ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

RAPHAËLE SUPPER

Formules d'interpolation et théorèmes d'unicité pour des fonctions harmoniques de type exponentiel

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 21, nº 2 (1994), p. 299-310

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1994_4_21_2_299_0>

Formules d'interpolation et théorèmes d'unicité pour des fonctions harmoniques de type exponentiel

RAPHAËLE SUPPER

1. - Introduction

1.1 - Un théorème de type Carleson, relatif aux fonctions harmoniques $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de type exponentiel, i.e. pour lesquelles il existe $C > 0$ et $b > 0$ avec

$$|u(x, y)| \leq Ce^{b|x+iy|} \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

affirme [6] qu'une telle fonction est identiquement nulle dans $\mathbb{R}^2$ dès qu'elle s'annule sur $\mathbb{Z} \times \{0\}$ et $\mathbb{Z} \times \{a\}$, avec $0 < a < \pi/b$.

Deux questions afférentes à ce résultat étaient soulevées en [6]:

a. *Existe-t-il une formule d'interpolation permettant de reconstruire* u *à partir de ces valeurs* $u(n, 0)$ *et* $u(n, a)$ $(n \in \mathbb{Z})$*?*

b. *Ce théorème d'unicité est-il généralisable aux fonctions harmoniques de type exponentiel dans* $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$*?*

1.2 - En réponse à la première question, des formules d'interpolation ont été obtenues (dans le cas $a = 1$) en [7] et [1], moyennant quelques hypothèses supplémentaires: par exemple, on suppose en [7] que les fonctions $x \mapsto u(x, 0)$ et $x \mapsto u(x, 1)$ sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, ou que $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \left|\frac{1}{n} u(n, 0)\right| < +\infty$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \left|\frac{1}{n} u(n, 1)\right| < +\infty$ en [1].

On se propose ici d'interpoler u dans le cas où elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes aux points $(n, 0)$ et (n, a) $(n \in \mathbb{Z})$. On constate que $x \mapsto u(x, 0)$ et $x \mapsto u(x, a)$ sont alors périodiques, de périodes rationnelles (ce qui empêcherait ainsi de traiter ce cas par les résultats de [7] et [1]). L'énoncé obtenu est le suivant:

Pervenuto alla Redazione il 25 Ottobre 1993.

THÉORÈME A. *Soient* $a \in \mathbb{R}$, $0 < |a| \leq 1$ *et* u *une fonction harmonique dans* $\mathbb{R}^2$ *de type exponentiel* $< \pi$ *(i.e. vérifiant* (1) *avec* $b < \pi$*) telle que l'ensemble* $\{u(n,0), u(n,a) : n \in \mathbb{N}\}$ *soit fini. Il existe alors* $m_0 \in \mathbb{N}^*$ *et* $m_1 \in \mathbb{N}^*$ *tels que la restriction de* u *à la droite d'équation* $y = 0$ *(resp.* $y = a$*) soit périodique, de période rationnelle, avec* $u(x+m_0, 0) = u(x,0)$ *(resp.* $u(x+m_1, a) = u(x,a)$*) pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Plus précisément, on a la réprésentation suivante:*

$$u(x,y) = C_0 + \frac{C_1 - C_0}{a} y + \sum_{0 \leq n < m_0} u(n,0) K_{m_0}(x-n, y)$$
$$+ \sum_{0 \leq n < m_1} u(n,a) K_{m_1}(x-n, a-y),$$

avec

$$C_j = \frac{1}{m_j} \sum_{0 \leq n < m_j} u(n, ja) \quad (j = 0, 1)$$

et

$$K_m(x,y) = \frac{2}{m} \sum_{0 < j < m/2} \frac{\sinh 2\pi j(a-y)/m}{\sinh 2\pi j a/m} \cos 2\pi j x/m.$$

REMARQUE. Dans le cas où $u(n,0) = c$ et $u(n,a) = d$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (c et d réels fixés), la formule d'interpolation ci-dessus se réduit (avec $m_0 = m_1 = 0$, $C_0 = c$ et $C_1 = d$) à $u(x,y) = c + (d-c)y/a$.

1.3 - En [17] et [22], le théorème évoqué en 1.1 est étendu aux fonctions harmoniques $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ s'annulant sur $\mathbb{Z}^{N-1} \times \{0\}$ et $\mathbb{Z}^{N-1} \times \{a\}$ ($a = 1$ en [17] et $0 < |a| < (N-1)^{-1/2}$ en [22]) et de type exponentiel $< \pi$ dans $\mathbb{R}^N$, i.e. possédant une estimation, soit de la forme $|h(x)| \leq Ce^{b\|x\|}$ pour [17], soit de la forme $|h(x)| \leq Ce^{b(|x_1|+\ldots+|x_N|)}$ pour [22] (avec $C > 0$, $0 < b < \pi$ et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$).

On modifie ici ces conditions de nullité aux points à coordonnées entières de deux hyperplans $x_n = 0$ et $x_N = a$ de la façon suivante:

THÉORÈME B. *Soit* $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *une fonction harmonique dans* $\mathbb{R}^N$ *vérifiant:*

$$|h(x)| \leq Ce^{b\|x\|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

($C > 0$, $0 < b < \pi$, $\|\cdot\|$ *désignant la norme euclidienne dans* $\mathbb{R}^N$*) et telle que, pour tous les multientiers* $\nu \in \mathbb{N}^{N-1}$ *(sauf éventuellement un nombre fini):*

$$\sum_{\mu \in \mathbb{N}^{N-1}} c_\mu h(\nu + \mu, 0) = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^{N-1}} d_\mu h(\nu + \mu, a) = 0,$$

où $a \in \mathbb{R}$, $0 < |a| < \pi/b$, *les nombres* c_μ *(resp.* d_μ*), étant les coefficients d'un polynôme de* $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{N-1}]$ *dont l'ensemble des zéros ne rencontre pas* E^{N-1}, *avec* $E = \{e^z : z \in \mathbb{C}, |z| \leq b\}$. *Alors* h *est identiquement nulle dans* $\mathbb{R}^N$.

1.4 - La méthode utilisée pour démontrer ces théorèmes A et B repose sur la technique des fonctionnelles analytiques, étudiées dans les travaux [4], [11], [12], [13] et [14], auxquels on se réfèrera pour toute précision supplémentaire concernant leurs propriétés.

Rappelons seulement que les fonctionnelles analytiques sont les éléments du dual de l'espace des fonctions entières dans $\mathbb{C}^N$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}^N$. Étant donné un compact K de $\mathbb{C}^N$, une fonctionnelle analytique T est dite portable par K si, pour tout voisinage V relativement compact de K, il existe $C_V > 0$ telle que $|\langle T, f\rangle| \leq C_V \sup_V |f|$ pour toute fonction f entière dans $\mathbb{C}^N$.

La transformation de Fourier-Borel associe à toute fonctionnelle analytique T portable par K la fonction entière dans $\mathbb{C}^N$, notée $\hat{T}$ et définie par $\hat{T}(z) = \langle T_\varsigma, e^{z_1\varsigma_1+\ldots+z_N\varsigma_N}\rangle$. En fait, $\hat{T}$ appartient à l'espace, noté $\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N, K)$, des fonctions f entières dans $\mathbb{C}^N$ qui possèdent pour tout $\epsilon > 0$ une estimation du type:

$$|f(z)| \leq C_\epsilon \exp(H_K(z) + \epsilon\|z\|) \quad \forall z \in \mathbb{C}^N$$

avec $C_\epsilon > 0$, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{C}^N$ et H_K la fonction d'appui de K, définie par $H_K(z) = \max\limits_{\varsigma\in K} \Re(z_1\varsigma_1 + \ldots + z_N\varsigma_N)$. Réciproquement, si K est convexe, toute fonction de $\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N, K)$ est la transformée de Fourier-Borel d'une fonctionnelle analytique portable par K ([15] dans le cas $N = 1$, [9] et [14] pour N quelconque).

Rappelons également que, si K est un compact convexe contenu dans U^N, avec $U = \{\varsigma \in \mathbb{C} : |\Im\varsigma| < \pi\}$, la transformation G (définie et étudiée en [4]) associe à toute fonctionnelle analytique T portable par K une fonction, notée $G_K(T)$, nulle à l'infini, holomorphe dans $\prod\limits_{1\leq j\leq N} \mathbb{C}\setminus\exp(-K_j)$ (K_j désignant la j-ième projection de K), qui se développe en série de Taylor au voisinage de l'origine selon:

$$G_K(T)(z) = \sum_{\nu\in\mathbf{N}^N} \hat{T}(\nu)z^\nu \quad (\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_N)), z^\nu = z_1^{\nu_1}\ldots z_N^{\nu_N}).$$

1.5 - En [8], un résultat comparable au théorème d'unicité 1.1 est obtenu pour les fonctions $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmoniques de type exponentiel $\lessdot \pi$ (i.e. vérifiant (1) avec $b < \pi$): si u et $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ s'annulent sur $\mathbb{Z} \times \{0\}$, alors u est identiquement nulle dans $\mathbb{R}^2$. Ce théorème d'unicité, comme celui de 1.1, a donné lieu à deux formes de généralisations:

a. *On peut interpoler u dans $\mathbb{R}^2$ à partir de ces valeurs $u(n,0)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}(n,0)$ ($n \in \mathbb{Z}$), à condition que les restrictions de u et $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ à la droite $y = 0$ appartiennent à $L^p(\mathbb{R})$ pour un certain $0 < p < +\infty$* (voir [8]).

b. *Ce théorème d'unicité reste valable pour les fonctions h harmoniques dans $\mathbb{R}^N$ de type exponentiel $< \pi$, telles que h et $\dfrac{\partial h}{\partial x_N}$ s'annulent sur* $\mathbb{Z}^{N-1} \times \{0\}$ (voir [22]).

Par les mêmes méthodes que pour les Théorèmes A et B, on démontrera ici les résultats suivants:

THÉORÈME A'. *Soit u une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^2$ de type exponentiel $< \pi$ (i.e. vérifiant (1) avec $b < \pi$) telle que l'ensemble $\left\{u(n,0), \dfrac{\partial u}{\partial y}(n,0) : n \in \mathbb{N}\right\}$ soit fini. Il existe alors $m_0 \in \mathbb{N}^*$ et $m_1 \in \mathbb{N}^*$ tels que la restriction de u (resp. $\dfrac{\partial u}{\partial y}$) à la droite d'équation $y = 0$ soit périodique, de période rationnelle, avec $u(x + m_0, 0) = u(x, 0)$ (resp. $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x + m_1, 0) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 0)$) pour tout $x \in \mathbb{R}$. Plus précisément, on a la représentation suivante:*

$$u(x,y) = C_0 + C_1 y + \sum_{0 \le n < m_0} u(n,0) \frac{\partial L_{m_0}}{\partial y}(x - n, y)$$
$$+ \sum_{0 \le n < m_1} \frac{\partial u}{\partial y}(n,0) L_{m_1}(x - n, y),$$

avec

$$C_0 = \frac{1}{m_0} \sum_{0 \le n < m_0} u(n,0), \qquad C_1 = \frac{1}{m_1} \sum_{0 \le n < m_1} \frac{\partial u}{\partial y}(n,0)$$

et

$$L_m(x,y) = \sum_{0 < j < m/2} \frac{1}{j\pi} \cos \frac{2\pi j x}{m} \sinh \frac{2\pi j y}{m}.$$

REMARQUE. Lorsque $u(n,0) = c$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}(n,0) = d$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ $(c, d \in \mathbb{R})$, cette formule d'interpolation reste valable avec $m_0 = m_1 = 0$, $C_0 = c$, $C_1 = d$ et devient: $u(x,y) = c + dy$.

THÉORÈME B'. *Soit $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^N$ telle que:*

$$|h(x)| \le C e^{b\|x\|} \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$$

(avec $C > 0$, $0 < b < \pi$ et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$) et que, pour tous les multientiers $\nu \in \mathbb{N}^{N-1}$ (sauf éventuellement un nombre fini):

$$\sum_{\mu \in \mathbb{N}^{N-1}} c_\mu h(\nu + \mu, 0) = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^{N-1}} d_\mu \frac{\partial h}{\partial x_N}(\nu + \mu, 0) = 0,$$

les c_μ et d_μ (tous nuls sauf pour un nombre fini de $\mu \in \mathbb{N}^{N-1}$) étant définis comme au Théorème B. Alors h est identiquement nulle dans $\mathbb{R}^N$.

2. - Formules d'interpolation dans $\mathbb{R}^N$: preuve des théorèmes A et A'

2.1 - La preuve des théorèmes A et A' utilise le résultat suivant:

PROPOSITION A. *Soient un compact convexe non vide* $K \subset U = \{\varsigma \in \mathbb{C} : |\Im\varsigma| < \pi\}$ *et* $f \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}, K)$ *ne prenant sur* $\mathbb{N}$ *qu'un nombre fini* (> 1) *de valeurs distinctes. Il existe alors* $m \in \mathbb{N}^*$ *tel que* f *soit périodique (de période rationnelle) avec* $f(z+m) = f(z)$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$. *Plus précisément, on a la représentation suivante dans* $\mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{0 \leq n < m} f(n) k_m(z-n)$$

avec

$$k_m(z) = \frac{1}{m} \sum_{|j|<m/2} e^{2i\pi jz/m} = \frac{1}{m}\left(1 + 2 \sum_{1 \leq j < m/2} \cos 2i\pi jz/m\right).$$

REMARQUE. i) Si f ne prend qu'une seule valeur c sur $\mathbb{N}$, alors elle est constante sur $\mathbb{C}$: $f \equiv c$, d'après le théorème d'unicité 1.4.4 de [4].

ii) On a également:

$$k_m(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi z}{m \sin \pi z/m} & \text{si } m \text{ est impair} \\[2ex] \dfrac{\sin(m-1)\pi z/m}{m \sin \pi z/m} & \text{si } m \text{ est pair} \end{cases}$$

et, lorsque m est impair, on déduit de la Proposition 5 de [21] (appliquée dans le cas d'une variable, avec $0 < \delta < \pi/m$) que:

$$k_m(z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{\sin \pi(z-lm) \sin \delta(z-lm)}{\pi\delta(z-lm)^2}$$

iii) Lorsque m est pair dans l'énoncé ci-dessus, f vérifie de plus:

$$f(0) - f(1) + f(2) - \ldots + (-1)^{m-1} f(m-1) = 0,$$

PREUVE. Soit T la fonctionnelle analytique portable par K dont f est la transformée de Fourier-Borel. Sa transformée d'Avanissian-Gay se développe au voisinage de l'origine selon $G_K(T)(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) z^n$, avec un rayon de convergence égal à 1. Ainsi, T est en fait portable par le compact $K' = \{\varsigma \in K : \Re\varsigma \leq 0\}$ et $G_K(T)$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \exp(-K')$, donc en particulier est prolongeable au-delà du cercle unité. On en déduit, d'après [20, Satz 2], qu'il existe $P \in \mathbb{C}[z]$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que:

$$G_K(T)(z) = \frac{P(z)}{1 - z^m}.$$

Comme $G_K(T)$ est nulle à l'infini, P est de degré $< m$ et $P(z) = \sum_{0 \leq n < m} f(n)z^n$. Puisque $G_K(T)$ est holomorphe en -1, on aura $P(-1) = 0$ si m est pair.

Le Corollaire 1.4.2 de [4], qui fournit une représentation intégrale de $\hat{T}$ faisant intervenir $G_K(T)$, conduit finalement à:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{P(\omega)}{\omega^m - 1} e^{-z \log \omega} \frac{d\omega}{\omega}$$

avec Γ un chemin fermé simple contenu dans $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ entourant les racines m-ièmes de l'unité différentes de -1.

On conclut par un calcul de résidus. En effet, si $\alpha = e^{-i\theta}$ ($|\theta| < \pi$) est l'une de ces racines, le résidu en α de la fonction sous le signe intégrale est $\frac{1}{m} P(\alpha)e^{i\theta z}$. □

2.2 - *Notations.* La fonction harmonique u du théorème A (ou A') est la partie réelle d'une fonction f entière dans $\mathbb{C}$ (i.e. $u(x,y) = \Re f(x+iy)$), dont on sait, d'après l'inégalité de Carathéodory (voir Théorème 1.3.1 de [5]) qu'elle est du même type exponentiel que u, en d'autres termes $f \in \operatorname{Exp}(\mathbb{C}, B)$, avec $B = \{\varsigma \in \mathbb{C} : |\varsigma| \leq b\}$.

La fonction f_0 définie par $f_0(z) = \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(\overline{z})})$ appartient également à $\operatorname{Exp}(\mathbb{C}, B)$ et vérifie $f_0(z) = u(x, 0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'après la proposition A, il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que:

$$f_0(z) = \sum_{0 \leq n < m_0} u(n, 0) k_{m_0}(z - n).$$

2.3 - *Preuve du Théorème A.* La fonction K_m ($m \in \mathbb{N}^*$) est harmonique dans $\mathbb{R}^2$ de type exponentiel $< \pi$ et vérifie $K_m(x, 0) = k_m(x) - \frac{1}{m}$ et $K_m(x, a) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Les fonctions f et f_0, le disque D et l'entier m_0 étant définis comme en 2.2, considérons la fonction $f_1 \in \operatorname{Exp}(\mathbb{C}, B)$ définie par

$$f_1(z) = \frac{1}{2}(f(z + ia) + \overline{f(\overline{z} + ia)}).$$

Elle vérifie $f_1(x) = u(x, a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et, d'après la Proposition A, il existe $m_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que:

$$f_1(z) = \sum_{0 \leq n < m_1} u(n, a) k_{m_1}(z - n).$$

Soit v la fonction harmonique dans $\mathbb{R}^2$, de type exponentiel $< \pi$, définie par:

$$v(x, y) = \sum_{0 \leq n < m_0} u(n, 0) K_{m_0}(x - n, y) + \sum_{0 \leq n < m_1} u(n, a) K_{m_1}(x - n, a - y).$$

On vérifie que $v(x,0) = u(x,0) - C_0$ et que $v(x,a) = u(x,a) - C_1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $g \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}, B)$ telle que $\Re g(x+iy) = u(x,y) - v(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme

$$\frac{1}{2}(g(z) + \overline{f(\overline{z})}) = C_0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(g(z+ia) + \overline{g(\overline{z}+ia)}) = C_1,$$

la fonction g satisfait l'équation aux différences:

$$g(z+ia) = g(z) + 2(C_1 - C_0)$$

dont les solutions sont sommes de la solution particulière $(C_1 - C_0)z/ia$ et d'une combinaison linéaire de $e^{j\pi z/a}(j \in \mathbb{Z})$ d'après le Théorème 6.10.1 de [5].

On en déduit que $g(z) = (C_1 - C_0)z/ia + c$ (car $|j/a| < 1$ implique $j = 0$), avec $\Re c = C_0$. □

2.4 - *Preuve du Théorème A'*. La fonction L_m est harmonique dans $\mathbb{R}^2$, de type exponentiel $< \pi$, et satisfait $L_m(x,0) = \dfrac{\partial^2 L_m}{\partial y^2}(x,0) = 0$ et $\dfrac{\partial L_m}{\partial y}(x,0) = k_m(x) - \dfrac{1}{m}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Avec f, f_0, D et m_0 définis comme en 2.2, soit $f_1 \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}, B)$ définie par $f_1(z) = \dfrac{-1}{2i}(f'(z) - \overline{f'(\overline{z})})$. Comme $f_1(x) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on déduit de la proposition A qu'il existe $m_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que:

$$f_1(z) = \sum_{0 \le n < m_1} \frac{\partial u}{\partial y}(n,0) k_{m_1}(z-n).$$

La fonction v harmonique dans $\mathbb{R}^2$, de type exponentiel $< \pi$, définie par:

$$v(x,y) = \sum_{0 \le n < m_0} u(n,0) \frac{\partial L_{m_0}}{\partial y}(x-n,y) + \sum_{0 \le n < m_1} \frac{\partial u}{\partial y}(n,0) L_{m_1}(x-n,y),$$

vérifie $v(x,0) = u(x,0) - C_0$ et $\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) - C_1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $g \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}, B)$, telle que $\Re g(x+iy) = u(x,y) - v(x,y)$. D'après ce qui précède:

$$\frac{1}{2}(g(z) + \overline{g(\overline{z})}) = C_0 \quad \text{et} \quad \frac{-1}{2i}(g'(z) - \overline{g'(\overline{z})}) = C_1.$$

En notant $g(z) = \sum_{n \ge 0} c_n z^n$, on obtient:

$$\Re c_n = \begin{cases} C_0 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \ge 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \Im c_n = \begin{cases} C_1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \ge 2 \end{cases}$$

d'où $\Re g(x+iy) = C_0 + C_1 y$. □

3. - Théorèmes d'unicité dans $\mathbb{R}^N$: preuve des énoncés B et B'

3.1 - La preuve des théorèmes B et B' repose sur le résultat suivant:

PROPOSITION B. *Soient K un compact convexe non vide contenu dans U^N et $f \in \operatorname{Exp}(\mathbb{C}^N, K)$ vérifiant pour tous les multientiers $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N) \in \mathbb{N}^N$ (sauf éventuellement un nombre fini):*

$$\sum_{\mu \in \mathbb{N}^N} a_\mu f(\nu + \mu) = 0 \qquad \begin{aligned} \mu &= (\mu_1, \dots, \mu_N) \\ \nu + \mu &= (\nu_1 + \mu_1, \dots, \nu_N + \mu_N) \end{aligned}$$

où les a_μ sont les coefficients d'un polynôme de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$ dont l'ensemble des zéros ne rencontre pas $\prod_{1 \le j \le N} \exp K_j$, avec K_j la j-ième projection de K ($j = 1, \dots, N$). Alors f est identiquement nulle dans $\mathbb{C}^N$.

REMARQUE. Avec un polynôme constant non nul, on retrouve le théorème d'unicité 3.1.1 de [4] (voir aussi [10]).

PREUVE. Soient $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_N) \in \mathbb{N}^N$ tel que $a_\mu = 0$ dès que $\mu_j > \delta_j$ pour un $j \in [N] = \{1, \dots, N\}$ (on notera $\mu \le \delta$ si $\mu_j \le \delta_j$ pour tout $j \in [N]$) et $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$ défini par $P(X) = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^N, \mu \le \delta} a_\mu X^{\delta - \mu}$. Ainsi, l'ensemble des zéros de P ne rencontre pas $\prod_{1 \le j \le N} \mathbb{C} \setminus \exp(-K_j)$.

Soit G la transformée d'Avanissian-Gay de la fonctionnelle analytique (portable par K) dont f est la transformée de Fourier-Borel. Au voisinage de l'origine, on a pour tout $\mu \in \mathbb{N}^N$:

$$G(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^N} f(\nu + \mu) z^{\nu + \mu} + \sum_{\nu \in \mathcal{N}_\mu} f(\nu) z^\nu,$$

avec $\mathcal{N}_\mu = \{\nu \in \mathbb{N}^N : \nu \ge \mu\}^c = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} \mathcal{N}_{\mu,J}$, où $\mathcal{J}$ est l'ensemble des parties $J \subset [N]$, $J \ne [N]$, et $\mathcal{N}_{\mu,J} = \{\nu \in \mathbb{N}^N : \nu_j \ge \mu_j \Leftrightarrow j \in J\}$.

La deuxième somme du second membre ci-dessus s'écrit ainsi $\sum_{j \in \mathcal{J}} G_{\mu,J}(z)$, où

$$G_{\mu,J}(z) = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{\mu,J}} f(\nu) z^\nu = \sum_{\substack{\nu_j \in \{0,1,\dots,\mu_j - 1\} \\ j \notin J}} \left(\sum_{\substack{\nu_j \ge \mu_j \\ j \in J}} f(\nu) \prod_{j \in J} z_j^{\nu_j} \right) \prod_{j \notin J} z_j^{\nu_j}$$

est un polynôme en $z_{j_{k+1}}, \dots, z_{j_N}$ (en notant $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ et $[N] \setminus J = \{j_{k+1}, \dots, j_N\}$) dont les coefficients sont des fonctions de $z_{j_1}, \dots, z_{j_k}$, holomorphes dans $\prod_{1\le h\le k} \mathbb{C}\setminus\exp(-K_{j_k})$: en effet, la fonction

$$(z_{j_1},\dots,z_{j_k}) \mapsto f(z)$$

(avec $z_{j_{k+1}},\dots,z_{j_N}$ fixés) appartient à $\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^k, K_{j_1}\times\dots\times K_{j_k})$.

Ainsi, $P(z)G(z)$ se réduit à une somme (finie) de produits de la forme $P_J g_J$, avec $P_J(X)\in\mathbb{C}[X_1,\dots,X_N]$ et g_J une fonction de $z_{j_1},\dots,z_{j_k}$, holomorphes dans $\prod_{1\le h\le k} \mathbb{C}\setminus\exp(-K_{j_h})$, si $J=\{j_1,\dots,j_k\}\subset[N]$, $J\neq[N]$, et g_J constante si $J=\emptyset$.

On déduit du corollaire 1.4.2 de [4] que f est une combinaison linéaire de fonctions entières $f_J\in\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N, K_1\times\dots\times K_N)$ de la forme:

$$f_J(z)=\left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^N \int_{\Gamma_1\times\dots\times\Gamma_N} \frac{P_J(\omega)}{P(\omega)}\, g_J(\omega_{j_1},\dots,\omega_{j_N})$$

$$\exp\left(-\sum_{1\le j\le N} z_j \log\omega_j\right)\frac{d\omega_1}{\omega_1}\cdots\frac{d\omega_N}{\omega_N}$$

avec Γ_j un chemin fermé simple orienté dans le sens trigonométrique, contenu dans $\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$, entourant $\exp(-K_j)$ $(j=1,\dots,N)$ et tel que l'ensemble des zéros de P ne rencontre pas $\prod_{j=1}^{N} V_j$, où V_j est le compact, voisinage de $\exp(-K_j)$, de frontière Γ_j $(j\in[N])$.

Soient $j\in[N]\setminus J$ et ω_h fixé sur Γ_h pour tout $h\in[N]\setminus\{j\}$. Alors

$$\frac{-1}{2i\pi}\int_{\Gamma_j}\frac{P_J(\omega)}{P(\omega)}\exp(-z_j\log\omega_j)\frac{d\omega_j}{\omega_j}=0$$

et la fonction f_J est identiquement nulle dans $\mathbb{C}^N$. □

3.2 - *Préliminaires.* La fonction harmonique h de type exponentiel $<\pi$ du théorème B (ou B') est la restriction à $\mathbb{R}^N$ de sa complexifiée $\tilde{h}$ qui appartient, d'après la Proposition 6.2.8 de [2] (voir aussi le Théorème 4.7 de [3]), à $\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N, B^N)$, où $B=\{\varsigma\in\mathbb{C} : |\varsigma|\le b\}$, et se développe dans $\mathbb{C}^N$ selon:

$$\tilde{h}(z)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}^N} C_\nu z^\nu, \qquad C_\nu=\frac{1}{\nu!}(D_z^\nu\tilde{h})(0)=\frac{1}{\nu!}(D_x^\nu h)(0)$$

avec $z^\nu = z_1^{\nu_1}\dots z_N^{\nu_N}$, $\nu! = \nu_1!\dots\nu_N!$, $D_z^\nu = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{\nu_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial z_N}\right)^{\nu_N}$ et $D_x^\nu = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\nu_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^{\nu_N}$ pour tout $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_N)\in\mathbb{N}^N$.

Sous les hypothèses du Théorème B (ou B'), on a, pour tous les multientiers $\nu \in \mathbb{N}^{N-1}$ (sauf éventuellement un nombre fini):

$$\sum_{\mu \in \mathbb{N}^{N-1}} c_\mu \tilde{h}(\nu + \mu, 0) = 0$$

et comme la restriction de $\tilde{h}$ à l'hyperplan $z_N = 0$ appartient à $\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{N-1}, B^{N-1})$, elle est identiquement nulle dans $\mathbb{C}^{N-1}$ d'après la proposition B (appliquée ici à une fonction entière de $N-1$ variables).

La restriction de h à l'hyperplan $x_N = 0$ étant identiquement nulle dans $\mathbb{R}^{N-1}$, il en est de même successivement pour les restrictions de:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}\ (1 \leq j \leq N-1), \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x_N^2}, \quad \frac{\partial^{2p} h}{\partial x_N^{2p}}\ (p \in \mathbb{N}) \quad \text{et} \quad D_x^\nu h\ (\nu \in \mathbb{N}^N, \nu_N \text{ pair}).$$

Ainsi, $C_\nu = 0$ pour tout multientier $\nu \in \mathbb{N}^N$ tel que ν_N soit pair.

3.3 *Preuve du Théorème B.* D'après 3.2, la complexifiée $\tilde{h}$ de h vérifie $\tilde{h}(z_1, \ldots, z_{N-1}, -z_N) = -\tilde{h}(z)$ pour tout $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$.

Comme sa restriction à l'hyperplan $z_N = a$ appartient à $\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{N-1}, B^{N-1})$, on obtient, de la même façon qu'en 3.2, que $\tilde{h}(z_1, \ldots, z_{N-1}, a) = 0$ et $\tilde{h}(z_1, \ldots, z_{N-1}, a - z_N) = -\tilde{h}(z_1, \ldots, z_{N-1}, a + z_N)$ pour tout $z \in \mathbb{C}^N$, d'où $\tilde{h}(z_1, \ldots, z_{N-1}, z_N + 2a) = \tilde{h}(z)$.

Ayant fixé $z = (z_1, \ldots, z_{N-1}) \in \mathbb{C}^{N-1}$, la fonction f entière dans $\mathbb{C}$, définie par $f(\varsigma) = \tilde{h}(z_1, \ldots, z_{N-1}, a\varsigma)$, est de type exponentiel $\leq |a|b < \pi$, s'annule sur $\mathbb{N}$ d'après ce qui précède et donc est identiquement nulle dans $\mathbb{C}$ (voir par exemple [4, Théorème 1.4.4]).

D'où $\tilde{h} \equiv 0$ dans $\mathbb{C}^N$ et $h \equiv 0$ dans $\mathbb{R}^N$. □

3.4 - *Remarque.* Le Théorème B, appliqué avec deux polynômes constants non nuls et $a = 1$, permet de retrouver l'énoncé de [17] évoqué dans l'introduction.

Comme $|x_1| + \ldots + |x_N| \leq \sqrt{N}\|x\|$ pour tout $(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, il englobe également (dans le cas $0 < |a| < \frac{\pi}{\sqrt{N}b}$) celui de [22]:

THÉORÈME [22]. *Toute fonction harmonique $h : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ s'annulant sur $\mathbb{Z}^{N-1} \times \{0\}$ et $\mathbb{Z}^{N-1} \times \{a\}$, $(a \in \mathbb{R},\ 0 < |a| < 1/\sqrt{N-1})$ et possédant une croissance de la forme:*

$$|h(x)| \leq Ce^{b(|x_1| + \ldots + |x_N|)} \quad (C > 0,\ 0 < b < \pi)$$

est identiquement nulle dans $\mathbb{R}^N$.

Il est à noter que, pour $N \geq \frac{\pi^2}{\pi^2 - b^2}$, la borne $\frac{\pi}{\sqrt{N}b}$ fournie par le théorème B améliore la borne $\frac{1}{\sqrt{N-1}}$.

3.5 - *Preuve du Théorème B'*. Comme $\dfrac{\partial \tilde{h}}{\partial z_N}$ coïncide avec $\dfrac{\partial h}{\partial x_N}$ sur $\mathbb{R}^N$ et que sa restriction à l'hyperplan $z_n = 0$ est une fonction de $\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{N-1}, B^{N-1})$ (B défini en 3.2), on déduit de la Proposition B que

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial z_N}(z_1, \dots, z_{N-1}, 0) = 0$$

pour tout $(z_1, \dots, z_{N-1}) \in \mathbb{C}^{N-1}$. La restriction de $\dfrac{\partial h}{\partial x_N}$ à l'hyperplan $x_N = 0$ étant identiquement nulle, on obtient comme en 3.2 que $\dfrac{\partial^3 h}{\partial x_j^2 \partial x_N}$ $(1 \leq j \leq N-1)$, puis $\dfrac{\partial^3 h}{\partial x_N^3}$ et $\dfrac{\partial^{2p+1} h}{\partial x_N^{2p+1}}$ $(p \in \mathbb{N})$ et finalement $D_x^\nu h$ ($\nu \in \mathbb{N}^N$, ν_N impair) s'annulent sur $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$.

C'est-à-dire que tous les coefficients C_ν définis en 3.2 sont nuls. Ainsi, $h \equiv 0$ dans $\mathbb{R}^N$. □

3.6 - *Remarque*. À l'aide de la transformation $\tilde{G}$ exposée en [18] et [19], des énoncés comparables aux Théorèmes B et B' peuvent être obtenus pour des fonctions harmoniques de type exponentiel < 1, les conditions de nullité aux points du réseau étant modifiées de la façon suivante: les valeurs

$$h(\nu + \mu, 0), \;\; h(\nu + \mu, a) \text{ et } \frac{\partial h}{\partial x_N}(\nu + \mu, 0) \;\; (\nu \in \mathbb{N}^{N-1}, \mu \in \mathbb{N}^{N-1})$$

y sont remplacées respectivement par

$$(D^\mu h)(\nu + \mu, 0), \;\; (D^\mu h)(\nu + \mu, a) \text{ et } \frac{\partial D^\mu h}{\partial x_N}(\nu + \mu, 0),$$

où $D^\mu = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\mu_1} \cdots \left(\dfrac{\partial}{\partial x_{N-1}}\right)^{\mu_{N-1}}$ pour tout $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{N-1}) \in \mathbb{N}^{N-1}$. De plus, il est alors requis que l'ensemble des zéros de chacun des deux polynômes intervenant dans l'énoncé ne rencontre pas $[-e, 0]^{N-1}$.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] K.F. ANDERSEN, *On the representation of harmonic functions by their values on lattice points*. J. Math. Anal. Appl. **49**, (1975), 692-695.

[2] V. AVANISSIAN, Cellules d'harmonicité et prolongement analytique complexe. Travaux en cours, Hermann, Paris, 1985.

[3] V. AVANISSIAN, *Quelques applications des fonctionnelles analytiques*, Annales Academiae Scientarum Fennicae Series A1 Mathematica, **15**, (1990) 225-245.

[4] V. AVANISSIAN - R. GAY, *Sur une transformation des fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entières de plusieurs variables*. Bull. Soc. Math. France, **103**, (1975) 341-484.

[5] R. BOAS JR, Entire functions. New York Academic Press, 1954.

[6] R. BOAS JR, *A uniqueness theorem for harmonic functions*. J. Approx. Theory **5**, (1972) 425-427.

[7] C.H. CHING - C.K. CHUI, *A representation formula for harmonic functions*. Proc. Amer. Math. Soc., **39**, (1973) 349-352.

[8] C.H. CHUI - G.A. ROBERTS, *An interpolation formula for harmonic functions on the set of integers*. J. Approx. Theory **29**, (1980) 144-150.

[9] L. EHRENPREIS, *A fundamental principle for systems of linear differential equations with constant coefficients and some of its applications*. Proc. Intern. Symp. on Linear Spaces, 161-174, Jérusalem 1961.

[10] F. GRAMAIN, *Fonctions entières arithmétiques*. Séminaire P. Lelong, H. Skoda (Analyse) 17ème année, 1976/77, Lecture Notes in Mathematics, 694.

[11] L. HÖRMANDER, *An introduction to complex analysis in several variables*. D. van Nostrand Company, Princeton 1966.

[12] P. LELONG, *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables)*. Les Presses de l'université de Montréal, 1968.

[13] P. LELONG - L. GRUMAN, *Entire functions of several complex variables*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaft, 282, Springer, 1986.

[14] A. MARTINEAU, *Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel*. J. Anal. Math. de Jérusalem **11**, (1963), 1-164.

[15] G. PÓLYÀ, *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen*. Math. Z., **19**, (1929), 549-640.

[16] Q.I. RAHMAN - G. SCHMEISSER, *Representation of entire harmonic functions by given values*. J. Math. Anal. Appl., **115**, (1986) 461-469.

[17] N.V. RAO, *Carleson theorem for harmonic functions in* $\mathbb{R}^n$. J. Approx. Theory **12**, (1974) 309-314.

[18] R. SUPPER, *Exemples d'application des fonctionnelles analytiques*. Complex Variables: Theory and Appl., **18**, (1992) 201-212.

[19] R. SUPPER, *Fonctionnelles analytiques liées aux fonctions spéciales et fonctions au arithmétiques au sens d'Abel*. Thèse (1992) 508/TS-35, Pubblication de l'I.R.M.A., I.S.S.N. 0755-3390.

[20] G. SZEGÖ, *Tschebyscheffsche Polynome und nichtfortsetzbare Potenzreihen*. Math. Annalen **87**, 90-111, 1921.

[21] K. YOSHINO, *Liouville type theorems for entire functions of exponential type*. Complex Variables: Theory and Applications **5**, (1985) 21-51.

[22] D. ZEILBERGER, *Uniqueness theorems for harmonic functions of exponential type*. Proc. Amer. Math. Soc. **61**, (1976) 335-340.

U.F.R. de Mathématiques et d'Informatique
Université Louis Pasteur et C.N.R.S. (U.R.A. 01)
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
France