrightarrow{i^2} \mathbb{P}_N^2 \xhookrightarrow{\text{Segre}} \mathbb{P}_{N^2+2N} \\ x &\longmapsto (x, [m]x) . \end{aligned}$$

Nous posons $N' = N^2 + 2N$ et désignons d'un indice m les images dans ce plongement φ_m des objets considérés précédemment ($G_m, V_m, H_m, W_m, B_m(2r), \dots$).

On déduit de la Proposition 3.3 :

COROLLAIRE 3.4. Soient $0 < r \leq 1$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \geq [\frac{1}{r}]$, alors :

$$\int_{W_m \cap (G_m \times B_m(r)^g)} \Omega_{(\mathbb{P}_1^g)^2 \times (\mathbb{P}_1^g)^2}^{\wedge 2d} \geq d(V) \cdot \left(\frac{m^2 r}{10} \right)^d.$$

DÉMONSTRATION. Comme $\varphi_m^* \Omega_{(\mathbb{P}_1^g)^2 \times (\mathbb{P}_1^g)^2} = \Omega_{\mathbb{P}_1^g \times \mathbb{P}_1^g} + [m]^* \Omega_{\mathbb{P}_1^g \times \mathbb{P}_1^g}$, on a :

$$\int_{W_m \cap (G_m \times B_m(r)^g)} \Omega_{(\mathbb{P}_1^g)^2 \times (\mathbb{P}_1^g)^2}^{\wedge 2d} \geq \int_{W \cap (G \times B(r)^g)} [m]^* \Omega_{\mathbb{P}_1^g \times \mathbb{P}_1^g}^{\wedge 2d},$$

et donc, grâce à la Proposition 3.3 :

$$\int_{W_m \cap (G_m \times B_m(r)^g)} \Omega_{(\mathbb{P}_1^g)^2 \times (\mathbb{P}_1^g)^2}^{\wedge 2d} \geq d(V) \cdot \left(\frac{m^2 r}{10} \right)^d,$$

ce qui est bien l'inégalité voulue. \square

3.3. – Le cas des courbes planes

On pose $G = \mathbb{G}_m^2$, et l'on supposera dans tout ce sous-paragraphe que X est une courbe géométriquement irréductible dans $\overline{G} = \mathbb{P}_1^2 \hookrightarrow \mathbb{P}_3$, définie sur un corps de nombres K , qui n'est pas un translaté d'un sous-groupe algébrique de \mathbb{G}_m^2 . On plonge G^2 dans \mathbb{P}_{15} par le plongement de Segre $\mathbb{P}_3^2 \hookrightarrow \mathbb{P}_{15}$ et on pose $W = s(X^2)$ (où s est l'isomorphisme défini au sous-pragraphe précédent 3.2).

On a, puisque s est un isomorphisme :

$$d(W) = d(X^2) = 2d(X)^2,$$

et comme s (ainsi que son inverse) est représenté dans $\mathbb{P}_1^2 \times \mathbb{P}_1^2$ par des formules bi-homogènes de bi-degrés $(0, 1)$ et $(1, 1)$ on a :

$$\frac{3}{4} \hat{h}(X) d(X) = \frac{1}{8} \hat{h}(X^2) \leq \hat{h}(W) \leq 8 \hat{h}(X^2) = 48 \hat{h}(X) d(X).$$

Soit π la projection linéaire de \mathbb{P}_3^2 sur le second facteur \mathbb{P}_3 ; la restriction de π à W est génériquement finie et l'on remarque que $\pi(W) = \overline{G}$ (car X n'est pas un translaté par un sous-groupe algébrique de \mathbb{G}_m^2). Par contre, la fibre spéciale $W \cap \pi^{-1}(0)$ s'identifie à X et est donc de degré $d(X)$.

Dans la situation précédente, on reprend les plongements étirés φ_m :

$$\begin{aligned} \varphi_m : G^2 &\hookrightarrow G^2 \times G^2 \hookrightarrow (\mathbb{P}_1^2 \times \mathbb{P}_1^2) \times (\mathbb{P}_1^2 \times \mathbb{P}_1^2) \xrightarrow[\text{Segre}]{\hookrightarrow} \mathbb{P}_{255} \\ (x, y) &\longmapsto ((x, y), ([m]x, [m]y)) \end{aligned}$$

où m est un entier ≥ 1 . En particulier, la restriction de φ_m au second facteur de G^2 fournit un plongement :

$$G \hookrightarrow G \times G \hookrightarrow \mathbb{P}_1^2 \times \mathbb{P}_1^2 \hookrightarrow \mathbb{P}_{15}.$$

Nous notons $G_m = \varphi_m(G)$, $W_m = \varphi_m(W)$, ... et à toute place à l'infini v de K/\mathbb{Q} , nous associons un plongement σ_v de K dans \mathbb{C} .

Dans ces conditions, on dispose de la :

PROPOSITION 3.5. *Pour toute courbe X dans \mathbb{P}_1^2 on a :*

$$\hat{h}(X) \geq \frac{1}{2^{41}d(X)^2 \log(d(X) + 1)^2}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\delta \in \mathbb{N}$, $\delta \geq (m + 1)^2 = d(G_m)$; l'espace des formes multi-homogènes de multidegré $(\delta, \delta, \delta, \delta)$ (en 8 variables) ne s'annulant pas identiquement sur G_m vu dans $\mathbb{P}_1^2 \times \mathbb{P}_1^2$ est de dimension $\geq (\delta(m + 1))^2$.

La condition pour une telle forme d'avoir un zéro d'ordre $> T$ en l'origine de G_m s'écrit via un système linéaire de $\binom{T+2}{2}$ équations en ses coefficients. Ces équations sont à coefficients dans \mathbb{Z} ; notons M leur norme L^2 et mettons la contrainte $T < m\delta/4$, on dispose de la majoration :

$$\begin{aligned} M &\leq \sup_{0 \leq t_1, t_2 : t_1 + t_2 \leq T} \left\{ \sum_{0 \leq i, j, k, l \leq \delta} \binom{mi + j}{t_1}^2 \binom{mk + l}{t_2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\delta + 1)^2 \left(\frac{(m + 1)\delta}{[T/2]} \right)^2 \\ &\leq (\delta + 1)^2 \left(\frac{2e\delta(m + 1)}{T} \right)^T. \end{aligned}$$

D'après le lemme de Siegel (voir par exemple [Bo-Va], Théorème 8), et en tenant compte de l'inégalité de Hadamard, il existe donc une forme :

$$q \in \mathbb{Z}[Y_{1,0}, Y_{1,1}, Y_{2,0}, Y_{2,1}, Y_{3,0}, Y_{3,1}, Y_{4,0}, Y_{4,1}]$$

multi-homogène, de multi-degré $(\delta, \delta, \delta, \delta)$, de longueur⁽³⁾ :

$$\begin{aligned} \log \lambda(q) &\leq \frac{\binom{T + 2}{2} \left(T \log \left(\frac{2e\delta(m + 1)}{T} \right) + 2 \log(\delta + 1) \right)}{(\delta(m + 1))^2 - \binom{T + 2}{2}} + 4 \log(\delta + 1) \\ &\leq \frac{T \cdot \log \left(\frac{2e\delta(m + 1)}{T} \right)}{2 \left(\frac{\delta(m + 1)}{T + 2} \right)^2 - 1} + 6 \log(\delta + 1) \end{aligned}$$

qui s'annule à un ordre $\geq T$ en l'origine de G_m .

⁽³⁾Le lemme de Siegel précité majore la hauteur de la forme. Pour obtenir une majoration de sa longueur, on multiplie simplement sa hauteur exponentielle par le nombre maximum de coefficients non nuls, à savoir par la dimension de l'espace des formes de multi-degré $(\delta, \delta, \delta, \delta)$.

Soit v une place archimédienne de K ; notons $F = \sigma_v(q) \circ \varphi_m \circ \exp_G$. Par le lemme de Schwarz, on a donc, pour les rayons $0 < \eta < e\eta$:

$$\log \|F\|_\eta \leq -T + \log \|F\|_{e\eta}$$

où l'on a posé $\|F\|_r = \sup(|F(z)| ; z \in \mathbb{C}^2, \|z\| \leq r)$. Mais, par ailleurs :

$$\|F\|_{e\eta} \leq \lambda(q) \cdot \exp(2\delta(m+1)e\eta).$$

Pour $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{P}_1^4$ où $p_i = (x_i : y_i)$, notons

$$\|\mathbf{p}\|^2 = \prod_{i=1}^4 (|x_i|^2 + |y_i|^2),$$

en particulier pour $\mathbf{p} = \varphi_m \circ \exp_G(z_1, z_2) = (1 : e^{z_1}, 1 : e^{mz_1}, 1 : e^{z_2}, 1 : e^{mz_2})$ on a $\|\mathbf{p}\| \geq 1$. En mettant les deux inégalités ci-dessus ensemble, on obtient :

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{|\sigma_v(q) \circ \varphi_m \circ \exp_G(z)|}{\lambda(q) \cdot \|\varphi_m \circ \exp_G(z)\|^\delta} \right) &\leq \log \left(\frac{\|F\|_\eta}{\lambda(q) \cdot \|\varphi_m \circ \exp_G\|^\delta} \right) \\ &\leq -T + 2\delta(m+1)e\eta, \end{aligned}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}^2$, tel que $\|z\| < \eta$. Calculons maintenant la hauteur relative à W_m de $\pi^*(q)$, en utilisant les hauteurs relatives multi-projectives (voir [Re], Chapitre 3, Paragraphe 4) :

$$\begin{aligned} d(W_m)h_{W_m}(\pi^*q) &= \sum_{|\alpha|=2} \binom{2}{\alpha} d_\alpha(W_m)h_{W_m,\alpha}(\pi^*q) \\ &= \sum_v \frac{n_v}{[K : \mathbb{Q}]} \cdot \sum_{|\alpha|=2} \binom{2}{\alpha} \int_{\sigma_v(W_m)} \log \left(\frac{|\sigma_v(q)(x)|_v}{\|x\|_v^\delta} \right) \cdot \Omega_{W_m,\alpha,v}(x) \\ &\leq \sum_{v|\infty} \frac{n_v}{[K : \mathbb{Q}]} \cdot \sum_{|\alpha|=2} \binom{2}{\alpha} \int_{\sigma_v(W_m)} \log \left(\frac{|\sigma_v(q)(x)|_v}{\|x\|_v^\delta} \right) \cdot \Omega_{W_m,\alpha,v}(x), \end{aligned}$$

où l'on a posé $n_v = [K_v : \mathbb{Q}_v]$ de sorte que : $\sum_{v|\infty} n_v = [K : \mathbb{Q}]$. La forme q étant à coefficients dans \mathbb{Z} on a $\frac{|\sigma_v(q)(x)|_v}{\|x\|_v^\delta} \leq 1$ pour toute place ultramétrique v .

Pour les places archimédiennes on a $\frac{|\sigma_v(q)(x)|_v}{\|x\|_v^\delta} \leq \log \lambda(q)$ et les mesures $\Omega_{W_m, \alpha, v}$ étant positives, on en déduit, en posant $\Omega = \Omega_{\mathbb{P}_1^4 \times \mathbb{P}_1^4} = \sum_{|\alpha|=2} \Omega_{W_m, \alpha, v}$ pour tout $v \mid \infty$:

$$\begin{aligned} d(W_m) (h_{W_m}(\pi^*q) - \log \lambda(q)) &\leq \sum_{v \mid \infty} \frac{n_v}{[K : \mathbb{Q}]} \int_{\sigma_v(W_m)} \log \left(\frac{|\sigma_v(q)(x)|_v}{\lambda(q) \|x\|_v^\delta} \right) \cdot \Omega^{\wedge 2}(x) \\ &\leq -(T - 2\delta(m + 1)\epsilon\eta) \sum_{v \mid \infty} \frac{n_v}{[K : \mathbb{Q}]} \int_{\sigma_v(W_m) \cap \pi^{-1}(B_m(\eta)^2)} \Omega^{\wedge 2} \\ &\leq -(T - 2\delta(m + 1)\epsilon\eta) \frac{m^2\eta \cdot d(X)}{10}, \end{aligned}$$

grâce au Corollaire 3.4.

On applique enfin le théorème de Bézout arithmétique, en tenant compte du théorème de Bézout géométrique :

$$d(W_m \cap \mathcal{Z}(\pi^*q)) = d(W_m) \cdot \delta = 2d(X)^2(m + 1)^2\delta$$

et de l'inégalité triviale $h(W_m \cap \mathcal{Z}(\pi^*q)) \geq 0$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} 48 \cdot \frac{\hat{h}(X)}{d(X)} &\geq \frac{\hat{h}(W)}{d(W)} = \frac{1}{m + 1} \cdot \frac{\hat{h}(W_m)}{d(W_m)} \geq \frac{h(W_m)}{(m + 1)d(W_m)} - \frac{6c_0(\iota)}{m + 1} \\ &\geq \frac{h(W_m \cap \mathcal{Z}(\pi^*q))}{(m + 1)\delta d(W_m)} - \frac{h_{W_m}(\pi^*q)}{(m + 1)\delta} - \frac{6c_0(\iota)}{m + 1} \\ &\geq -\frac{6c_0(\iota)}{m + 1} - \frac{\log \lambda(q)}{(m + 1)\delta} + \frac{(T - 2\delta(m + 1)\epsilon\eta) m^2\eta \cdot d(X)}{10(m + 1)\delta d(W_m)} \\ &\geq \frac{m^2\eta T}{20(m + 1)^3\delta d(X)} - \frac{m^2\epsilon\eta^2}{10(m + 1)^2d(X)} - \frac{\log \lambda(q)}{(m + 1)\delta} - \frac{6c_0(\iota)}{m + 1}. \end{aligned}$$

Choisissons maintenant :

$$\eta = \frac{1}{6400e^2d(X) \log(d(X) + 1)}$$

et

$$T = \left\lceil \frac{m\delta}{1600ed(X) \log(d(X) + 1)} \right\rceil.$$

On en déduit, pour m assez grand :

$$\frac{m^2\eta T}{20(m + 1)^3\delta d(X)} \geq \frac{1}{2^{11} \times e^3 \times 10^5 \times d(X)^3 \log(d(X) + 1)^2} - \epsilon(m),$$

où $\varepsilon(m)$ tend vers 0 lorsque m tend vers l'infini, ainsi que :

$$\frac{m^2 e \eta^2}{10(m+1)^2 d(X)} \leq \frac{1}{2^{12} \times 10^5 \times e^3 d(X)^3 \log(d(X)+1)^2} + \varepsilon(m),$$

et enfin :

$$\frac{\log \lambda(q)}{(m+1)\delta} \leq \frac{1}{2,8 \times 2^{11} \times 10^5 \times e^3 d(X)^3 \log(d(X)+1)^2} + \varepsilon(m)$$

(il faut tenir compte ici des petites valeurs de $d(X)$, la borne asymptotique est bien meilleure). En prenant m assez grand on obtient donc :

$$\hat{h}(X) \geq \frac{1}{3 \times 2^{15} \times 10^6 \times e^3 d(X)^2 \log(d(X)+1)^2},$$

ce qui donne bien la Proposition 3.5. □

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2. La Proposition 3.5 jointe au Théorème 1.6 donne, avec les notations du Paragraphe 3.1 :

$$\eta(g, d, D) \geq \eta(2, 1, D) \geq \frac{1}{2^{41} D^2 \log(D+1)^2}$$

pour tout $g, d, D \in \mathbb{N}^*$, $g > d \geq 1$, ce qu'il fallait démontrer. □

4. – Minoration d'une fonction de Hilbert arithmétique

L'objet de ce paragraphe est d'obtenir une minoration *quantitative* pour la fonction de Hilbert arithmétique. Après avoir introduit les préliminaires d'algèbre commutative (dont une minoration quantitative pour la fonction de Hilbert géométrique) qui nous seront utiles (Paragraphe 4.1), nous étudierons les minimums successifs algébriques d'une variété, obtenant au passage un lemme de « Thue-Siegel absolu » (Paragraphe 4.2). Enfin, nous passons à l'étude de la fonction de Hilbert arithmétique (Paragraphe 4.3).

4.1. – Idéaux sympa

Soient R un anneau commutatif, intègre et noëthérien, K son corps de fractions et $A = R[X_0, \dots, X_n]$. Pour $i = 1, \dots, n+1$ et $\delta \in \mathbb{N}^*$ on introduit des variables $u_{i,\delta} = \{u_m^{(i,\delta)}; m\}$ indépendantes sur A , où m parcourt l'ensemble des monômes (unitaires) en X_0, \dots, X_n de degré δ . On pose $U_{i,\delta} = \sum_m u_m^{(i,\delta)} \cdot m$ qu'on appellera *formes génériques* de degré δ sur A ; lorsque δ vaut 1, on notera, pour alléger, $U_i = U_{i,1}$ et $u_i = u_{i,1}$. Soient $r \in \{0, \dots, n+1\}$ et

$\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$, on note $R[\mathbf{d}]$ (resp. $A[\mathbf{d}]$) l'anneau des polynômes en les variables $u_m^{(i,\delta)}$ à coefficients dans R (resp. A) et $K(\mathbf{d})$ le corps des fractions de $R[\mathbf{d}]$.

Soient I un idéal homogène de rang $n + 1 - r$ de A et $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$, on note A_δ et I_δ le R -module des éléments homogènes de degré δ de A et I respectivement. Rappelons que l'idéal éliminant (*d'indice \mathbf{d}*) de I est défini par la formule (confer [Ph2], Chap. 3)

$$\mathfrak{E}_d I = \bigcup_{\delta \geq 0} (I[\mathbf{d}] :_{R[\mathbf{d}]} A_\delta)$$

où $I[\mathbf{d}]$ est l'idéal de $A[\mathbf{d}]$ engendré par les éléments de I et les formes $U_{1,d_1}, \dots, U_{r,d_r}$. Si R est factoriel et I pur l'idéal $\mathfrak{E}_d I$ est principal et tout générateur est appelé *forme éliminante (d'indice \mathbf{d})* de I .

DÉFINITION 4.1. Soient $D \in \mathbb{N}$ et I un idéal de A de rang $n + 1 - r$.

On dira que I est *sympa en degré D* (ou *D -sympa*) si et seulement si :

$$I[\mathbf{d}] :_{R[\mathbf{d}]} A_{D+d_1+\dots+d_r-r+1} \neq (0)$$

pour tout $\mathbf{d} \in (\mathbb{N}^*)^r$.

On dira que I est *supersympa en degré D* (ou *D -supersympa*) si et seulement si :

$$I[\mathbf{d}] :_{R[\mathbf{d}]} A_{D+d_1+\dots+d_r-r+1} = \mathfrak{E}_d I$$

pour tout $\mathbf{d} \in (\mathbb{N}^*)^r$.

REMARQUE. On pourra que noter que

- (i) un idéal I de $A = K[X_0, \dots, X_n]$ est D -sympa si et seulement si pour tout indice $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^r$, le 0-ième groupe d'homologie de Koszul $H_0(U, A/I) \otimes_K K(\mathbf{u})$ est nul en degré $> D - r$ (avec une graduation *ad hoc*, confer [Ch-Ph]), où U est la famille de formes génériques de degrés respectifs d_1, \dots, d_r et \mathbf{u} la famille de leurs coefficients;
- (ii) il existe un entier M tel que :

$$(5) \quad (\mathfrak{E}_d(I))^M \subset I[\mathbf{d}] :_{R[\mathbf{d}]} A_{D+d_1+\dots+d_r-r+1} \subset \mathfrak{E}_d I$$

si et seulement si $H_0(\mathbf{a}, A/I)$ est nul en degré $> D - r$ pour toute famille \mathbf{a} de r formes de degrés d_1, \dots, d_r respectivement telles que $\dim(A/(I + (\mathbf{a}))) = 0$.

Il serait peut être plus naturel d'appeler « D -supersympa » les idéaux qui vérifient (5) pour tout indice \mathbf{d} .

On notera que $\mathfrak{E}_d I \neq (0)$ et qu'un idéal D -supersympa est *a fortiori* D -sympa. Rappelons qu'un idéal I est dit *parfait* si et seulement si l'anneau A/I est *semi-régulier* (confer [No], Chap. 5.3) ou Cohen–Macaulay (confer [Ei], Chap. 18.2 et Exercice 19.9). Nous supposons dans la suite que R est semi-régulier, ainsi les idéaux engendrés par les suites régulières de A sont parfaits.

Nous rassemblons ci-dessous les premières propriétés des idéaux sympas et supersympa :

PROPOSITION 4.2. (i) *L'idéal (0) est 0-supersympa, plus généralement l'idéal engendré par une suite régulière q_1, \dots, q_s est supersympa en degré $d^\circ q_1 + \dots + d^\circ q_s - s$.*

(ii) *Un idéal parfait D -sympa est D -supersympa.*

(iii) *Soient $I \subset J$ deux idéaux homogènes de A , de même rang ; si I est D -sympa, il en est de même de J .*

(iv) *Si I est un idéal homogène D -sympa (resp. D -supersympa) de rang $n+1-r \leq n$ de A , alors (I, U_r) est un idéal D -sympa (resp. D -supersympa) de rang $n+2-r$ de $A \otimes_R R[\mathbf{u}_r]$.*

(v) *Un idéal I est D -sympa si et seulement si l'idéal J intersection des composantes primaires de I ne rencontrant pas R est D -sympa.*

DÉMONSTRATION. On vérifie classiquement que si q_1, \dots, q_{n+1} est une suite régulière dans $A[\mathbf{d}]$ alors :

$$A_\delta \otimes_{R[\mathbf{d}]} K(\mathbf{d}) = (q_1, \dots, q_{n+1})_\delta \otimes_{R[\mathbf{d}]} K(\mathbf{d})$$

pour tout $\delta \geq d^\circ q_1 + \dots + d^\circ q_{n+1} - n$. Ceci montre que les idéaux considérés sont sympa en degré $d^\circ q_1 + \dots + d^\circ q_{n+1} - n - 1$ (le cas $s = 0$ correspond à celui de l'idéal (0)). L'assertion (i) résulte alors de (ii) que nous démontrons maintenant.

Si I est D -sympa, pour tout $\mathbf{d} \in (\mathbb{N}^*)^r$ il existe $g \in R[\mathbf{d}]$, $g \neq 0$, tel que :

$$g \cdot A_{D+d_1+\dots+d_r-r+1} \subset I[\mathbf{d}].$$

Mais, si I est supposé parfait, l'idéal $I[\mathbf{d}]$ est pur de rang $n+1$ et on déduit de l'inclusion précédente que $A_{D+d_1+\dots+d_r-r+1}$ est contenu dans la composante irrelevante (i. e. (X_0, \dots, X_n) -primaire) de $I[\mathbf{d}]$, ce qui montre (ii).

On a clairement $I[\mathbf{d}] \subset J[\mathbf{d}]$, pour tout \mathbf{d} , ce qui assure (iii).

Comme (I, U_r) est un idéal de rang $n+2-r$, on a $\mathfrak{E}_{(d_1, \dots, d_{r-1})}(I, U_r) = \mathfrak{E}_{\mathbf{d}} I$ et $(I, U_r)[(d_1, \dots, d_{r-1})] = I[\mathbf{d}]$, l'assertion (iv) est donc vérifiée.

Comme $I \subset J$ l'implication directe de (v) suit de (iii) et pour la réciproque, il suffit de remarquer que $g \cdot J[\mathbf{d}] :_{R[\mathbf{d}]} A_\delta \subset I[\mathbf{d}] :_{R[\mathbf{d}]} A_\delta$ pour tout $g \in R \setminus \{0\}$ appartenant à l'intersection des composantes primaires de I rencontrant R , ceci achève de montrer (v) et la Proposition 4.2. \square

On note $d(I)$ le degré et $H_g(I; \delta)$ la fonction de Hilbert géométrique de $I \otimes_R K$, définis par $H_g(I; \delta) = \dim_K (A/I)_\delta \otimes_R K$ et

$$d(I) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} (r-1)! \delta^{1-r} \cdot H_g(I; \delta).$$

Si I est radical, une forme éliminante d'indice \mathbf{d} de $I \otimes_R K$ est de degré $\frac{d(I)}{d_i} \cdot d_1 \dots d_r$ par rapport aux variables \mathbf{u}_{i, d_i} .

Pour les idéaux sympas, on dispose de bonnes minoration de la fonction de Hilbert géométrique :

PROPOSITION 4.3. *Si I est un idéal D -sympa de rang $n + 1 - r \leq n$ de A , alors, pour tout entier $\delta > D$, on a :*

$$H_g(I; \delta) \geq d(I) \cdot \binom{\delta - D + r - 2}{r - 1}.$$

DÉMONSTRATION. Posons $B = A \otimes_K K(\mathbf{1})$; on vérifie aisément que :

$$H_g(I \otimes_K B; \delta) = H_g(I; \delta).$$

Grâce à la Proposition 4.2 point (iii), on peut supposer que I est sans composante irrelevante. En effet, si $J = \cup_{\delta \geq 1} (I :_A A_\delta)$ on a $H_g(I; \delta) \geq H_g(J; \delta)$ et $d(I) = d(J)$. On a alors pour tout $v \in \mathbb{N}^*$ la suite exacte :

$$0 \rightarrow (B/I \otimes_A B)_{v-1} \xrightarrow{\times U_r} (B/I \otimes_A B)_v \rightarrow (B/(I \otimes_A B, U_r))_v \rightarrow 0$$

dont on déduit, en tenant compte de l'invariance de la fonction de Hilbert géométrique par extension des scalaires à B :

$$H_g(I; v) - H_g(I; v - 1) = H_g((I, U_r); v),$$

et l'idéal (I, U_r) de rang $n + 2 - r$ est D -sympa d'après la Proposition 4.2 point (iv). Si $r = 1$ cela signifie $H_g((I, U_r); \delta) = 0$, d'où $H_g(I; \delta - 1) = d(I)$, pour $\delta > D$.

On démontre la proposition pas à pas en faisant varier r de 1 à $n + 1$. Si $r > 1$, on suppose le résultat établi pour les idéaux de rang $n + 2 - r$ d'où :

$$H_g((I, U_r); v) \geq d(I) \cdot \binom{v - D + r - 2}{r - 2}$$

pour $v > D$, car $d(I, U_r) = d(I)$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} H_g(I; \delta) &= H_g(I; D) + \sum_{v=D+1}^{\delta} (H_g(I; v) - H_g(I; v - 1)) \\ &\geq d(I) \cdot \sum_{v=D+1}^{\delta} \binom{v - D + r - 2}{r - 2} \\ &\geq d(I) \cdot \sum_{v=0}^{\delta-D-1} \binom{v + r - 1}{r - 2} = d(I) \cdot \left(\binom{\delta - D + r - 1}{r - 1} - 1 \right), \end{aligned}$$

ce qui montre la Proposition 4.3. \square

On dira que des éléments q_1, \dots, q_s forment une *suite sécante sur A/I* si :

$$\dim(A/(I, q_1, \dots, q_s)) = \dim(A/I) - s,$$

ou de façon équivalente (l'anneau A étant semi-régulier) si

$$\text{rang}((I, q_1, \dots, q_s)) = \text{rang}(I) + s.$$

Les deux énoncés qui suivent décrivent le comportement de la sympathie par intersection, puis par image inverse :

PROPOSITION 4.4. *Soit I un idéal de rang $n + 1 - r$ de A , si I est supersympa en degré D alors pour toute suite sécante q_1, \dots, q_s sur A/I l'idéal (I, q_1, \dots, q_s) est sympa en degré $D + d^\circ q_1 + \dots + d^\circ q_s - s$.*

Si, de plus, I et (I, q_1, \dots, q_s) sont purs, radicaux, sans premier associé rencontrant R et si q_1, \dots, q_s est une suite régulière sur A/I , alors l'idéal (I, q_1, \dots, q_s) est supersympa en degré $D + d^\circ q_1 + \dots + d^\circ q_s - s$.

DÉMONSTRATION. On remarque que, d'après le théorème de l'élimination (confer [Ph2], Chap. 3.2), l'idéal (I, q_1, \dots, q_s) étant de rang $n + 1 - r + s$, on a $\rho(\mathfrak{E}_d I) \neq (0)$, où ρ désigne la spécialisation de $U_{r-s+1, d^\circ q_1}, \dots, U_{r, d^\circ q_s}$ sur q_1, \dots, q_s respectivement. En particulier, I étant D -supersympa, on a :

$$(0) \neq \rho(\mathfrak{E}_d I) = \rho(I[\mathbf{d}] :_{R[\mathbf{d}]} A_{D+d_1+\dots+d_{r-r+1}}) \\ \subset (I, q_1, \dots, q_s)[\mathbf{d}'] :_{R[\mathbf{d}']} A_{D'+d_1+\dots+d_{r-s-r+s+1}}$$

où l'on a posé $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_{r-s}, d^\circ q_1, \dots, d^\circ q_s)$, $\mathbf{d}' = (d_1, \dots, d_{r-s})$ et enfin $D' = D + d^\circ q_1 + \dots + d^\circ q_s - s$. Ceci montre que (I, q_1, \dots, q_s) est D' -sympa.

Supposons maintenant que I et (I, q_1, \dots, q_s) sont purs, radicaux, sans premier associé rencontrant R et que q_1, \dots, q_s est une suite régulière sur A/I , on a alors $\rho(\mathfrak{E}_d I) = \mathfrak{E}_{\mathbf{d}'}(I, q_1, \dots, q_s)$ (avec les mêmes choix de \mathbf{d} et \mathbf{d}' que précédemment). En effet, si f désigne une forme éliminante d'indice \mathbf{d} de I , on a :

$$d((I, q_1, \dots, q_s)) = d(I) \cdot d^\circ q_1 \dots d^\circ q_s$$

et, le degré de $\rho(f)$ par rapport aux variables u_{i, d_i} pour $i = 1, \dots, r - s$ étant égal à $(d(I) \cdot d^\circ q_1 \dots d^\circ q_s / d_i) \cdot d_1 \dots d_{r-s}$, on en conclut que $\rho(f)$ est une forme éliminante de l'idéal (I, q_1, \dots, q_s) . Ainsi $\rho(f)$ engendre l'idéal éliminant $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}'}(I, q_1, \dots, q_s)$ et on peut écrire :

$$\mathfrak{E}_{\mathbf{d}'}(I, q_1, \dots, q_s) = \rho(\mathfrak{E}_d I) \\ = \rho(I[\mathbf{d}] :_{R[\mathbf{d}]} A_{D+d_1+\dots+d_{r-r+1}}) \\ \subset (I, q_1, \dots, q_s)[\mathbf{d}'] :_{R[\mathbf{d}']} A_{D'+d_1+\dots+d_{r-s-r+s+1}} \\ \subset \mathfrak{E}_{\mathbf{d}'}(I, q_1, \dots, q_s).$$

Ceci montre que (I, q_1, \dots, q_s) est D' -supersympa dans ce cas, et la Proposition 4.4 est donc entièrement établie. \square

PROPOSITION 4.5. *Soient $B = R[Y_0, \dots, Y_m]$ et $\varphi : B \rightarrow A$ un homomorphisme de R -algèbres graduées (par le degré en Y et X respectivement) de degré δ_0 .*

Soit I un idéal homogène pur de rang $n + 1 - r \leq n$ de A dont aucun premier associé ne rencontre R et supersympa en degré D . On suppose que $\varphi : B/\varphi^{-1}(I) \hookrightarrow A/I$ fait de A/I un $B/\varphi^{-1}(I)$ -module de type fini ; l'idéal $\varphi^{-1}(I)$ est alors pur de rang $m + 1 - r$ dans B et sympa en degré $[D/\delta_0] + r$.

Si on suppose de plus I radical alors $\varphi^{-1}(I)$ est aussi radical et supersympa en degré $[D/\delta_0] + r$.

DÉMONSTRATION. On remarque que A/I est une extension entière du quotient $B/\varphi^{-1}(I)$ car c'est un $B/\varphi^{-1}(I)$ -module de type fini; de plus, on a

$$\dim(A/I) = \dim(B/\varphi^{-1}(I))$$

(confer [No], Chap. 2.5, Thm. 5 et Chap. 2.6), d'où :

$$\begin{aligned} \text{rang}(\varphi^{-1}(I)) &= \dim B - \dim(B/\varphi^{-1}(I)) \\ &= m - n + \dim A - \dim(A/I) = m - n + \text{rang}(I), \end{aligned}$$

car $A \otimes_R K$ et $B \otimes_R K$ sont des anneaux semi-réguliers et aucun premier associé à I (resp. $\varphi^{-1}(I)$) ne rencontre R (voir [No], Chap. 5.3, corollaire et Chap. 5.5).

Soient $V_{1,d_1}, \dots, V_{r,d_r}$ des formes génériques de degrés respectifs d_1, \dots, d_r sur B et $U_{1,\delta_0 d_1}, \dots, U_{r,\delta_0 d_r}$ des formes génériques de degrés respectifs

$$\delta_0 d_1, \dots, \delta_0 d_r$$

sur A . L'homomorphisme φ induit un homomorphisme $\varphi^* : R[\delta_0 \mathbf{d}] \rightarrow R[\mathbf{d}]$ où $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)$, tel que $\varphi^*(U_{i,\delta_0 d_i}) = \varphi(V_{i,d_i})$. Si f désigne une forme éliminante d'indice $\delta_0 \mathbf{d}$ de I on a $\varphi^*(f) \neq 0$ d'après le théorème de l'élimination (confer [Ph2], Chap. 3.2). Mais, I étant pur, f engendre $\mathfrak{E}_{\delta_0 \mathbf{d}} I$ et I étant D -supersympla on a :

$$f \cdot A_{D+\delta_0 d_1 + \dots + \delta_0 d_r - r + 1} \subset (I, U_{1,\delta_0 d_1}, \dots, U_{r,\delta_0 d_r}).$$

On en déduit successivement les inclusions :

$$\begin{aligned} \varphi^*(f) \cdot A_{D+\delta_0 d_1 + \dots + \delta_0 d_r - r + 1} &\subset (I, \varphi^*(U_{1,\delta_0 d_1}), \dots, \varphi^*(U_{r,\delta_0 d_r})) \\ \varphi^*(f) \cdot \varphi(B_{[D/\delta_0]+d_1+\dots+d_r+1}) &\subset (I, \varphi(V_{1,d_1}), \dots, \varphi(V_{r,d_r})) \\ \varphi^*(f) \cdot B_{[D/\delta_0]+d_1+\dots+d_r+1} &\subset (\varphi^{-1}(I), V_{1,d_1}, \dots, V_{r,d_r}), \end{aligned}$$

ce qui montre que l'idéal $\varphi^{-1}(I)$ est sympla en degré $[D/\delta_0] + r$. On vérifie que $d(I) \cdot \delta_0^{r-1} = d(\varphi^{-1}(I))$ et $\varphi^*(f)$ est de degré $\frac{d(I)}{d_i} \cdot \delta_0^{r-1} \cdot d_1 \dots d_r$ par rapport aux variables v_{i,d_i} . Toute forme éliminante d'indice \mathbf{d} de $\varphi^{-1}(I)$ divise $\varphi^*(f)$ et, si I est supposé radical, elle est de même degré. Aussi $\varphi^*(f)$ est une forme éliminante d'indice \mathbf{d} de $\varphi^{-1}(I)$ dans ce cas, qui engendre $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}} \varphi^{-1}(I)$, ce qui montre bien la Proposition 4.5. \square

4.2. – Théorème des minimums successifs algébriques

On considère ici la situation du paragraphe précédent avec $R = \overline{\mathbb{Q}}$ ou un corps de nombres K . Soient I un idéal homogène de $A := R[X_0, \dots, X_n]$ et δ un entier ≥ 1 , on note I_δ et A_δ les R -espaces vectoriels engendrés par les

éléments de degré δ de I et A respectivement. Pour $i = 1, \dots, \dim \mathcal{Z}(I) + 1$ on définit les *minimums successifs algébriques de I* par la formule :

$$\mu_i(I) := \sup_{\substack{J \supset I \\ \text{codim } \mathcal{Z}(J)=i}} \inf \{h(x), x \in \mathcal{Z}(I) \setminus \mathcal{Z}(J)\}.$$

En particulier, on notera que si $J \supset I$ alors $\mu_{d+1}(J) \geq \mu_{d+1}(I)$ et d'autre part :

$$\mu_{d+1}(I) \leq \mu_d(I) \leq \dots \leq \mu_1(I).$$

On vérifie aussi $\mu_{d+1}(I) = \inf \mu_{d+1}(\mathfrak{p})$ où l'infimum porte sur tous les premiers minimaux \mathfrak{p} associés à I . Nous sommes intéressés à contrôler la hauteur d'une forme $p \in A$ modulo I , plus précisément si p est de degré δ et à coefficients dans un corps de nombres K nous posons⁽⁴⁾ :

$$h_{I, \|\cdot\|_\infty}(p) = h_I(p) := \sum_v \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \cdot \log \left(\sup_{x \in \mathcal{Z}(I)} \frac{|p(x)|_v}{\|x\|_v^{d \circ p}} \right)$$

où la somme porte sur toutes les places v de K . Si $V \subset \mathbb{P}_n(\overline{\mathbb{Q}})$ est une sous-variété algébrique de \mathbb{P}_n , on notera $h(V)$, $\mu_i(V)$, $h_V(p) \dots$, les quantités correspondantes, où I est l'idéal de définition de V dans l'anneau A .

On notera que si $I \subset J$, alors $h_J(p) \leq h_I(p)$.

On dispose dans ces conditions des estimations suivantes pour les minimums successifs « extrêmes » :

THÉORÈME 4.6. *Soient I un idéal homogène premier de A et $d = \dim \mathcal{Z}(I)$, alors :*

$$(d + 1) \cdot \mu_{d+1}(I) \cdot d(I) \leq h(I) \leq (d + 1) \cdot \mu_1(I) \cdot d(I).$$

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence facile du Théorème 5.2 de [Zh1] (voir aussi Théorème 1.10 de [Zh2] pour la version incluant les métriques adéliques) qui donne une estimation plus forte pour l'inégalité de gauche :

$$(\mu_1(I) + \dots + \mu_{d+1}(I)) d(I) \leq h(I).$$

On peut également se reporter à [Da-Phi], Paragraphe 3, Théorème 3.1, pour une preuve élémentaire des inégalités :

$$\mu_1(I) \cdot d(I) \leq h(I) \leq (d + 1) \cdot \mu_1(I) \cdot d(I),$$

et donc *à fortiori* pour une preuve de l'inégalité de droite. Nous donnerons de surcroît une preuve élémentaire de l'inégalité de gauche en appendice. □

⁽⁴⁾On notera que dans [Ph1]–III, cette notation désignait l'intégrale sur la variété des zéros de I du quotient $\frac{|q(x)|_v}{\|x\|_v^\delta}$. Cette nouvelle quantité présente l'avantage de se comporter essentiellement comme une hauteur mais a l'inconvénient d'introduire une inégalité dans le théorème de Bézout arithmétique. Toutefois, sur les variétés linéaires, les deux notions coïncident essentiellement (voir preuve du Corollaire 4.9).

Nous allons maintenant déduire quelques conséquences dans le cas des sous-variétés linéaires. Soit $V \subset \overline{\mathbb{Q}}^{n+1}$ un sous-espace vectoriel de dimension d ; si x_1, \dots, x_d en est une base sur un certain corps de nombres K , on pose :

$$h_S(V) := \sum_v \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \cdot \log \|x_1 \wedge \dots \wedge x_d\|_v$$

où la somme porte sur les places v de K . C'est la « hauteur absolue » de [Sc1], Chap. 1, Paragraphe 8, si V^* désigne le dual de V on vérifie $h_S(V) = h_S(V^*)$. On dispose alors du :

LEMME 4.7. Soit $V \subset \overline{\mathbb{Q}}^{n+1}$ un sous-espace vectoriel de dimension d . Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un point non nul y de V de hauteur :

$$h(y) \leq \frac{h_S(V)}{d} + \frac{1}{d} \cdot \sum_{s=1}^{d-1} \sum_{t=1}^s \frac{1}{2t} + \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION. L'espace des droites de V est un sous-espace linéaire \tilde{V} de $\mathbb{P}_n(\overline{\mathbb{Q}})$ de dimension $d - 1$. On vérifie par un calcul direct que :

$$h(\tilde{V}) = h_S(V) + \sum_{s=1}^{d-1} \sum_{t=1}^s \frac{1}{2t}.$$

On déduit alors du Théorème 4.6 que pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ il existe un point \tilde{y} de $\tilde{V}(\overline{\mathbb{Q}})$ de hauteur $\leq \mu_{d+1}(\tilde{V}) + \varepsilon \leq \frac{h(\tilde{V})}{d} + \varepsilon$. Un système de coordonnées projectives $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_n) \in \overline{\mathbb{Q}}^{n+1}$ de ce point fournit par conséquent un point non nul y de V , de hauteur :

$$h(\mathbf{y}) \leq \frac{h_S(V)}{d} + \frac{1}{d} \cdot \sum_{s=1}^{d-1} \sum_{t=1}^s \frac{1}{2t} + \varepsilon,$$

ce qui donne bien le Lemme 4.7. □

REMARQUE. Cet énoncé est un lemme de Thue-Siegel « absolu » suivant la terminologie de [Ro-Th]. Dans *loc. cit.*, D. Roy et J. Thunder montrent en particulier (prendre le premier minimum dans le Théorème 2.2 de cette référence), sous les hypothèses du Lemme 4.7, l'existence d'un point y non nul de V de hauteur :

$$h(\mathbf{y}) \leq \frac{h_S(V)}{d} + \frac{(d-1) \log(2)}{2} + \varepsilon,$$

alors que le Lemme 4.7 donne :

$$h(\mathbf{y}) \leq \frac{h_S(V)}{d} + \frac{\log(d)}{2} + \varepsilon,$$

c'est-à-dire un terme d'erreur essentiellement optimal (on pourra comparer à la Proposition 10.1 de [Ro-Th]).

Le Lemme 4.7 peut être vu comme un lemme de Thue-Siegel « classique » (majoration de la hauteur du premier minimum); le Théorème 2.2 de [Rò-Th] majore pour sa part la somme des hauteurs des éléments d'une base. Mais on notera aisément que si l'on désire obtenir un raffinement du même ordre, il suffit de reprendre l'argument ci-dessus en remplaçant le Théorème 4.6 par sa version forte, à savoir le Théorème 5.2 de [Zh1].

L'énoncé suivant généralise aux sous-espaces linéaires de dimension supérieure le lemme précédent :

PROPOSITION 4.8. *Soit $V \subset R^{n+1}$ un sous-espace vectoriel de dimension d . Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ et tout entier $i = 1, \dots, d$, il existe alors un sous-espace $W_i \subset V$, défini sur R , de dimension i satisfaisant :*

$$h_S(W_i) \leq \begin{cases} \frac{i}{d} \cdot h_S(V) + \frac{1}{\binom{d}{i}} \cdot \sum_{s=1}^{\binom{d}{i}-1} \sum_{t=1}^s \frac{1}{2t} + \varepsilon & \text{si } R = \overline{\mathbb{Q}}, \\ \frac{i}{d} \cdot h_S(V) + \frac{1}{2} \cdot \log \binom{d}{i} + \frac{\log |\text{Discr}(K)|}{2[K : \mathbb{Q}]} & \text{si } R = K. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. On considère le sous-espace $\wedge^i V \subset \wedge^i (R^{n+1})$ et l'on vérifie que $\dim \wedge^i V = \binom{d}{i}$ et que :

$$(6) \quad h_S(\wedge^i V) = \binom{d-1}{i-1} \cdot h_S(V).$$

En effet, si x_1, \dots, x_d est une base de V sur un corps de nombres L , pour toute place v de L , il existe $y_1, \dots, y_d \in L^{n+1}$ (noter que les y_j dépendent de v) tels que :

$$\|x_1 \wedge \dots \wedge x_d\|_v^2 = |\langle x_1 \wedge \dots \wedge x_d, y_1 \wedge \dots \wedge y_d \rangle|_v = |\det((x_i, y_j))|_v.$$

Pour $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_i \leq d$, posons $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_i)$; les vecteurs

$$e_\alpha := x_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_{\alpha_i} \in \wedge^i L^{n+1}$$

forment une base de $\wedge^i V$. Posons enfin $f_\alpha := y_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge y_{\alpha_i} \in \wedge^i L^{n+1}$; on a alors pour toute place v de L :

$$\begin{aligned} \|\wedge_\alpha e_\alpha\|_v^2 &= |\langle \wedge_\alpha e_\alpha, \wedge_\alpha f_\alpha \rangle|_v = |\det(\langle e_\alpha, f_\beta \rangle)|_v \\ &= \left| \det(\det(\langle e_{\alpha_\ell}, f_{\beta_m} \rangle)_{l,m})_{\alpha,\beta} \right|_v \\ &= |\det((x_i, y_j))|_v^{\binom{d-1}{i-1}} = \|x_1 \wedge \dots \wedge x_d\|_v^{2\binom{d-1}{i-1}}. \end{aligned}$$

L'égalité voulue (6) s'en déduit par sommation sur les places v de L (la formule $h_S(\wedge^i V) = \binom{d-1}{i-1} \cdot h_S(V)$ se déduit également de [Ro-Th], Corollary 4.4 en suivant la preuve de *ibidem*, Proposition 4.6).

Si $R = \overline{\mathbb{Q}}$, on déduit du Lemme 4.7 et de la relation (6) qu'il existe un point de $y \in \wedge^i V(\overline{\mathbb{Q}})$, non nul, de hauteur :

$$h(y) \leq \frac{i}{d} \cdot h_S(V) + \frac{1}{\binom{d}{i}} \cdot \sum_{s=1}^{\binom{d}{i}-1} \sum_{t=1}^s \frac{1}{2t} + \varepsilon.$$

De façon similaire, si R est un corps de nombres K le Théorème 8 de [Bo-Va] montre qu'il existe $y \in \wedge^i V$, non nul, de hauteur⁽⁵⁾ :

$$\begin{aligned} h(y) &\leq \frac{h_S(\wedge^i V)}{\dim \wedge^i V} + \frac{1}{2} \cdot \log \dim(\wedge^i V) + \frac{\log |\text{Discr}(K)|}{2[K : \mathbb{Q}]} \\ &\leq \frac{i}{d} \cdot h_S(V) + \frac{1}{2} \cdot \log \binom{d}{i} + \frac{\log |\text{Discr}(K)|}{2[K : \mathbb{Q}]} . \end{aligned}$$

Dans les deux cas, le point y que nous avons exhibé paramètre un sous-espace W_i de V , défini sur R , de dimension i et hauteur $h_S(W_i) = h(y)$, ce qui établit la Proposition 4.8. □

COROLLAIRE 4.9. *Soit $V \subset R^{n+1}$ un sous-espace vectoriel de dimension d . Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe une forme linéaire ne s'annulant pas identiquement sur V et satisfaisant :*

$$h_{\tilde{V}}(\ell) \leq \begin{cases} -\frac{h_S(V)}{d} + \frac{1}{d} \cdot \sum_{s=1}^{d-1} \sum_{t=1}^s \frac{1}{2t} + \varepsilon & \text{si } R = \overline{\mathbb{Q}}, \\ -\frac{h_S(V)}{d} + \frac{1}{2} \cdot \log(d) + \frac{\log |\text{Discr}(K)|}{2[K : \mathbb{Q}]} & \text{si } R = K, \end{cases}$$

où \tilde{V} est le sous-espace linéaire de $\mathbb{P}_n(R)$ formé des droites de V .

DÉMONSTRATION. La Proposition 4.8 nous assure qu'il existe un sous-espace vectoriel $W = W_{d-1}$ de V , de dimension $d - 1$, défini sur R et tel que :

$$h_S(W) \leq \begin{cases} \frac{d-1}{d} h_S(V) + \frac{1}{d} \cdot \sum_{s=1}^{d-1} \sum_{t=1}^s \frac{1}{2t} + \varepsilon & \text{si } R = \overline{\mathbb{Q}}, \\ \frac{d-1}{d} \cdot h_S(V) + \frac{1}{2} \cdot \log(d) + \frac{\log |\text{Discr}(K)|}{2[K : \mathbb{Q}]} & \text{si } R = K. \end{cases}$$

⁽⁵⁾On notera que dans *loc. cit.*, la hauteur du point y est la hauteur de Weil ; nous utilisons par contre la métrique L_2 à l'infini. Le terme correctif en $\frac{1}{2} \cdot \log \binom{d}{i}$ dans l'inégalité ci-dessous intervient donc en comparant les deux hauteurs.

Il existe donc une forme linéaire $\ell \in A_1$ ne s'annulant pas identiquement sur V telle que $W = V \cap \mathcal{Z}(\ell)$.

On écrit le théorème de Bézout arithmétique (*confer* [Ph1]-III, Proposition 4) en remarquant qu'aux places archimédiennes, on a la relation :

$$\int_{\sigma_v(\tilde{V}(\mathbb{C}))} \log \left(\frac{|\ell(x)|_v}{\|x\|_v} \right) \cdot \Omega^{\wedge d}(x) = \sup_{x \in \sigma_v(\tilde{V}(\mathbb{C}))} \left\{ \frac{|\ell(x)|_v}{\|x\|_v} \right\} - \sum_{t=1}^{d-1} \frac{1}{2t};$$

on en déduit donc :

$$h_{\tilde{V}}(\ell) = h(\tilde{W}) - h(\tilde{V}) + \sum_{t=1}^{d-1} \frac{1}{2t} = h_S(W) - h_S(V),$$

le corollaire s'en déduit en reportant dans cette relation la majoration de $h_S(W)$ donnée par la Proposition 4.8. \square

4.3. – Minoration de covolumes

On reprend la situation du paragraphe précédent; R désigne donc $\overline{\mathbb{Q}}$ ou un corps de nombres K , I est un idéal homogène de $A := R[X_0, \dots, X_n]$, δ un entier ≥ 1 et on note I_δ respectivement A_δ les R -espaces vectoriels engendrés par les éléments de degré δ de I et de A respectivement. On identifie A_δ à $R^{\binom{\delta+n}{n}}$ à l'aide de la *base de monômes remodelée* : $\binom{\delta}{\lambda}^{\frac{1}{2}} \cdot X_0^{\lambda_0} \dots X_n^{\lambda_n}$ où λ est un élément de \mathbb{N}^{n+1} , de longueur $|\lambda| = \delta$.

Rappelons que $H_g(I; \delta) = \dim_{\overline{\mathbb{Q}}}(A/I)_\delta$ désigne la fonction de Hilbert géométrique de I . La *fonction de Hilbert arithmétique* de I que nous considérons est la suivante :

$$(7) \quad H_a(I; \delta) := \sum_v \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]} \cdot \log \|p_1 \wedge \dots \wedge p_s\|_v = h_S(I_\delta),$$

où L est un corps de définition de I_δ et p_1, \dots, p_s en est une base sur L . Lorsque $L = \mathbb{Q}$, cette fonction de Hilbert arithmétique coïncide avec celle de [Lau], Paragraphe 3. En particulier, elle est toujours inférieure aux fonctions de Hilbert arithmétiques considérées dans [Ab-Bo], ou [B-G-S], à savoir $-\log \text{covol}((\mathbb{Z}[X]/I \cap \mathbb{Z}[X])_\delta)$ où le volume est calculé soit pour la norme *sup* :

$$\|q\|_{\text{sup}} := \sup_{x \in \mathcal{Z}(I)} \left\{ \frac{|q(x)|}{\|x\|^\delta} \right\},$$

soit pour la norme L^2 :

$$\|q\|_{L^2}^2 := \int_{\mathcal{Z}(I)} \left(\frac{|q(x)|}{\|x\|^\delta} \right)^2 \cdot \Omega_{\mathbb{P}^n}^{\wedge \dim(\mathcal{Z}(I))}(x),$$

sur $\mathcal{Z}(I)$. En effet, ces normes sont toutes deux majorées par celle considérée dans [Lau] et ici : $\|q\|^2 = \sum_{\lambda} |q_{\lambda}|^2 / \binom{\delta}{\lambda}$.

L'objet de ce paragraphe est d'obtenir une minoration effective de la fonction de Hilbert arithmétique. En contrepartie, nous ne nous soucierons pas de la validité du terme dominant; asymptotiquement, notre minoration n'est donc vraisemblablement pas optimale (on pourra par exemple comparer avec l'équivalent que l'on peut trouver dans [Ab-Bo]).

Nous obtenons la minoration suivante pour la fonction de Hilbert arithmétique ci-dessus :

PROPOSITION 4.10. *Soit I un idéal homogène premier de A de rang $n+1-r \leq n$, si I est D -sympa alors pour $\delta \geq D+1$, on a :*

$$H_a(I; \delta) + \frac{5}{2} H_g(I; \delta) \cdot \delta \cdot \log(n+1) \geq h(I) \cdot \left(\frac{\delta - D - 1}{r} \right)^r .$$

En particulier, cette minoration est valable pour tout $\delta \geq (n+1-r)d(I)$.

DÉMONSTRATION. Posons $\delta_0 = \lceil \frac{\delta-D-1}{r} \rceil + 1$, $\mathbf{d} = (\delta_0, \dots, \delta_0) \in (\mathbb{N}^*)^r$ et soient $U_{1,\delta_0}, \dots, U_{r,\delta_0}$ des formes génériques de degré δ_0 . Comme I est D -sympa, et puisque $\delta \geq D+r(\delta_0-1)+1$, il existe une forme $g \in R[\mathbf{d}]$ non nulle, telle que :

$$g \cdot A_{\delta} \subset E := (I, U_{1,\delta_0}, \dots, U_{r,\delta_0})_{\delta} .$$

En particulier, g appartient à l'idéal éliminant $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}I$ de I . Cet idéal étant principal et engendré par toute forme de Chow f d'indice \mathbf{d} de I , on a $f \mid g$ et donc :

$$h(I) \cdot \left(\frac{\delta - D - 1}{r} \right)^r \leq h(I) \cdot \delta_0^r = h(f) \leq h(g) .$$

Par ailleurs, les mineurs de la matrice de Sylvester formée des coefficients dans la base des monômes remodelée de degré δ d'une base du $R[\mathbf{d}]$ -espace E fournissent des formes $g \in R[\mathbf{d}]$ satisfaisant $g \cdot A_{\delta} \subset E$; on en déduit que $h(I) \cdot (\frac{\delta-D-1}{r})^r$ minore la hauteur de ces mineurs.

Mais, on peut trouver un tel mineur de la matrice de Sylvester considérée, donnant une forme g non nulle de degré $H_g(I; \delta) = \dim(A/I)_{\delta}$ et hauteur :

$$\begin{aligned} h(g) &\leq \sum_v \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \cdot \log \|p_1 \wedge \dots \wedge p_s\|_v + \frac{5}{2} H_g(I; \delta) \cdot \delta \cdot \log(n+1) \\ &\leq H_a(I; \delta) + \frac{5}{2} H_g(I; \delta) \cdot \delta \cdot \log(n+1) , \end{aligned}$$

où p_1, \dots, p_s désigne une base de I_{δ} sur un corps de nombres L . Le second terme de la majoration provient des contributions (inférieures à $H_g(I; \delta) \cdot \frac{\delta}{2} \log(n+1)$) aux places archimédiennes (resp. finies) des coefficients multinomiaux des bases remodelées en degrés δ (respectivement δ_0), du développement de Laplace du mineur aux places infinies (inférieure à $H_g(I; \delta) \cdot \log \binom{\delta+n}{n}$) et

du terme de normalisation de la hauteur des éléments de $R[d]$ (inférieure à $H_g(I, \delta) \cdot \sum_{i=1}^{(\delta_0+n)} \frac{1}{2^i}$, voir Paragraphe 2.1). En regroupant nos estimations, on obtient :

$$h(I) \cdot \left(\frac{\delta - D - 1}{r} \right)^r \leq H_a(I; \delta) + \frac{5}{2} H_g(I; \delta) \cdot \delta \cdot \log(n + 1).$$

Enfin, on sait qu'un idéal premier de rang $n + 1 - r$ contient une suite régulière constituée de $n + 1 - r$ formes de degrés $\leq d(I)$ et est donc *sympa* en degré

$$(n + 1 - r)(d(I) - 1) + 1,$$

d'après la Proposition 4.2 points (i) et (iii). La Proposition 4.10 est donc entièrement établie. □

En combinant la Proposition 4.10 avec la remarque précédant son énoncé, on en déduit :

COROLLAIRE 4.11. *Soit I un idéal homogène premier de $\mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n]$ de rang $n + 1 - r \leq n$ satisfaisant $I \cap \mathbb{Z} = (0)$; si I est D -sympa alors pour $\delta \geq D + 1$ on a :*

$$-\log \text{covol}((\mathbb{Z}[X]/I \cap \mathbb{Z}[X])_\delta) + \frac{5}{2} H_g(I; \delta) \cdot \delta \cdot \log(n + 1) \geq h(I) \cdot \left(\frac{\delta - D - 1}{r} \right)^r,$$

où le volume peut être calculé soit pour la norme $\|q\|_{\text{sup}}$, soit pour la norme $\|q\|_{L^2}$ sur $\mathcal{Z}(I)$. En particulier, cette minoration est valable pour tout $\delta \geq (n + 1 - r)d(I)$.

La Proposition 4.10 va nous permettre de trouver des formes de degré contrôlé qui ont une « petite » norme sur la variété étudiée. C'est en procédant par intersection avec de telles formes que l'on va pouvoir estimer les minimums successifs au paragraphe suivant. L'énoncé qui suit rassemble ainsi les informations qui nous seront utiles pour la dernière partie de ce travail :

COROLLAIRE 4.12. *Soient I un idéal homogène premier de rang $n + 1 - r \leq n$ et D -sympa de $A = R[X_0, \dots, X_n]$. Si $\delta \in \mathbb{N}$ satisfait $\delta \geq D + 1$, alors pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe une forme $q \in A \setminus I$ de degré δ telle que :*

$$h_I(q) \leq \begin{cases} -\frac{h(I)}{r^r d(I)} \cdot \frac{(\delta - D - 1)^r}{(\delta + r - 1)^{r-1}} + 3\delta \log(n + 1) + \varepsilon & \text{si } R = \overline{\mathbb{Q}}, \\ -\frac{h(I)}{r^r d(I)} \cdot \frac{(\delta - D - 1)^r}{(\delta + r - 1)^{r-1}} + 3\delta \log(n + 1) + \frac{\log |\text{Disc}(K)|}{2[K : \mathbb{Q}]} & \text{si } R = K. \end{cases}$$

En particulier, si $\delta \geq 2D + r + 1$ et si :

$$\frac{h(I)}{d(I)} \geq \begin{cases} r(4e)^r \cdot \left(6 \log(n + 1) + \frac{2\varepsilon}{\delta} \right) & \text{lorsque } R = \overline{\mathbb{Q}}, \\ r(4e)^r \cdot \left(6 \log(n + 1) + \frac{\log |\text{Disc}(K)|}{\delta[K : \mathbb{Q}]} \right) & \text{lorsque } R = K, \end{cases}$$

les points $x \in \mathcal{Z}(I)$ de hauteur

$$h(x) < \frac{h(I)}{d(I)} \cdot (4e)^{-r}$$

sont zéros de q .

DÉMONSTRATION. D'après le Corollaire 4.9 appliqué à $V = I_\delta^*$, il existe $q \in A_\delta \setminus I_\delta$ satisfaisant

$$h_{\tilde{V}}(q) \leq \begin{cases} -\frac{H_a(I; \delta)}{H_g(I; \delta)} + \frac{1}{H_g(I; \delta)} \cdot \sum_{s=1}^{H_g(I; \delta)-1} \sum_{t=1}^s \frac{1}{2t} + \varepsilon & \text{si } R = \overline{\mathbb{Q}}, \\ -\frac{H_a(I; \delta)}{H_g(I; \delta)} + \frac{1}{2} \cdot \log(H_g(I; \delta)) + \frac{\log |\text{Disc}(K)|}{2[K : \mathbb{Q}]} & \text{si } R = K. \end{cases}$$

La Proposition 4.10 majore $-H_a(I; \delta)$ et on a par ailleurs $H_g(I; \delta) \leq d(I)^{\binom{\delta+r-1}{r-1}}$ d'après [Ch], d'où :

$$h_{\tilde{V}}(q) \leq \begin{cases} \frac{h(I)}{d(I)} \cdot \frac{(\delta - D - 1)^r}{(\delta + r - 1)^{r-1}} \cdot \frac{(r - 1)!}{r^r} + 3\delta \log(n + 1) + \varepsilon & \text{si } R = \overline{\mathbb{Q}}, \\ \frac{h(I)}{d(I)} \cdot \frac{(\delta - D - 1)^r}{(\delta + r - 1)^{r-1}} \cdot \frac{(r - 1)!}{r^r} + 3\delta \log(n + 1) + \frac{\log |\text{Disc}(K)|}{2[K : \mathbb{Q}]} & \text{si } R = K. \end{cases}$$

Soit maintenant $x \in \mathcal{Z}(I)$, un point $\overline{\mathbb{Q}}$ -rationnel. Supposons x défini sur un corps de nombres L . Notons que pour toute place v de L , on a :

$$\frac{|q(x)|_v}{\|x\|_v^\delta} \leq \sup_{y \in V} \frac{|\langle q, y \rangle|_v}{\|y\|_v}.$$

En particulier, $h_I(q) \leq h_{\tilde{V}}(q)$, d'où la première assertion du corollaire.

Si x n'est pas un zéro de q , on peut écrire la formule du produit sur L de la façon suivante, et l'on obtient en tenant compte de l'inégalité ci-dessus :

$$-\delta \cdot h(x) = \sum_v \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]} \cdot \log \frac{|q(x)|_v}{\|x\|_v^\delta} \leq \sum_v \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]} \log \sup_{y \in \tilde{V}} \frac{|\langle q, y \rangle|_v}{\|y\|_v} = h_{\tilde{V}}(q)$$

où les sommes portent sur les places v de L . Lorsque $\delta \geq 2D + r + 1$, la minoration de $h(I)/d(I)$ assure que

$$h_{\tilde{V}}(q) \leq -(4e)^{-r} \frac{h(I)}{d(I)} \delta.$$

La dernière conclusion suit en mettant ensemble cette inégalité et celle obtenue ci-dessus à partir de la formule du produit. Le Corollaire 4.12 est donc entièrement établi. □

5. – Minorations des minimums essentiel et absolu

Les minorations des différents minimums définis dans l’introduction seront maintenant des conséquences faciles des résultats obtenus précédemment : minoration de la hauteur normalisée d’une sous-variété de \mathbb{G}_m^n et minoration de la fonction de Hilbert arithmétique. Il suffira de travailler dans un plongement étiré convenable et de procéder aux estimations numériques *ad hoc*.

Dans tout ce paragraphe, nous supposons que g est un entier ≥ 2 .

5.1. – Points de petites hauteurs

On considère la compactification $\overline{G} = \mathbb{P}_1^g$ de $G = \mathbb{G}_m^g$ plongée dans \mathbb{P}_N par le plongement de Segre ($N = 2^g - 1$).

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on considère le plongement étiré de G :

$$\begin{aligned} \varphi_m : G &\hookrightarrow G^2 \hookrightarrow \mathbb{P}_N^2 \xrightarrow{\text{Segre}} \mathbb{P}'_N \\ x &\longmapsto (x, [m]x) \end{aligned}$$

avec m un entier et $N' = N^2 + 2N = 4^g - 1$. Nous notons, à l’instar du paragraphe précédent, $R = \overline{\mathbb{Q}}$ ou $R = \mathbb{Q}$, $A = R[X_0, \dots, X_N]$ et $B = R[Y_0, \dots, Y_{N'}]$.

Le morphisme φ_m induit un morphisme d’algèbres $\varphi^* : B \rightarrow A$, que l’on peut visualiser très concrètement : soient

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \overline{\mathbb{Q}}[X_{0,1}, X_{1,1} \dots, X_{0,g}, X_{1,g}], \\ \tilde{B} &= \overline{\mathbb{Q}}[X_{0,1}, X_{1,1} \dots, X_{0,g}, X_{1,g}, Y_{0,1}, Y_{1,1} \dots, Y_{0,g}, Y_{1,g}] \end{aligned}$$

les anneaux de coordonnées de \mathbb{P}_1^g et \mathbb{P}_1^{2g} , et considérons :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^* \quad \tilde{B} &\longrightarrow \tilde{A} \\ \left\{ \begin{array}{l} X_{i,j} \\ Y_{i,j} \end{array} \right\} &\longmapsto \left\{ \begin{array}{l} X_{i,j} \\ X_{i,j}^m \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Le morphisme φ^* s’obtient tout simplement en composant $\tilde{\varphi}^*$ avec les morphismes induits au niveau des algèbres de coordonnées par les différents morphismes de Segre intervenant dans notre construction. Ainsi, si

$$\tilde{Q}(X, Y) = \sum_{|\beta, \gamma| \leq D} p_{(\beta, \gamma)} Y^\beta X^\gamma,$$

son image par $\tilde{\varphi}^*$ est tout simplement :

$$\tilde{P}(X) = \sum_{|\beta, \gamma| \leq D} p_{(\beta, \gamma)} X^{m\beta + \gamma} = \sum_{|\alpha| \leq (m+1)D} p_\alpha X^\alpha,$$

en posant $\alpha = m\beta + \gamma$.

On vérifie sans peine que toute forme P de A est l'image par φ^* d'une forme $Q \in B$ de degré $\leq \left[\frac{d^\circ P}{m} \right] + \min(m-1, d^\circ P)$, en effectuant la division euclidienne par m des exposants de chaque monôme intervenant dans P .

Notons \mathfrak{O} l'idéal premier des éléments de B s'annulant sur $\varphi_m(G)$. Notons également \mathfrak{g} l'idéal (premier) de définition de \overline{G} dans A ; cet idéal est engendré par des formes quadratiques.

Enfin, si V est une sous-variété algébrique de G de dimension d , définie sur R , \mathfrak{P} sera l'idéal de définition de $\varphi_m(V)$ dans B et \mathfrak{p} désignera l'idéal de définition de V dans A . Ceci posé, on a :

LEMME 5.1. *L'idéal \mathfrak{P} de $\varphi_m(V)$ est sympa en degré :*

$$\left[(2^g - d - 1) \frac{d(V) - 1}{m + 1} \right] + d + 1.$$

DÉMONSTRATION. Comme V est une composante isolée d'une intersection complète Z d'hypersurfaces de degré $\leq d(V)$, on voit aisément que $\varphi_m(V)$ est une composante isolée de $\varphi_m(Z)$. La Proposition 4.2, point (i) nous assure donc que Z est supersympa en degré $(2^g - d - 1)(d(V) - 1)$.

La Proposition 4.5 nous assure maintenant que l'idéal associé à $\varphi_m(Z)$ est sympa en degré :

$$\left[(2^g - d - 1) \frac{(d(V) - 1)}{m + 1} \right] + (d + 1).$$

Il suffit maintenant d'appliquer à nouveau la Proposition 4.2 (point (iii) cette fois-ci) pour en déduire que l'idéal \mathfrak{P} associé à $\varphi_m(V)$ est sympa en degré :

$$\left[(2^g - d - 1) \frac{(d(V) - 1)}{m + 1} \right] + (d + 1),$$

ce qui donne le Lemme 5.1. □

Nous allons maintenant passer à l'estimation des minimums absolu et essentiel. Pour ceci, nous allons commencer par quelques énoncés de nature technique (choix de l'entier m définissant le plongement étiré choisi pour travailler, choix du degré en lequel on appliquera les minorations de la fonction de Hilbert arithmétique obtenue au Paragraphe 4 précédent). Commençons par le choix de m :

LEMME 5.2. *Posons :*

$$m = \left[2^{g+44} (4e)^{d+1} (d+1) \log(2) d(V)^3 \log(d(V) + 1)^2 \right].$$

Alors, on dispose des propriétés :

(i) *l'idéal associé à $\varphi_m(V)$ est sympa en degré $\leq d + 1$:*

(ii) la hauteur de $\varphi_m(V)$ vérifie :

$$\frac{h(\varphi_m(V))}{d(\varphi_m(V))} \geq 7(4e)^{d+1} 2^g (d+1) \log(2).$$

DÉMONSTRATION. La propriété (i) étant immédiate à partir du choix de m et du Lemme précédent 5.1, il suffit d'établir (ii). La Proposition 2.8 et la valeur numérique de $c_0(t)$ nous assurent que :

$$\frac{h(\varphi_m(V))}{d(\varphi_m(V))} \geq \frac{\hat{h}(\varphi_m(V))}{d(\varphi_m(V))} - 7g \log(2)(d+1),$$

et, la Proposition 2.6 nous donne pour sa part :

$$\frac{h(\varphi_m(V))}{d(\varphi_m(V))} \geq (m+1) \frac{\hat{h}(V)}{d(V)} - 7g \log(2)(d+1);$$

pour conclure, il suffit de minorer le quotient $\frac{\hat{h}(V)}{d(V)}$. On applique pour ceci le Théorème 1.2, et l'on obtient, en tenant compte de l'hypothèse faite sur m :

$$(8) \quad (m+1) \cdot \frac{\hat{h}(V)}{d(V)} \geq \frac{(m+1)}{2^{41} d(V)^3 \log(d(V)+1)^2} \geq 8(4e)^{d+1} 2^g \log(2)(d+1).$$

Pour finir, on dispose des inégalités élémentaires :

$$\begin{aligned} \frac{h(\varphi_m(V))}{d(\varphi_m(V))} &\geq (m+1) \frac{\hat{h}(V)}{d(V)} - 7g \log(2)(d+1) \\ &\geq 8(4e)^{d+1} 2^g (d+1) \log(2) - 7g \log(2)(d+1) \\ &\geq 7(4e)^{d+1} 2^g (d+1) \log(2), \end{aligned}$$

ce qui montre bien le Lemme 5.2. □

Dans toute la suite de ce sous-paragraphe, nous *supposons* que m est l'entier donné par le Lemme 5.2.

Passons maintenant au choix du degré δ en lequel nous allons utiliser la minoration de la fonction de Hilbert arithmétique :

LEMME 5.3. *Supposons $\delta > 3(d+1)$, et soit ε un nombre réel > 0 suffisamment petit ; alors, les points de $\varphi_m(V)$ de hauteur :*

$$h(x) < \frac{h(\varphi_m(V))}{d(\varphi_m(V))} (4e)^{-d-1},$$

sont zéros d'une forme q homogène de degré δ de B , ne s'annulant pas identiquement sur $\varphi_m(V)$ et de hauteur relative :

$$h_{\varphi_m(V)}(q) \leq -\frac{h(\varphi_m(V))}{(d+1)e^{d+1}d(\varphi_m(V))} \cdot \frac{(\delta-d-2)^{d+1}}{(\delta+d)^d} + 6g\delta \log(2) + \varepsilon.$$

De plus, si $R = \mathbb{Q}$, on peut prendre $\varepsilon = 0$.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, le Lemme 5.2, point (i) nous assure que $\varphi_m(V)$ est sympa en degré $\leq d + 1$. Le choix de δ nous assure que $\delta \geq 3(d + 1) + 1$; pour montrer que les hypothèses du Corollaire 4.12 sont vérifiées (on peut même prendre $\varepsilon = 0$ si $R = \mathbb{Q}$), il suffit donc de montrer :

$$(9) \quad \frac{h(\varphi_m(V))}{d(\varphi_m(V))} \geq 12(4e)^{d+1}g(d + 1)\log(2) + \frac{2(d + 1)(4e)^{d+1}\varepsilon}{\delta}.$$

En appliquant le Lemme 5.2, point (ii) cette fois-ci, il suffit donc de constater que si ε est assez petit, on a :

$$7(4e)^{d+1}2^g(d + 1)\log(2) \geq 12(4e)^{d+1}g(d + 1)\log(2) + \frac{2(d + 1)(4e)^{d+1}\varepsilon}{\delta}.$$

Le Lemme 5.3 est donc entièrement établi. □

Dans toute la suite de ce sous-paragraphe, nous posons $\delta = 3(d + 1) + 1$. Nous pouvons maintenant passer à l'énoncé qui va nous permettre de contrôler (par récurrence sur la dimension) les minimums successifs de la hauteur pour les points de V .

Nous désignons ici par *sous-ensemble algébrique* un sous-schéma réduit, non nécessairement équidimensionnel, et nous appelons *degré* d'un tel sous-ensemble algébrique la somme des degrés des variétés le composant. Nous dirons également qu'un sous-ensemble algébrique est défini sur R s'il est stable sous l'action de $\text{Gal}(\overline{R}/R)$.

PROPOSITION 5.4. *Soit V une sous-variété de G , de dimension d , définie sur R qui n'est pas un translaté d'un sous-groupe algébrique de G . Alors,*

- (i) *l'ensemble des points de $V(\overline{\mathbb{Q}})$ de hauteur $< \frac{\hat{h}(V)}{2(4e)^{d+1}d(V)}$ est contenu dans un sous-ensemble algébrique Z de V de dimension $d - 1$, défini sur R , de degré majoré par :*

$$2^{g+46}(4e)^{d+1}(d + 1)^2 \log(2)(d(V))^4 \log(d(V) + 1)^2,$$

et de hauteur :

$$\frac{\hat{h}(Z)}{d(Z)} \leq \frac{2\hat{h}(V)}{d(V)}.$$

- (ii) *En particulier, les points de $V(\overline{\mathbb{Q}})$ de hauteur :*

$$< \frac{1}{2^{42}(4e)^{d+1}d(V)^3 \cdot (\log(d(V) + 1))^2}$$

appartiennent à Z .

DÉMONSTRATION. D’après le Lemme 5.3, les points y qui appartiennent à $\varphi_m(V(\overline{\mathbb{Q}}))$ de hauteur :

$$h(y) \leq \frac{h(\varphi_m(V))}{(4e)^{d+1}d(\varphi_m(V))},$$

sont zéros de la forme $q \in B$ dont l’existence est assurée par ce lemme.

Par conséquent, si $x \in V(\overline{\mathbb{Q}})$ est de hauteur :

$$(m + 1)h(x) = h(\varphi_m(x)) < \frac{h(\varphi_m(V))}{(4e)^{d+1}d(\varphi_m(V))},$$

alors, x est zéro de $\varphi_m^*(q)$. Ceci est en particulier vrai si l’on a

$$h(x) < \frac{\hat{h}(V)}{2(4e)^{d+1}d(V)}$$

car, d’après les Propositions 2.6, 2.8 et la valeur numérique de $c_0(t)$:

$$\frac{h(\varphi_m(V))}{(4e)^{d+1}d(\varphi_m(V))} \geq \frac{m + 1}{(4e)^{d+1}} \cdot \frac{\hat{h}(V)}{d(V)} - \frac{7g(d + 1) \log(2)}{(4e)^{d+1}}.$$

La formule (8) de la preuve du Lemme 5.2 assure donc :

$$\frac{h(\varphi_m(V))}{(4e)^{d+1}d(\varphi_m(V))} \geq \frac{m + 1}{2(4e)^{d+1}} \cdot \frac{\hat{h}(V)}{d(V)}.$$

La première partie du point (i) de la Proposition 5.4 est donc établie. Pour la deuxième, majoration de $d(Z)$, il suffit de remarquer que si l’on note Z le lieu des zéros de $\varphi_m^*(q)$ dans V , on a :

$$d(Z) = (m + 1)\delta d(V).$$

En tenant compte de la valeur de m (Lemme 5.2) et de δ (Lemme 5.3), on obtient bien :

$$d(Z) \leq 2^{g+46}(4e)^{d+1}(d + 1)^2 \log(2)d(V)^4 \log(d(V) + 1)^2$$

(on notera que d ne peut être nul car V n’est pas un translaté d’un sous-groupe algébrique de G).

Passons maintenant à la troisième partie du point (i), à savoir la majoration de $\hat{h}(Z)$. On utilise pour ceci le théorème de Bézout arithmétique (confer [Ph1]–III, Prop. 4), et le Lemme 5.3; on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{h(\varphi_m(Z))}{d(\varphi_m(Z))} &\leq \frac{h(\varphi_m(V) \cdot \mathcal{Z}(q))}{\delta d(\varphi_m(V))} = \frac{h(\varphi_m(V))}{d(\varphi_m(V))} + \frac{h_{\varphi_m(V)}(q)}{\delta} \\ &\leq \frac{h(\varphi_m(V))}{d(\varphi_m(V))} + 6g \log(2) + \frac{\varepsilon}{\delta}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en tenant compte des Propositions 2.6 et 2.8 :

$$\begin{aligned} \frac{h(\varphi_m(Z))}{d(\varphi_m(Z))} &\leq \frac{h(\varphi_m(V))}{d(\varphi_m(V))} + 6g \log(2) + \frac{\varepsilon}{\delta} \\ &\leq (m + 1) \frac{\hat{h}(V)}{d(V)} + 6g \log(2) + 7g(d + 1) \log(2) + \frac{\varepsilon}{\delta}. \end{aligned}$$

En tenant compte de nouveau des Propositions 2.8 et 2.6, on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\hat{h}(Z)}{d(Z)} &= \frac{\hat{h}(\varphi_m(Z))}{(m + 1)d(\varphi_m(Z))} \leq \frac{h(\varphi_m(Z))}{(m + 1)d(\varphi_m(Z))} + \frac{7gd \log(2)}{m + 1} \\ &\leq \frac{\hat{h}(V)}{d(V)} + \frac{(14d + 13)g \log(2)}{m + 1} + \frac{\varepsilon}{\delta(m + 1)}. \end{aligned}$$

En tenant compte des valeurs numériques de m et δ , il suit de (8) (preuve du Lemme 5.2) :

$$\frac{\hat{h}(V)}{d(V)} > \frac{14g(d + 1) \log(2)}{m + 1},$$

d'où la majoration cherchée pour $\hat{h}(Z)/d(Z)$ en prenant ε assez petit.

Le point (ii) de la proposition s'obtient facilement à partir du point (i) en utilisant la minoration de $\hat{h}(V)$ donnée par le Théorème 1.2; la Proposition 5.4 est donc entièrement établie. □

5.2. – Minimums essentiel et absolu

Nous continuons à noter $R = \overline{\mathbb{Q}}$ ou $R = \mathbb{Q}$. Soit V une variété algébrique définie sur R , de dimension d , nous sommes intéressés à minorer diverses séries de minimums successifs de V pour la hauteur normalisée, à savoir les quantités $\hat{\mu}_j^\circ(V)$ et $\hat{\mu}_j^*(V)$, pour j variant de 1 à $d + 1$. De plus, dans la mesure du possible, il s'agit de donner des minoration de nature géométrique, c'est-à-dire ne dépendant que de g , d et $d(V)$.

Pour exploiter la Proposition 5.4, introduisons les fonctions :

$$f(d, D) := \left(2^{42} (4e)^{d+1} \cdot D^3 \cdot (\log(D + 1))^2 \right)^{-1},$$

et, pour $i = 0, \dots, d$:

$$\begin{cases} f_0(d, D) := D & \text{et, pour } 1 \leq i \leq d - 1, \\ f_{i+1}(d, D) := 2^{8+46i} \log(2) (4e)^{d-i+1} (d - i + 1)^2 \cdot f_i(d, D)^4 \cdot (\log(f_i(d, D) + 1))^2. \end{cases}$$

Comme on veut conserver une trace de la taille des diviseurs intervenant à chaque étape, nous introduisons la série de minimums algébriques de V plus technique suivante. Pour $j = 1, \dots, d + 1$, on pose⁽⁶⁾ :

$$\hat{\mu}_j^{\circ, \text{eff}}(V/R) = \sup_Y \inf \left(\hat{h}(x); x \in (V \setminus Y)(\overline{\mathbb{Q}}) \right)$$

où Y parcourt les sous-ensembles algébriques unions de sous-variétés algébriques de V de codimension j et de translats de sous-tores de codimension $< j$, définis sur R , de degrés majorés par :

$$\mathcal{D}(j, d, d(V)) := \sum_{i=1}^j f_i(d, d(V))$$

et hauteurs normalisées majorées par :

$$\mathcal{H}(j, d, d(V), \hat{h}(V)) := \frac{\hat{h}(V)}{d(V)} \cdot \sum_{i=1}^j 2^i f_i(d, d(V)),$$

et contenus dans V .

Enfin, comme nous allons établir des minoration ne dépendant que de la dimension et du degré de la variété V et que nous voulons garder trace de la hauteur, posons pour $D, H \in \mathbb{N}^*$ et $j = 1, \dots, d + 1$:

$$\hat{\mu}_j(d, D, H) := \inf_V \hat{\mu}_j^{\circ, \text{eff}}(V/R)$$

l'infimum étant pris sur toutes les sous-variétés algébriques de G , définies sur R , de dimension d , degré $\leq D$ et hauteur normalisée $\leq H$. En particulier, si on a une variété algébrique absolument irréductible, on pourra appliquer ce qui suit soit à la variété elle-même en prenant $R = \overline{\mathbb{Q}}$, soit à la réunion de ses conjugués sur \mathbb{Q} en prenant $R = \mathbb{Q}$, le degré étant dans ce cas multiplié par le nombre de conjugués de la variété.

On dispose, avec ces définitions et notations, des estimations suivantes :

LEMME 5.5. Pour $j = 1, \dots, d$, on a :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_j(d, D, H) &\geq \min \left\{ f(d, D), \hat{\mu}_{j-1} \left(d - 1, f_1(d, D), 2 \frac{H}{D} \cdot f_1(d, D) \right) \right\} \\ &\geq f(d - j + 1, f_{j-1}(d, D)). \end{aligned}$$

On convient, pour donner un sens à l'expression ci-dessus que $\hat{\mu}_0(d, D, H)$ est infini, quels que soient d, D et H .

⁽⁶⁾Par convention, $\inf\{\hat{h}(x), x \in \emptyset\} = +\infty$.

DÉMONSTRATION. Supposons que V est donnée, de dimension d , degré $\leq D$ et hauteur $\leq H$; si V est un translaté d'un sous-tore de G , il n'y a rien à démontrer puisque les $\hat{\mu}_j^{\circ,\text{eff}}(V/R)$ sont tous infinis. Sinon, on considère le diviseur Z fourni par la Proposition 5.4 qui est de dimension $d - 1$, de degré $\leq f_1(d, D)$ et de hauteur $\leq 2\frac{H}{D} \cdot f_1(d, D)$. Si $j = 1$, on a :

$$\hat{\mu}_1^{\circ,\text{eff}}(V/R) \geq \inf \left\{ \hat{h}(x), x \in (V \setminus Z)(\overline{\mathbb{Q}}) \right\} \geq f(d, D),$$

d'après la Proposition 5.4; nous supposons donc maintenant que $j \geq 2$.

On retire de Z les composantes qui sont des translatés de sous-tores de G et l'on considère le résiduel \tilde{Z} . Si $\tilde{Z} = \emptyset$, on vérifie $\hat{\mu}_j^{\circ,\text{eff}}(V/R) \geq f(d, D)$ pour tout $j = 1, \dots, d$. Sinon, on choisit une composante W de \tilde{Z} , définie sur R et R -irréductible. Nous allons vérifier :

$$\hat{\mu}_j^{\circ,\text{eff}}(V/R) \geq \hat{\mu}_{j-1}^{\circ,\text{eff}}(W/R) ;$$

pour ce faire, il suffit d'établir que les sous-ensembles algébriques Y sur lesquels on prend le supremum dans la définition de $\hat{\mu}_{j-1}^{\circ,\text{eff}}(W/R)$ apparaissent dans le supremum de la définition de $\hat{\mu}_j^{\circ,\text{eff}}(V/R)$. Comme

$$d(W) \leq f_1(d, d(V)) \quad \text{et} \quad \hat{h}(W) \leq \frac{2\hat{h}(V)}{d(V)} f_1(d, d(V)),$$

il suffit donc de montrer les inégalités :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(j - 1, d - 1, f_1(d, d(V))) &\leq \mathcal{D}(j, d, d(V)) \\ \mathcal{H} \left(j - 1, d - 1, f_1(d, d(V)), 2\frac{\hat{h}(V)}{d(V)} f_1(d, d(V)) \right) &\leq \mathcal{H}(j, d, d(V), \hat{h}(V)). \end{aligned}$$

La première inégalité se vérifie en montrant par récurrence que :

$$(10) \quad f_i(d - 1, f_1(d, D)) \leq f_{i+1}(d, D) ;$$

Cette même relation montre la deuxième inégalité :

$$\begin{aligned} &\mathcal{H} \left(j - 1, d - 1, f_1(d, d(V)), 2\frac{\hat{h}(V)}{d(V)} f_1(d, d(V)) \right) \\ &= \frac{\hat{h}(V)}{d(V)} \sum_{i=1}^{j-1} 2^{i+1} f_i(d - 1, f_1(d, d(V))) \\ &\leq \frac{\hat{h}(V)}{d(V)} \sum_{i=2}^j 2^i f_i(d, d(V)) \\ &\leq \mathcal{H}(j, d, d(V), \hat{h}(V)). \end{aligned}$$

On en déduit la première inégalité du Lemme 5.5 en prenant l'infimum sur V puisque $\hat{\mu}_{j-1}(W/R) \geq \hat{\mu}_{j-1}(d-1, f_1(d, D), \frac{2H}{D} \cdot f_1(d, D))$.

On vérifie la dernière inégalité du lemme par récurrence sur j . Elle est claire pour $j = 1$; si elle est vraie pour un certain j , $1 \leq j \leq d-1$, on a, par hypothèse de récurrence et ce que l'on vient de montrer :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{j+1}(d, D, H) &\geq \min \left\{ f(d, D), \hat{\mu}_j \left(d-1, f_1(d, D), \frac{2H}{D} \cdot f_1(d, D) \right) \right\} \\ &\geq f(d-j, f_{j-1}(d-1, f_1(d, D))) . \end{aligned}$$

En tenant compte de la relation (10), on a :

$$\hat{\mu}_{j+1}(d, D, H) \geq f(d-j, f_j(d, D)) ,$$

ce que l'on voulait. Le Lemme 5.5 est donc entièrement établi. \square

Nous pouvons maintenant passer au contrôle de la série des $\hat{\mu}_j^\circ$:

PROPOSITION 5.6. *Soit V une sous-variété de G , de dimension $d \geq 1$, définie sur R . Alors pour $j = 1, \dots, d$ les points de $x \in V(\overline{\mathbb{Q}})$ de hauteur :*

$$\hat{h}(x) < \left(2^{2g+9d+54} \cdot d(V)^3 \cdot (\log(d(V) + 1))^2 \right)^{-4j-1}$$

appartiennent à une union de translatés de sous-tores de G de codimension $< j$ contenus dans V et de sous-variétés de codimension j dans V , définies sur R . Le degré de cette union est majoré par :

$$\left(2^{g+3d+18} \cdot d(V) \cdot (\log(d(V) + 1))^{\frac{2}{3}} \right)^{4j}$$

et sa hauteur normalisée par :

$$\frac{\hat{h}(V)}{d(V)} \cdot \left(2^{g+3d+19} \cdot d(V) \cdot (\log(d(V) + 1))^{\frac{2}{3}} \right)^{4j} .$$

En particulier :

$$\hat{\mu}_j^\circ(V) \geq \hat{\mu}_j^{\circ, \text{eff}}(V/R) \geq \left(2^{2g+9d+54} \cdot d(V)^3 \cdot (\log(d(V) + 1))^2 \right)^{-4j-1}$$

DÉMONSTRATION. Le Lemme 5.5 nous assure que les points de $V(\overline{\mathbb{Q}})$ de hauteur normalisée $< f(d-j+1, f_{j-1}(d, d(V)))$ appartiennent à un ensemble algébrique de la forme décrite dans la proposition, de degré majoré par $\mathcal{D}(j, d, d(V))$ et de hauteur normalisée majorée par $\mathcal{H}(j, d, d(V), \hat{h}(V))$. De plus, on a par définition $\hat{\mu}_j^\circ(V) \geq \hat{\mu}_j^{\circ, \text{eff}}(V/R)$. Pour établir la Proposition 5.6, il suffit

donc de majorer les fonctions \mathcal{D} , \mathcal{H} et de minorer $f(d - j + 1, f_{j-1}(d, d(V)))$. C'est ce que nous faisons.

Posons $c = (2^{8+46} \log(2)(4e)^{d+1}(d + 1)^2)^{\frac{1}{4}}$, on vérifie $\log(c) \leq 5g$, puis l'on montre par récurrence que pour $0 \leq i \leq d$,

$$(11) \quad c \cdot f_i(d, D) \leq (cD)^{6^i};$$

puis, pour $0 \leq i \leq d$ (avec la convention $f_{-1}(d, D) = 1$) :

$$(12) \quad \begin{aligned} f_i(d, D) &\leq \left(6^{d/2} c \cdot f_{i-1}(d, D)\right)^4 \cdot (\log(cD))^2 \\ &\leq \left(6^{d/2} c\right)^{\frac{4}{3}(4^i-1)} \cdot D^{4^i} \cdot (\log(cD))^{\frac{2}{3} \cdot (4^i-1)}. \end{aligned}$$

En reportant les majorations (11) et (12) dans la définition de f il vient, en tenant compte du Lemme 5.5 pour $j = 1, \dots, d$:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_j(d, D, H) &\geq \left(2^{42}(4e)^{d+1} \cdot f_{j-1}(d, D)^3 \cdot (\log(f_{j-1}(d, D) + 1))^2\right)^{-1} \\ &\geq \left(2^{42}(4e)^{d+1} \cdot (6^{\frac{d}{2}} c)^{4^{j-4}} \cdot D^{3 \cdot 4^{j-1}} \cdot (\log(cD))^{2 \cdot (4^{j-1}-1)} \cdot (6^d \log(cD))^2\right)^{-1} \\ &\geq \left((6^{d/2} \cdot c)^{4^j} \cdot D^{3 \cdot 4^{j-1}} \cdot (\log(cD))^{2 \cdot 4^{j-1}}\right)^{-1} \\ &\geq \left(2^{2g+45} \cdot (144e)^{d+1}\right)^{4^{j-1}} \cdot D^{3 \cdot 4^{j-1}} \cdot (\log(D + 1))^{2 \cdot 4^{j-1}}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Majorons maintenant la fonction \mathcal{D} :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(j, d, D) &= \sum_{i=1}^j f_i(d, D) \leq d \left(6^{d/2} c\right)^{\frac{4}{3}(4^j-1)} \cdot D^{4^j} \cdot (\log(cD))^{\frac{2}{3} \cdot (4^j-1)} \\ &\leq \left(2^{2g+45} \cdot (144e)^{d+1}\right)^{\frac{4}{3}j} \cdot D^{4^j} \cdot (\log(D + 1))^{\frac{2}{3} \cdot (4^j-1)}. \end{aligned}$$

Enfin, on a :

$$\mathcal{H}(j, d, D, H) \leq \frac{2^j H}{D} \left(2^{2g+45} \cdot (144e)^{d+1}\right)^{\frac{4}{3}j} \cdot D^{4^j} \cdot (\log(D + 1))^{\frac{2}{3} \cdot (4^j-1)},$$

et on remarque $144e \leq 2^9$.

Les majorations annoncées découlent aisément des estimations numériques ci-dessus, d'où la Proposition 5.6. □

On déduit le Théorème 1.3 de la Proposition 5.6 en prenant $j = d$.

Il nous reste à minorer la série des $\hat{\mu}_j^*(V)$. Pour cette dernière étape, on se restreint à $R = \mathbb{Q}$, le cas des variétés définies sur un corps de nombres $s'y$

ramenant en considérant le cycle des conjugués de la variété sur \mathbb{Q} . On note pour tout corps de nombres K :

$$m(K^*) = \inf \{h(x); x \in K^* \text{ qui n'est pas une racine de l'unité}\}.$$

On remarque alors :

$$\hat{\mu}_j^*(V) \geq \min \left(\hat{\mu}_j^{\circ, \text{eff}}(V/\mathbb{Q}); m(K^*) \right)$$

où le minimum est pris sur les extensions K de \mathbb{Q} de degré sur \mathbb{Q} majoré par :

$$\left(2^{g+3d+18} \cdot d(V) \cdot (\log(d(V) + 1))^{\frac{2}{3}} \right)^{4j}.$$

En effet, tout point x dont la hauteur est prise en compte dans la définition de $\hat{\mu}_j^*(V)$ et pas dans celle de $\hat{\mu}_j^{\circ}(V)$ appartient à un translaté $x + H$ d'un sous-tore H de G ; notons h sa dimension. Le cycle des conjugués de $x + H$ étant défini sur \mathbb{Q} et de degré au plus :

$$\left(2^{g+3d+18} \cdot d(V) \cdot (\log(d(V) + 1))^{\frac{2}{3}} \right)^{4j}.$$

La variété $x + H$ est donc définie sur une extension K de \mathbb{Q} , de degré majoré par cette même quantité. D'après le Lemme 2.10, il existe une isogénie de \mathbb{G}_m^g vers \mathbb{G}_m^{g-h} envoyant $x + H$ sur un point $y \in \mathbb{G}_m^{g-h}$ défini sur K , on en déduit que la hauteur de x est minorée par celle de y et donc par $m(K^*)$.

Enfin, il résulte du théorème de Dobrowolski (voir [Vo] pour la valeur de la constante numérique la plus récente) qu'on a la minoration, sitôt que $[K : \mathbb{Q}] \geq 3$:

$$m(K^*) \geq \frac{1}{4} \cdot ([K : \mathbb{Q}] \cdot (\log([K : \mathbb{Q}] + 1))^3)^{-1},$$

on peut donc énoncer :

PROPOSITION 5.7. *Soit V une sous-variété de G , de dimension d , définie sur \mathbb{Q} et \mathbb{Q} -irréductible, alors :*

$$\hat{\mu}_j^*(V) \geq \left(2^{2g+3d+22} \cdot d(V) \cdot (\log(d(V) + 1))^2 \right)^{-4j}.$$

On en déduit le Théorème 1.5 pour $j = d + 1$.

6. – Appendice : une preuve Théorème 4.6

Comme promis au Paragraphe 4.2, nous donnons maintenant une preuve «élémentaire» du Théorème 4.6. Cette dernière repose principalement sur le lemme de géométrie des nombres qui suit. Dans tout ce paragraphe, nous reprenons les notations du Paragraphe 4.2, avec $R = \mathbb{Q}$.

LEMME 6.1. *Soient I un idéal homogène premier de A et $d = \dim \mathcal{Z}(I)$; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une forme $p \in A \setminus I$ satisfaisant :*

$$\frac{h_I(p)}{d^\circ p} \leq -\frac{h(I)}{(d+1)d(I)} + \varepsilon \leq -\mu_{d+1}(I) + \varepsilon .$$

DÉMONSTRATION. Posons $A_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n]$ et $I_{\mathbb{Z}} = I \cap A_{\mathbb{Z}}$, on sait d'après [B-G-S] ou [Ab-Bo] que la fonction de Hilbert arithmétique de I :

$$-\log \text{covol}((A_{\mathbb{Z}}/I_{\mathbb{Z}})_{\delta}) ,$$

où le covolume est calculé pour la norme $\sup_{x \in \mathcal{Z}(I_{\mathbb{Z}})} \frac{|p(x)|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}^{d^\circ p}}$, est minorée par :

$$\frac{h(I_{\mathbb{Z}})\delta^{d+1}}{(d+1)!} + O(\delta^d \log(\delta)) .$$

D'après le théorème de Minkowski, il existe donc pour δ assez grand une forme $p \in (A_{\mathbb{Z}})_{\delta} \setminus (I_{\mathbb{Z}})_{\delta}$ telle que :

$$\begin{aligned} h_I(p) &\leq \sup_{x \in \mathcal{Z}(I_{\mathbb{Z}})} \frac{|p(x)|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}^{d^\circ p}} \leq \frac{\log \text{covol}((A_{\mathbb{Z}}/I_{\mathbb{Z}})_{\delta})}{\dim(A/I)_{\delta}} + O(\log(\dim(A/I)_{\delta})) \\ &\leq -\frac{h(I)\delta}{(d+1)d(I)} + O(\log(\delta)) , \end{aligned}$$

car la fonction de Hilbert géométrique $\dim((A/I)_{\delta})$ est minorée par : $\frac{d(I_{\mathbb{Z}})\delta^d}{d!} + O(\delta^{d-1})$, et puisque $\frac{h(I_{\mathbb{Z}})}{d(I_{\mathbb{Z}})} = \frac{h(I)}{d(I)}$. Le résultat s'en déduit en prenant δ assez grand. □

THÉORÈME 6.2. *Soit I un idéal homogène de A dont tous les premiers minimaux sont de même rang et $d = \dim \mathcal{Z}(I)$, alors :*

$$\frac{h(I)}{(d+1)d(I)} \geq \mu_{d+1}(I) .$$

DÉMONSTRATION. Comme $\mu_{d+1}(I) = \inf \mu_{d+1}(p)$, où l'infimum porte sur les premiers minimaux de I , on peut se restreindre à prouver l'inégalité lorsque I est premier ; c'est ce que nous faisons. On procède par récurrence sur la dimension d de $\mathcal{Z}(I)$, lorsque $d = 0$ on a $\mathcal{Z}(I) = \{x\}$, $d(I) = 1$ et $\mu_{d+1}(I) = h(x) = h(I)$.

Supposons maintenant le résultat établi pour tout idéal J dont tous les premiers minimaux sont de même rang et tel que $\dim \mathcal{Z}(J) < d$. D'après le Lemme 6.1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une forme $q \in A \setminus I$ satisfaisant :

$$\frac{h_I(q)}{d^\circ q} \leq -\frac{h(I)}{(d+1)d(I)} + \varepsilon.$$

Posons $J = I + qA$, on a $\dim \mathcal{Z}(J) = d-1$ et le théorème de Bézout arithmétique s'écrit :

$$\frac{h(J)}{d(J)} \leq \frac{h(I)}{d(I)} + \frac{h_I(q)}{d^\circ q} \leq \frac{dh(I)}{(d+1)d(I)} + \varepsilon.$$

D'un autre côté, on a $\mu_{d+1}(I) \leq \mu_{d+1}(J)$ car $\mathcal{Z}(J) \subset \mathcal{Z}(I)$ et on peut donc écrire par hypothèse de récurrence :

$$\frac{h(I)}{(d+1)d(I)} \geq \frac{h(J)}{d.d(J)} - \frac{\varepsilon}{d} \geq \mu_{d+1}(J) - \frac{\varepsilon}{d} \geq \mu_{d+1}(I) - \frac{\varepsilon}{d};$$

ces inégalités étant valables pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit le Théorème 6.2. \square

DÉMONSTRATION « ÉLÉMENTAIRE » DU THÉORÈME 4.6. L'inégalité de droite est déjà établie de façon « élémentaire » dans [Da-Phi], Paragraphe 3. L'inégalité de gauche résulte pour sa part du Théorème 6.2 appliqué à l'idéal homogène

$$I_{\mathbb{Q}} = I \cap \mathbb{Q}[X_0, \dots, X_n]$$

car on a $\mu_{d+1}(I_{\mathbb{Q}}) = \mu_{d+1}(I)$ et $\frac{h(I)}{d(I)} = \frac{h(I_{\mathbb{Q}})}{d(I_{\mathbb{Q}})}$. \square

REFERENCES

- [Ab-Bo] A. ABBÈS – T. BOUCHE, *Théorème de Hilbert–Samuel « arithmétique »*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **317** (1993), 589-591 ; Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **45** (1995), 375-401.
- [Am-Da1] F. AMOROSO – S. DAVID, *Le problème de Lehmer en dimension supérieure*, Università di Torino, Quaderni Dipart. Mat. **39** (1997), 37 pp. ; J. Reine Angew. Math. À paraître.
- [Am-Da2] F. AMOROSO – S. DAVID, *Minoration de la hauteur normalisée des hypersurfaces*, Università di Torino, Quaderni Dipart. Mat. **47** (1998), 34 pp. ; Acta Arithmetica. À paraître.
- [B-G-S] J.-B. BOST – H. GILLET – C. SOULÉ, *Heights of projective varieties and positive Green forms*, J. Amer. Math. Soc. (4) **7** (1994), 903-1022.
- [Bo-Va] E. BOMBIERI – J. VAALER, *On Siegel's lemma*, Invent. Math. **73** (1983), 11-32.
- [Bo-Za1] E. BOMBIERI – U. ZANNIER, *Algebraic points on subvarieties of \mathbb{G}_m^n* , Internat. Math. Res. Notices **7** (1995), 333-347.
- [Bo-Za2] E. BOMBIERI – U. ZANNIER, *Heights of algebraic points on subvarieties of abelian varieties*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. **23** (1997), 779-792.

- [Ch] M. CHARDIN, *Une majoration de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique*, Bull. Soc. Math. France **117** (1989), 305-318.
- [Ch-Ph] M. CHARDIN – P. PHILIPPON, *Régularité et interpolation*, J. Algebraic Geom. À paraître, 1998.
- [Da-Phi] S. DAVID – P. PHILIPPON, *Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes*, In: “Number Theory, Tiruchirapalli 1996” V. K. MURTY – M. WALDSCHMIDT éditeurs, Contemp. Math. 210 (1997), pp. 333-364.
- [Ei] D. EISENBUD, “Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry”, Graduate Text in Math. 150, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1995.
- [Gr-Ha] P. GRIFFITHS – J. HARRIS, “Principles of Algebraic Geometry”, Wiley-Interscience, 1978.
- [Lau] M. LAURENT, *Hauteur de matrices d'interpolation*, In: “Approximations Diophantiennes et Nombres Transcendants, Luminy 1990”, P. PHILIPPON éditeur, W. de Gruyter & Co., Berlin-New York, 1992, pp. 215-238.
- [Law] W. LAWTON, *A generalisation of a theorem of Kronecker*, J. Sci. Fac. Chiangmai Univ. **4** (1977), 15-23.
- [No] D. G. NORTHCOTT, “Lessons on Rings, Modules and Multiplicities”, Cambridge Univ. Press, 1968.
- [Ph1] P. PHILIPPON, *Sur des hauteurs alternatives I ; II ; III*, Math. Ann. **289** (1991), 255-283 ; Ann. Inst. Fourier (Grenoble) (4) **44** (1994), 1043-1065 ; J. Math. Pures Appl. (4) **74** (1995), 345-365.
- [Ph2] P. PHILIPPON, “Quatre exposés sur la théorie de l'élimination”, Publ. Lab. Math. Discrètes, C.I.R.M., Luminy, 1994.
- [Re] G. RÉMOND, “Sur des problèmes d'effectivité en géométrie diophantienne”, Thèse, Univ. P. et M. Curie, 1997.
- [Ro-Th] D. ROY – J. L. THUNDER, *An absolute Siegel's lemma*, J. Reine Angew. Math. **476** (1996), 1-26.
- [Sc1] W. M. SCHMIDT, “Diophantine Approximations and Diophantine Equations”, Lecture Notes in Math. 1467, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1991.
- [Sc2] W. M. SCHMIDT, *Heights of Points on Subvarieties of \mathbb{G}_m^n* , In: “Number Theory 93-94”, S. DAVID éditeur, London Math. Soc. Ser. 235, Cambridge University Press, 1996.
- [Ul] E. ULLMO, *Positivité et discrétion des points algébriques des courbes*, Ann. of Math. (1) **147** (1996), 81-95.
- [Vo] P. VOUTIER, *An effective lower bound for the height of algebraic numbers*, Acta. Arith. (1) **74** (1998), 167-179.
- [Zh1] S. ZHANG, *Positive line bundles on arithmetic varieties*, J. Amer. Math. Soc. (1) **8** (1995), 187-221.
- [Zh2] S. ZHANG, *Small points and adelic metrics*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), 281-300.
- [Zh3] S. ZHANG, *Equidistribution of small points on abelian varieties*, Ann. of Math. (1) **147** (1998), 159-165.

UMR 7586 du CNRS. — UFR 921
 Problèmes Diophantiens
 Tour 46-56, 5-ème étage, case 247
 Université Pierre et Marie Curie
 4, Place Jussieu
 75252 Paris cedex 05, France