

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

S. ALINHAC

**Temps de vie précisé et explosion géométrique pour des systèmes
hyperboliques quasilineaires en dimension un d'espace**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 22,
n° 3 (1995), p. 493-515

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1995_4_22_3_493_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Temps de vie précisé et explosion géométrique pour des systèmes hyperboliques quasilineaires en dimension un d'espace

S. ALINHAC

Introduction

Nous considérons ici le problème de Cauchy pour des systèmes hyperboliques quasilineaires en dimension un d'espace (on peut consulter [7] ou [10] comme références générales sur ce sujet). Pour des données initiales régulières, à support compact, on pense généralement qu'il n'existe pas de solution régulière globale pour de larges classes de systèmes. Ce résultat a été établi par Klainerman et Majda (voir [5] et aussi [9]) pour des systèmes 2×2 non linéairement dégénérés, et par John [4] pour des systèmes généraux vraiment non linéaires dans le cas de données petites (voir aussi [3] pour une présentation simplifiée).

Nous nous intéressons dans cet article au mécanisme précis de l'explosion. Nous avons introduit en [1] le concept d'"explosion géométrique" pour des systèmes quasilineaires généraux possédant une branche de caractéristiques réelles. Nous avons conjecturé dans ce même article qu'en dimension un d'espace, une solution "générique" explosant au temps T au point m coïncidait, pour $t < T$ près de m , avec une "solution éclatée", c'est à dire une solution qui explose précisément selon le mécanisme d'explosion géométrique décrit (pour une description des chocs après l'explosion, voir [8]).

Nous prouvons ici cette conjecture dans les deux cas suivants:

- (i) Celui de systèmes 2×2 ;
- (ii) Celui de systèmes 3×3 à données petites.

Dans le cas 2×2 , nous supposons que le système est diagonalisable à l'aide des invariants de Riemann, et qu'au point m considéré, le gradient d'un seul de ces invariants explose. Nous pensons que cette situation est "générique". Ces résultats font l'objet de la section 2.

Le cas (ii) (traité par John) nécessite une analyse asymptotique précise

de la solution, qui, bien qu'essentiellement classique, est présentée en 3. En s'appuyant sur cette analyse, on obtient en 4 une représentation de la solution comme "solution éclatée", qui permet de prouver (section 5) que l'asymptotique complète du temps de vie est celle donnée par l'"optique géométrique non linéaire". Soulignons que cette approche, outre qu'elle permet d'affiner les résultats antérieurs, est indépendante des estimations $L^1 - L^\infty$ de John, qu'on ne sait pas obtenir en dimension supérieure à un.

1. Notations et résultats

1.1. Soit

$$(1.1) \quad \partial_t u + A(u)\partial_x u = 0$$

un système quasilinéaire, où $u \in \mathbb{R}^N$, A étant une matrice $N \times N$ réelle dépendant de manière C^∞ de u . Nous notons

$$\lambda_1(u) < \dots < \lambda_N(u)$$

les valeurs propres de A supposées réelles, et $r_j(u)$ (resp. $\ell_j(u)$) les vecteurs propres à droite (resp. à gauche) de $A(u)$ ($j = 1, \dots, N$). Nous appelons i -caractéristique une courbe intégrale du champs $L_i = \partial_t + \lambda_i(u)\partial_x$.

Lorsque $N = 2$, rappelons qu'on nomme invariants de Riemann des fonctions $w_1(u), w_2(u)$ de différentielles indépendantes vérifiant

$$r_1(u)\nabla w_2(u) = 0, r_2(u)\nabla w_1(u) = 0.$$

Si l'application $u \mapsto w$ est un difféomorphisme, on peut réécrire le système (1.1) sous la forme (équivalente pour des u régulières)

$$(1.1)' \quad \partial_t w + \Lambda(w)\partial_x w = 0,$$

où Λ est la matrice diagonale d'éléments λ_1, λ_2 .

Lorsque $N \geq 3$, il n'est plus possible en général de diagonaliser (1.1), mais on peut introduire, près d'un point donné dans l'espace des u , des coordonnées locales (qu'on note encore u) telles que l'axe des u_j soit une courbe intégrale du champs r_j .

Dans la suite, nous considérons deux cas:

- (i) Soit $N = 2$ et nous supposons que le système peut s'écrire à l'aide des invariants de Riemann.
- (ii) Soit $N = 3$, et la donnée de Cauchy de u est supposée petite; on suppose alors effectué près de l'origine le choix normalisé d'inconnues évoqué ci-dessus.

Le propos de ce travail est de montrer que les solutions de (1.1), au moment de leur explosion, peuvent être représentées comme des solutions éclatées, et d'utiliser cette représentation pour préciser les résultats classiques de John [4] sur l'asymptotique du temps de vie.

Nous rappelons très brièvement la terminologie des "systèmes éclatés" et des "solutions éclatées" dans le cas particulier de (1.1), renvoyant le lecteur à [1] pour tout détail.

Le système éclaté de (1.1) pour la valeur propre λ_i est

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \partial_T \phi &= \lambda_i(v), \quad {}^t \ell_i(v) \partial_T v = 0, \\ {}^t \ell_k(v) [\partial_X \phi \partial_T v + (\lambda_k - \lambda_i)(v) \partial_X v] &= 0. \end{aligned}$$

Ce système correspond formellement à (1.1) par le changement de variables

$$(1.3) \quad x = \phi(X, T), \quad t = T, \quad u(\phi(X, T), T) = v(X, T).$$

A une solution v, ϕ de (1.2) près de $M_0 = (X_0, T_0)$ pour laquelle

$$\phi(X_0, T_0) = x_0, \quad \partial_X \phi(X_0, T_0) = 0, \quad \partial_X v(X_0, T_0) \neq 0$$

correspond, sous certaines conditions sur ϕ , une solution u de (1.1) dont le gradient explose en $m_0 = (x_0, T_0)$. Une telle solution est dite "solution éclatée" de (1.1). Si par exemple

$$\partial_X^2 \phi(M_0) \neq 0,$$

la singularité de ϕ est un pli, et les solutions u correspondantes, définies d'un côté d'une courbe passant par m_0 , seront dites "de type pli". Si

$$\partial_X^2 \phi(M_0) = 0, \quad \partial_X^3 \phi(M_0) \neq 0,$$

la singularité de ϕ est un cusp, et les solutions correspondantes sont "de type cusp".

1.2. Cas des systèmes 2×2

Soit $m_0 = (0, 0)$ et u une solution de classe C^∞ de (1.1) définie et bornée dans un rectangle

$$(1.4) \quad \{(x, t), |x| < M, -T_0 \leq t < 0, M > 0\}$$

On suppose qu'au voisinage des valeurs prises par u dans ce rectangle on peut utiliser les invariants de Riemann $w = w(u)$ pour écrire le système sous la forme (1.1)'. Le système éclaté de (1.1)' pour la valeur propre λ_1 est

$$(1.5) \quad \partial_T \phi = \lambda_1(v), \quad \partial_T v_1 = 0, \quad (\lambda_2 - \lambda_1)(v) \partial_X v_2 + \partial_X \phi \partial_T v_2 = 0.$$

Remarquons que les caractéristiques issues de points proches de m_0 possèdent un point limite lorsque $t \rightarrow 0_-$. Nous faisons maintenant l'hypothèse **géométrique** suivante:

H₁.

- (i) *Il existe des 1-caractéristiques Γ_α^1 et Γ_β^1 issues de points $\alpha = (a, -T_0)$, $\beta = (b, -T_0)$ ($a < b$) qui aboutissent en des points $\alpha' = (a', 0)$, $\beta' = (b', 0)$, $a' < 0 < b'$, et telles que la 2-caractéristique Γ_α^2 issue de α recoupe Γ_β^1 en un point α'' d'ordonnée négative.*
- (ii) *Il existe une 2-caractéristique issue d'un point γ d'ordonnée négative de Γ_α^1 , aboutissant à un point $\gamma'' = (c'', 0)$, $c'' < 0$.*
- (iii) *Il existe une 1-caractéristique issue de $\gamma' = (c, -T_0)$, aboutissant à γ'' .*

Nous notons ω (resp. ω_1) le quadrilatère (ouvert le long de $t = 0$) délimité par $t = 0$, Γ_α^1 , Γ_β^1 et $t = -T_0$ (resp. Γ_α^2).

D'autre part, nous faisons l'hypothèse **analytique** suivante:

H₂. *Dans ω , $|\ell_2(u)\partial_x u| \leq C$.*

Notre premier résultat est le suivant.

THÉORÈME 1. *Soient $u \in C^\infty$ une solution de (1.1) satisfaisant aux hypothèses (H₁) et (H₂) et (ϕ, v) la solution correspondante de (1.5) définie dans*

$$\Omega = \{(X, T), a \leq X \leq b, -T_0 \leq T < 0\}.$$

Alors, (ϕ, v) se prolongent en une solution $(\tilde{\phi}, \tilde{v})$ de (1.5) dans un ouvert $\tilde{\Omega}$ qui contient Ω et le segment $\{(X, T), c < X < b, T = 0\}$.

Autrement dit, la solution u considérée est, au voisinage de m_0 , une solution éclatée au sens de [1].

Les hypothèses du Théorème 1 appellent les remarques suivantes:

- (i) L'hypothèse géométrique H_1 n'est pas très contraignante et autorise des configurations de 1-caractéristiques assez singulières, comme par exemple un secteur de courbes concourantes en m_0 .
- (ii) Comme pour une solution éclatée u on a $|\ell_2(u)\partial_x u|$ bornée (cf. [1]), l'hypothèse H_2 est nécessaire (H_2 équivaut à $|\partial_x w_2| \leq C$). Nous croyons que, "génériquement", les dérivées $\partial_x w_1$ et $\partial_x w_2$ des deux invariants de Riemann w_1 et w_2 n'explosent pas simultanément.

Ces remarques seront explicitées sur un exemple au paragraphe 2.1.

1.3. Cas de données petites

Pour simplifier nous ne considérons que le cas $N = 3$. Soit u la solution de (1.1) avec la donnée initiale

$$u(x, 0) = u_0(x) = \epsilon u_0^{(1)}(x) + \epsilon^2 u_0^{(2)}(x) + \dots,$$

où $u_0 \in C^\infty$ est supportée dans $[-M, M]$. Ce cas a été étudié par John [4] et Hörmander [3].

Nous supposons dans toute la suite, pour ce cas, que les valeurs propres λ_j sont vraiment non linéaires à l'origine, c'est à dire ici

$$\partial_j \lambda_j(0) \neq 0.$$

Définissons les nombres M_j par

$$(1.6) \quad M_j^{-1} = \max -\partial_j \lambda_j(0) (u_0^{(1)})'_j,$$

où $(z)_j$ désigne la $j^{\text{ième}}$ coordonnée du vecteur z . Le résultat de John est que le temps de vie T_ϵ de u vérifie

$$(1.7) \quad \epsilon T_\epsilon = \inf M_j + O(\epsilon).$$

Soient γ_\pm les 2-caractéristiques issues des points $(\pm M, 0)$; il est bien connu (cf. par exemple Smoller [10]) que, à gauche de γ_- (resp. à droite de γ_+), la solution u est une onde simple, c'est à dire ici vérifie $u_2 = u_3 = 0$ (resp. $u_1 = u_2 = 0$). La composante u_1 (resp. u_3) est solution de l'équation scalaire

$$(1.8) \quad \partial_t u_1 + \lambda_1(u_1, 0, 0) \partial_x u_1 = 0.$$

(resp.

$$(1.9) \quad \partial_t u_3 + \lambda_3(0, 0, u_3) \partial_x u_3 = 0).$$

Pour un T fini bien choisi, la trace $u(x, T)$, qui est une série en ϵ (dont les termes successifs sont faciles à calculer numériquement), permet de calculer exactement le temps de vie de u_1 (resp. u_3) et d'en préciser le comportement à l'explosion; il s'agit en effet de discuter l'équation scalaire (1.8) (resp. (1.9)), qui est bien connue (cf. par exemple [10] ou [9]). C'est pourquoi nous supposons ici que l'explosion se produit sur le mode central, c'est à dire

$$M_2 < \inf(M_1, M_3).$$

Par commodité, nous supposons aussi

$$\lambda_2(0) = 0,$$

et introduisons la variable de “temps lent”

$$\tau = \epsilon t.$$

La fonction $\tilde{u}(x, \tau) = u(x, \tau\epsilon^{-1})$ est solution du système

$$(1.10) \quad \epsilon \partial_\tau \tilde{u} + A(\tilde{u}) \partial_x \tilde{u} = 0,$$

dont l'éclaté pour la valeur propre λ_2 est

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \epsilon \partial_T \phi &= \lambda_2(\tilde{v}), \quad {}^t \ell_2(\tilde{v}) \partial_T \tilde{v} = 0, \\ {}^t \ell_i(\tilde{v}) [\epsilon \partial_X \phi \partial_T + (\lambda_i - \lambda_2)(\tilde{v}) \partial_X] \tilde{v} &= 0, \quad i = 1, 3. \end{aligned}$$

Fixons dorénavant

$$0 < \tau_0 < M_2 < \tau_1,$$

et notons $\alpha(\epsilon), \beta(\epsilon)$ les points d'intersection de γ_- et γ_+ avec la droite $\{\tau = \tau_0\}$.

Notre premier résultat montre que u est bien une solution éclatée.

THÉORÈME 2. *Soit $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$.*

- (a) *Pour $\epsilon > 0$ assez petit, il existe une solution \tilde{v}, ϕ du système éclaté (1.11) dans le rectangle*

$$R = \{(X, T), \alpha \leq X \leq \beta, \tau_0 \leq T \leq \tau_1\},$$

qui est de la forme

$$\tilde{v} = \epsilon D_\epsilon w, \quad D_\epsilon = \text{diag}(\epsilon^p, 1, \epsilon^p),$$

w étant une fonction régulière de $(X, T, \epsilon) \in R \times [0, \epsilon_0]$.

- (b) *Soit*

$$\tau(\epsilon) = \max \{ \tau, \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1, (X, T) \in R \cap \{0 \leq T < \tau\} \Rightarrow \partial_X \phi(X, T) \neq 0 \}.$$

Soit \tilde{u} la solution de (1.10) définie pour $\tau < \tau(\epsilon)$ par

$$\tilde{u}(\phi(X, T), T) = \tilde{v}(X, T),$$

et $U(x, t) = \tilde{u}(x, \epsilon t)$. Alors, pour $\tau_0 \leq \epsilon t < \tau(\epsilon)$, entre γ_- et γ_+ , $U = u$.

Ce Théorème est du type du Théorème 1, l'existence globale de la solution du système éclaté étant rendue possible par la présence du paramètre ϵ . Sa preuve repose sur une connaissance assez précise de la solution u près de $\tau = \tau_0$, qui est obtenue par les techniques habituelles de l'“optique géométrique non linéaire”. Les résultats utiles, bien qu'essentiellement classiques, sont prouvés dans la

section 3. On montre en particulier que, entre γ_- et γ_+ et pour $\tau \geq \tau_0$, la solution u est approchée par la fonction $(0, \epsilon w_2(x, \tau), 0)$, où w_2 satisfait

$$\partial_\tau w_2 + \tilde{\lambda}_2(w_2) \partial_x w_2 = 0, \tilde{\lambda}_2(w) = \epsilon^{-1} \lambda_2(0, \epsilon w, 0),$$

avec la valeur initiale formelle

$$w_2(x, 0) = \sum_{p \geq 1} \epsilon^{p-1} v_{20}^{(p)}(x).$$

Les fonctions $v_{20}^{(p)}$ sont appelées “**profils libres**”, et $v_{20}^{(1)} = (u_0^{(1)})_2$. Notons que si l’on fait l’hypothèse

- (ND) La fonction $\partial_2 \lambda_2(0)(u_0^{(1)})'_2$ possède un unique minimum non dégénéré (i.e., à dérivée seconde non nulle),
on peut définir un temps de vie formel $\tau_f(\epsilon)$ de w_2 (avec $\tau_f(0) = M_2$).

Dans les cas raisonnablement “génériques”, on peut préciser le Théorème 2 et prouver en particulier que $\epsilon T_\epsilon = \tau(\epsilon)$. Le plus simple de ces cas fait l’objet du Théorème suivant.

THÉORÈME 3. *Supposons vraie l’hypothèse (ND). Alors*

- (a) *La fonction $\tau(\epsilon)$ est C^∞ près de $\epsilon = 0$, et asymptotique à la série formelle $\tau_f(\epsilon)$ obtenue par l’optique géométrique.*
- (b) *Le temps de vie T_ϵ de u vaut*

$$T_\epsilon = \epsilon^{-1} \tau(\epsilon).$$

La solution u explose en un unique point $P(\epsilon)$ d’ordonnée T_ϵ et est une solution éclatée de type cusp près de $P(\epsilon)$.

Il est important de noter que la méthode de représentation employée ici pour prouver les Théorèmes 2 et 3 est **indépendante** des estimations $L^1 - L^\infty$ de John. Comme ce sont justement ces estimations que l’on n’obtient pas en dimension d’espace supérieure à 1, il nous a paru significatif de montrer que les résultats de John pouvaient être obtenus sans ces estimations. Toutefois, il est honnête de dire que l’application de la présente méthode à des situations en dimension d’espace supérieure à 1 se heurte à d’autres difficultés (voir [2]).

2. Preuve du Théorème 1

2.1. Quelques remarques sur un exemple

Considérons le cas particulier du système

$$(2.1) \quad \partial_t w_1 + w_1 \partial_x w_1 = 0, \partial_t w_2 + \lambda_2(w_1, w_2) \partial_x w_2 = 0.$$

Supposons par exemple que la valeur $w_1^0(x) = w_1(x, -T_0)$ satisfasse

$$w_1^0(0) = 0, \partial_x w_1^0(0) = -T_0^{-1},$$

le point 0 étant un minimum de la dérivée de w_1^0 .

a. La première équation est autonome et bien connue, et sa solution w_1 explose (plus précisément $|\partial_x w_1|$ devient infini) au temps 0 à l'origine (notamment).

b. Le long d'une 2-caractéristique, on a

$$(2.2) \quad L_2(\partial_x w_2) + \partial_2 \lambda_2(w_1, w_2)(\partial_x w_2)^2 = -\partial_1 \lambda_2(w_1, w_2) \partial_x w_1 \partial_x w_2.$$

Comme

$$L_2 w_1 = (\lambda_2 - \lambda_1) \partial_x w_1,$$

l'intégrale $\int_0^0 |\partial_x w_1| ds$ de long d'une 2-caractéristique est convergente et la présence du terme en $\partial_x w_1$ dans (2.2) n'entraîne pas l'explosion de $\partial_x w_2$.

Ces considérations inspirent la remarque (ii) suivant le Théorème 1.

c. Si $\partial_x w_1^0$ est constante dans un intervalle $[-\alpha, +\alpha]$ et inférieure à sa valeur en 0 ailleurs (un cas non générique!), les 1-caractéristiques issues des points

$$(x, -T_0), |x| \leq \alpha$$

passent toutes par l'origine (c'est le cas auquel la remarque (i) suivant le Théorème 1 fait allusion). On peut choisir alors pour satisfaire H_1

$$a < -\alpha, b > \alpha$$

avec b assez proche de α .

d. Dans les variables éclatées (X, T) , $\partial_X \phi$ s'annule en tous les points correspondant à des points où w_1 explose; en de tels points, la 2-caractéristique est tangente à $T = 0$.

Dans la situation de c., on aura $\partial_X \phi = 0$ sur tout le segment $|X| \leq \alpha, T = 0$, qui est aussi un arc de 2-caractéristique.

e. Dans les variables (X', T') , une situation telle que c. induit une discontinuité de la fonction $\zeta(T')$, qui passe brusquement de la valeur α à la valeur $-\alpha$.

2.2. Preuve du Théorème 1

a. Nous définissons dans Ω la fonction $\phi(X, T)$ comme l'abscisse du point d'ordonnée T sur la 1-caractéristique issue de $(X, -T_0)$. L'application $(X, T) \mapsto (\phi(X, T), T)$ est un difféomorphisme de Ω sur le quadrilatère ω . Nous

notons $A = (X_A, T_A)$ le point d'image α , etc. ... Nous définissons alors les fonctions v_i dans Ω par

$$v_i(X, T) = w_i(\phi(X, T), T),$$

et ces fonctions satisfont le système éclaté (1.5) avec

$$v_i^0(X) = v_i(X, -T_0) = w_i(X, -T_0).$$

En particulier, $v_1(X, T) = w_1(X, -T_0)$ est connue.

b. Comme

$$\partial_T v_2(X, T) = (\partial_t w_2 + \partial_T \phi \partial_x w_2)(\phi, T) = (\lambda_1 - \lambda_2) \partial_x w_2,$$

on déduit de H_2 que $|\partial_T v_2| \leq C$ dans Ω . D'autre part,

$$\partial_T \partial_X \phi = \partial_1 \lambda_1 \partial_X v_1 - \frac{\partial_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \partial_X \phi \partial_T v_2,$$

ce qui implique $|\partial_X \phi| \leq C$ dans Ω .

Les 2-caractéristiques sont, dans le plan (X, T) , les courbes intégrales du champ $\partial_X + k \partial_T$, où $k = (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} \partial_X \phi$; d'après ce qui précède, $|\partial_T k| \leq C$.

On en déduit qu'il existe une unique courbe intégrale issue de tout point de $\bar{\Omega}$. Les parties (ii) et (iii) de H_1 signifient que la 2-caractéristique issue de C atteint le coté $T = 0$ de Ω en un point C'' d'abscisse $c_1, a < c_1 \leq c$.

Par ailleurs, les fonctions v_2 et k satisfont au système, déduit de (1.5),

$$(2.3) \quad \partial_X v_2 + k \partial_T v_2 = 0, (\lambda_2 - \lambda_1) \partial_T k + \partial_2 \lambda_2 k \partial_T v_2 - \partial_1 \lambda_1 \partial_X v_1 = 0.$$

c. Dans le polygone $\Omega_1 = AA'B'A''A$ du plan (X, T) , on considère la 2-caractéristique issue de (a, T') : l'ordonnée de son point d'abscisse X' , qui existe pour X' dans un intervalle maximal $[a, \zeta(T')]$ (pour une fonction décroissante $\zeta(T') \leq b$), sera notée $\psi(X', T')$. Notons que, grâce à l'hypothèse H_1 , $\zeta(T') = b$ pour $-T_0 \leq T' \leq -T_0 + \epsilon_1$, et $\zeta(T_C) = c_1$. On définit ainsi une application

$$(X', T') \mapsto (X, T), X = X', T = \psi(X', T')$$

qui est une bijection du polygone

$$\bar{D}_1 = \{([a, b] \times [-T_0, -T_0 + \epsilon_1]) \cup (a \leq X' \leq \zeta(T'), -T_0 + \epsilon_1 \leq T' < 0)\}$$

sur le polygone Ω_1 .

d. On définit maintenant dans \bar{D}_1 les fonctions ℓ et h par

$$k(X', \psi(X', T')) = \ell(X', T'), v_2(X', \psi(X', T')) = h(X', T'),$$

et ℓ, h, ψ vérifient le système

$$(2.4) \quad \ell = \partial_{X'}\psi, \partial_{X'}h = 0,$$

$$(2.5) \quad \partial_{T'}\ell + \frac{\partial_2\lambda_2}{\lambda_2\lambda_1}(v_1(X'), h)\ell\partial_{T'}h + \\ - \frac{\partial_1\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(v_1(X'), h)\partial_{T'}\psi\partial_X v_1(X') = 0.$$

Observons les conditions aux limites:

(i) On a $h = v_2$ pour $X' = a$, car $\psi(a, T') = T'$.

(ii) Sur $T' = -T_0$, ψ est connue de par sa définition, avec bien sûr $\psi(a, -T_0) = -T_0$.

Si, dans (2.5), on remplace ℓ par sa valeur en considérant v_1 et h comme connus, on obtient sur ψ une équation **linéaire**. Prenant en compte les conditions aux limites (i) et (ii), on voit que ψ est en fait solution d'un problème de Goursat linéaire.

e. Comme les données de ψ sur les axes sont compatibles en $(a, -T_0)$ et C^∞ sur les segments fermés $\{X' = a, -T_0 \leq T' \leq T_C\}$ et $\{T' = -T_0, a \leq X' \leq b\}$, il existe un prolongement (C^∞) $\tilde{\psi}$ de ψ sur le rectangle fermé

$$\bar{R} = \{(X', T'), a \leq X' \leq b, -T_0 \leq T' \leq T_C\}.$$

f. Le domaine

$$\bar{D}_2 = \bar{D}_1 \cap \{T' \leq T_C\}$$

est contenu dans \bar{R} . Montrons que $\partial_{T'}\psi \neq 0$ dans \bar{D}_2 .

On a, à l'intérieur de \bar{D}_2 ,

$$\partial_T v_2(X', \psi)\partial_{T'}\psi = \partial_{T'}h.$$

Comme $\partial_T v_2$ est borné, si $\partial_{T'}\tilde{\psi} = 0$ en un point, $\partial_{T'}h = 0$ aussi, ainsi que sur toute l'horizontale passant par ce point. Mais alors (2.5) est une équation différentielle ordinaire homogène en $\partial_{T'}\tilde{\psi}$ le long de cette horizontale, ce qui implique $\partial_{T'}\tilde{\psi}$ tout le long, ce qui est impossible car cette fonction vaut 1 pour $X' = a$.

g. On déduit de f. qu'il existe des prolongements \tilde{v}_2, \tilde{k} de v_2, k à un nouveau domaine qui contient le polygone $ACC''B'BA$ et le contour $CC''B'B$ en son intérieur, et qui vérifient (2.3). Il suffit alors de choisir $\tilde{\phi}$ vérifiant

$$\partial_X\tilde{\phi} = (\lambda_2 - \lambda_1)\tilde{k}, \tilde{\phi}(b, T) = \phi_1(T),$$

avec $\phi_1(T)$ un prolongement de $\phi(b, T)$ à un intervalle $[-T_0, \epsilon]$ satisfaisant

$$\partial_T\phi_1 = \lambda_1.$$

Cette construction définit $\tilde{\phi}$ sur le rectangle

$$[c_1, b] \times [-T_0, \epsilon]$$

pour ϵ assez petit, et la preuve du Théorème est complète.

3. Quelques éléments d'optique géométrique non linéaire

Ce qui suit est classique, et partiellement emprunté à Hörmander [3] et à Majda [9].

3.1. Analyse formelle

Rappelons d'abord que la normalisation supposée des inconnues u signifie, en notant e_j le $j^{\text{ième}}$ vecteur de base et $A = (a_{jk})$,

$$a_{jk}(te_k) = \delta_{jk} \lambda_k(te_k),$$

ce qui implique notamment

$$(3.1) \quad \partial_k^q a_{jk}(0) = 0, j \neq k, q \in \mathbb{N}.$$

Pour résoudre (1.1) avec la donnée

$$u_0(x) = \epsilon u_0^{(1)}(x) + \epsilon^2 u_0^{(2)}(x) + \dots,$$

on développe $A(u) = \sum_{\alpha} A_{\alpha} u^{\alpha}$ et l'on cherche formellement une solution du type

$$u(x, t, \epsilon) = u(x, t) = \sum_{p \geq 1} \epsilon^p u^{(p)}(x, t).$$

Avec $L = \partial_t + A(0)\partial_x$, on choisit les $u^{(p)}$ satisfaisant les équations

$$(3.2)_1 \quad Lu^{(1)} = 0, u^{(1)}(x, 0) = u_0^{(1)}(x),$$

$$(3.2)_p \quad Lu^{(p)} = f^{(p)}, u^{(p)}(x, 0) = u_0^{(p)}(x),$$

où $f^{(p)}$ est une expression multilinéaire des $u_j^{(q)}$ ($q \leq p - 1$), qui se calcule aisément à partir du développement de A .

Pour décrire les supports et la structure des termes $u_j^{(q)}$, nous introduisons les notations suivantes:

$$c = \inf_{1 \leq j \leq N-1} (\lambda_{j+1}(0) - \lambda_j(0)), \gamma = \frac{(\lambda_{N-1}(0) - \lambda_2(0))}{c},$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_j &= (\lambda_j(0), 1), \\
 K_T &= \{(x, t), -M + \lambda_2(0)t \leq x \leq M + \lambda_{N-1}(0)t, 0 \leq t \leq T\}, \\
 (3.3) \quad T_1 &= 0, T_p = \frac{2M}{c} \sum_{0 \leq q \leq p-2} (1 + \gamma)^q, p \geq 2, \\
 K_p &= K_{T_p}, K_p^j = (K_p + \mathbb{R}\alpha_j) \cap \{t \leq T_p\}.
 \end{aligned}$$

PROPOSITION 3.1. *Pour tout $p \geq 1$ et $1 \leq j \leq N$, nous avons*

$$(3.4) \quad u_j^{(p)}(x, t) = \sum_{0 \leq q \leq p-1} t^q v_{j0}^{(p)}(\sigma_j(x, t)) + r_j^{(p)}(x, t), \sigma_j(x, t) = x - \lambda_j(0)t,$$

où $r_j^{(p)}$ est une fonction C^∞ supportée dans K_p^j et $u_j^{(p)}$ est supportée dans $K_p + \mathbb{R}_+\alpha_j$.

PREUVE DE LA PROPOSITION 3.1:

a. On a tout d'abord

$$u_j^{(1)} = v_{j0}^{(1)}(\sigma_j), v_{j0}^{(1)} = (u_0^{(1)})_j, r_j^{(1)} \equiv 0,$$

ce qui est (3.4) pour $p = 1$.

b. Supposons la Proposition déjà prouvée pour $q \leq p - 1$ et considérons un monôme de $f_j^{(p)}$. Deux cas se présentent:

- (i) Ce monôme ne contient que des termes $u_k^{(q)}$ et leurs dérivées pour le même k .
- (ii) Ce monôme contient au moins deux termes $u_k^{(q)}, u_{k'}^{(q')}, k \neq k'$.

c. Nous analysons d'abord le cas (i) (dit "interaction résonante").

Le monôme doit contenir un coefficient $\partial_k^s a_{jk}(0), s \neq 0$. Mais celui-ci est nul (par (3.1)), si $k \neq j$.

d. Dans le cas (ii) (dit "non résonant"), le support du monôme est contenu dans

$$(K_q + \mathbb{R}_+\alpha_k) \cap (K_{q'} + \mathbb{R}_+\alpha_{k'}) \subset (K_{p-1} + \mathbb{R}_+\alpha_k) \cap (K_{p-1} + \mathbb{R}_+\alpha_{k'}) = S_{kk'}.$$

Nous montrons maintenant que

$$(3.5) \quad S_{kk'} \subset K_p.$$

Désignons par I_p le segment supérieur de K_p

$$I_p = \{(x, t), t = T_p, -M + \lambda_2(0)T_p \leq x \leq M + \lambda_{N-1}(0)T_p\}$$

et par ℓ_p sa longueur.

On voit facilement que (3.5) est vraie pour $p = 2$. Nous voyons aussi que $S_{kk'}$ est contenu dans $(I_{p-1} + \mathbb{R}_+ \alpha_k) \cap (I_{p-1} + \mathbb{R}_+ \alpha_{k'})$. Par le même raisonnement que pour $p = 2$, on obtient $S_{kk'} \subset K_T$, où

$$T = T_{p-1} + \frac{\ell_{p-1}}{c}.$$

Puisque $\ell_{p-1} = 2M + c\gamma T_{p-1}$, on trouve $T = T_p$.

e. A l'aide de l'hypothèse de récurrence et des points c. et d., on voit que $f_j^{(p)}$ est une somme de termes soit

- (i) à support compact dans K_p (interactions non résonantes),
- (ii) à support dans $K_{p-1} + \mathbb{R}_+ \alpha_j$ et de la forme

$$t^q w(\sigma_j) + r,$$

r lui-même étant supporté dans K_p^j . Pour déterminer q , on observe que si le terme est obtenu comme un produit de l termes de même type correspondant à $p = p_{i_1}, \dots, p_{i_l}$, on a

$$p_{i_1} + \dots + p_{i_l} = p, q_{i_j} \leq p_{i_j} - 1,$$

et donc, puisque $l \geq 2$,

$$q = q_{i_1} + \dots + q_{i_l} \leq p - l \leq p - 2.$$

f. Par intégration de 0 à t le long de $L_j = \partial_t + \lambda_j(0)\partial_x$ d'un terme supporté dans $K_p + \mathbb{R}_+ \alpha_j$, on obtient un terme supporté dans le même ensemble; par intégrations d'un terme supporté dans K_p^j , on obtient la somme d'une fonction de σ_j supportée dans $K_p + \mathbb{R}_+ \alpha_j$ et d'une fonction supportée dans K_p^j .

Par intégration de $t^q w(\sigma_j)$, on obtient $t^{q+1} w(\sigma_j)$. La preuve est complète. ■

Remarquons que dans le cas $N = 3$ auquel nous nous limitons dans les sections 4 et 5 de ce travail, les supports de tous les termes $u_2^{(p)}$ sont inclus dans la même bande $-M + \lambda_2(0)t \leq x \leq M + \lambda_2(0)t$.

On appelle "profils libres" (d'ordre p) les fonctions $v_{j0}^{(p)}(\sigma_j), j = 1, \dots, N$, qui jouent un rôle essentiel dans la suite.

3.2. Temps lent et équations réduites

En rassemblant les termes $u_j^{(p)}$ décrits à la Proposition 3.1, on obtient

$$u_j(x, t) = \epsilon \sum_{p \geq 1} \epsilon^{p-q-1} (\epsilon t)^q v_{jq}^{(p)}(\sigma_j(x, t)) + R_j(x, t)$$

avec

$$R_j(x, t) = \sum_{p \geq 1} \epsilon^p r_j^{(p)}(x, t).$$

Cela conduit à introduire le **temps lent** $\tau = \epsilon t$.

Fixons $s \in \mathbb{N}$; si l'on veut une solution approchée avec une erreur $O(\epsilon^{s+1})$, on peut négliger les termes $r_j^{(p)}$, $p \geq s + 1$ tandis que les autres $r_j^{(p)}$, $p \leq s$ sont nuls pour $t \geq T_s$. On va donc chercher, pour $t \geq C_s$, u sous la forme

$$(3.6) \quad u_j(x, t) = \epsilon w_j(\sigma_j(x, t), \tau), j = 1, \dots, N,$$

les u_j étant supportés dans les bandes (alors disjointes) $K_s + \mathbb{R}\alpha_j$. En substituant (3.6) dans le système, il vient

$$(3.7) \quad \partial_\tau w_j + \tilde{\lambda}_j(w_j, \epsilon) \partial_\sigma w_j = 0, j = 1, \dots, N,$$

où

$$\tilde{\lambda}_j(w_j, \epsilon) = \epsilon^{-1}(\lambda_j(0, \dots, 0, \epsilon w_j, 0, \dots, 0) - \lambda_j(0)).$$

Les équations (3.7) en τ, σ sont les **équations réduites**.

Comme la solution formelle

$$U_j = \epsilon \sum_{p \geq 1} \epsilon^{p-q-1} \tau^q v_{jq}^{(p)}(\sigma_j)$$

satisfait (3.7) et qu'une solution de (3.7) est déterminée par sa valeur sur $\tau = 0$, il est naturel de choisir comme condition initiale à (3.7)

$$(3.8) \quad w_j(\sigma, 0) = \sum_{p \geq 1} \epsilon^{p-1} v_{j0}^{(p)}(\sigma).$$

Nous voyons que cette valeur initiale ne dépend que des profils libres.

Puisque nous avons supposées toutes les valeurs propres du système vraiment non linéaires (c'est à dire ici $\partial_j \lambda_j(0) \neq 0$), on voit immédiatement que la fonction w_j solution de (3.7), (3.8) a un temps de vie $\tilde{\tau}_j(\epsilon)$ vérifiant

$$(3.9) \quad \tilde{\tau}_j(\epsilon) = M_j + O(\epsilon), M_j^{-1} = \max -\partial_j \lambda_j(0)(u_0^{(1)})'_j.$$

3.3. Approximation de la solution u

Nous construisons une approximation de u de la manière suivante:

(i) Ayant fixé s comme en 3.2, on pose

$$u_j^s = \sum_{1 \leq p \leq s} \epsilon^p u_j^{(p)}.$$

(ii) On note w_j^s la solution de (3.7) avec la valeur initiale

$$w_j^s(\sigma, 0) = \sum_{1 \leq p \leq s} \epsilon^{p-1} v_{j0}^{(p)}(\sigma).$$

(iii) Pour une troncature $\chi \in C^\infty$ vérifiant

$$\eta \leq 0 \Rightarrow \chi(\eta) = 1, \eta \geq 1 \Rightarrow \chi(\eta) = 0,$$

on pose finalement

$$\tilde{u}_j^s(x, t) = \chi(t - C_s)u_j^s(x, t) + (1 - \chi(t - C_s))\epsilon w_j^s(\sigma_j(x, t), \tau).$$

La fonction \tilde{u}^s est la solution approchée d'ordre s .

Fixons maintenant $\tau_0 < \inf M_j$: \tilde{u}^s est définie pour $\epsilon t \leq \tau_0$ pour ϵ assez petit. En posant

$$u = \tilde{u}^s + \dot{u}^s,$$

on voit que \dot{u}^s est solution d'un système qui est essentiellement le linéarisé de (1.1) sur \tilde{u}^s , avec des données de Cauchy qui sont $O(\epsilon^{s+1})$ et un second membre $O(\epsilon^{s-N_0})$ (pour un N_0 fixe). Les méthodes standard permettent alors d'obtenir

$$(3.10) \quad |\partial_{x,t}^\alpha \dot{u}^s| = O(\epsilon^{s-N_0-1}), \epsilon t \leq \tau_0.$$

4. Preuve du Théorème 2

Elle s'appuie sur les estimations (3.10), qui précisent le comportement de u au voisinage de $\{\tau = \tau_0\}$.

a. Considérons les courbes intégrales γ_\pm de $L_2 = \partial_t + \lambda_2(u)\partial_x$ issues des points $(\pm M, 0)$. Elles coupent la droite horizontale d'ordonnée $t = \tau_0\epsilon^{-1}$ en des points d'abscisses $\alpha(\epsilon), \beta(\epsilon)$. Il est bien connu qu'à droite de γ_+ (resp. à gauche de γ_-) la solution u est une onde simple. Compte tenu de la normalisation, cela signifie que

$$(4.1) \quad u_1 = u_2 = 0,$$

(resp.

$$(4.2) \quad u_2 = u_3 = 0).$$

On doit donc trouver une solution du système entre les deux caractéristiques γ_+ et γ_- , avec les conditions de Cauchy sur $\{\tau = \tau_0\}$ et les conditions aux limites (4.1), (4.2).

Fixons $p \geq 1$, et posons

$$u(x, t) = \epsilon D_\epsilon v(x, \tau),$$

où D_ϵ est la matrice diagonale d'éléments $(\epsilon^p, 1, \epsilon^p)$, en sorte que le système s'écrit, en termes de v ,

$$\epsilon \partial_\tau v + B(\epsilon D_\epsilon v) \partial_x v = 0,$$

avec

$$B = B_\epsilon = D_\epsilon^{-1} A D_\epsilon.$$

Calculons d'abord les vecteurs propres à gauche ${}^t \bar{l}_i = {}^t l_i D_\epsilon$ de B . Lorsque $v_1 = v_3 = 0$, $r_2(v)$ est colinéaire à $(0, 1, 0)$ et donc l_1 et l_3 ont leur deuxième coordonnée nulle. On a ainsi

$${}^t l_1(\epsilon D_\epsilon v) = (1, 0, 0) + \epsilon v_2(*, 0, *) + O(\epsilon^{p+1}),$$

et de même pour ${}^t l_3$, d'où

$$(4.3) \quad {}^t \bar{l}_1 = \epsilon^p(1, 0, 0) + O(\epsilon^{p+1}), {}^t \bar{l}_2 = (0, 1, 0) + O(\epsilon), {}^t \bar{l}_3 = \epsilon^p(0, 0, 1) + O(\epsilon^{p+1}).$$

Nous poserons désormais

$$(4.4) \quad l_i = \epsilon^{-p} \bar{l}_i, i = 1, 3, l_2 = \bar{l}_2,$$

en sorte que les vecteurs l_i dépendent de ϵ et de ϵv et forment la base canonique pour $\epsilon = 0$.

Dans l'éclatement relatif à λ_2

$$x = \phi(X, T), \tau = T, \phi(X, \tau_0) = X, v(\phi(X, T), T) = w(X, T),$$

le système en v devient

$$(4.5)_a \quad \epsilon \partial_T \phi = \lambda_2(\epsilon D_\epsilon w),$$

$$(4.5)_b \quad {}^t l_2 \partial_T w = 0,$$

$$(4.5)_c \quad {}^t l_i [\epsilon \partial_X \phi \partial_T w + (\lambda_i - \lambda_2) \partial_X w] = 0, i = 1, 3.$$

Notons que dans l'éclatement, les courbes γ_\pm deviennent les droites

$$X = \alpha(\epsilon), X = \beta(\epsilon).$$

Nous devons donc résoudre (4.5) avec des données de Cauchy sur $T = \tau_0$, et

$$X \leq \alpha(\epsilon) \Rightarrow w_2 = w_3 = 0, X \geq \beta(\epsilon) \Rightarrow w_1 = w_2 = 0.$$

b. Le système (4.5) n'est pas quasilinéaire. Nous introduisons l'inconnue $k = \partial_X \phi$, qui vérifie

$$(4.6) \quad \partial_T k = \lambda_2' D_\epsilon \partial_X w.$$

Nous fixons

$$\tau_0 < M_2 < \tau_1 < \tau_2,$$

et introduisons dans les équations de (4.5) une troncature $\chi(T)$, vérifiant

$$\chi \in C^\infty, T \leq \tau_1 \Rightarrow \chi(T) = 1, T \geq \tau_2 \Rightarrow \chi(T) = 0$$

en substituant χk à k dans (4.5)_c. Cette équation est donc remplacée par

$$(4.5)'_c \quad {}^t l_i [\epsilon \chi(T) k \partial_T + (\lambda_i - \lambda_2) \partial_X] w = 0.$$

Nous introduisons les inconnues supplémentaires

$$(4.7) \quad h_2 = {}^t l_2 \partial_X w, h_i = {}^t l_i \partial_T w, i = 1, 3.$$

Remarquons que toutes les dérivées premières de w s'expriment à l'aide des h_i ; si les vecteurs R_i sont définis par ${}^t l_j R_i = \delta_{ij}$, on a

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \partial_T w &= (h_1 R_1 + h_3 R_3), \partial_X w = \\ &= -\epsilon k \chi(T) \left(\frac{h_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} R_1 + \frac{h_3}{(\lambda_3 - \lambda_2)} R_3 \right) + h_2 R_2. \end{aligned}$$

De plus, pour $X \leq \alpha(\epsilon)$, l_2 et l_3 ont une première coordonnée nulle, donc $h_2 = h_3 = 0$; de même, $h_1 = h_2 = 0$ pour $X \geq \beta(\epsilon)$.

Pour obtenir des équations sur les inconnues h_i , on dérive (4.5)_b par rapport à X , et (4.5)_c par rapport à T . On trouve ainsi d'abord

$${}^t (l'_2 \partial_X w) \partial_T w + {}^t l_2 \partial_T \partial_X w = 0,$$

qui est de la forme

$$(4.9)_b \quad \partial_T h_2 + \epsilon {}^t h Q_2 h = 0,$$

pour une matrice Q_2 symétrique (dépendant de w et de k). Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned} &{}^t (l'_i \partial_T w) [\epsilon \chi(T) k \partial_T w + (\lambda_i - \lambda_2) \partial_X w] + {}^t l_i [\epsilon \chi(T) \partial_{X^2}^2 \phi \partial_T w + \epsilon \chi'(T) k \partial_T w + \\ &+ \epsilon (\lambda'_i - \lambda'_2) D_\epsilon \partial_T w \partial_X w] + {}^t l_i [\epsilon \chi k \partial_T + (\lambda_i - \lambda_2) \partial_X] \partial_T w = 0. \end{aligned}$$

On obtient finalement le système

$$(4.9)_c \quad [\epsilon \chi(T) k \partial_T + (\lambda_i - \lambda_2) \partial_X] h_i + \epsilon {}^t h Q_i h + \epsilon \chi'(T) k h_i = 0, i = 1, 3,$$

$$(4.9)_a \quad \partial_T k + {}^t L h = 0,$$

pour des matrices symétriques Q_i (dépendant de w et k) et un vecteur L (dépendant de ϵw et ϵk).

Puisque ϕ intervient seulement par k , nous considérons le système (S) en les inconnues w, k, h formé de (4.5)_b, (4.5)_c' , (4.9). Notons que (S) est quasilinéaire, et que la partie principale de son linéarisé est diagonale.

c. Nous résolvons maintenant (S) dans le rectangle

$$R = \{(X, T), \alpha(\epsilon) \leq X \leq \beta(\epsilon), \tau_0 \leq T \leq \tau_2\}.$$

Les conditions aux limites sont les suivantes:

(i) Sur $X = \alpha$,

$$(4.10)_a \quad w_2 = w_3 = 0, h_3 = 0.$$

(ii) Sur $X = \beta$,

$$(4.10)_b \quad w_1 = w_2 = 0, h_1 = 0.$$

(iii) Sur $T = \tau_0$,

$$(4.10)_c \quad k = 1, w_i = w_i^0, h_i = h_i^0, i = 1, 2, 3,$$

pour des fonctions régulières w_i^0, h_i^0 bornées, ainsi que leurs dérivées, indépendamment de ϵ (on utilise ici encore le fait que $\lambda_2(0) = 0$). Nous savons de plus que

$$\begin{aligned} w_i^0 &= O(\epsilon), h_i^0 = O(\epsilon), i = 1, 3, \\ \text{supp } w_1^0, h_1^0 &\subset \{X \leq \beta\}, \\ \text{supp } w_3^0, h_3^0 &\subset \{X \geq \alpha\}, \\ \text{supp } w_2^0, h_2^0 &\subset [\alpha, \beta]. \end{aligned}$$

Nous employons la méthode habituelle de point fixe, en posant

$$w_i^{(0)} = w_i^0, h_i^{(0)} = h_i^0, k^{(0)} = 1$$

puis

$$(4.11)_a \quad {}^t l_2(w^{(n)}) \partial_T w^{(n+1)} = 0,$$

$$(4.11)_b \quad {}^t l_i(w^{(n)}) [\epsilon \chi(T) k^{(n)} \partial_T + (\lambda_i - \lambda_2)(w^{(n)}) \partial_X] w^{(n+1)} = 0, i = 1, 3,$$

$$(4.11)_c \quad \partial_T k^{(n+1)} + {}^t L(w^{(n)}, k^{(n)}) h^{(n)} = 0,$$

$$(4.11)_d \quad \partial_T h_2^{(n+1)} + \epsilon {}^t h^{(n)} Q_2(w^{(n)}, k^{(n)}) h^{(n)} = 0,$$

$$(4.11)_e \quad [\epsilon\chi(T)k^{(n)}\partial_T + (\lambda_i\lambda_2)(w^{(n)})\partial_X]h_i^{(n+1)} + \epsilon^t h^{(n)}Q_i(w^{(n)}, k^{(n)})h^{(n)} + \epsilon\chi'(T)k^{(n)}h_i^{(n)} = 0, i = 1, 3.$$

Plus précisément, supposons connues les fonctions $w^{(n)}, k^{(n)}, h^{(n)}$, satisfaisant dans R les conditions aux limites, et les estimations

$$(4.12)_n \quad |w^{(n)}| \leq W, |h^{(n)}| \leq H, |k^{(n)}| \leq K.$$

Les équations (4.11)_c, (4.11)_d, (4.11)_e se résolvent immédiatement avec les conditions aux limites voulues, car les champs

$$Z_i^{(n)} = \epsilon\chi(T)k^{(n)}\partial_T + (\lambda_i - \lambda_2)(w^{(n)})\partial_X, i = 1, 3$$

sont convenablement orientés; au point (α, τ_0) , $Z_3^{(n)}$ est dirigé vers l'intérieur de R (ses coordonnées sont positives), et de même pour $Z_1^{(n)}$ au point (β, τ_0) (ses coordonnées sont $(-, +)$). De plus, on a les estimations

$$|h_i^{(n+1)}| \leq H_0 + \epsilon C_0(W, K)(H^2 + HK),$$

$$|k^{(n+1)}| \leq 1 + C_1(\epsilon W, \epsilon K)H.$$

Pour résoudre (4.11)_a, (4.11)_b, on introduit les inconnues

$$z_i = {}^t l_i(w^{(n)})w^{(n+1)}, i = 1, 2, 3,$$

et l'on réécrit le système sous la forme

$$\partial_T z_2 + \epsilon^t h q_2 z = 0, Z_i^{(n)} z_i + \epsilon^t h q_i z = 0, i = 1, 3.$$

Ici, les q_i désignent des matrices symétriques dépendant seulement de $w^{(n)}, k^{(n)}$, le facteur ϵ provenant du fait que les l_i sont constants pour $\epsilon = 0$. Remarquons que si $w^{(n)}$ vérifie les conditions aux limites prescrites,

- (i) le vecteur ${}^t h q_2 = \partial_T(l_2(w^{(n)}))$ a sa première (resp. dernière) coordonnée nulle pour $X = \alpha$ (resp. $X = \beta$).
- (ii) les vecteurs $l_i(w^{(n)})$, $i = 2, 3$ (resp. $i = 1, 2$) ont leur première (resp. dernière) coordonnée nulle pour $X = \alpha$ (resp. $X = \beta$).

Le point (ii) montre que les conditions aux limites sur $w^{(n+1)}$ sont impliquées par les conditions correspondantes sur z , notamment $z_2 = z_3 = 0$ sur $X = \alpha$ et $z_1 = z_2 = 0$ sur $X = \beta$.

Cela dit, le point (i) montre qu'il suffit de résoudre le système en z en imposant, sur $X = \alpha$, $z_3 = 0$, et sur $X = \beta$, $z_1 = 0$; en effet, $z_2 = 0$ est alors une conséquence de l'équation sur z_2 et du fait que la donnée initiale de z_2 sur $T = \tau_0$ est nulle en α et β .

L'existence d'une solution au système en z est assurée si

$$\epsilon C(\epsilon W, \epsilon K)H \leq 1,$$

auquel cas la solution w correspondante vérifie aussi

$$|w^{(n+1)}| \leq C_2 C_3(\epsilon W, \epsilon K).$$

En prenant

$$H = 2H_0, K = 2 + C_1(0, 0)H, W = 2C_2 C_3(0, 0)$$

et $\epsilon \leq \epsilon_1(W, K, H)$, on obtient les estimations (4.12) $_{n+1}$.

d. Estimons maintenant $\nabla w^{(n)}, \nabla h^{(n)}, \nabla k^{(n)}$ indépendamment de n .

Pour cela, on pose comme précédemment

$$\bar{h}_2^{(n)} = {}^t l_2(w^{(n-1)})\partial_X w^{(n)}, \bar{h}_i^{(n)} = {}^t l_i(w^{(n-1)})\partial_T w^{(n)}, i = 1, 3,$$

en sorte qu'estimer $\nabla w^{(n+1)}$ équivaut à estimer $\bar{h}^{(n+1)}$.

Par ailleurs, il est important de remarquer que, pour $\tau = \tau_0$,

$${}^t l_i(w^{(n)})\partial_X w^{(n+1)} = O(\epsilon), \partial_X h_i^{(n+1)} = O(\epsilon), i = 1, 3,$$

à cause des hypothèses faites.

En supposant

$$(4.13)_n \quad |\bar{h}^{(n)}| \leq W', |\nabla k^{(n)}| \leq K', |\nabla h^{(n)}| \leq H'$$

et en dérivant les équations du système (4.11), on obtient sans peine

$$\begin{aligned} \max |\bar{h}^{(n+1)}| &\leq W'_0 + C\epsilon W' \max |\bar{h}^{(n+1)}|, \\ \max |\nabla k^{(n+1)}| &\leq K'_0 + CH' + C\epsilon W', \\ \max |\nabla h^{(n+1)}| &\leq H'_0 + C\epsilon(K' + W') \max |\nabla h^{(n+1)}| + C\epsilon H'. \end{aligned}$$

Nous choisissons donc

$$W' = 2W'_0, H' = 2H'_0, K' = K'_0 + CH' + 1$$

et $\epsilon \leq \epsilon_2(W', K', H')$, ce qui implique (4.13) $_{n+1}$. Pour les dérivées d'ordre supérieur, on obtient de même une estimation uniforme.

e. De manière tout à fait analogue, on peut vérifier que, pour ϵ assez petit, la suite $(w^{(n)}, k^{(n)}, h^{(n)})$ converge uniformément dans R vers une limite (w, k, h) , qui est donc régulière.

Par ailleurs, en dérivant les équations sur w et en posant

$$\bar{h}_2 = {}^t l_2(w) \partial_X w, \bar{h}_i = {}^t l_i(w) \partial_T w, i = 1, 3,$$

on obtient pour \bar{h} les mêmes équations que pour h , avec les mêmes valeurs aux limites. Pour ϵ assez petit, on obtient donc $h = \bar{h}$, et l'équation

$$(4.14) \quad \partial_T k = \lambda_2' D_\epsilon \partial_X w.$$

Reste à calculer ϕ satisfaisant l'équation

$$(4.15) \quad \partial_T \phi = \lambda_2(\epsilon D_\epsilon w).$$

Pour cela, il suffit de résoudre (4.15) pour $X = \alpha$, avec $\phi(\alpha, \tau_0) = \alpha$, ce qui donne une fonction $\phi_0(T)$; ϕ est alors la solution de

$$\partial_X \phi = k, \phi(\alpha, T) = \phi_0(T).$$

f. Posons

$$\tau(\epsilon) = \max \{ \tau, \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1, \tau_0 \leq T < \tau \Rightarrow k(X, T) \neq 0 \}.$$

Soit $\tilde{u}(x, \tau)$ la fonction, définie pour $\tau < \tau(\epsilon)$, correspondant à la fonction $\epsilon D_\epsilon w$ par le changement

$$x = \phi(X, T), \tau = T,$$

et $U(x, t) = \tilde{u}(x, \epsilon t)$ la solution du système de départ déduite de \tilde{u} .

La fonction U est définie entre les deux courbes Γ_\pm d'équations $x = \phi(\alpha, \epsilon t)$ et $x = \phi(\beta, \epsilon t)$, pour $\tau_0 \leq \epsilon t < \tau(\epsilon)$. Sur Γ_- (resp. Γ_+), $U_2 = U_3 = 0$, $U_1 = O(\epsilon^{p+1})$ (resp. $U_1 = U_2 = 0$, $U_3 = O(\epsilon^{p+1})$). A gauche de Γ_- (resp. à droite de Γ_+), le système se réduit à une équation scalaire sur u_1 (resp. u_3). En résolvant cette équation avec les données de Cauchy sur $\tau = \tau_0$ et les valeurs sur Γ_- (resp. Γ_+), on obtient une fonction U_1 (resp. U_3) qui existe pour $\tau_0 \leq \tau < \tau(\epsilon)$, $x \leq \phi(\alpha, \epsilon t)$ (resp. $x \geq \phi(\beta, \epsilon t)$). La juxtaposition des solutions $(U_1, 0, 0)$, U , $(0, 0, U_3)$ fournit une solution du système avec la même donnée de Cauchy sur $\tau = \tau_0$ que u : c'est donc u , et la preuve du Théorème 2 est complète. ■

5. Preuve du Théorème 3

Elle est analogue à celle de l'énoncé voisin de [2], et repose sur le Théorème des fonctions implicites.

a. Pour $\epsilon = 0$, $v_2(X, \tau_0) = w_2^0(X)$ est la solution au temps $\tau = \tau_0$ du problème

$$\partial_\tau v_2 + \partial_2 \lambda_2(0) v_2 \partial_x v_2 = 0, v_2(x, 0) = (u_0^{(1)})_2(x).$$

Par ailleurs, le système en k, w se réduit à

$$\partial_T w_2 = 0, \partial_T k = \partial_2 \lambda_2(0) \partial_X w_2, w_2(X, \tau_0) = w_2^0(X), k(X, \tau_0) = 1,$$

dont la solution est

$$w_2(X, T) = w_2^0(X), k = 1 + (T - \tau_0) \partial_2 \lambda_2(0) (w_2^0)'$$

b. Si $\partial_2 \lambda_2(0) (w_0^{(1)})'_2$ atteint sa valeur minimum $m_1 < 0$ en $x = x_1$, $\partial_2 \lambda_2(0) w_2^0$ atteint au point correspondant

$$x_2 = x_1 + \tau_0 \partial_2 \lambda_2(0) (u_0^{(1)})_2(x_1)$$

sa valeur minimum $m_2 = \frac{m_1}{1 + m_1 \tau_0}$. Le nombre $\tau(0)$ vaut alors

$$\tau(0) = \tau_0 + (\max -\partial_2 \lambda_2(0) (w_2^0)')^{-1} = \tau_0 - m_2^{-1} = -m_1^{-1}.$$

De plus, si x_1 est un minimum quadratique non dégénéré, il en est de même pour x_2 , et le point $P = (X = x_2, T = \tau(0))$ vérifie

$$k(P) = 0, \partial_X k(P) = 0, \partial_X^2 k(P) \neq 0, \partial_T k(P) \neq 0.$$

Cela permet d'appliquer le théorème des fonctions implicites pour calculer le point $P(\epsilon)$ vérifiant

$$P(0) = P, k(P(\epsilon)) = \partial_X k(P(\epsilon)) = 0,$$

qui est le point de minimum de T sur la courbe $k = 0$. L'ordonnée de $P(\epsilon)$ est $\tau(\epsilon)$, qui est donc régulière en ϵ et dont le jet en $\epsilon = 0$ est calculable à tout ordre à partir du système en k, w et des jets de w_i^0 . Comme en fait w_1^0 et w_3^0 sont nuls d'ordre infini en $\epsilon = 0$ (p est arbitraire), le système en k, w se réduit, pour le calcul des jets, à l'équation scalaire de l'approximation de l'optique géométrique; donc $\tau(\epsilon)$ est asymptotique au temps formel $\tau_f(\epsilon)$.

Enfin, on a $\partial_X w_2(P(\epsilon)) \neq 0$: la dérivée $\partial_x u$ explose effectivement au point

$$(\phi(P(\epsilon)), \tau(\epsilon)),$$

mais pas les composantes ${}^t \ell_i(u) \partial_x u, i = 1, 3$, conformément au résultat de John [4].

La singularité de u est de type "cusp", selon la terminologie de [1]. Cela complète la preuve du Théorème 3. ■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. ALINHAC, *Explosion géométrique pour des systèmes quasilineaires*. Séminaire d'EDP, Ecole Polytechnique, Paris, (1993), et article à paraître au Amer. J. Math.
- [2] S. ALINHAC, *Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasilineaires en dimension deux II*, Duke Math. J. **73** (1994), 543-560.
- [3] L. HÖRMANDER, *The lifespan of classical solutions of nonlinear hyperbolic equations*, Lecture Notes Math. 1256, Springer Verlag, (1986), 214-280.
- [4] F. JOHN, *Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation*, Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974), 377-405.
- [5] S. KLAINERMAN - A. MAJDA, *Formation of singularities for wave equations including the nonlinear vibrating string*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), 241-263.
- [6] P.D. LAX, *Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations*, J. Math. Phys. **5** (1964), 611-613.
- [7] P.D. LAX, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957), 537-566.
- [8] M.P. LEBAUD, *Description de la formation d'un choc dans le p -système*, J. Math. Pure Appl. **73** (1994), 523-565.
- [9] A. MAJDA, *Compressible fluid flow and systems of conservation laws*, Appl. Math. Sc., Springer, Berlin, **53**, 1984.
- [10] J. SMOLLER, *Shock waves and reaction diffusion equations*, Grundlehr. 258, Springer Verlag, New York, 1983.

Département de Mathématiques,
URA760, Université Paris Sud,
91405 ORSAY, France