ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ISABELLE REIZNER

Analyticité globale pour $\bar{\partial}_b$ sur certaines hypersurfaces compactes de $\mathbb{C}^n$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 24, nº 4 (1997), p. 719-746

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1997_4_24_4_719_0>

Analyticité globale pour $\overline{\partial}_b$ sur certaines hypersurfaces compactes de $\mathbb{C}^n$

ISABELLE REIZNER

Résumé

Soit Ω un domaine borné pseudo-convexe de C^n dont le bord $\partial\Omega$ est analytique réel. Notons $\mathbb{L}$ le fibré holomorphe tangent. Nous supposons qu'il existe un champ de vecteurs T global, analytique réel et tangent à $\partial\Omega$ tel que:

1. $(T, \mathbb{L}, \bar{\mathbb{L}})$ engendrent $T\partial\Omega \otimes \mathbb{C}$.
2. $[T, \mathbb{L}] \subset \mathbb{L}$.
3. $(Tu, v) = (u, Tv) \quad \forall u, v \in C^\infty(\partial\Omega)$.

Alors, sous ces conditions, on prouve la régularité analytique globale de la solution canonique de l'équation $\bar{\partial}_b u = f$ sur $\partial\Omega$, où f est une $(0, q)$ forme telle que $1 \leq q \leq n-1$.

Abstract

Consider Ω, a bounded pseudo-convex domain in C^n, with real analytic boundary. Let $\mathbb{L}$ the holomorphic tangent fiber bundle to $\partial\Omega$. We assume that there exists a global vector field T, tangent to $\partial\Omega$ and real analytic such that:

1. $(T, \mathbb{L}, \bar{\mathbb{L}})$ span $T\partial\Omega \otimes \mathbb{C}$.
2. $[T, \mathbb{L}] \subset \mathbb{L}$.
3. $(Tu, v) = (u, Tv) \quad \forall u, v \in C^\infty(\partial\Omega)$.

Under theses conditions, we have global real analytic regularity of the canonical solution of the equation $\bar{\partial}_b u = f$ on $\partial\Omega$, where f is a $(0, q)$-form with $1 \leq q \leq n-1$.

1. – Introduction

Nous allons montrer que sous certaines conditions, on obtient la régularité analytique réelle globale de la solution canonique de l'équation $\bar{\partial}_b u = f$ sur le bord d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, borné et analytique réel, avec f une $(0, q)$ forme telle que $1 \leq q \leq n-1$. La régularité analytique locale dans le cas des domaines

Pervenuto alla Redazione il 27 marzo 1996 e in forma definitiva il 18 ottobre 1996.
MATHEMATICS SUBJECT CLASSIFICATION (1991): 32F20.

strictement pseudoconvexes a été démontrée pour les $(0, q)$ formes, avec $1 \leq q \leq n-3$ indépendamment par D. S. Tartakoff [10], [11] et F. Trèves [12]; le cas global pour $\bar{\partial}_b$ a été étudié par M. Derridj et D. S. Tartakoff pour les (0, 1) formes, dans une série d'articles (voir par exemple une bibliographie plus complète dans [5]). De plus Michael Christ a montré dans [2] l'existence de domaines pseudo-convexes bornés à bord analytique réel qui ne satisfont pas la régularité analytique globale pour $\bar{\partial}_b$. Dans un récent article [5] M. Derridj et D. S. Tartakoff se sont intéressés à l'étude de l'analyticité globale de la solution canonique de $\bar{\partial}_b u = f$ sur le bord d'un domaine Ω pseudo-convexe de $\mathbb{C}^2$ à bord analytique réel, où les seules conditions imposées sont les suivantes:

1. u est dans l'image de $\bar{\partial}_b^*$.
2. Si L est un champ de vecteurs holomorphe tangent à $\partial\Omega$, alors il existe un champ de vecteurs T global, analytique réel et imaginaire pur tel que $(L, \bar{L}, T)$ forment une base de $\mathbb{C}\mathrm{T}(\partial\Omega)$ et tel que: $[T, L] \equiv 0$ modulo $\mathrm{T}^{1,0} + \mathrm{T}^{0,1}$

Ici, nous allons généraliser à $\mathbb{C}^n$ (pour des formes de degré inférieur ou égal à $n-2$) le travail fait par M. Derridj et D. S. Tartakoff. Nous allons en fait montrer la régularité analytique réelle globale de la solution canonique de l'équation $\bar{\partial}_b u = f$ sur le bord d'un domaine Ω borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière analytique réelle, qui vérifie les conditions suivantes:

Notons $\mathbb{L}$ le fibré holomorphe tangent. Nous supposons qu'il existe un champ de vecteurs T analytique réel, global et tangent à $\partial\Omega$ tel que:

1. $(T, \mathbb{L}, \bar{\mathbb{L}})$ engendrent $\mathrm{T}\partial\Omega \otimes \mathbb{C}$
2. $[T, \mathbb{L}] \subset \mathbb{L}$.
3. Si $(\ ,\ )$ est le produit scalaire de $L^2(\partial\Omega)$ induit par $\mathbb{C}^n$, on suppose

$$(Tu, v) = (u, Tv) \quad \forall u, v \in C^\infty(\partial\Omega)\,.$$

Des exemples de domaines dont la forme de Levi dégénère et vérifiant la première hypothèse ont été donnés par M. Derridj dans [3], puis plus tard S. C. Chen dans [1] a montré que les domaines de Reinhardt pseudo-convexes, à frontière analytique réelle, satisfont à l'existence du champ T, vérifiant la première hypothèse.

2. – Notations et définitions

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, pseudo-convexe, à frontière analytique réelle, c'est-à-dire que $\Omega = \{r < 0\}$ avec r analytique réelle telle que $dr \neq 0$ sur $\{r = 0\} = \partial\Omega$.

DÉFINITION 1. Un champ de vecteurs L est dit holomorphe de classe C^∞

s'il peut s'écrire sous la forme:

$$L = a_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial z_n}, \quad \text{où} \quad a_i \in C^\infty .$$

DEFINITION 2. Soit $p \in \partial\Omega$; un champ de vecteurs L est dit tangentiel à $\partial\Omega$ sur un voisinage U de p, si à chaque point de $\partial\Omega \cap U$ il est tangent à $\partial\Omega$, c'est-à-dire:

$$L(r)(z) = 0 \quad \text{si} \quad r(z) = 0, z \in U .$$

Sur un voisinage U de $p \in \partial\Omega$, il existe $(L_1, \dots, L_{n-1}, L_n)$ un système libre de champs de vecteurs holomorphes et analytiques réels tels que $L_1, \dots, L_{n-1}$ soient tangentiels à $\partial\Omega$ sur U. Soit $(w_1, \dots, w_n)$ une famille de $(1,0)$ formes duales aux champs $(L_1, \dots, L_n)$.

Par exemple sur un voisinage U de $0 \in \partial\Omega$ où $\frac{\partial r}{\partial z_n}(0) \neq 0$ on peut choisir:

$$L_k = \frac{\partial r}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial z_n} - \frac{\partial r}{\partial z_n}\frac{\partial}{\partial z_k}, \quad k = 1, \dots, n-1$$

$$L_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial \bar z_j}\frac{\partial}{\partial z_j}$$

Remarque: si $n = 2$, on peut trouver un champ de vecteurs L_1 global qui soit holomorphe et tangent à $\partial\Omega$:

$$L_1 = \frac{\partial r}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial r}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}$$

et un champ de vecteurs L_2 transverse, donné par:

$$L_2 = \frac{\partial r}{\partial \bar z_1}\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial r}{\partial \bar z_2}\frac{\partial}{\partial z_2} .$$

Soit u une $(0,q)$ forme $(0 \le q \le n)$, alors u s'écrit sur U:

$$u = \sum_{|J|=q} u_J \bar\omega_J \quad \text{où} \quad \bar\omega_J = \bar\omega_{j_1} \wedge \ldots \wedge \bar\omega_{j_q} \quad (1 \le j_1 < \cdots < j_q \le n) .$$

Notation: $(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$ est une base de (1,0) formes sur $\partial\Omega \cap U$. Alors une $(0,q)$ forme sur $\partial\Omega \cap U$ s'écrit:

$$u = \sum_{|J|=q} u_J \bar\omega_J \quad \text{où} \quad 0 \le q \le n-1$$

et $\bar\omega_J = \bar\omega_{j_1} \wedge \ldots \wedge \bar\omega_{j_q} \quad (1 \le j_1 < \cdots < j_q \le n-1)$.

On note alors $\bar\partial_b$ la restriction de l'opérateur $\bar\partial$ au $(0, q)$ formes sur $\partial\Omega$ (voir ci-dessous).

Explicitons $\bar\partial_b u$ dans le cas où u est une $(0, q)$ forme avec $(0 \leq q \leq n-2)$.

Remarque: Si u est une $(0, n-1)$ forme sur $\partial\Omega$, alors $\bar\partial_b u = 0$ et de plus u s'identifie à une fonction.

Localement, on peut écrire sur $U \cap \partial\Omega$: $u = \sum_{|J|=q} u_J \bar\omega_J$ alors,

$$\bar\partial_b u = \sum_{|J|=q} \bar\partial_b(u_J \bar\omega_J) = \sum_{|J|=q} [(\bar\partial_b u_J)\bar\omega_J + u_J \bar\partial_b \bar\omega_J]$$

$$\bar\partial_b u = \sum_{\substack{|J|=q \\ k \notin J}} \left[\bar L_k u_J \bar\omega_k \wedge \bar\omega_J + u_J \bar\partial_b \bar\omega_J\right]$$

Notation: on note $\mathcal{E}^{kJ}_{(kJ)} = (-1)^N$ où N est le nombre de transpositions pour passer de kJ à (kJ) où (kJ) est ordonné; et on note

$$\mathcal{E}^{kJ}_L = \begin{cases} \mathcal{E}^{kJ}_{(kJ)} & \text{si } L = (kJ) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(Voir L. Hörmander [7] et G. B. Folland-J. J. Kohn [6]).

Alors:

$$\bar\partial_b u = \sum_{\substack{|L|=q+1 \\ |J|=q \\ k \leq n-1}} \left[\mathcal{E}^{kJ}_L \bar L_k u_J \bar\omega_L + u_J \bar\partial_b \bar\omega_J\right].$$

Définissons les $\lambda^{k,l}_j$ par:

$$\bar\partial_b \bar\omega_j = \sum_{\substack{k<l \\ k,l \in \{1,\dots,n-1\}}} \lambda^{k,l}_j \bar\omega_k \wedge \bar\omega_l \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq j \leq n-1. \tag{1}$$

Alors:

$$\bar\partial_b \bar\omega_J = \sum_{|L|=q+1} \alpha^L_J \bar\omega_L \ \text{ pour tout } \ |J| = q$$

où α^L_J est une combinaison linéaire à coefficients constants des $\lambda^{k,l}_j$ donc,

$$\bar\partial_b u = \sum_{|L|=q+1} \left(\sum_{\substack{|J|=q \\ k \leq n-1}} \left[\mathcal{E}^{kJ}_L \bar L_k u_J + \alpha^L_J u_J\right] \right) \bar\omega_L. \tag{2}$$

La famille $(L_1, \ldots, L_n)$ a été définie localement, c'est-à-dire que pour tout $p \in \partial\Omega$ il existe un voisinage U de p sur lequel on définit les champs de vecteurs $(L_1, \ldots, L_n)$. On sait que $\partial\Omega$ est compact, il existe alors une famille finie d'ouverts $(V_i)_{i=1\ldots N}$ telle que $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N V_i$ et telle que sur chacun des V_i on a une base $(L_1^i, \ldots, L_{n-1}^i)$ de champs de vecteurs holomorphes tangents à $\partial\Omega$ et une base duale $(\omega_1^i, \ldots, \omega_{n-1}^i)$.

Remarque: on notera dans toute la suite $\| \,.\, \|$ la norme $L^2(\partial\Omega)$.

Considérons les hypothèses suivantes:

H₁ (Hypothèse de commutation): Notons $\mathbb{L}$ le fibré holomorphe tangent. Nous supposons qu'il existe un champ de vecteurs T tangent à $\partial\Omega$ qui est global, et analytique réel tel que:
1. $(T, \mathbb{L}, \bar{\mathbb{L}})$ engendrent $\mathrm{T}\partial\Omega \otimes \mathbb{C}$.
2. $[T, \mathbb{L}] \subset \mathbb{L}$.

$\mathbf{H_2}$: $T = T^*$ c'est-à-dire $(u, Tv) = (Tu, v) \quad \forall u, v \in C^\infty_{(0,q)}(\partial\Omega)$, où $(\ ,\ )$ est le produit scalaire de $L^2(\partial\Omega)$ induit par celui de $\mathbb{C}^n$.

3. – Résultats

THÉORÈME 1. *Supposons les hypothèses* $\mathbf{H_1}$ *et* $\mathbf{H_2}$ *satisfaites. Soit u la solution canonique de l'équation $\bar\partial_b u = f$ où f est une $(0, q+1)$ forme avec $0 \le q \le n-2$, alors si f est analytique réelle sur $\partial\Omega$, u l'est aussi.*

Pour démontrer ce théorème il suffit en fait de démontrer le Théorème 2 suivant:

Considérons l'hypothèse suivante:

$\mathbf{H_1'}$: Il existe un champ de vecteurs T tangent à $\partial\Omega$ et analytique réel, un recouvrement $(V_i)_{i=1\cdots N}$ de $\partial\Omega$, une base de champs de vecteurs, analytiques réels, holomorphes, tangents à $\partial\Omega$ sur V_i que l'on note $(L_1^i, \ldots, L_{n-1}^i)$ et une constante e tels que:

$$\begin{cases} \left(L_1^i, \ldots, L_{n-1}^i, \bar{L}_1^i, \ldots, \bar{L}_{n-1}^i, T\right) & \text{est une base de } \mathbb{C}T(V_i) \\ \left[T, \bar{L}_k^i\right] = e\bar{L}_k^i & \text{pour tout } 1 \le k \le n-1\,. \end{cases}$$

THÉORÈME 2. *Supposons les hypothèses* $\mathbf{H_1'}$ *et* $\mathbf{H_2}$ *satisfaites. Soit u la solution canonique de $\bar\partial_b u = f$ où f est une $(0, q+1)$ forme avec $0 \le q \le n-2$, alors si f est analytique réelle sur $\partial\Omega$, u l'est aussi.*

Nous dirons qu'un domaine qui vérifie $[T, \mathbb{L}] \subset \mathbb{L}$ est globalement transitif pour T.

Démontrons que les domaines globalement transitifs pour T vérifient l'hypothèse $\mathbf{H_1'}$ avec le même champ T.

Sur V_i, notons b^i_{kq} les coefficients de $[T, L^i_k]$, $1 \leq k \leq n-1$, sur la base $\left(L^i_1, \dots, L^i_{n-1}\right)$, c'est-à-dire:

$$\left[T, L^i_k\right] = \sum_{q=1}^{n-1} b^i_{kq} L^i_q \quad \text{sur} \quad V_i\,.$$

On cherche alors un recouvrement $(V'_j)_{1\leq j\leq M}$ de $\partial\Omega$ et une base de champ de vecteurs analytiques réels, holomorphes, tangents à $\partial\Omega$ sur V'_j, $(\tilde{L}^j_1, \dots, \tilde{L}^j_{n-1})$ tels que:

$$(3) \qquad \begin{cases} \left(\tilde{L}^j_1, \dots, \tilde{L}^j_{n-1}, \bar{\tilde{L}}^j_1, \dots, \bar{\tilde{L}}^j_{n-1}, T\right) & \text{est une base de} \quad \mathbb{C}T(V'_j) \\ \left[T, \tilde{L}^j_k\right] = \tilde{L}^j_k & \end{cases}$$

(c'est-à-dire que l'on peut même prendre $e = 1$ dans l'hypothèse $\mathbf{H}'_1$).

Soit $P \in \partial\Omega$; alors il existe un voisinage U de P et un entier i, $1 \leq i \leq n-1$ tel que $U \subset V_i$ et sur U on a:

$$\tilde{L}_k = \sum_{p=1}^{n-1} a^i_{kp} L^i_p \quad \forall k, \quad 1 \leq k \leq n-1\,.$$

On cherche un voisinage V'_P de P et une famille de champs de vecteurs holomorphes, analytiques réels et tangents à $\partial\Omega$, $(\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_{n-1})$ sur V'_P formant une base de $\mathbb{C}T(V'_P)$ et qui vérifie (3). Or la famille précédente forme une base sur V'_P si $\det(a^i_{kp}) \neq 0$ sur V'_P. On aura ainsi trouvé un (bon) recouvrement $(V'_P)_{P\in\partial\Omega}$ de $\partial\Omega$ dont on peut extraire un recouvrement fini.

Notons $(x, y, t) = (x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}, t)$ un système de coordonnées locales autour de P tel que $T = i\partial_t$. Alors b^i_{kq} est analytique réel sur V_i, c'est-à-dire:

$$b^i_{kq}(x, y, t) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} b^i_{k,q,\alpha,\beta,\gamma} x^\alpha y^\beta t^\gamma$$

avec $\forall K \subset\subset V_i$, $\exists B_K$, $\mid b^i_{k,q,\alpha,\beta,\gamma} \mid \leq B_K^{\alpha+\beta+\gamma+1}$. On obtient alors:

$$\begin{aligned} [T, \tilde{L}_k] &= \left[T, \sum_{p=1}^{n-1} a^i_{kp} L^i_p\right] \\ &= \sum_{p=1}^{n-1} a^i_{kp} \left[T, L^i_p\right] + \sum_{p=1}^{n-1} T(a^i_{kp}) L^i_p \\ &= \sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=1}^{n-1} a^i_{kp} b^i_{pq} L^i_q + \sum_{p=1}^{n-1} T(a^i_{kp}) L^i_p \end{aligned}$$

On doit donc avoir d'après (3):

$$\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=1}^{n-1} a^i_{kp} b^i_{pq} L^i_q + \sum_{p=1}^{n-1} T(a^i_{kp}) L^i_p = \sum_{p=1}^{n-1} a^i_{kp} L^i_p .$$

Donc pour chaque couple (k, i) fixé, $1 \le k \le n-1$ et $1 \le i \le N$, on obtient un système linéaire de $n-1$ équations aux dérivées partielles avec $n-1$ inconnues: (a^i_{kp}), $p \in \{1, \dots, n-1\}$.

$$(S_{k,i}) : \begin{cases} T(a^i_{k1}) + \sum_{r=1}^{n-1} a^i_{kr} b^i_{r1} - a^i_{k1} = 0 \\ \vdots \\ T(a^i_{kp}) + \sum_{r=1}^{n-1} a^i_{kr} b^i_{rp} - a^i_{kp} = 0 \\ \vdots \\ T(a^i_{k,n-1}) + \sum_{r=1}^{n-1} a^i_{kr} b^i_{r,n-1} - a^i_{k,n-1} = 0 . \end{cases}$$

Il suffit donc de résoudre sur un voisinage de P un problème de Cauchy avec des conditions de Cauchy assurant que $\det(a^i_{kp}) \neq 0$.

On cherche des solutions de $(S_{k,i})$ analytiques réelles au voisinage de P, c'est-à-dire: telles que sur un voisinage compact K de P, il existe une constante $C_K > 0$ vérifiant:

$$a^i_{kr}(x, y, t) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} a^i_{k,r,\alpha,\beta,\gamma} x^\alpha y^\beta t^\gamma, \quad \text{avec} \quad | a^i_{k,r,\alpha,\beta,\gamma} | \le C_K^{\alpha+\beta+\gamma+1} \quad \forall \alpha, \beta, \gamma$$

(on peut supposer $T = \partial_t$ au lieu de $i\partial_t$).

Prenons les conditions de Cauchy suivantes:

Sur $\{t = 0\} \cap U$, $a^i_{kr} = \phi^i_{kr}$, où ϕ^i_{kr} est analytique réelle sur $\{t = 0\} \cap U$ et $\phi^i_{kr}(P) = \delta_{kr}, \forall k, r$ (δ_{kr} étant le symbole de Kronecker). Alors le déterminant de la matrice $\left(\phi^i_{kr}(P)\right)_{k,r}$ vaut 1.

Une application du théorème de Cauchy-Kovalevsky nous donne l'existence d'une solution au problème précédent. De plus, comme en P, $\det(\phi^i_{kr}(P))_{k,r} = 1$, alors dans un petit voisinage de P on obtient les $\tilde{L}$.

Mais pour être complet, nous pouvons donner dans notre cas particulier (avec $T = \partial_t$), une démonstration de l'existence (unique) et de l'estimation suivante:

Il existe des $a^i_{k,r,\alpha,\beta,\gamma}$ et une constante $C > 0$ telle que:

$$\left| a^i_{k,r,\alpha,\beta,\gamma} \right| \le C^{\alpha+\beta+\gamma+1} \, \forall \alpha, \beta, \gamma . \tag{4}$$

Démontrons (4) par récurrence sur $|\gamma|$:

Supposons que pour un entier γ, on a:

$$| a^i_{k,r,\alpha,\beta,\gamma} | \leq C^{\alpha+\beta+\gamma+1} \quad \forall \alpha, \beta$$

et montrons l'existence de $a^i_{k,r,\alpha,\beta,\gamma+1}$ ainsi que l'inégalité (4) pour $\gamma+1$.

• Pour $\gamma = 0$, les conditions de Cauchy nous donne le résultat, en effet, nous savons que $\sum_{\alpha,\beta} a^i_{k,r,\alpha,\beta,0} x^\alpha y^\beta$ converge pour $\{| x | < \varepsilon_1 ; | y | < \varepsilon_2\}$, alors il existe une constante A telle que:

$$| a^i_{k,r,\alpha,\beta,0} | \leq A^{\alpha+\beta+1}, \quad \forall \alpha, \beta \quad \text{et} \quad \forall 1 \leq r \leq n-1 .$$

• Pour $1 \leq p \leq n-1$, on a:

$$T\left(\sum_{\alpha,\beta,\gamma} a^i_{k,p,\alpha,\beta,\gamma} x^\alpha y^\beta t^\gamma\right) + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} a^i_{k,r,\alpha,\beta,\gamma} x^\alpha y^\beta t^\gamma \sum_{\alpha,\beta,\gamma} b^i_{r,p,\alpha,\beta,\gamma} x^\alpha y^\beta t^\gamma \\ - \sum_{\alpha,\beta,\gamma} a^i_{k,p,\alpha,\beta,\gamma} x^\alpha y^\beta t^\gamma = 0 .$$

C'est-à-dire, puisque $T = \partial_t$:

$$(\gamma+1) a^i_{k,p,\alpha,\beta,\gamma+1} + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{\substack{\alpha_1 \leq \alpha \\ \beta_1 \leq \beta \\ \gamma_1 \leq \gamma}} a^i_{k,r,\alpha-\alpha_1,\beta-\beta_1,\gamma-\gamma_1} b^i_{r,p,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1} - a^i_{k,p,\alpha,\beta,\gamma} = 0 \quad \forall \alpha, \beta .$$

Soit, pour tout α et β, on a:

$$a^i_{k,p,\alpha,\beta,\gamma+1} = \frac{1}{\gamma+1}\left[a^i_{k,p,\alpha,\beta,\gamma} - \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{\substack{\alpha_1 \leq \alpha \\ \beta_1 \leq \beta \\ \gamma_1 \leq \gamma}} a^i_{k,r,\alpha-\alpha_1,\beta-\beta_1,\gamma-\gamma_1} b^i_{r,p,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1}\right] .$$

Cette égalité nous donne l'existence par récurrence. Montrons l'estimation (4) pour $\gamma+1$. Nous avons vu qu'il existe une constante B telle que $| b^i_{r,p,\alpha,\beta,\gamma} | \leq B^{\alpha+\beta+\gamma+1}$ sur $V \subset\subset U$, on obtient alors:

$$| a^i_{k,p,\alpha,\beta,\gamma+1} | \leq \frac{1}{\gamma+1}\left[C^{\alpha+\beta+\gamma+1} + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{\substack{\alpha_1 \leq \alpha \\ \beta_1 \leq \beta \\ \gamma_1 \leq \gamma}} C^{(\alpha-\alpha_1)+(\beta-\beta_1)+(\gamma-\gamma_1)+1} B^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+1}\right]$$

$$\leq C^{\alpha+\beta+\gamma+2}\left[\frac{1}{\gamma+1}\left(\frac{1}{C} + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{\substack{\alpha_1 \leq \alpha \\ \beta_1 \leq \beta \\ \gamma_1 \leq \gamma}} \left(\frac{B}{C}\right)^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+1}\right)\right]$$

Si on choisit C assez grand par rapport à B, on a:

$$\frac{1}{\gamma+1}\left(\frac{1}{C}+\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{\substack{\alpha_1\leq\alpha\\ \beta_1\leq\beta\\ \gamma_1\leq\gamma}}\left(\frac{B}{C}\right)^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+1}\right)\leq 1\,.$$

Donc:

$$\mid a^i_{k,p,\alpha,\beta,\gamma+1}\mid\leq C^{\alpha+\beta+\gamma+2}\,.$$

Finalement, pour tout entier $1\leq k\leq n-1$, le système $S_{k,i}$ admet une solution $(a^i_{k1},\dots,a^i_{k,n-1})$ avec a^i_{kr} analytique réelle dans un voisinage de P. C'est-à-dire qu'il existe un voisinage de P sur lequel la famille $(\tilde L_1,\dots,\tilde L_{n-1})$ forme une base de champs de vecteurs holomorphes, tangents à $\partial\Omega$ et analytiques réels. Ce qui nous donne le résultat.

4. – Démonstration du Théorème 2

Pour la démonstration du Théorème 2, nous allons prouver les propositions suivantes:

PROPOSITION 1. *Notons $\bar\partial_b^*$ l'adjoint de $\bar\partial_b$ au sens $L^2(\partial\Omega)$ et* $\ker(\bar\partial_b)$ *le noyau de $\bar\partial_b$ au sens $L^2(\partial\Omega)$, alors sous les hypothèses* $\mathbf{H_1}$ *et* $\mathbf{H_2}$*, on a:*

$$g\in\left(\ker(\bar\partial_b)\right)^{\perp}\Longrightarrow T^k g\in\left(\ker(\bar\partial_b)\right)^{\perp},\quad\forall k\in\mathbb{N}\,.$$

Pour la démonstration de la Proposition 1 on a besoin du lemme suivant:

LEMME 1. *Avec les notations précédentes du Paragraphe* 2*, on a:* $T(\alpha^L_J)=e\alpha^L_J$.

DÉMONSTRATION. Travaillons sur une carte V, avec la famille de champs de vecteurs $(L_1,\dots,L_{n-1})$ correspondants.

Définissons les fonctions $\beta^j_{p,q}$ par:

$$\left[\bar L_p,\bar L_q\right]=\sum_{j=1}^{n-1}\beta^j_{p,q}\bar L_j\quad\forall\,1\leq p,q\leq n-1\,.$$

Alors:

$$\left(\bar\partial_b\bar\omega_j,(\bar L_p,\bar L_q)\right)=-\left(\bar\omega_j,[\bar L_p,\bar L_q]\right)+\bar L_p\left(\langle\bar\omega_j,\bar L_q\rangle\right)-\bar L_q\left(\langle\bar\omega_j,\bar L_p\rangle\right)$$

or, $\bar L_p\left(\langle\bar\omega_j,\bar L_q\rangle\right)=0$ et $\bar L_q\left(\langle\bar\omega_j,\bar L_p\rangle\right)=0$, donc:

$$\left(\bar\partial_b\omega_j,(\bar L_p,\bar L_q)\right)=-\left(\bar\omega_j,\sum_{i=1}^{n-1}\beta^i_{p,q}\bar L_i\right)=-\beta^j_{p,q}$$

de plus on peut écrire d'après (1): $(\bar\partial_b\bar\omega_j, (\bar L_p, \bar L_q)) = \left(\sum_{k<l}\lambda_j^{k,l}\bar\omega_k\wedge\bar\omega_l, (\bar L_p, \bar L_q)\right) = \lambda_j^{p,q}$. Donc:

$$\lambda_j^{p,q} = -\beta_{p,q}^j\,. \tag{5}$$

Comme α_J^L est une combinaison linéaire à coefficients constants des $\lambda_j^{p,q}$, α_J^L est une combinaison linéaire à coefficients constants des $\beta_{p,q}^j$. On obtient alors le résultat en utilisant l'identité de Jacobi:

$$\begin{gathered}
\left[\bar L_p, [\bar L_q, T]\right] + \left[T, [\bar L_p, \bar L_q]\right] + \left[\bar L_q, [T, \bar L_p]\right] = 0\\
\left[\bar L_p, -e\bar L_q\right] + \left[T, \sum_{j=1}^{n-1}\beta_{p,q}^j\bar L_j\right] + \left[\bar L_q, e\bar L_p\right] = 0\\
-2e\sum_{j=1}^{n-1}\beta_{p,q}^j\bar L_j + \sum_{j=1}^{n-1}T(\beta_{p,q}^j)\bar L_j + \sum_{j=1}^{n-1}\beta_{p,q}^j\left[T, \bar L_j\right] = 0\\
-e\sum_{j=1}^{n-1}\beta_{p,q}^j\bar L_j + \sum_{j=1}^{n-1}T(\beta_{p,q}^j)\bar L_j = 0\\
\sum_{j=1}^{n-1}T(\beta_{p,q}^j)\bar L_j = e\sum_{j=1}^{n-1}\beta_{p,q}^j\bar L_j\,.
\end{gathered}$$

Donc $T(\beta_{p,q}^j) = e\beta_{p,q}^j$ pour tout $1 \le p, q, j \le n-1$.

DÉMONSTRATION (de la Proposition 1). Soit $\theta_i \in \mathcal{D}(V_i)$ pour tout $1 \le i \le N$ telle que: $\sum_{i=1}^N \theta_i = 1$.

Soit v une $(0, q)$ forme appartenant à $\ker(\bar\partial_b)$, montrons alors que Tv appartient à $\ker(\bar\partial_b)$: on peut écrire: $v = \sum_{i=1}^N \theta_i v$.

On note $\theta_i v = v_i$ et $v_i = \sum_{|J|=q} v_J^i\bar\omega_J^i$.

Alors $\bar\partial_b v = 0$ s'écrit $\bar\partial_b\sum_{i=1}^N\theta_i v = 0$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^N\bar\partial_b v_i = 0$.

On obtient donc, en utilisant la formule (2):

$$\sum_{i=1}^N\left[\sum_{|L|=q+1}\left(\sum_{\substack{|J|=q\\ k\le n-1}}\left(\mathcal{E}_L^{kJ}\bar L_k^i v_J^i + \alpha_J^{L,i}v_J^i\right)\bar\omega_L^i\right)\right] = 0\,. \tag{6}$$

Ecrivons (6) pour Tv:

$$\bar\partial_b Tv = \sum_{i=1}^N\left[\sum_{|L|=q+1}\left(\sum_{\substack{|J|=q\\ k\le n-1}}\left(\mathcal{E}_L^{kJ}\bar L_k^i Tv_J^i + \alpha_J^{L,i}Tv_J^i\right)\bar\omega_L^i\right)\right]$$

que l'on peut encore écrire sous la forme:

$$\begin{aligned}\bar\partial_b T v = &\sum_{i=1}^{N} \sum_{|L|=q+1} \sum_{\substack{|J|=q\\ k\le n-1}} \left(\mathcal{E}_L^{kJ} \left[\bar L_k^i, T \right] v_J^i - T(\alpha_J^{L,i}) v_J^i \right) \bar\omega_L^i \\ &+ \sum_{i=1}^{N} T \left[\sum_{|L|=q+1} \sum_{\substack{|J|=q\\ k\le n-1}} \left(\mathcal{E}_L^{kJ} \bar L_k^i v_J^i + \alpha_J^{L,i} v_J^i \right) \bar\omega_L^i \right] .\end{aligned}$$

Soit:

$$\bar\partial_b T v = \sum_{i=1}^{N} \left(-e \sum_{|L|=q+1} \sum_{\substack{|J|=q\\ k\le n-1}} \left(\mathcal{E}_L^{kJ} \bar L_k^i v_J^i + \alpha_J^{L,i} v_J^i \right) \bar\omega_L^i \right) + \sum_{i=1}^{N} T(\bar\partial_b v_i) .$$

Donc on obtient:

$$\begin{aligned} \bar\partial_b T v &= -e \sum_{i=1}^{N} \bar\partial_b v_i + T \bar\partial_b v \\ \bar\partial_b T v &= -e \bar\partial_b v + T \bar\partial_b v \end{aligned} \tag{7}$$

D'où: $\bar\partial_b T v = 0$ et donc $Tv \in \ker(\bar\partial_b)$.

Soit alors g une $(0, q)$ forme orthogonale à $\ker(\bar\partial_b)$, $(g, Tv) = 0$ car $Tv \in \ker(\bar\partial_b)$. Or $(g, Tv) = (Tg, v)$ d'après l'hypothèse $\mathbf{H_2}$. Donc

$$\forall\, v \in \ker(\bar\partial_b), \quad (Tg, v) = 0$$

soit

$$Tg \in \left(\ker(\bar\partial_b)\right)^{\perp} .$$

Pour montrer la Proposition 2 suivante, on peut travailler sous l'hypothèse générale où e est une fonction analytique réelle sur $\partial\Omega$.

PROPOSITION 2. *Sous la condition précédente, $\bar\partial_b T^n u = \sum_{j\le n} c_{j,n} T^j \bar\partial_b u$ où les coefficients $c_{j,n}$ sont $C^\infty(\Omega)$ et vérifient les inégalités suivantes: pour tout $C_2 \ge 1$, il existe des constantes $C_1 > 0$ et $C_3 > 0$ telles que:*

$$|\, T^k c_{j,n} \,| \le C_1^n C_2^{-j} C_3^k (n - j + k)! \quad \forall\, j \le n \;\forall\, k .$$

Remarque: Cette proposition est analogue à la Proposition 3.3 de l'article de M. Derridj et D. S. Tartakoff [5], où cependant le champ L est global. De plus nous le montrons pour toute constante $C_2 \ge 1$.

DÉMONSTRATION. Nous allons faire une démonstration par récurrence sur n:

- Pour $n = 0$ cette égalité est évidente car $c_{00} = 1$.
- Supposons que $\bar\partial_b T^n u = \sum_{j\le n} c_{j,n} T^j \bar\partial_b u$ et montrons cette égalité pour $n+1$. D'après la formule (7), en posant $v = T^n u$, on obtient:

$$\bar\partial_b T^{n+1} u = -e\bar\partial_b T^n u + T\left(\bar\partial_b T^n u\right) .$$

Alors d'après l'hypothèse de récurrence, on a:

$$\bar\partial_b T^{n+1} u = T\left(\sum_{j\le n} c_{j,n} T^j \bar\partial_b u\right) - e\sum_{j\le n} c_{j,n} T^j \bar\partial_b u$$

$$\bar\partial_b T^{n+1} u = \sum_{j\le n} c_{j,n} T^{j+1} \bar\partial_b u + \sum_{j\le n} T(c_{j,n}) T^j \bar\partial_b u - e\sum_{j\le n} c_{j,n} T^j \bar\partial_b u .$$

Si on prend:

$$\begin{cases} c_{0,n+1} &= T(c_{0,n}) - e c_{0,n} \\ c_{j,n+1} &= c_{j-1,n} + T(c_{j,n}) - e c_{j,n} \qquad \text{pour} \quad 1 \le j \le n \\ c_{n+1,n+1} &= c_{n,n} \end{cases}$$

alors on a bien:

$$\bar\partial_b T^{n+1} u = \sum_{j\le n+1} c_{j,n+1} T^j \bar\partial_b u . \tag{8}$$

Fixons $C_2 \ge 1$.

Montrons maintenant par récurrence qu'il existe des constantes $C_1 > 0$ et $C_3 > 0$ telles que les coefficients $c_{j,n}$ vérifient:

$$| T^k c_{j,n} | \le C_1^n C_2^{-j} C_3^k (n-j+k)! \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad 0 \le j \le n .$$

Nous dirons que l'inégalité est vraie au rang n si:

$$\forall j \le n \ \ \forall k \in \mathbb{N} \ \ | T^k c_{j,n} | \le C_1^n C_2^{-j} C_3^k (n-j+k)! . \tag{9}$$

Au rang 0, on a $c_{0,0} = 1$, donc $T^k c_{0,0} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$, d'où le résultat.

Supposons le résultat au rang n et montrons le au rang $n+1$:

- Si $1 \le j \le n$

$$T^k c_{j,n+1} = T^k(c_{j-1,n}) + T^{k+1}(c_{j,n}) - \sum_{r\le k} \binom{k}{r} T^r(e) T^{k-r}(c_{j,n})$$

$$| T^k c_{j,n+1} | \le | T^k(c_{j-1,n}) | + | T^{k+1}(c_{j,n}) | + \sum_{r\le k} \binom{k}{r} | T^r(e) || T^{k-r}(c_{j,n}) | .$$

Comme e est analytique réelle sur $\partial\Omega$, il existe une constante C_e telle que:

$$| T^r(e) | \leq C_e^{r+1} r! \quad \forall r \in \mathbb{N} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega .$$

On choisit les constantes C_1 et C_3 telles que: $\frac{C_2}{C_1} \leq \frac{1}{3}, \frac{C_3}{C_1} \leq \frac{1}{3}$ et $\frac{C_e}{C_3} \leq \frac{1}{3}$; il suffit pour cela de prendre C_3 assez grand par rapport à C_e puis de prendre C_1 assez grand par rapport à C_2 et C_3.

Alors:

$$| T^k c_{j,n+1} | \leq C_1^n C_2^{-j+1} C_3^k (n-j+k+1)! + C_1^n C_2^{-j} C_3^{k+1} (n-j+k+1)!$$
$$+ \sum_{r \leq k} \binom{k}{r} C_e^{r+1} r! C_1^n C_2^{-j} C_3^{k-r} (n-j+k-r)! .$$

Donc

$$| T^k c_{j,n+1} | \leq \frac{2}{3} C_1^{n+1} C_2^{-j} C_3^k (n-j+k+1)!$$
$$+ C_1^n C_2^{-j} C_3^{k+1} \sum_{r \leq k} \binom{k}{r} r! (n-j+k-r)! \left(\frac{1}{3}\right)^{r+1} .$$

On va montrer que: $\binom{k}{r} r!(n-j+k-r)! \leq (n-j+k+1)!$. Ceci vient de:

1. $$\binom{k}{r} r!(n-j+k-r)! = \frac{k!(n-j+k-r)!}{(k-r)!}$$
$$= \frac{(k-r+1)\cdots k(n-j+k+1)!}{(n-j+k-r+1)\cdots(n-j+k+1)}$$

2. pour $j \leq n$ on a:

$$\frac{(k-r+1)\cdots k}{(n-j+k-r+1)\cdots(n-j+k)} \leq 1 \text{ et } \frac{(n-j+k+1)!}{(n-j+k+1)} \leq (n-j+k+1)! .$$

De plus $\sum_{r \leq k} \left(\frac{1}{3}\right)^{r+1} \leq 1$; donc on a:

$$| T^k c_{j,n+1} | \leq \frac{2}{3} C_1^{n+1} C_2^{-j} C_3^k (n-j+k+1)! + C_1^n C_2^{-j} C_3^{k+1} (n-j+k+1)!$$

$$| T^k c_{j,n+1} | \leq \frac{2}{3} C_1^{n+1} C_2^{-j} C_3^k (n-j+k+1)! + \frac{1}{3} C_1^{n+1} C_2^{-j} C_3^k (n-j+k+1)!$$

$$| T^k c_{j,n+1} | \leq C_1^{n+1} C_2^{-j} C_3^k \,((n+1)-j+k)! .$$

D'où le résultat pour $1 \leq j \leq n$.

• Si $j=0$

$$T^k c_{0,n+1} = T^{k+1}(c_{0,n}) - \sum_{r\leq k} \binom{k}{r} T^r\,(e)\,T^{k-r}(c_{0,n})$$

alors par la même méthode que précédemment on trouve le résultat.

• Si $j=n+1$

$$T^k c_{n+1,n+1} = T^k c_{n,n}$$

alors d'après l'hypothèse de récurrence:

$$\mid T^k c_{n+1,n+1} \mid \leq C_1^n C_2^{-n} C_3^k k!$$

$$\mid T^k c_{n+1,n+1} \mid \leq \frac{C_2}{C_1} C_1^{n+1} C_2^{-(n+1)} C_3^k k!$$

et comme on a $\frac{C_2}{C_1} \leq \frac{1}{3}$, on obtient:

$$\mid T^k c_{n+1,n+1} \mid \leq C_1^{n+1} C_2^{-(n+1)} C_3^k k!\,.$$

Nous allons maintenant, à l'aide des propositions précédentes, démontrer le Théorème 2:

Démonstration du Théorème 2. On peut noter que, d'après les résultats de régularité analytique microlocale, il suffit de majorer $\|T^k u\|$ pour obtenir le résultat, puisque $\bar\partial_b$ est elliptique dans les autres directions; mais ici nous allons donner une démonstration complète directe.

Étape 1. Majoration de $\|T^k u\|$, pour tout entier k.

Puisque l'image de $\bar\partial_b$ est fermée, il existe une constante B telle que (voir [8]):

$$\|w\|^2 \leq B\|\bar\partial_b w\|^2, \quad \forall\,\omega \in \left(\ker(\bar\partial_b)\right)^{\perp} \cap C^\infty\,.$$

Comme u est orthogonal à $\ker(\bar\partial_b)$, on à $T^k u$ orthogonal à $\ker(\bar\partial_b)$ d'après la Proposition 1. On peut donc prendre $w = T^k u$. On obtient alors:

$$\begin{aligned}\|T^k u\|^2 &\leq B\|\bar\partial_b T^k u\|^2 \quad \forall k \in \mathbb{N}\\ &\leq B\Big\|\sum_{j\leq k} c_{j,k} T^j \bar\partial_b u\Big\|^2 \qquad \text{(d'après la Proposition 2)}\\ &\leq B\left(\sum_{j\leq k} C_1^k C_2^{-j} (k-j)!\|T^j f\|\right)^2\,.\end{aligned}$$

Or f est analytique réelle, donc il existe une constante C_0 telle que pour tout entier naturel j, $\|T^j f\| \leq C_0^{j+1} j!$.

Donc:

$$\|T^k u\|^2 \leq B \left(\sum_{j \leq k} C_1^k C_2^{-j} (k-j)! C_0^{j+1} j! \right)^2 .$$

Or, $(k-j)!j! \leq k!$ donc:

$$\|T^k u\|^2 \leq B \left(C_1^k C_0 k! \sum_{j \leq k} \left(\frac{C_0}{C_2} \right)^j \right)^2 .$$

Choisissons maintenant $C_2 > 0$ telle que $C_2 > 2C_0$, alors: $\sum_{j \leq k} \left(\frac{C_0}{C_2} \right)^j \leq 2$ pour tout k entier naturel.

Donc, avec C_1 donnée par la propriété 2 (C_2 étant ci-dessus choisit), on a:

$$\|T^k u\|^2 \leq 4BC_0^2 \left(C_1^k k! \right)^2 .$$

Alors si on choisit C telle que $C \geq 4BC_0^2$ et $C \geq C_1$ on obtient:

$$\|T^k u\|^2 \leq \left(C^{k+1} k! \right)^2 .$$

Pour continuer la démonstration du théorème on va utiliser le lemme suivant:

LEMME 2. *Soit u une $(0,q)$ forme sur $\partial\Omega$,*

$$u = \sum_{i=1}^{N} \theta_i u = \sum_{i=1}^{N} u_i, \quad \textit{avec} \quad u_i = \sum_{|J|=q} u_J^i \bar{\omega}_J^i$$

alors il existe une constante K telle que:

$$\sum_{\substack{i=1\cdots N \\ |J|=q \\ k \leq n-1}} \left(\|L_k^i u_J^i\|^2 + \|\bar{L}_k^i u_J^i\|^2 \right) \leq K \left(\|\bar{\partial}_b u\|^2 + \|\bar{\partial}_b^* u\|^2 \right) + \mathrm{O} \left(\|Tu\| \cdot \|u\| + \|u\|^2 \right) \tag{10}$$

Remarque: Si $q = 0$, on notera par convention $\bar{\partial}_b^* u = 0$.

DÉMONSTRATION. Travaillons d'abord dans chaque V_i (avec des calculs comme dans L. Hörmander [7] et G. B. Folland et J. J. Kohn [6]).

On a $u_i \in \mathcal{D}_{(0,q)}(V_i)$, alors:

- Si $q = 0$ alors u_i est une fonction et on a:

$$\bar{\partial}_b u_i = \sum_{k=1}^{n-1} \bar{L}_k^i u_i \bar{\omega}_k$$

donc

$$\|\bar{\partial}_b u_i\|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \|\bar{L}_k^i u_i\|^2$$

de plus

$$\begin{aligned}
\|L_k^i u_i\|^2 &= \left(-\bar{L}_k^i L_k^i u_i, u_i\right) + \mathrm{O}\left(\|L^i u_i\| \cdot \|u_i\|\right) \\
&= \|\bar{L}_k^i u_i\|^2 + \left(\left[L_k^i, \bar{L}_k^i\right] u_i, u_i\right) \\
&\quad + \mathrm{O}\left(\|L^i u_i\| \cdot \|u_i\| + \|\bar{L}^i u_i\| \cdot \|u_i\|\right) \\
&= \|\bar{L}_k^i u_i\|^2 + \left(c_{k,k} T u_i, u_i\right) \\
&\quad + \mathrm{O}\left(\|L^i u_i\| \cdot \|u_i\| + \|\bar{L}^i u_i\| \cdot \|u_i\|\right) .
\end{aligned}$$

On obtient donc l'inégalité (10).

- Si $q \geq 1$

$$\bar{\partial}_b u_i = \sum_{|L|=q+1} \left[\sum_{\substack{|J|=q \\ k \leq n-1}} \left(\mathcal{E}_L^{kJ} \bar{L}_k^i u_J^i + \alpha_J^{L,i} u_J^i\right) \right] \bar{\omega}_L^i$$

$$\begin{aligned}
\|\bar{\partial}_b u_i\|^2 &= \sum_{|L|=q+1} \left\| \sum_{\substack{|J|=q \\ k \leq n-1}} \left(\mathcal{E}_L^{kJ} \bar{L}_k^i u_J^i + \alpha_J^{L,i} u_J^i\right) \right\|^2 \\
&= \sum_{\substack{|J|=q \\ k \leq n-1 \\ k \notin J}} \|\bar{L}_k^i u_J^i\|^2 + \sum_{\substack{(pJ)=(p'I) \\ p \neq p' \\ |I|=|J|=q}} \mathcal{E}_{(pJ)}^{pJ} \mathcal{E}_{(p'I)}^{p'I} \left(\bar{L}_p^i u_J^i, \bar{L}_{p'}^i u_I^i\right) \\
&\quad + \mathrm{O}\left(\|\bar{L} u_i\| \cdot \|u_i\| + \|u_i\|^2\right) .
\end{aligned}$$

De plus,

$$\bar{\partial}_b^* u_i = \sum_{|Q|=q-1} \left[\sum_{\substack{|J|=q \\ k \leq n-1 \\ k \in J}} \mathcal{E}_J^{kQ} \left(-L_k^i u_J^i\right) + \beta_Q^{J,i} u_J^i \right] \bar{\omega}_Q^i$$

$$\begin{aligned}
\|\bar{\partial}_b^* u_i\|^2 &= \sum_{\substack{|J|=q \\ k \leq n-1 \\ k \in J}} \|L_k^i u_J^i\|^2 + \sum_{\substack{|Q|=q-1 \\ k \neq k'}} \mathcal{E}_{(kQ)}^{kQ} \mathcal{E}_{(k'Q)}^{k'Q} \left(L_k^i u_{(kQ)}^i, L_{k'}^i u_{(k'Q)}^i\right) \\
&\quad + \mathrm{O}\left(\|L u_i\| \cdot \|u_i\| + \|u_i\|^2\right) .
\end{aligned}$$

On sait que l'on peut écrire:

$$\left[L_p^i, \bar{L}_q^i\right] = c_{p,q}^i T + \sum_{k=1}^{n-1} a_{p,q,k}^i L_k^i + \sum_{k=1}^{n-1} b_{p,q,k}^i \bar{L}_k^i, \quad p, q = 1, \dots, n-1$$

alors

$$\begin{aligned}
\left(L_k^i u_J^i, L_{k'}^i u_I^i\right) &= \left(-\bar{L}_{k'}^i L_k^i u_J^i, u_I^i\right) + \mathrm{O}\left(\|L^i u_i\| \cdot \|u_i\|\right) \\
&= \left(\left[L_k^i, \bar{L}_{k'}^i\right] u_J^i, u_I^i\right) - \left(L_k^i \bar{L}_{k'}^i u_J^i, u_I^i\right) + \mathrm{O}\left(\|L u_i\| \cdot \|u_i\|\right) \\
&= \left(\bar{L}_{k'}^i u_J^i, \bar{L}_k^i u_I^i\right) + \left(c_{k,k'}^i T u_J^i, u_I^i\right) \\
&\quad + \mathrm{O}\left(\|L u_i\| \cdot \|u_i\| + \|\bar{L} u_i\| \cdot \|u_i\| + \|u_i\|^2\right).
\end{aligned}$$

On obtient donc:

$$\begin{aligned}
\|\bar\partial_b u_i\|^2 + \|\bar\partial_b^* u_i\|^2 = &\sum_{\substack{|J|=q \\ k\leq n-1}} \|\bar{L}_k^i u_J^i\|^2 + \sum_{\substack{(pJ)=(p'I) \\ p\neq p' \\ |I|=|J|=q}} \mathcal{E}_{(pJ)}^{pJ} \mathcal{E}_{(p'I)}^{p'I} \left(\bar{L}_p^i u_J^i, \bar{L}_{p'}^i u_I^i\right) \\
&+ \sum_{\substack{|Q|=q-1 \\ k\neq k'}} \mathcal{E}_{(kQ)}^{kQ} \mathcal{E}_{(k'Q)}^{k'Q} \left(\bar{L}_{k'}^i u_{(kQ)}^i, \bar{L}_k^i u_{(k'Q)}^i\right) \\
&+ \mathrm{O}\left(\|T u_i\| \cdot \|u_i\| + \|L u_i\| \cdot \|u_i\| + \|\bar{L} u_i\| \cdot \|u_i\| + \|u_i\|^2\right).
\end{aligned}$$

On peut poser:

$$\begin{cases} J = kQ \\ I = k'Q \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p = k' \\ p' = k \end{cases}$$

alors:

$$\mathcal{E}_{(k'(kQ))}^{k'(kQ)} \mathcal{E}_{(k(k'Q))}^{k(k'Q)} + \mathcal{E}_{(kQ)}^{kQ} \mathcal{E}_{(k'Q)}^{k'Q} = 0$$

en effet:

- Si $k' < k$

$$\mathcal{E}_{(k'(kQ))}^{k'(kQ)} = \mathcal{E}_{(k'Q)}^{k'Q} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{(k(k'Q))}^{k(k'Q)} = -\mathcal{E}_{(kQ)}^{kQ}$$

- Si $k < k'$

$$\mathcal{E}_{(k'(kQ))}^{k'(kQ)} = -\mathcal{E}_{(k'Q)}^{k'Q} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{(k(k'Q))}^{k(k'Q)} = \mathcal{E}_{(kQ)}^{kQ}$$

donc

$$\begin{aligned}
\|\bar\partial_b u_i\|^2 + \|\bar\partial_b^* u_i\|^2 = &\sum_{\substack{|J|=q \\ k\leq n-1}} \|\bar{L}_k^i u_J^i\|^2 \\
&+ \mathrm{O}\left(\|T u_i\| \cdot \|u_i\| + \|\bar{L} u_i\| \cdot \|u_i\| + \|L u_i\| \cdot \|u_i\| + \|u_i\|^2\right).
\end{aligned}$$

Soit

$$(11)\quad \sum_{\substack{|J|=q\\ k\le n-1}} \|\bar L_k^i u_J^i\|^2 \le K_1\|\bar\partial_b u_i\|^2 + K_1\|\bar\partial_b^* u_i\|^2 + \mathrm{O}\left(\|Tu_i\|\cdot\|u_i\| + \|u_i\|^2\right).$$

De même on montre que:

$$(12)\quad \sum_{\substack{|J|=q\\ k\le n-1}} \|L_k^i u_J^i\|^2 \le K_1\|\bar\partial_b u_i\|^2 + K_1\|\bar\partial_b^* u_i\|^2 + \mathrm{O}\left(\|Tu_i\|\cdot\|u_i\| + \|u_i\|^2\right).$$

Remarque: (12) se déduit aussi de (11) par intégration par parties. Maintenant supposons que u est une $(0,q)$ forme sur $\partial\Omega$, alors:

$$u = \sum_{i=1}^{N}\theta_i u = \sum_{i=1}^{N} u_i \quad \text{avec} \quad u_i = \sum_{|J|=q} u_J^i \bar\omega_J^i .$$

Alors d'après (11) on a:

$$\sum_{\substack{|J|=q\\ k\le n-1}} \|\bar L_k^i u_J^i\|^2 \le K_1\|\bar\partial_b\theta_i u\|^2 + K_1\|\bar\partial_b^*\theta_i u\|^2 + \mathrm{O}\left(\|Tu\|\cdot\|u\| + \|u\|^2\right)$$

$$\sum_{\substack{|J|=q\\ k\le n-1}} \|\bar L_k^i u_J^i\|^2 \le K_1'\|\left[\bar\partial_b,\theta_i\right]u\|^2 + K_1'\|\theta_i\bar\partial_b u\|^2 + K_1'\|\left[\bar\partial_b^*,\theta_i\right]u\|^2$$
$$+ K_1'\|\theta_i\bar\partial_b^* u\|^2 + \mathrm{O}\left(\|Tu\|\cdot\|u\| + \|u\|^2\right).$$

Or $\|\left[\bar\partial_b,\theta_i\right]u\|^2 \le K_2\|u\|^2$ et $\|\left[\bar\partial_b^*,\theta_i\right]u\|^2 \le K_2\|u\|^2$, alors

$$\sum_{\substack{|J|=q\\ k\le n-1}} \|\bar L_k^i u_J^i\|^2 \le K_2'\|\bar\partial_b u\|^2 + K_2'\|\bar\partial_b^* u\|^2 + \mathrm{O}\left(\|Tu\|\cdot\|u\| + \|u\|^2\right).$$

De même d'après (12), on obtient:

$$\sum_{\substack{|J|=q\\ k\le n-1}} \|L_k^i u_J^i\|^2 \le K_2'\|\bar\partial_b u\|^2 + K_2'\|\bar\partial_b^* u\|^2 + \mathrm{O}\left(\|Tu\|\cdot\|u\| + \|u\|^2\right).$$

D'où le résultat.

Étape 2. Nous voulons montrer que si f est analytique réelle sur $\partial\Omega$, alors la solution canonique de $\bar\partial_b u = f$ est analytique réelle sur $\partial\Omega$.

Comme $\partial\Omega$ est compact, il existe une famille finie de champs de vecteurs globaux, holomorphes, tangents et analytiques réels $(L_1, \dots, L_p)$ tels que $(L, \bar L, T)$ engendre $\mathbb{C}T\partial\Omega$. On peut prendre par exemple:

$$L_{jk} = \frac{\partial r}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial z_k} - \frac{\partial r}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial z_j}\,.$$

(Cette méthode a été utilisée par M. Derridj et D. S. Tartakoff dans [4] et reprise par S. C. Chen dans [1]. Beaucoup de parties sont maintenant standard, mais nous donnons une démonstration trés détaillée).

Alors pour montrer que u est analytique réelle sur $\partial\Omega$, il suffit de montrer que pour tout multi-indice α, β et tout entier γ:

$$\left\| L^\alpha \bar L^\beta T^\gamma u \right\| \le C^{|\alpha|+|\beta|+\gamma+1} (|\alpha| + |\beta| + \gamma)!\,. \tag{13}$$

Notation:

$$L^\alpha = L_{\alpha_1} L_{\alpha_2} \cdots L_{\alpha_k}$$

avec $1 \le \alpha_i \le p$ et $|\alpha| = k$.

Remarque: f étant analytique réelle sur $\partial\Omega$, il existe une constante C_0 telle que pour tout multi-indices α, β et tout entier γ:

$$\left\| L^\alpha \bar L^\beta T^\gamma f \right\| \le C_0^{|\alpha|+|\beta|+\gamma+1} (|\alpha| + |\beta| + \gamma)!\,. \tag{14}$$

Nous allons faire une démonstration par récurrence sur $|\alpha| + |\beta|$:

- L'Étape 1 nous donne le résultat pour $|\alpha| + |\beta| = 0$.
- Supposons que pour $|\alpha| + |\beta| \le l$ on a (13) pour tout entier γ.

Prenons α et β tels que $|\alpha| + |\beta| = l + 1$ et $|\alpha| \ge 1$ (si $|\alpha| = 0$ la démonstration sera similaire). Alors d'après le Lemme 2, on a:

$$\begin{aligned}\left\| L^\alpha \bar L^\beta T^\gamma u \right\| &\le K \|\bar\partial_b L^{\alpha-1} \bar L^\beta T^\gamma u\| + K \|\bar\partial_b^* L^{\alpha-1} \bar L^\beta T^\gamma u\| \\ &\quad + K\varepsilon \|T L^{\alpha-1} \bar L^\beta T^\gamma u\| + K\frac{1}{\varepsilon} \|L^{\alpha-1} \bar L^\beta T^\gamma u\|\,.\end{aligned} \tag{15}$$

Remarque: On note $\alpha - 1$ une sous suite de α telle que $|\alpha - 1| = |\alpha| - 1$.

Majorons $\|\bar\partial_b L^{\alpha-1} \bar L^\beta T^\gamma u\|$.

$$\begin{aligned}\|\bar\partial_b L^{\alpha-1} \bar L^\beta T^\gamma u\| &\le \left\| \sum_{i=1}^N \theta_i \bar\partial_b L^{\alpha-1} \bar L^\beta T^\gamma u \right\| \\ &\le \left\| \sum_{i=1}^N \theta_i \sum_{\substack{|L|=q+1\\|J|=q\\k\le n-1}} \left(\varepsilon_L^{kJ} \bar L_k^i L^{\alpha-1} \bar L^\beta T^\gamma u_J^i + \alpha_J^{iL} L^{\alpha-1} \bar L^\beta T^\gamma u_J^i \right) \bar\omega_L^i \right\| \\ &\le \left\| \sum_{i=1}^N \theta_i \sum_{\substack{|L|=q+1\\|J|=q\\k\le n-1}} \left(\varepsilon_L^{kJ} \left[\bar L_k^i, L^{\alpha-1} \bar L^\beta\right] T^\gamma u_J^i + \left[\alpha_J^{i,L}, L^{\alpha-1} \bar L^\beta\right] T^\gamma u_J^i \right) \bar\omega_L^i \right\| \\ &\quad + \|L^{\alpha-1} \bar L^\beta \bar\partial_b T^\gamma u\|\,.\end{aligned}$$

Or, on peut écrire sur V_i:

$$\bar{L}_k^i = \sum_{j=1}^{p} a_j^{i,k} \bar{L}_j$$

où $a_j^{i,k}$ est analytique réelle. Donc

$$\begin{aligned}\|\bar{\partial}_b L^{\alpha-1}\bar{L}^{\beta}T^{\gamma}u\| \leq & \left\| \sum_{i=1}^{N}\theta_i \sum_{\substack{|L|=q+1\\|J|=q\\k\leq n-1}} \sum_{j=1}^{p} a_j^{i,k}\left(\mathcal{E}_L^{kJ}\left[\bar{L}_j, L^{\alpha-1}\right]\bar{L}^{\beta}T^{\gamma}u_J^i\right)\bar{\omega}_L^i\right\| \\ & + \left\| \sum_{i=1}^{N}\theta_i \sum_{\substack{|L|=q+1\\|J|=q\\k\leq n-1}} \sum_{j=1}^{p} a_j^{i,k}\left(\mathcal{E}_L^{kJ}L^{\alpha-1}\left[\bar{L}_j, \bar{L}^{\beta}\right]T^{\gamma}u_J^i\right)\bar{\omega}_L^i\right\| \\ & + \left\| \sum_{i=1}^{n}\theta_i \sum_{\substack{|L|=q+1\\|J|=q\\k\leq n-1}} \sum_{j=1}^{p} \left(\mathcal{E}_L^{kJ}\left[a_j^{i,k}, L^{\alpha-1}\bar{L}^{\beta}\right]\bar{L}_j T^{\gamma}u_J^i\right)\bar{\omega}_L^i\right\| \\ & + \left\| \sum_{i=1}^{n}\theta_i \sum_{\substack{|L|=q+1\\|J|=q\\k\leq n-1}} \left[\alpha_J^{iL}, L^{\alpha-1}\bar{L}^{\beta}\right]T^{\gamma}u_J^i\bar{\omega}_L^i\right\| \\ & + \left\|L^{\alpha-1}\bar{L}^{\beta}\bar{\partial}_b T^{\gamma}u\right\|.\end{aligned}$$

Alors pour terminer la démonstration, nous allons utiliser le lemme (bien connu) suivant:

LEMME 3. *Il existe une constante $B > 0$ telle que pour tout entier $k \in \{1, \ldots, p\}$ et pour tout multi-indice α, on a:*

$$\begin{cases} \left[\bar{L}_k, L^{\alpha}\right] = \displaystyle\sum_{\substack{j\subset\alpha\\|j|\geq 1}} L^{\alpha-j}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{1k}^j L_k + b_{2k}^j\bar{L}_k + b_3^j T\right) \\ \mid b_{1k}^j \mid + \mid b_{2k}^j \mid + \mid b_3^j \mid \leq B^{j+1} j!\,. \end{cases}$$

Appliquons ce lemme; on obtient:

$$\begin{aligned}\|\bar{\partial}_b L^{\alpha-1}\bar{L}^{\beta}T^{\gamma}u\| \leq & \left\| \sum_{i=1}^{N}\theta_i \sum_{\substack{|L|=q+1\\|J|=q\\k\leq n-1}} \sum_{j=1}^{p} a_j^{i,k} \right. \\ & \left. \cdot\left(\mathcal{E}_L^{kJ}\sum_{\substack{j\subset\alpha-1\\|j|\geq 1\\1\leq l\leq p}} L^{\alpha-1-j}\left(b_{1l}^j L_l + b_{2l}^j\bar{L}_l + b_3^j T\right)\bar{L}^{\beta}T^{\gamma}u_J^i\right)\bar{\omega}_L^i\right\|\end{aligned}$$

$$+\left\|\sum_{i=1}^{N}\theta_i\sum_{\substack{|L|=q+1\\|J|=q\\k\leq n-1}}\sum_{j=1}^{p}a_j^{i,k}\cdot\left(\mathcal{E}_L^{kJ}L^{\alpha-1}\sum_{\substack{j\in\beta\\|j|\geq1\\1\leq l\leq p}}\left(b_{1l}^jL_l+b_{2l}^j\bar L_l+b_3^jT\right)\bar L^{\beta-j}T^\gamma u_J^i\right)\bar\omega_L^i\right\|$$

$$+\left\|\sum_{i=1}^{N}\theta_i\sum_{\substack{|L|=q+1\\|J|=q\\k\leq n-1}}\left(\mathcal{E}_L^{kJ}\left[a_j^{i,k},L^{\alpha-1}\bar L^\beta\right]\bar L_jT^\gamma u_J^i\right)\bar\omega_L^i\right\|$$

$$+\left\|\sum_{\substack{|L|=q+1\\|J|=q\\k\leq n-1}}\left(\left[\alpha_J^{iL},L^{\alpha-1}\bar L\beta\right]T^\gamma u_J^i\right)\bar\omega_L^i\right\|+\left\|L^{\alpha-1}\bar L^\beta\bar\partial_bT^\gamma u\right\|.$$

Majorons

$$(I)=\left\|\sum_{i=1}^{N}\theta_i\sum_{\substack{|L|=q+1\\|J|=q\\k\leq n-1}}\sum_{j=1}^{p}a_j^{i,k}\cdot\left(\mathcal{E}_L^{kJ}\sum_{\substack{j\subset\alpha-1\\|j|\geq1\\1\leq l\leq p}}L^{\alpha-1-j}\left(b_{1l}^jL_l+b_{2l}^j\bar L_l+b_3^jT\right)\bar L^\beta T^\gamma u_J^i\right)\bar\omega_L^i\right\|.$$

Remarque: La majoration de:

$$(II)=\left\|\sum_{i=1}^{N}\theta_i\sum_{\substack{|L|=q+1\\|J|=q\\k\leq n-1}}\sum_{j=1}^{p}a_j^{i,k}\cdot\left(\mathcal{E}_L^{kJ}L^{\alpha-1}\sum_{\substack{j\in\beta\\|j|\geq1\\1\leq l\leq p}}\left(b_{1l}^jL_l+b_{2l}^j\bar L_l+b_3^jT\right)\bar L^{\beta-j}T^\gamma u_J^i\right)\bar\omega_L^i\right\|$$

s'obtient de la même manière.

$$(I) \leq \left\| \sum_{i=1}^{N} \theta_i \sum_{\substack{|L|=q+1 \\ |J|=q \\ k\leq n-1}} \sum_{j=1}^{p} a_j^{i,k} \right.$$
$$\left. \cdot \left(\mathcal{E}_L^{kJ} \sum_{\substack{j\subset\alpha-1 \\ |j|\geq 1 \\ 1\leq l\leq p}} L^{\alpha-1-j} \left(b_{1l}^j L_l + b_{2l}^j \bar{L}_l + b_3^j T \right) \bar{L}^\beta T^\gamma u_J^i \right) \bar{\omega}_L^i \right\|$$

$$(I) \leq \left\| \sum_{i=1}^{N} \theta_i \sum_{\substack{|L|=q+1 \\ |J|=q \\ k\leq n-1}} \sum_{j=1}^{p} a_j^{i,k} \right.$$
$$\left. \cdot \left(\mathcal{E}_L^{kJ} \sum_{\substack{j\subset\alpha-1 \\ |j|\geq 1 \\ 1\leq l\leq p}} \sum_{r\subset\alpha-1-j} L^r \left(b_{1l}^j \right) L^{\alpha-1-j-r} L_l \bar{L}^\beta T^\gamma u_J^i \right) \bar{\omega}_L^i \right\|$$
$$+ \left\| \sum_{i=1}^{N} \theta_i \sum_{\substack{|L|=q+1 \\ |J|=q \\ k\leq n-1}} \sum_{j=1}^{p} a_j^{i,k} \right.$$
$$\left. \cdot \left(\mathcal{E}_L^{kJ} \sum_{\substack{j\subset\alpha-1 \\ |j|\geq 1 \\ 1\leq l\leq p}} \sum_{r\subset\alpha-1-j} L^r \left(b_{2l}^j \right) L^{\alpha-1-j-r} \bar{L}_l \bar{L}^\beta T^\gamma u_J^i \right) \bar{\omega}_L^i \right\|$$
$$+ \left\| \sum_{i=1}^{N} \theta_i \sum_{\substack{|L|=q+1 \\ |J|=q \\ k\leq n-1}} \sum_{j=1}^{p} a_j^{i,k} \right.$$
$$\left. \cdot \left(\mathcal{E}_L^{kJ} \sum_{\substack{j\subset\alpha-1 \\ |j|\geq 1 \\ 1\leq l\leq p}} \sum_{r\subset\alpha-1-j} L^r \left(b_3^j \right) L^{\alpha-1-j-r} T \bar{L}^\beta T^\gamma u_J^i \right) \bar{\omega}_L^i \right\|$$

$$
\begin{aligned}
(I) \leq K_1 \sum_{\substack{j \subset \alpha-1\\ |j|\geq 1}} \sum_{r\subset\alpha-1-j} B^{|j+1+r|}(|\, j+r\,|)!C^{|\alpha-j-r+\beta+\gamma+1|}\,(|\,\alpha-j-r+\beta+\gamma\,|)!\\
+\left\| \sum_{i=1}^{N}\theta_i \sum_{\substack{|L|=q+1\\ |J|=q\\ k\leq n-1}} \sum_{j=1}^{p} a_j^{i,k}\right.\\
\cdot\left(\mathcal{E}_L^{kJ} \sum_{\substack{j\subset\alpha-1\\ |j|\geq 1\\ 1\leq l\leq p}} \sum_{r\subset\alpha-1-j} L^r\left(b_3^j\right) L^{\alpha-1-j-r}[T,\bar L^\beta]T^\gamma u_J^i\right)\bar\omega_L^i\Bigg\|\\
+\left\| \sum_{i=1}^{N}\theta_i \sum_{\substack{|L|=q+1\\ |J|=q\\ k\leq n-1}} \sum_{j=1}^{p} a_j^{i,k}\right.\\
\cdot\left(\mathcal{E}_L^{kJ} \sum_{\substack{j\subset\alpha-1\\ |j|\geq 1\\ 1\leq l\leq p}} \sum_{r\subset\alpha-1-j} L^r\left(b_3^j\right) L^{\alpha-1-j-r}\bar L^\beta T^{\gamma+1}u_J^i\right)\bar\omega_L^i\Bigg\|
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Détaillons la majoration du premier terme du membre droite, que l'on peut noter (I_1), dans l'inégalité (16) (il est facile de voir que les autres termes se mojorent par les mêmes méthodes).

$$
\begin{aligned}
(I_1) \leq K_1' \sum_{|j|=1}^{|\alpha-1|} \sum_{|r|=0}^{|\alpha-1-j|} \binom{|\,\alpha-1\,|}{|\,\alpha-1-j\,|}\binom{|\,\alpha-1-j\,|}{|\,r\,|} B^{|j+1+r|}\,(|\,j+r\,|)!\\
\cdot\, C^{|\alpha-j-r+\beta+\gamma+1|}\,(|\,\alpha-j-r+\beta+\gamma\,|)!
\end{aligned}
$$

Pour continuer la démonstration nous allons utiliser le résultat suivant:

Si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors:

$$
\sum_{j=1}^{\alpha}\sum_{r=0}^{\alpha-j}\binom{\alpha}{j}\binom{\alpha-j}{r} f(j+r) = \sum_{q=1}^{\alpha}(2^q-1)\binom{\alpha}{q} f(q)\,. \tag{17}
$$

Si on utilise la formule (17), on obtient:

$$
(I_1) \leq K_1' \sum_{q=1}^{|\alpha-1|} 2^q \binom{|\,\alpha-1\,|}{q} B^{q+1} q!\, C^{|\alpha+\beta+\gamma|-q+1}\,(|\,\alpha+\beta+\gamma\,|-q)!\,.
$$

Mais comme on a:

$$\frac{(|\alpha - 1|)!}{(|\alpha - 1 - q|)!}(|\alpha+\beta+\gamma| - q)! \leq (|\alpha+\beta+\gamma|)!$$

on obtient:

$$(I_1) \leq K_1' 2B^2 C^{|\alpha|+|\beta|+\gamma}(|\alpha| + |\beta| + \gamma)! \sum_{q=1}^{|\alpha-1|} \left(\frac{2B}{C}\right)^{q-1}.$$

Alors si on choisit C telle que $C > 4B$, on a:

$$\sum_{q=1}^{|\alpha-1|} \left(\frac{2B}{C}\right)^{q-1} \leq 2.$$

Donc, il existe une constante K_2' telle que:

$$(I) \leq K_2' C^{|\alpha|+|\beta|+\gamma}(|\alpha| + |\beta| + \gamma)!.$$

Et de même, on montre qu'il existe une constante K_2'' telle que:

$$(II) \leq K_2'' C^{|\alpha|+|\beta|+\gamma}(|\alpha| + |\beta| + \gamma)!.$$

En résumé nous avons montré que:

$$\begin{aligned}\left\|\bar\partial_b L^{\alpha-1}\bar L^{\beta} T^{\gamma} u\right\| &\leq (K_2' + K_2'')C^{|\alpha|+|\beta|+\gamma}(|\alpha| + |\beta| + \gamma)! \\ &+ \left\|\sum_{i=1}^{n}\theta_i \sum_{\substack{|L|=q+1\\ |J|=q\\ k\leq n-1}} \left(\left[\alpha_J^{i,L}, L^{\alpha-1}\bar L^{\beta}\right] T^{\gamma} u_J^i\right)\bar\omega_L^i\right\| \\ &+ \left\|\sum_{i=1}^{n}\theta_i \sum_{\substack{|L|=q+1\\ |J|=q\\ k\leq n-1}} \sum_{j=1}^{p}\left(\left[a_j^{i,k}, L^{\alpha-1}\bar L^{\beta}\right] \bar L_j T^{\gamma} u_J^i\right)\bar\omega_L^i\right\| \\ &+ \left\|L^{\alpha-1}\bar L^{\beta}\bar\partial_b T^{\gamma} u\right\|.\end{aligned}$$

Pour majorer le deuxième et le troisième terme du membre de droite, il suffit d'utiliser le fait que $\alpha_J^{i,L}$ et $a_j^{i,k}$ sont analytiques réelles, et d'utiliser l'hypothèse de récurrence (voir les méthodes précédentes).

Majorons maintenant

$$\left\|L^{\alpha-1}\bar L^{\beta}\bar\partial_b T^{\gamma} u\right\|.$$

D'après la Proposition 2, on a:

$$\bar\partial_b T^\gamma u = \sum_{j\le\gamma} c_{j,\gamma} T^j \bar\partial_b u$$

avec

$$\left|T^k c_{j,\gamma}\right| \le C_1^\gamma C_2^{-j} C_3^k (n-j+k)! \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Donc:

$$\begin{aligned}
\left\|L^{\alpha-1}\bar L^\beta \bar\partial_b T^\gamma u\right\| &\le \|L^{\alpha-1}\bar L^\beta \sum_{j\le\gamma} c_{j,\gamma}T^j f\| \\
&\le \sum_{j\le\gamma}\left\|L^{\alpha-1}\bar L^\beta c_{j,\gamma}T^j f\right\| \\
&\le \sum_{j\le\gamma}\left\|L^{\alpha-1}\sum_{r\le\beta}\bar L^{\beta-r}(c_{j,\gamma})\bar L^r T^j f\right\| \\
&\le \sum_{j\le\gamma}\left\|\sum_{p\subset\alpha-1}\sum_{r\subset\beta} L^{\alpha-p-1}\bar L^{\beta-r}(c_{j,\gamma})L^p\bar L^r T^j f\right\| \\
&\le \sum_{j\le\gamma}\sum_{p\subset\alpha-1}\sum_{r\subset\beta}\left\|L^{\alpha-p-1}\bar L^{\beta-r}(c_{j,\gamma})\right\|\cdot\left\|L^p\bar L^r T^j f\right\|.
\end{aligned}$$

Alors d'après la Proposition 2 et l'analyticité réelle de f, on a:

$$\begin{aligned}
\left\|L^{\alpha-1}\bar L^\beta\bar\partial_b T^\gamma u\right\| \le \sum_{j\le\gamma}\sum_{|p|=0}^{|\alpha-1|}\sum_{|r|=0}^{|\beta|}\binom{|\alpha-1|}{|p|}\binom{|\beta|}{|r|} C_1^\gamma C_2^{-j} C_3^{|\alpha|+|\beta|-|p|-|r|} \\
\cdot C_0^{|p|+|r|+j+1}(|p|+|r|+j)!\,(|\alpha|+|\beta|-|p|-|r|+\gamma-j)!\,.
\end{aligned}$$

Pour continuer, nous allons utiliser le résultat suivant:

Si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors:

$$\sum_{\substack{r\le\beta\\ p\le\alpha}}\binom{\beta}{r}\binom{\alpha}{p} f(r+p) = \sum_{q\le\alpha+\beta}\binom{\alpha+\beta}{q} f(q) \quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}. \tag{18}$$

Alors, d'après (18)

$$\begin{aligned}\left\|L^{\alpha-1}\bar{L}^{\beta}\bar{\partial}_b T^{\gamma}u\right\| &\le \sum_{j\le\gamma}\sum_{|q|=0}^{|\alpha+\beta-1|}\binom{|\alpha+\beta-1|}{|q|}C_1^{\gamma}C_2^{-j}\\ &\quad\cdot C_3^{|\alpha|+|\beta|-|q|}(|\alpha|+|\beta|-|q|+\gamma-j)!\cdot C_0^{|q|+j+1}(|q|+j)!\\ &\le C_0C_3C_1^{\gamma}\sum_{j\le\gamma}\left(\frac{C_0}{C_2}\right)^{j}\sum_{|q|=0}^{|\alpha+\beta-1|}\binom{|\alpha+\beta-1|}{|q|}\\ &\quad\cdot C_3^{|\alpha|+|\beta|-q-1}C_0^{|q|}(|\alpha|+|\beta|+\gamma)!\\ &\le C_0C_3C_1^{\gamma}K\left(\frac{C_0}{C_2}\right)^{\gamma+1}(C_0+C_3)^{|\alpha|+|\beta|-1}(|\alpha|+|\beta|+\gamma)!\,.\end{aligned}$$

Alors si on prend C telle que $C > \frac{C_1C_0}{C_2}$ et $C > C_0 + C_3$ on obtient:

$$\begin{aligned}\left\|L^{\alpha-1}\bar{L}^{\beta}\bar{\partial}_b T^{\gamma}u\right\| &\le \frac{C_0^2C_3}{C_2}C^{|\alpha|+|\beta|+\gamma-1}(|\alpha|+|\beta|+\gamma)!\\ &\le K_2'''C^{|\alpha|+|\beta|+\gamma}(|\alpha|+|\beta|+\gamma)!\,.\end{aligned}$$

Finalement, il existe $K_2 > 0$ telle que:

$$\left\|\bar{\partial}_b L^{\alpha-1}\bar{L}^{\beta}T^{\gamma}u\right\| \le K_2C^{|\alpha|+|\beta|+\gamma}(|\alpha|+|\beta|+\gamma)!\,.$$

En résumé, nous avons montrer que:

$$\begin{aligned}\left\|L_kL^{\alpha-1}\bar{L}^{\beta}T^{\gamma}u\right\| &\le K_2KC^{|\alpha|+|\beta|+\gamma}(|\alpha|+|\beta|+\gamma)! + K\left\|\bar{\partial}_b^*L^{\alpha-1}\bar{L}^{\beta}T^{\gamma}u\right\|\\ &\quad + K\varepsilon\left\|TL^{\alpha-1}\bar{L}^{\beta}T^{\gamma}u\right\| + K\frac{1}{\varepsilon}\left\|L^{\alpha-1}\bar{L}^{\beta}T^{\gamma}u\right\|.\end{aligned}$$

(Voir l'inégalité (15)).

Il nous reste alors, pour finir la démonstration, à majorer les trois derniers termes du membre de droite.

- Majorons $\left\|\bar{\partial}_b^*L^{\alpha-1}\bar{L}^{\beta}T^{\gamma}u\right\|$

$$\left\|\bar{\partial}_b^*L^{\alpha-1}\bar{L}^{\beta}T^{\gamma}u\right\| \le \left\|\left[\bar{\partial}_b^*, L^{\alpha-1}\bar{L}^{\beta}\right]T^{\gamma}u\right\| + \left\|L^{\alpha-1}\bar{L}^{\beta}\bar{\partial}_b^*T^{\gamma}u\right\|.$$

Pour la majoration du premier terme du membre de droite, on utilise la même méthode que pour la majoration de $\left\|\bar{\partial}_bL^{\alpha-1}\bar{L}^{\beta}T^{\gamma}u\right\|$.

Le deuxième terme du membre de droite est nul, en effet comme u est orthogonale à $\ker\left(\bar{\partial}_b\right)$ alors, d'après la Proposition 1, $T^{\gamma}u$ l'est aussi et donc $T^{\gamma}u$ appartient à l'image de $\bar{\partial}_b^*$. Alors il existe une constante K_3 telle que $\|\bar{\partial}_b^*L^{\alpha-1}\bar{L}^{\beta}T^{\gamma}u\| \le K_3C^{|\alpha|+|\beta|+\gamma}(|\alpha|+|\beta|+\gamma)!$.

• Majorons $\varepsilon \left\| T L^{\alpha-1} \bar{L}^{\beta} T^{\gamma} u \right\|$.

$$\begin{aligned}\varepsilon \left\| T L^{\alpha-1} \bar{L}^{\beta} T^{\gamma} u \right\| &\leq \varepsilon \left\| L^{\alpha-1} \bar{L}^{\beta} T^{\gamma+1} u \right\| + \varepsilon \left\| \left[T, L^{\alpha-1} \bar{L}^{\beta}\right] T^{\gamma} u \right\| \\ &\leq \varepsilon C^{|\alpha|+|\beta|+\gamma+1} (|\alpha| + |\beta| + \gamma)! + \varepsilon \left\| \left[T, L^{\alpha-1}\right] \bar{L}^{\beta} T^{\gamma} u \right\| \\ &\quad + \varepsilon \left\| L^{\alpha-1} \left[T, \bar{L}^{\beta}\right] T^{\gamma} u \right\| .\end{aligned}$$

Alors en utilisant le Lemme 3 et l'hypothèse de récurrence, on montre qu'il existe une constante K_4 telle que ($\varepsilon < 1$):

$$\varepsilon \left\| \left[T, L^{\alpha-1}\right] \bar{L}^{\beta} T^{\gamma} u \right\| + \varepsilon \left\| L^{\alpha-1} \left[T, \bar{L}^{\beta}\right] T^{\gamma} u \right\| \leq K_4 C^{|\alpha|+|\beta|+\gamma} (|\alpha| + |\beta| + \gamma)! .$$

Finalement, on a:

$$\begin{aligned}\| L^{\alpha} \bar{L}^{\beta} T^{\gamma} u \| &\leq (K_2 + K_3 + K_4) K C^{|\alpha|+|\beta|+\gamma} (|\alpha| + |\beta| + \gamma)! \\ &\quad + K \varepsilon C^{|\alpha|+|\beta|+\gamma+1} (|\alpha| + |\beta| + \gamma)! + K \frac{1}{\varepsilon} C^{|\alpha|+|\beta|+\gamma} (|\alpha| + |\beta| + \gamma)! .\end{aligned}$$

Il en résulte qu'il existe des constantes S_1, S_2 et S_3 telles que:

$$\begin{aligned}\left\| L^{\alpha} \bar{L}^{\beta} T^{\gamma} u \right\| &\leq S_1 C^{|\alpha|+|\beta|+\gamma} (|\alpha| + |\beta| + \gamma)! \\ &\quad + S_2 \varepsilon C^{|\alpha|+|\beta|+\gamma+1} (|\alpha| + |\beta| + \gamma)! + S_3 \frac{1}{\varepsilon} C^{|\alpha|+|\beta|+\gamma} (|\alpha| + |\beta| + \gamma)! .\end{aligned}$$

Alors si on prend $\varepsilon \leq \frac{1}{3S_2}$ et C telle que $C > \frac{3S_3}{\varepsilon}$ et $C > 3S_1$, on obtient:

$$\left\| L^{\alpha-1} \bar{L}^{\beta} T^{\gamma} u \right\| \leq C^{|\alpha|+|\beta|+\gamma+1} (|\alpha| + |\beta| + \gamma)! .$$

Ce qui termine la démonstration du théorème.

Tous ces résultats ont fait l'objet d'une note au CRAS [9].

REFERENCES

[1] S. C. Chen, *Global real analyticity of solutions to the $\bar{\partial}$-Neumann problem on Reinhardt domains*, Indiana Univ. Math. J. **37** (1988), 421-430.

[2] M. Christ, The Szegö projection need not preserve global analyticity, Ann. of Math. (2) **143** (1996), 301-330.

[3] M. Derridj, *Régularité pour $\bar{\partial}$ dans quelques domaines faiblement pseudoconvexes*, J. Differential Geom. **13** (1978), 559-576.

[4] M. Derridj – D. S. Tartakoff, *On the global real analyticity for the $\bar{\partial}$-Neumann problem*, Comm. Partial Differential Equations **5** (1993), 401-435.

[5] M. Derridj – D. S. Tartakoff, *Global analyticity for $\Box_b$ on three dimensional pseudoconvex CR manifolds*, Comm. in Partial Differential Equations **18** (1993), 1847-1868.

[6] G. B. FOLLAND – J. J. KOHN, The Neumann Problem for the Cauchy-Riemann Complex, Annals of Math. Studies, No.75, Princeton University Press, Princeton, 1972.

[7] L. HÖRMANDER, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, D.Van Nostrand Publ. Co., Princeton, N.J., 1966.

[8] J. J. KOHN, *The range of the Cauchy-Riemann operator*, Duke Math. J. **43** (1986), 525-545.

[9] I. REIZNER, *Analyticité globale pour $\bar{\partial}_b$ sur certaines hypersurfaces compactes de $\mathbb{C}^n$*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I-Math. **321** (1995), 987-992.

[10] D. S. TARTAKOFF, *Local Analytic Hypoellipticity for $\Box_b$ on Non-Degenerate Cauchy-Riemann Manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **75** (1978), 3027-3028.

[11] D. S. TARTAKOFF, *Local real analyticity of solutions to $\Box_b$ and $\bar{\partial}$-Neumann*, Acta. Math. **145** (1980), 117-204.

[12] F. TREVES, *Operators with Double Characteristcs and Application to the $\bar{\partial}$-Neumann Problem*, Comm. Partial Differential Equations **3** (1978), 475-642.

Université de Rouen
UFR des Sciences-Mathématiques-Sites Colbert
Analyse et Modèles Stochastiques
UPRESA-CNRS 6085
76821 Mont Saint Aignan Cedex, France
Isabelle.Reizner@ univ-rouen.fr