Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Nguiffo B. Boyom

Structures localement plates isotropes des groupes de Lie

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 20, nº 1 (1993), p. 91-131

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1993_4_20_1_91_0>

Structures localement plates isotropes des groupes de Lie

NGUIFFO B. BOYOM

Introduction

On s'intéresse à des propriétés qualitatives des structures affines des groupes de Lie nilpotents. Il est des situations où une structure de groupe de Lie résoluble dans $\mathbb{R}^n$ puisse être obtenue par déformation dans un sens à préciser (e.g., suivant la théorie classique Gerstenhaber-Nijenhuis, [9], [10], [13], [14]) à partir de structure de groupe de Lie nilpotent. En s'inspirant de cette remarque on s'attache dans ce travail à la recherche des structures affines qui possèdent des propriétés présentant un caractère de stabilité sous certaines déformations (en occurrence des déformations qui laissent stable la structure de l'algèbre de Lie des commutateurs). Pour des raisons techniques évidentes il est particulièrement indiqué d'exiger que de telles propriétés vérifient soit le théorème d'extension, soit celui de relèvement, soit les deux à la fois. La classe des structures isotropes introduite au §2 répondent à plusieurs de ces exigences. L'intérêt pour les structures isotropes des groupes de Lie nilpotents provient en partie de leur relative rigidité (voir e.g., Proposition 2.4.3); une variante du théorème d'effacement démontré dans [12b] pour les dérivations nilpotentes continue d'être valable pour certaines dérivations semi-simples, (voir [13c]). Les deux résultats principaux sont les deux théorèmes d'extension et de relèvement des structures isotropes des groupes de Lie nilpotents (Theorèmes 2.4.5 et 2.4.6) et le Théorème 2.4.7, (Théorème d'existence).

Ce travail est l'ultime étape vers le théorème d'existence des structures affines completes invariantes à gauche dans certains groupes de Lie résolubles; [13c] est consacré à la démonstration de ce théorème d'existence. Les notions ainsi que les résultats de ce travail seront utilisés dans [13c].

Voici un survol de ce papier. Le texte comprend deux paragraphes. Le premier paragraphe est consacré aux rappels des quelques généralités sur les variétés localement plates, ([4], [11]). Le principal résultat de ce paragraphe est le théorème de nullité 1.4.3. dont le théorème d'effacement de [13c] est une

Pervenuto alla Redazione il 12 Dicembre 1990.

variante. Au second paragraphe on introduit la notion des structures normales isotropes et on met en évidence leur propriété de rigidité. Les problèmes d'extension et de relèvement des structures isotropes sont résolus. On termine par le théorème d'existence des structures isotropes dans certains groupes.

Toutes les notions introduites sont illustrées par des exemples donnés dans les deux situations fondamentales suivantes: (i) les groupes de Lie commutatifs, (ii) le groupe de Heisenberg $\mathcal{H}_3$. ∎

1. - Deroulements dans une variété localement plate

Les variétés différentiables considérées sont connexes. Tous les objets géométriques en jeu dans une variété différentiable sont supposés différentiables. La classe de différentiabilité est C^∞.

Pour toute la suite on adopte les notations qui suivent. Soit n un nombre entier naturel; on désigne par $\Gamma_a(n)$ le pseudo-groupe de Lie engendré par les germes des applications affines inversibles de l'espace numérique réel $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, (voir [1]).

Soit M une variété différentiable; la $\mathbb{R}$-algèbre associative des fonctions différentiables dans M à valeurs réelles est notée $C^\infty(M,\mathbb{R})$; $\mathcal{X}(M)$ est le $C^\infty(M,\mathbb{R})$-module des champs de vecteurs différentiables. Soit (p,q) un couple de nombres entiers naturels; $T^{p,q}(M)$ est le fibré vectoriel des tenseurs de type (p,q).

1.1. - Variétés affines et variétés localement plates

Soit M une variété différentiable de dimension n. Une structure de variété affine dans M consiste en la donnée d'un $\Gamma_a(n)$-atlas $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)_\alpha\}$ dans la structure différentiable de M. ([1], [8]).

Une structure de variété localement plate dans M est la donnée d'une connexion linéaire dont la dérivation covariante ∇ a ses tenseurs de courbure et de torsion identiquement nuls, [10].

Il y a correspondance bijective de l'ensemble $\mathcal{A}(M)$ des structures affines dans M sur l'ensemble $\mathcal{C}(M)$ des connections linéaires localement plates (i.e. dont les tenseurs de courbure et de torsion sont identiquement nuls) définies dans M; ([8], [9], [13]).

Soit $(x_1,\ldots,x_n)$ un système des coordonnées locales attachées à une carte affine (U,φ); la dérivation covariante de la connexion localement plate qui correspond à la structure affine donnée est définie par le système

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

EXEMPLE 1.1.1. Soit $\mathbb{R}^n = \{(x_1,\ldots,x_n)|x_i \in \mathbb{R}\}$ muni de la connexion linéaire D^0 défini par $\nabla^0_x \dfrac{\partial}{\partial x_i} = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et tout $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$.

Les géodésiques de la connexion ∇^0 sont des droites dans $\mathbb{R}^n$.

EXEMPLE 1.1.2. L'espace numérique $\mathbb{R}^n$ possède d'autres structures de variété localement plate. Considérons le cas $n = 2$ et pour tout $X = f\dfrac{\partial}{\partial x_1} + g\dfrac{\partial}{\partial x_2} \in \mathcal{X}(M)$ posons

$$\nabla_x \frac{\partial}{\partial x_1} = f\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad \nabla_x \frac{\partial}{\partial x_2} = 0.$$

On obtient une connexion localement plate qui n'est pas affinement équivalente à celle de l'Exemple 1.1.1; pour se convaincre de cette affirmation, il suffit d'exprimer dans les coordonnées naturelles (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$ les champs de vecteurs (locaux ou non) $\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ solutions de l'équation

$$\nabla \xi = 0.$$

Ces champs sont de la forme

$$(x_1, x_2) \mapsto \xi_{\lambda,\mu}(x_1, x_2) = \lambda e^{-x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

On peut vérifier aisément que la connexion localement plate décrite ci-dessus n'est pas complète.

1.2. - Déroulements dans (M, ∇)

Considérons une structure localement plate (M, ∇) déterminée par la connexion linéaire localement plate ∇. Soit $c : [0,1] \mapsto M$ un chemin différentiable par morceaux. Posons $c(0) = m_0$ et $c(1) = m_1$. Conformément aux notations de [10a], $f_\nabla(c)$ est le transport parallèle de long du chemin c. Le déroulement du chemin c dans l'espace vectoriel tangent $T_{m_1}M$ est défini par

$$q_\nabla(c) = -\int_0^1 f_\nabla(c_\theta)\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}(\theta)\mathrm{d}\theta$$

c_θ étant le chemin défini par la restriction a $[\theta, 1]$ de l'application $c : [0,1] \mapsto M$. On sait que l'application $c \mapsto f_\nabla(c)$ est compatible avec la "composition" des chemins; il en résulte que le déroulement des chemins obéit à la règle suivante:

$$q_\nabla(c \cdot c') = f_\nabla(c)q_\nabla(c') + q_\nabla(c)$$

chaque fois que le chemin composé $c \cdot c'$ est défini, c'est-à-dire chaque fois que lon a $c'(1) = c(0)$.

Le fait remarquable est que $f_\nabla(c)$ et $q_\nabla(c)$ dépendent seulement de la classe d'homotopie (à extrémités fixes) du chemin c. Cette notion de déroulement des chemins conduit à des considérations liées au problème de complétude de variétés affines ([7], [11]).

(a) D'abord le couple (f_∇, q_∇) définit une représentation affine du groupe fondamental $\pi_1(M)$ dans l'espace vectoriel $T_{m_0}(M)$ muni de sa structure affine naturelle.

(b) Fixons une fois pour toutes le point de base m et considérons la variété $\tilde{M}$ des classes d'homotopie des chemins $c : [0,1] \mapsto M$ avec $c(1) = m$; $\tilde{M}$ n'est pas autre chose que le revêtement universel de la variété M; l'application déroulement définit une immersion de la variété $\tilde{M}$ dans T_mM. Il est bien connu que les deux assertions suivantes sont équivalents:

(a_1) la connexion ∇ est complète,
(a_2) le déroulement $q_\nabla : \tilde{M} \to T_mM$ est un difféomorphisme,

(voir [8] pour des détails). Lorsque ∇ n'est pas complète $q_\nabla^{-1}(0)$ est un sous-groupe du groupe fondamental $\pi_1(M)$, le revêtement de (M, ∇) associé à $q_\nabla^{-1}(0)$ est appelé revêtement d'holonomie. Le lien entre la complétude de (M, ∇) est la structure algébrique de $\pi_1(M)$ n'est pas complètement éclairci [4]. On sait cependant que dans le cas des variétés compactes la représentation affine de $\pi_1(M)$ définie par (f_∇, q_∇) est un invariant de la structure affine de M associée à ∇, [4], [8].

Dans le cas des variétés compactes la conjecture de L. Markus affirme que l'existence de volume parallèle entraîne la complétude. L'intérêt suscité par cette conjecture a abouti à d'excellents travaux au cours de dernières années (voir [4], [8]); il est clair que cette conjecture ne concerne que les variétés compactes; voici un exemple de variété localement plate incomplète pour laquelle existe un élément de volume parallèle. On considère $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées canoniques (x_1, x_2) et on définit la dérivation covariante ∇ en posant

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} X = 0 \quad \text{pour tout} \quad X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2);$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}} \frac{\partial}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}} \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Le lecteur trouvera des exemples des variétés localement plates compactes incomplètes dans des références citées ci-dessus.

Pour ce qui est du problèmes général du lien entre la structure algébrique de $\pi_1(M)$ et la complétude des structures affines définies dans M, on a le théorème de réalisation suivant (voir [12]).

THÉORÈME (J. Milnor). *Tout groupe abstrait virtuellement polycyclique (i.e. contenant un sous-groupe polycyclique d'indice fini) est isomorphe au groupe fondamental d'une variété localement plate complète* (M, ∇). ■

La question de savoir si on peut toujours choisir une réalisation compacte (i.e. M compacte) est à ce jour sans réponse. Dans [12] J. Milnor a émis la conjecture suivante:

Conjecture. Le groupe fondamental d'une variété compacte localement plate complète acyclique (M, ∇) est virtuellement polycyclique.

Il se dégage de la conjecture de Milnor la question de savoir si toute "soluvariété", au sens de Mostow, $H\backslash G$ possède des structures affines complètes; en vertu de [13a] et [12b] la réponse à cette question est affirmative pour les nilvariétés particulières, voir addendum.

Une partie de [13c] est consacrée à ce problème pour les soluvariétés générales.

1.3. - Structures affines des groupes de Lie et KV-structures

Sauf mention expresse du contraire, les groupes de Lie considérés sont réels. L'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche dans un groupe de Lie G sera notée $\mathcal{G}$.

Une structure localement plate (G, ∇) est dite invariante à gauche si pour X et Y dans $\mathcal{G}$ le champ de vecteurs $\nabla_x Y$ est aussi dans $\mathcal{G}$; puisque les tenseurs de courbure et de torsion de la connexion linéaire ∇ sont identiquement nuls, celle-ci définit dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ une structure d'algèbre de Koszul-Vinberg (KV-structure). On sait qu'il y a correspondance bijective entre l'esemble $KV(\mathcal{G})$ des KV-structures de $\mathcal{G}$ et le sous-ensemble ${}^G\mathcal{A}(G)$ des structures affines invariante à gauche dans le groupe de Lie G.

Soit (G, ∇) une structure localement plate invariante à gauche dans le groupe de Lie G; la KV-structure associée à ∇, sera notée ρ_∇ (ou tout simplement ρ, lorsqu'il n'y a pas risque de confusion). L'application linéaire qui associe à $X \in \mathcal{G}$ le couple $(X, \rho_\nabla(X))$ est un isomorphisme de $\mathcal{G}$ dans l'algèbre de Lie $\mathcal{A}ff(\mathcal{G})$ des applications affines de l'espace vectoriel $\mathcal{G}$ dans lui-même. Supposons que G soit simplement connexe; alors il existe un homomorphisme continu de G dans le groupe de Lie $Aff(\mathcal{G})$ des endomorphismes affines inversibles de $\mathcal{G}$ qui associe à $s \in G$ le couple $q(s)$, $f(s)$ et vérifie la condition suivante

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(q(\exp tX), f(\exp tX))_{t=0} = (X, \rho_\nabla X).$$

L'intérêt pour les considérations ci-dessus provient du théorème suivant:

THÉORÈME. *Les assertions qui suivent sont équivalentes*:

(1) (G, ∇) *est complète.*

(2) *La loi d'opération* $(q, f) : G \times \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$ *est simplement transitive.*

(3) *Pour* $Y_0 \in \mathcal{G}$ *l'application* $\psi(X) = X + \rho_\nabla(X)Y_0$ *est injective.*

Si une des conditions du théorème ci-dessus est vérifiée par (G, ∇) alors le groupe de Lie G est résoluble ([12]). On déduit de ce théorème que si G possède une KV-structure complète (i.e. vérifiant la condition (3) du théorème précédent) alors toute soluvariété (solvmanifold) $H\backslash G$ possède une structure affine complète, (voir [13c]).

1.4. - Problèmes d'extension et de relèvement

Dans ce numéro on rappelle certaines notions introduites dans des travaux antérieurs [12a], [12b] qui seront utilisés dans ce travail. Certains complexes de cochaines jouent des rôles incontournables dans le problème d'existence des structures affines invariantes à gauche dans les groupes de Lie résolubles (tout au moins dans le point de vue qui est adopté par l'auteur).

Pour simplifier on commencera par fixer des notations. Soit $(\mathcal{G}, \rho)$ une KV-structure définie dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$.

(1) $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ et le complexe de cochaines de $\mathcal{G}$ à coefficients dans $\mathcal{G}$ relativement à la représentation adjointe [6]. Le $p^{\text{ième}}$ espace de cohomologie de $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ est désigné par $H^p(\mathcal{G}, \mathcal{G})$. L'espace $H^1(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ est l'espace des dérivations extérieures de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$.

(2) Soit $\mathcal{G}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathcal{G}$. On munit $\mathcal{G}^*$ de la structure de $\mathcal{G}$-module associée à la représentation duale ρ^*. On désigne par $C^*_\rho(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ (respectivement $C^*_\rho(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$) le complexe de Chevalley-Eillenberg de la représentation linéaire ρ (respectivement de la représentation linéaire ρ^*) et le $p^{\text{ième}}$ espace de cohomologie est noté $H^p_\rho(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ (respectivement $H^p_\rho(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$), [3].

(3) A chaque cocycle $B \in Z^1_\rho(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ on associera la représentation linéaire de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{A}ff(\mathcal{G}) = \mathcal{G} \times \mathrm{End}(\mathcal{G})$ qui est définie par la formule suivante

$$\begin{aligned} X \cdot (v, A) &= [(B(X), \rho(X)), (v, A)] \\ &= (\rho(X)v - AB(X), \rho(X) \cdot A - A \cdot \rho(X)). \end{aligned}$$

L'espace de cohomologie du complexe de Chevalley-Eillenberg associé à cette représentation sera noté $H^*_{\rho,B}(\mathcal{G}, \mathcal{A}ff(\mathcal{G}))$.

(4) L'algèbre de cohomologie réelle de $\mathcal{G}$([11b]) sera notée $H^*(\mathcal{G}, \mathbb{R})$. On sait que l'operateur antisymetrisation de $\Lambda^p \mathcal{G}^* \otimes \mathcal{G}^*$ dans $\Lambda^{p+1}\mathcal{G}^*$ induit une application linéaire de degré un de $H^*_\rho(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ dans $H^*(\mathcal{G}, \mathbb{R})$; ([13a], [13b]).

Nous allons rappeler la façon dont les espaces de cohomologies décrits ci-dessus interviennent dans le problème d'existence des structures affines dans les groupes de Lie nilpotents. On verra plus tard comme on passe de cas nilpotent au cas résoluble (général) par un procédé de déformation, (voir essentiellement [13c]).

1.4.1. - *Problème de relèvement*

Considérons un groupe de Lie G d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Soit G_0 une extension centrale du groupe de Lie G par le groupe de Lie commutatif $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{G}_0$ l'algèbre de Lie de G_0; en identifiant $\mathcal{G}_0$ avec l'espace produit $\mathbb{R} \times \mathcal{G}$, le crochet dans $\mathcal{G}_0$ est défini par la formule suivante

$$(r_1) \qquad [(x,X),(y,Y)] = (\Omega(X,Y),[X,Y])$$

où Ω est un 2-cocycle scalaire du complexe $C^*(\mathcal{G},\mathbb{R})$.

Soit $(\mathcal{G},\rho_\nabla)$ la KV-structure dans $\mathcal{G}$-associée à la structure localement plate invariante à gauche (G,∇).

On dit que (G,∇) à la propriété de Ω-relèvement s'il existe dans le groupe de Lie $G_0 = \mathbb{R} \times G$ une structure affine invariante à gauche (G_0,∇_0) telle que l'homomorphisme de G_0 sur G soit un homomorphisme affine de (G_0,∇_0) sur (G,∇). Les complexes $C^*_{\rho_\nabla}(\mathcal{G},\mathcal{G}^*)$ est $C^*(\mathcal{G},\mathbb{R})$ fournissent des outils efficaces pour l'étude du problème de relèvement. Plus précisément si on désigne par ∂^1 l'homomorphisme de $H^1_{\rho_\nabla}(\mathcal{G},\mathcal{G}^*)$ dans $H^2(\mathcal{G},\mathbb{R})$ décrit au n° 1.3, on a le résultat suivant:

THÉORÈME ([13a], [13b]). *Il y a équivalence entre les deux assertions qui suivent.*

(a) (G,∇) *a la propriété de* Ω*-relèvement.*

(b) *la classe de cohomologie* $[\Omega]$ *appartiernt à l'image de* ∂^1. ∎

1.4.2. - *Problème d'extension*

On fixe (G,∇) comme ci-dessus et on se donne une extension $G \times \mathbb{R}$ du groupe de Lie additif $\mathbb{R}$ par le groupe de Lie G. Notons $G_0 = G \times \mathbb{R}$ et $\mathcal{G}_0$ son algèbre de Lie. La structure de crochet de $\mathcal{G}_0 \simeq \mathcal{G} \times \mathbb{R}$ est donnée par la formule suivante

$$(r_2) \qquad [(X,x),(Y,y)] = ([X,Y] + \mathrm{D}(xY - yX), 0)$$

où D est un 1-cocycle du complexe $C^*(\mathcal{G},\mathcal{G})$, c'est-à-dire que D est une dérivation de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$.

On dit que la structure localement plate (G,∇) a la propriété de D-extension s'il existe dans G_0 une structure localement plate invariante à gauche (G_0,∇_0) telle que l'homomorphisme inclusion de G dans G_0 soit un homomorphisme affine de (G,∇) dans (G_0,∇_0).

On a prouvé dans [13b] que le problème d'extension des structures affines des groupes de Lie était équivalent à un problème d'effacement de l'espace de cohomologie $H^1(\mathcal{G},\mathcal{G})$. Nous allons consacrer le n° 1.4.3 qui suit à une variante du théorème d'effacement établi dans [13b]. Les résultats obtenus permettront une bonne compréhension de passage des cas des groupes de Lie nilpotents à celui des groupes de Lie résolubles non nilpotents (voir [13c]).

1.4.3. - *Théorème de nullité et problème d'extension des KV-structures*

Dans ce numéro nous supposons par commodité que G est un groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. On suppose que G possède une structure affine invariante à gauche (G,∇)-associée à la KV-structure $(\mathcal{G},\rho_\nabla)$.

Soit B un cocycle de dimension 1 dans $C^*_{\rho_\nabla}(\mathcal{G},\mathcal{G})$; B est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{G}$ qui jouit de la propriété suivante:

$$B([X,Y]) - \rho_\nabla(X)B(Y) + \rho_\nabla(Y)B(X) = 0$$

pour toute paire (X,Y) d'éléments dans $\mathcal{G}$. Un tel cocycle donne lieu à l'homomorphisme $X \mapsto (B(X),\rho_\nabla(X))$ de $\mathcal{G}$ dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}\times \mathrm{End}(\mathcal{G})$ des applications affines de $\mathcal{G}$ dans lui-même.

On va poser $\Theta_B(X) = (B(X),\rho_\nabla(X))$ et regarder Θ_B comme un morphisme du $\mathcal{G}$-module $\mathcal{G}$ pour la représentation adjointe dans le $\mathcal{G}$-module $\mathcal{A}ff(\mathcal{G}) = \mathcal{G}\times \mathrm{End}(\mathcal{G})$ pour la représentation linéaire définie précédemment en posant

$$X\cdot(v,A) = (\rho_\nabla(X)v - AB(X), [\rho_\nabla(X),A]);$$

de sorte que Θ_B induit une application linéaire de degré 0 de $H^*(\mathcal{G},\mathcal{G})$ dans $H^*_{\rho_\nabla B}(\mathcal{G},\mathcal{A}ff(\mathcal{G}))$.

Par ailleurs on associe à tout couple $(U,\mathrm{D})\in\mathcal{G}\times Z^1(\mathcal{G},\mathcal{G})$ la 0-cochaine (U,A_D) du complexe $C^*_{\rho\nabla}(\mathcal{G},\mathcal{A}ff(\mathcal{G}))$ avec

$$A_\mathrm{D} = \mathrm{D} + B.$$

Dans la suite on s'intéressera tout particulièrement au sous-espace de $Z^1(\mathcal{G},\mathcal{G})$ formé des dérivations D pour lesquelles la cocycle $\Theta_B(\mathrm{D})\in Z^1_{\rho\nabla}(\mathcal{G},\mathcal{A}ff(\mathcal{G}))$ possède une primitive (U,A_D) dans $C^0_{\rho\nabla}(\mathcal{G},\mathcal{A}ff(\mathcal{G}))$.

Dans [13b] on a esquissé l'étude du cas où B est cohomologue à zéro. L'existence de primitive (U,A_D) équivaut alors à l'effacement de [D] par l'injection $\Theta(X) = (X,\rho_\nabla(X))$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{A}ff(\mathcal{G})$. Dans le cas général Θ_B n'a pas de raison d'être injectif; la propriété de D-extension équivaut à l'existence d'un cocycle $B\in Z^1_{\rho_\nabla}(\mathcal{G},\mathcal{G})$ tel que Θ_B possède une primitive de la forme $(U,-A_\mathrm{D})$ avec $-A_\mathrm{D} = \mathrm{D}+B$. Plus précisément on a l'énoncé suivant.

THÉORÈME (de nullité). *Les notations sont celles ci-dessus. Les assertions qui suivent sont équivalentes.*

(a) (G,∇) *a la proprété de* D-*extension.*

(b) *Il existe un couple* $(U_\mathrm{D},B_\mathrm{D})\in\mathcal{G}\times Z^1_{\rho_\nabla}(\mathcal{G},\mathcal{G})$ *tel que* $(U_\mathrm{D},-\mathrm{D}-B_\mathrm{D})$ *est une primitive de* Θ_B *dans le complexe* $C^*_{\rho_\nabla,B}(\mathcal{G},\mathcal{A}ff(\mathcal{G}))$.

DÉMONSTRATION. Ce théorème est une reformulation du théorème d'extension démontré dans [13a]. Il est reécrit ici sous une forme efficace pour le dévissage du problème d'existence dans des groupes de Lie résolubles

([13c]). Pour voir que (a) $\Rightarrow$ (b) il suffit de rappeler que la propriété de D-extension équivaut à l'existence d'un cocycle $(U, A) \in \mathcal{G} \times \mathrm{End}(\mathcal{G})$ satisfaisant aux deux conditions qui suivent:

$$A \circ \rho_\nabla(X) - \rho_\nabla(X) \circ A - \rho_\nabla(\mathrm{D}X) = 0,$$

$$(A^2 + \mathrm{D}^2 - 2A \circ \mathrm{D})(X) - \rho_\nabla(X)U = 0,$$

pour tout $X \in \mathcal{G}$. La première condition entraîne $B = A - \mathrm{D} \in Z^1_{\rho_\nabla}(\mathcal{G}, \mathcal{G})$, de sorte que le système ci-dessus signifie que l'on a, pour tout $X \in \mathcal{G}$, la relation

$$[(U, A), (B(X), \rho_\nabla(X))] - (B \circ \mathrm{D}(X), \rho(\mathrm{D}X)) = (0, 0),$$

c'est-à-dire $(-U, -A)$ est une primitive de $\Theta_B(\mathrm{D})$ dans $C^*_{\rho_\nabla}(\mathcal{G}, \mathcal{A}ff(\mathcal{G}))$. Inversement, s'il existe $(U, B) \in \mathcal{G} \times Z^1_{\rho_\nabla}(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ tel que $-(U, \mathrm{D} + B)$ soit une primitive de $\Theta_B(\mathrm{D})$, on voit aisément que (a) est satisfait. ■

Dans le théorème de nullité ci-dessus on voit qu'il y a deux contraintes; il faut associer à $\mathrm{D} \in Z^1(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ des cocycles $B \in Z^1_{\rho_\nabla}(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ de façon que les $\Theta_B(\mathrm{D})$ soient cohomologues à zéro; une fois cette condition remplie, il faut s'assurer que parmi ces cocycles B il y en a tels que $\Theta_B(\mathrm{D})$ possède une primitive de la forme $-(U, \mathrm{D} + B)$. Le Chapitre 2 de ce travail sera consacré en partie à ce problème.

1.4.4. - *Deux exemples de structures affines vérifiant le théorème de nullité*

Les deux exemples qu'on va décrire en détail jouent des rôles importants dans le processus récurrent utilisé dans ce travail et dans [13c].

EXEMPLE 1. Soit $\mathcal{H}_3$ le groupe de Heisenberg de dimension 3. Fixons une base (e_1, e_2, e_3) de l'algèbre de Lie $\mathcal{S}_3$ de $\mathcal{H}_3$ tel que $[e_2, e_3] = e_1$. Soit $(\mathcal{G}, \rho)$ la KV-structure de $\mathcal{S}_3$ définie dans le base (e_i) par

$$\rho(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = (2x_3y_2 + 3x_2y_3, 0, 0).$$

Notons $F(\mathcal{S}_3)$ le drapeau de $\mathcal{S}_3$ engendré par la base (e_1, e_2, e_3). Soit $E^0_F(\mathcal{S}_3)$ le sous-espace des endomorphismes nilpotents de $\mathcal{S}_3$ qui préservent de drapeau $F(\mathcal{S}_3)$. Tout $\mathrm{D} \in E^0_F(\mathcal{S}_3)$ est une dérivation de l'algèbre de Lie $\mathcal{S}_3$. ■

Les cochaines $\Phi \in C^1_\rho(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3^*)$ sont représentées dans la base (e_i) par les matrices carrées réelles

$$\Phi = [\varphi_{ij}], \quad 1 \le i, \ j \le 3.$$

Les cocycles $\Phi \in Z^1_\rho(S_3, S_3^*)$ sont définis par les équations

$$\varphi_{11} = 0,$$
$$2\varphi_{21} - \varphi_{12} = 0,$$
$$3\varphi_{31} + \varphi_{13} = 0.$$

On déduit aisément de ces conditions que $\partial^1 H^1_\rho(S_3, S_3^*) = H^2(S_3, \mathbb{R})$.

Examinons le problème de $E^0_F(S_3)$-extension. Pour cela soit D dans $E^0_F(S_3)$; dans la base (e_i) posons

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On associe à D l'endomorphisme A_D représenté dans (e_i) par la matrice

$$A_\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 0 & -2\alpha_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2}\alpha_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

On a alors l'identité suivante:

$$(\pi_1) \qquad [A_\mathrm{D}, \rho(x_1, x_2, x_3)] - \rho(\mathrm{D}(x_1, x_2, x_3)) = 0.$$

Supposons maintenant que D$'$ soit un autre élément dans $E^0_F(S_3)$,

$$\mathrm{D}' = \begin{bmatrix} 0 & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} \\ 0 & 0 & \alpha'_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

on a

$$[\mathrm{D}, \mathrm{D}'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_{12}\alpha'_{23} - \alpha'_{12}\alpha_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On va associer au couple $(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$ d'éléments de $E^0_F(f_3)$ la cochaine suivante

$$m_{\mathrm{DD}'} = A_\mathrm{D}(A_{\mathrm{D}'} - \mathrm{D}') - (A_{\mathrm{D}'} - \mathrm{D}')\mathrm{D};$$

$m_{\mathrm{DD}'}$ est représentée dans la base (e_i) par la matrice suivante

$$m_{\mathrm{DD}'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5\alpha_{12}\alpha'_{23} + 3\alpha'_{12}\alpha_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La cochaine $m_{\mathrm{DD}'}$ est en fait un cocycle exact possédant une primitive de la forme

$$W_{\mathrm{DD}'} = w_1 e_1 + \frac{1}{2}(5\alpha_{12}\alpha'_{23} + 3\alpha'_{12}\alpha_{23})e_2,$$

où $w_1 \in \mathbb{R}$. En d'autres termes on a l'identité

$$(\pi_2) \qquad m_{\mathrm{DD}'} = \mathrm{d}\rho W_{\mathrm{DD}'}.$$

D'un autre côté on voit que le crochet $[\mathrm{D}, \mathrm{D}']$ coïncide avec la dérivation intérieure $\mathrm{ad}_{\xi_{\mathrm{DD}'}}$ avec

$$\xi_{\mathrm{DD}'} = w_{\mathrm{DD}'} - w_{\mathrm{D}'\mathrm{D}}.$$

Il convient à ce state d'observer que (π_1) et (π_2) entraînent la propriété de D-extension pour $(\mathcal{S}_3, \rho)$ quel que soit $\mathrm{D} \in E^0_F(\mathcal{S}_2)$.

Soient Ω et D dans $Z^2(\mathcal{S}_3, \mathbb{R})$ et dans $Z^2(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3)$ respectivement. Nous supposons que ni D ni Ω ne sont cohomologues à zéro; on a alors

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec $\alpha_{23} \neq 0$. Nous supposons que le cocycle $\mathrm{D}\Omega$ défini par

$$\mathrm{D}\Omega(X, Y) = -\Omega(\mathrm{D}X, Y) - \Omega(X, \mathrm{D}Y)$$

est cohomologue à zéro. Dans la base (e_i), Ω est alors représentée par la matrice suivante

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega_{13} \\ 0 & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{13} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix}.$$

Tout $\Phi_\Omega \in Z^2_\rho(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3^*)$ tel que $\partial\Phi_\Omega = \Omega$ est représenté dans la base (e_i) par la matrice suivante

$$\Phi_\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{4}\Omega_{13} \\ 0 & \varphi_{22} & \Omega_{23} + \varphi_{32} \\ \frac{1}{4}\Omega_{13} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{bmatrix}.$$

A chaque couple $(A_{\mathrm{D}}, \Phi_\Omega)$, formé de cochaines définis comme ci-dessus, on associera la cochaine $\psi_{\Omega\mathrm{D}} \in C^1_\rho(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3^*)$ définie par la formule suivante: pour X et Y dans $\mathcal{S}_3$ on pose

$$\langle \psi_{\Omega\mathrm{D}}(X), Y \rangle = \Phi_\Omega(\mathrm{D}X, Y) + \Phi_\Omega(X, A_{\mathrm{D}}Y).$$

Dans la base (e_i), $\psi_{\Omega D}$ est représenté par la matrice suivante

$$\psi_{\Omega D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4}\alpha_{12}\Omega_{13} - \frac{3}{2}\alpha_{23}\varphi_2 \\ 0 & \alpha_{23}\varphi_{22} + \frac{1}{2}\Omega_{13} & \left(\frac{3}{4}\alpha_{13} - a_{13}\right)\Omega_{13} + \alpha_{23}\left(\Omega_{23} - \frac{1}{2}\varphi_{32}\right) \end{bmatrix}.$$

On vérifie sans peine que $\psi_{\Omega D}$ est fermé, c'est-à-dire $d_\rho\psi_{\Omega D} = 0$.

Soit $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ dans S_3^*; le cobord $d_\rho\theta$ est représenté dans la base (e_i) par la matrice qui suit

$$d_\rho\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3\theta_1 \\ 0 & -2\theta_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour qu'il existe un Φ_Ω tel que $\psi_{\Omega D}$ soit exact il faut et il suffit que le système en $(\varphi_{22}, \varphi_{32})$ qui suit ait de solutions:

$$\left(\frac{3}{4}\alpha_{12} - a_{13}\right)\Omega_{13} + \alpha_{23}\left(\Omega_{23} - \frac{1}{2}\varphi_{32}\right) = 0,$$
$$\frac{3}{2}\alpha_{12}\Omega_{13} - 3\alpha_{23}\varphi_{22}3\alpha_{23}\varphi_{22} - \frac{3}{2}\alpha_{12}\Omega_{13} = 0.$$

Puique $\alpha_{23} \neq 0$, l'unique solution est

$$\varphi_{22} = 0,$$
$$\varphi_{32} = 2\left(\Omega_{23} + \frac{1}{\alpha_{23}}\Omega_{13}\left(\frac{3}{4}\alpha_{13} - a_{13}\right)\right).$$

On voit que $\psi_{\Omega D}$ possède une primitive $a_D \in S_3^* = C_\rho^0(S_3, S_3^*)$ qui s'écrit dans la base duale de la base (e_1) sous la forme

$$(\pi_3) \qquad a_D = \left(-\frac{1}{4}\alpha_{12}\Omega_{13}, \theta_2, \theta_3\right),$$

où les composantes θ_2 et θ_3 sont arbitraires. ∎

Les diverses cochaines qu'on vient d'attacher aux données $(\Omega, D) \in Z^2(S_3, \mathbb{R}) \times Z^1(S_3, S_3)$ sont reliées par des propriétés remarquables qu'on va mettre en évidence et dont l'importance apparaîtra plus loin. Considérons pour cela D et D′ dans $E_F^0(S_3)$ et $\Omega \in Z^2(S_3, \mathbb{R})$. On suppose que ni D, ni D′, ni Ω ne sont cohomologues à zéro (sinon nos relations sont trivialement vérifiées).

On suppose que $D\Omega$ et $D'\Omega$ sont cohomologues à zéro. Posons

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{D}' = \begin{bmatrix} 0 & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} \\ 0 & 0 & \alpha'_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puisque ni D ni D′ ne sont cohomologues à zéro on a $\alpha_{23}\alpha'_{23} \neq 0$ et par conséquent

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega_{13} \\ 0 & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{13} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix}.$$

Soient α_{D} et $\alpha_{\mathrm{D}'}$ dans S_3^* tels que $\mathrm{D}\Omega = \delta\alpha_{\mathrm{D}}$ et $\mathrm{D}'\Omega = \delta\alpha_{\mathrm{D}'}$, ($\delta$ est l'opérateur cobord du complexe $C^*(S_3, \mathbb{R})$). En vertu de (π_3) on a le système

$$\alpha_{\mathrm{D}} = (\alpha_{12}\Omega_{13}, \alpha_2, \alpha_2),$$

$$\alpha_{\mathrm{D}'} = (\alpha'_{12}\Omega_{13}, \alpha'_2, \alpha'_3).$$

Les composantes $\alpha_2, \alpha_3, \alpha'_2, \alpha'_3$ peuvent être choisies arbitrairement. D'un autre côté la contrainte (π_3), c'est-à-dire $\psi_{\Omega\mathrm{D}} = d\varphi\, a_{\mathrm{D}}$ détermine $a_{\mathrm{D}} = \left(-\frac{1}{4}\alpha_{12}\Omega_{13}, \theta_1, \theta_2\right)$ aux composantes θ_2 et θ_3 près.

Considérons maintenant un élément $w = w_1 e_1 + w_2 e_2$ et calculons les quantités suivantes:

$$q_1 = \Omega^{\square}(w) = i_w\Omega = (0, 0, w_1\Omega_{13} + w_2\Omega_{23})$$

$$q_2 = \Phi_\Omega(w) = \left(0, 0, -\frac{3}{4}w_1\Omega_{13} + 2w_2\left(\frac{3}{2}\Omega_{23} + \frac{1}{\alpha_{23}}\Omega_{13}\left(\frac{3}{4}\alpha_{13} - a_{13}\right)\right)\right)$$

Les cochaines analogues $\mathrm{D}\alpha_{\mathrm{D}'} - \mathrm{D}'\alpha_{\mathrm{D}}$ et $A_{\mathrm{D}}a_{\mathrm{D}'} - A_{\mathrm{D}'}a_{\mathrm{D}}$ jouent également des rôles importants ([13$_b$]); calculons les:

$$q_1^1 = \mathrm{D}\alpha_{\mathrm{D}'} - \mathrm{D}'\alpha_{\mathrm{D}} = (0, 0, (\alpha_{12}\alpha'_{13} - \alpha'_{12}\alpha_{13})\Omega_{13} + \alpha_2\alpha'_{23} - \alpha'_2\alpha_{23})$$

$$q'_2 = A_{\mathrm{D}}a_{\mathrm{D}'} - A_{\mathrm{D}'}a_{\mathrm{D}} = \left(0, 0, \frac{1}{4}(a_{13}\alpha'_{12} - a'_{13}\alpha_{12})\Omega_{13} + \frac{3}{2}(\alpha_{23}\theta'_2 - \alpha'_{23}\theta_2)\right).$$

Jusqu'ici l'unique degré de liberté dans le choix de A_{D} est le coefficient a_{13}; renonçons à cette liberté en posant $a_{13} = \frac{3}{4}\alpha_{13}$. Les quantités q_2 et q'_2 sont maintenant

$$q_2 = \left(0, 0, -\frac{3}{4}w_1 + 3\,w_2\Omega_{23}\right)$$

$$q'_2 = \left(0, 0, 3(\alpha_{13}\alpha'_{12} - \alpha'_{13}\alpha_{12})\Omega_{13} + \frac{3}{2}(\alpha_{23}\theta'_2 - \alpha'_{23}\theta_2)\right).$$

Nous supposons maintenant que $\alpha_{\mathrm{D}} = (\alpha_{12}\Omega_{13}, \alpha_2, \alpha'_3)$ et $\alpha_{\mathrm{D}'} = (\alpha'_{12}\Omega_{13}, \alpha'_2, \alpha'_3)$ soient donnés et renonçons à la liberté de choix de la composante θ_2 de a_{D} en posant

$$a_{\mathrm{D}} = \left(-\frac{1}{4}\,\alpha_{12}\Omega_{13}, 2\alpha_2, \theta_3\right)$$

$$a_{\mathrm{D}'} = \left(-\frac{1}{4}\,\alpha'_{12}\Omega_{13}, -2\alpha'_2, \theta'_3\right).$$

On déduit alors facilement de ces choix l'implication

$$(\pi_4) \qquad q'_1 = q_1 \Rightarrow q'_2 = q_2.$$

Les quatre propriétés π_i, $1 \leq i \leq 4$, de $(\mathcal{S}_3, \rho)$ qu'on a mises en évidence seront généralisées à certaines structures affines des groupes de Lie nilpotentes. Il est utile d'observer que ces propriétés sont différentes des propriétés $\mathcal{P}_F$ décrites dans [13b]; en fait la structure décrite dans l'exemple ci-dessus ne vérifie pas les propriétés $\mathcal{P}_F$.

EXEMPLE 2. Nous considérons le groupe vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni de sa structure affine canonique $(\mathbb{R}^n, \nabla^0)$. Nous suposerons $n > 2$ (si $n \leq 2$ les propriétés π_i sont trivialement vérifées). On commence par fixer un drapeau $F(\mathcal{G})$ dans l'algèbre de Lie de $\mathbb{R}^n$. On a $Z^1_{\nabla^0}(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*) = \mathcal{G}^* \otimes \mathcal{G}^*$ et $Z^2(\mathcal{G}, \mathbb{R}) = \Lambda^2\mathcal{G}^*$. Soit $\mathcal{D}^0_F(\mathcal{G}) = E^0_F(\mathcal{G})$ défini comme dans l'Exemple 1. Pour tout $\mathrm{D} \in \mathcal{D}^0_F(\mathcal{G})$ on prendra $A_{\mathrm{D}} = \mathrm{D}$. Il est clair que π_1 et π_2 sont vérifiés par ce choix. Soit $\Omega \in \Lambda^2\mathcal{G}^*$, on associera à Ω la cochaine

$$\Phi_\Omega = \frac{1}{2}\,\Omega^\square.$$

On a alors $\psi_{\Omega \mathrm{D}} = 0$ dès que $\mathrm{D}\Omega = 0$ (i.e. $\mathrm{D}\Omega$ est cohomologue à zéro). Comme dans l'Exemple 1, supposons qu'on ait fixé α_{D} et $\alpha_{\mathrm{D}'}$. Nous poserons alors

$$a_{\mathrm{D}} = \frac{1}{2}\,\alpha_{\mathrm{D}}, \qquad a_{\mathrm{D}'} = \frac{1}{2}\,\alpha_{\mathrm{D}'}.$$

Soit w un élément dans $\mathcal{G}$, on voit aisément que l'on a l'implication

$$\mathrm{D}\alpha_{\mathrm{D}'} - \mathrm{D}'\alpha_{\mathrm{D}} = \Omega^\square(w) \Rightarrow A_{\mathrm{D}}a_{\mathrm{D}'}A_{\mathrm{D}'}a_{\mathrm{D}} = \Phi_\Omega(\Omega). \qquad \blacksquare$$

On conclut que $(\mathbb{R}^n, \nabla^0)$ jouit aussi des propriétés π_i, $1 \leq i \leq 4$. ■

Les deux exemples qu'on vient de décrire vérifient le théorème de nullité pour des sous-algèbres $\mathcal{D}^0_F(\mathcal{G})$, $F(\mathcal{G})$ étant un drapeau d'idéaux de $\mathcal{G}$. ■

1.5. - Commentaires

a) On verra que les propriétés π_i sont stables sous l'effet de certaines déformations des structures affines qui vérifient ces propriétés. Pour illustrer cette affirmation, il suffit de déformer l'Exemple 1 du n° 1.4.4 ci-dessus en posant pour $\tau \in \mathbb{R}$

$$\rho_\tau(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3) = (2x_3y_2 + 3x_2y_3 + \tau x_3y_3, 0, 0).$$

On vérifie aisément que ρ_τ jouit des propriétés π_i, $1 \leq i \leq 4$.

b) Soit $(\mathcal{G}, \rho)$ une KV-structure; soit D une dérivation de $\mathcal{G}$. Fixons $\Omega \in Z^2(\mathcal{G}, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathcal{G}^*$ tels que $\mathrm{D}\Omega = \delta\alpha$; le cocycle Ω est alors la restriction à $\mathcal{G}$ d'un cocycle $\Omega_\mathrm{D} \in Z^2(\mathcal{G}_0\mathbb{R})$ où $\mathcal{G}_0$ est l'extension de $\mathbb{R}$ par $\mathcal{G}$ donnée par la relation (r_2) (voir n° 1.4.2); on définit Ω_D en posant

$$\Omega_\mathrm{D}((X, x), (Y, y)) = \Omega(X, Y) + \alpha(xY - yX).$$

Dans la suite et conformément aux notations adaptées dans [13b], on désignera par $\mathcal{G}_\Omega$ (respectivement $\mathcal{G}_\mathrm{D}$) l'algèbre produit semi-direct associé au couple $(\mathcal{G}, \Omega)$ suivant (r_2) (respectivement associée à $(\mathcal{G}, \mathrm{D})$ suivant (r_1)). Suivant (r_2), le couple $(\mathcal{G}_\mathrm{D}, \Omega_\mathrm{D})$ donne lieu à l'algèbre $\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}$; de sorte qu'on a le carré commutatif d'homomorphismes d'algèbre de Lie

$$(r_3) \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{G}_\Omega & \hookrightarrow & \mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathcal{G} & \hookrightarrow & \mathcal{G}_\mathrm{D}. \end{array}$$

Supposons que $(\mathcal{G}, \rho)$ possède la propriété de D-extension dans $\mathcal{G}_\mathrm{D}$ et de Ω-relèvement dans $\mathcal{G}_\Omega$, alors la propriété π_3 assure l'existence dans $\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}$ d'un Ω_D-relèvement de $(\mathcal{G}_\mathrm{D}, \rho_\mathrm{D})$ qui est aussi une extension de $(\mathcal{G}_\Omega, \rho_\Omega)$ dans $\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}$. Autrement dit le diagramme (r_3) est un diagramme commutatif des KV-structures.

On a déjà fait observer, certes de façon allusive, que les propriétés π_i sont en fait des propriétés des classes de cohomologies [D], [D′], [Ω], … .

2. - Structures affines normales des groupes de Lie nilpotents

Ce Chapitre 2 est consacré à l'esquisse d'une étude qualitative de structures affines des groupes de Lie nilpotents. Les structures affines sont bien entendu celles qui sont associées aux structures localement plates invariantes à gauche, ou si l'on veut, celles qui sont associées aux KV-structures dans les algèbres de Lie des groupes considérés.

2.1. - Structures affines normales

Soit G un groupe de Lie nilpotent donc l'algèbre de Lie est notée $\mathcal{G}$. On désigne par $C^k(\mathcal{G})$ la suite centrale descendante dans $\mathcal{G}$; cette suite est définie par récurrence par les relations qui suivent

$$C^0(\mathcal{G}) = \mathcal{G}, \qquad C^{k+1}(\mathcal{G}) = [\mathcal{G}, C^k(\mathcal{G})].$$

Chaque $C^k(\mathcal{G})$ est un idéal caractéristique de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Puisque chaque algèbre de Lie quotient $C^k(\mathcal{G})/C^{k+1}(\mathcal{G})$ est commutative tout drapeau $F(\mathcal{G})$ dans $\mathcal{G}$ qui est plus fin que la suite $C^k(\mathcal{G})$ est un drapeau d'idéaux de $\mathcal{G}$. Un tel drapeau sera appelé drapeau normal de type central (ou tout simplement drapeau normal central). Rappelons que $E^0_F(\mathcal{G})$ est l'espace des éléments nilpotents de $\mathrm{End}(\mathcal{G})$ qui préservent $F(\mathcal{G})$. Dans ce travail $\mathcal{D}^0_F(\mathcal{G})$ est le sous-espace des dérivations D qui sont dans $E^0_F(\mathcal{G})$ et qui vérifient la condition $C^k(\mathcal{G}_\mathrm{D}) \in F(\mathcal{G})$.

2.1.1. - *Problèmes des relèvements normaux d'une KV-structure normale*

Soit $\overline{\mathcal{G}}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension n sur $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 2.1.1. Une KV-structure complète $(\overline{\mathcal{G}}, \overline{\rho})$ est normale si

(i) il existe un drapeau normal central $F(\mathcal{G}) = \overline{\mathcal{G}}_1 \subset \dots \overline{\mathcal{G}}_k \dots$ préservé par ρ et

(ii) $\forall k, \forall \ell \; n \geq k \geq \ell$ on a $[\overline{\mathcal{G}}_k, \overline{\mathcal{G}}_\ell] = \overline{\rho}(\overline{\mathcal{G}}_k)\overline{\mathcal{G}}_\ell$.

Soit $\Omega \in Z^2(\overline{\mathcal{G}}, \mathbb{R})$ un 2-cocycle; soit $\mathcal{G} = \overline{\mathcal{G}}_\Omega$ l'extension centrale de $\overline{\mathcal{G}}$ par $\mathbb{R}$ associée à Ω. Notons $KV_\Omega(\overline{\rho})$ l'ensemble des relèvements de $\overline{\rho}$ dans $\mathcal{G}$.

L'objectif de ce n° 2.1. est d'établir que si $KV_\Omega(\overline{\rho})$ n'est pas vide, il contient une KV-structure normale $(\mathcal{G}, \rho)$.

On se propose d'établir le résultat ci-dessus par récurrence sur la dimension de $\overline{\mathcal{G}}$; c'est ce schema qui motive le *Théorème* 3.1. *de* [13a].

On fixe $(\overline{\mathcal{G}}, \overline{\rho})$ et $(\mathcal{G}, \rho)$ avec $\rho \in KV_\Omega(\overline{\rho})$. On se donne une extension $\mathcal{G}_\mathrm{D}$ de $\mathbb{R}$ par $\mathcal{G}$ et une extension $\overline{\mathcal{G}}_\mathrm{D}$ de $\mathbb{R}$ par $\overline{\mathcal{G}}$.

On suppose en plus que $(\mathcal{G}, \rho)$ (respectivement $(\overline{\mathcal{G}}, \overline{\rho})$) possède une extension $(\mathcal{G}_\mathrm{D}, \rho_\mathrm{D})$ (respectivement $(\overline{\mathcal{G}}_\mathrm{D}, \overline{\rho}_\mathrm{D})$) telles que l'on ait le diagramme commutatif des KV-structures

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}, \rho) & \longrightarrow & (\mathcal{G}_\mathrm{D}, \rho_\mathrm{D}) \\ \Big\downarrow \pi & & \Big\downarrow \pi \\ (\overline{\mathcal{G}}, \overline{\rho}) & \longrightarrow & (\overline{\mathcal{G}}_\mathrm{D}, \overline{\rho}_\mathrm{D}). \end{array} \tag{1}$$

On suppose $(\mathcal{G}, \rho)$ normale et on fixe dans $\mathcal{G}$ un drapeau $F(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_1 \subset \dots \mathcal{G}_k \subset \dots \mathcal{G}$ qui vérifie la Définition 2.1.1 (on suppose que $\mathcal{G}_1$ est le noyau de π). Soit $\mathcal{B}$ l'idéal maximal de $\mathcal{G}$ dans le drapeau $F(\mathcal{G})$. Ces notations étant fixées voici le Théorème 3.1, [13a].

THÉORÈME 2.1.1. [13a]. *Les notations sont celles-ci dessus; on suppose $(\overline{\mathcal{G}}_\mathrm{D}, \overline{\rho}_\mathrm{D})$ normale ainsi que les KV-structures $(\mathcal{A}, \rho_\mathcal{A})$ où $\mathcal{A}$ est un idéal de codimension* 1 *dans $\mathcal{G}_\mathrm{D}$ avec $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ et où $\rho_\mathcal{A} = \rho_\mathrm{D}|\mathcal{A}$. Alors $\mathcal{G}_\mathrm{D}$ possède de une KV-structure normale $(\mathcal{G}_\mathrm{D}, \tilde{\rho}_\mathrm{D})$ qui se projette sur $(\overline{\mathcal{G}}, \overline{\rho}_\mathrm{D})$ et induit $(\mathcal{G}, \rho)$.*

2.1.2. Avant d'entreprendre la démonstration du théorème ci-dessus, je vais faire quelques obervations qui ont pour but d'éclairer les raisons de la méthode (par récurrence) retenue.

1) Si $(\mathcal{G}_{\mathrm{D}}, \tilde{\rho}_{\mathrm{D}})$ est un relèvement normal de $(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}, \overline{\rho}_{\mathrm{D}})$, D étant dans $\mathcal{D}^0_F(\mathcal{G})$ il existe dans $\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}$ un drapeau normal central $F(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}})$ qui vérifie les conditions (i) et (ii) de la Définition 2.1.1 et dont l'image inverse $\pi^{-1}(F(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}))$ vérifie conditions analogues pour $(\mathcal{G}_{\mathrm{D}}, \tilde{\rho}_{\mathrm{D}})$.

2) Soit $\Omega \in Z^2(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}, \mathbb{R})$ le cocycle qui définit la structure de $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$. La KV-structure ρ_{D} est définie par un cocycle $\Phi_\Omega \in Z^1_{\overline{\rho}_{\mathrm{D}}}(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}, \overline{\mathcal{G}}^*_{\mathrm{D}}) \subset \otimes^2 \overline{\mathcal{G}}^*_{\mathrm{D}}$; on a en particulier, pour (X, Y) dans $\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}} \times \overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}$, $\Omega(X, Y) = \Phi_\Omega(X, Y) - \Phi_\Omega(Y, X)$. Si on pose $\mathcal{G}_{k\mathrm{D}} = \pi^{-1}((\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}})_{k-1})$ où $(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}})_{k-1}$ est l'idéal de dimension $k-1$ de $F(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}})$, les sous-espaces $[\mathcal{G}_{k\mathrm{D}}, \mathcal{G}_{l\Omega}]$ et $\rho_{\mathrm{D}}(\mathcal{G}_{k\mathrm{D}})\mathcal{G}_{l\mathrm{D}}$ sont engendrés respectivement par les $(\Omega(X, Y), [X, Y])$ et les $(\Phi_\Omega(X, Y), \overline{\rho}_{\mathrm{D}}(X)Y)$ avec (X, Y) dans $(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}})_{k-1} \times (\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}})_{l-1}$.

Par conséquent, déformer $(\mathcal{G}_{\mathrm{D}}, \rho_{\mathrm{D}})$ pour obtenir un relèvement normal de $(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}, \overline{\rho})$ revient à déformer le cocycle ϕ_Ω dans ce but.

3) Si on adopte de procéder par récurrence sur la dimension de $\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}$, on voit qu'il s'agit, une fois cette déformation réalisée au niveau de $(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}})_{k-1}$ de passer au niveau $(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}})_k$; autrement dit, on suppose que le diagramme commutatif suivant

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{G}_{k\mathrm{D}} & \longrightarrow & \mathcal{G}_{k+1,\mathrm{D}} \\
\big\downarrow \pi & & \big\downarrow \pi \\
(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}})_{k-1} & \longrightarrow & (\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}})_k
\end{array}
\tag{2}
$$

est un diagramme de KV-structures dont celles de $\mathcal{G}_{k\mathrm{D}}$ et de $(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}})_k$ sont normales. Il s'agit de prouver que l'extension de $(\mathcal{G}_{k\mathrm{D}}, \rho)$ dans $\mathcal{G}_{k+1,\mathrm{D}}$ peut être déformée en une KV-structure normale qui se projette dans $(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}})_k$ en la structure normale $((\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}})_k, \overline{\rho}_{\mathrm{D}})$. C'est exactement la reformulation du Théorème 2.1.1 de [13a].

Soit Δ une dérivation de $\mathcal{G}_{k\mathrm{D}}$ qui définit la structure de $\mathcal{G}_{k+1,\mathrm{D}}$. La KV-structure de $\mathcal{G}_{k+1,\mathrm{D}}$ est définie par une Δ-extension de celle de $\mathcal{G}_{k\mathrm{D}}$; c'est-à-dire par la donnée d'une "primitive" A_Δ de Δ dans $E^0_F(\mathcal{G}_{k\mathrm{D}})$. Si on identifie $\mathcal{G}_{k,\mathrm{D}}$ avec $\mathbb{R} \times (\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}})_{k-2} \times \mathbb{R}$, Δ et A_Δ ont les présentations matricielles suivantes

$$
\Delta = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_0 & \epsilon \\ 0 & \overline{\Delta}_0 & \overline{\xi} \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_\Delta = \begin{bmatrix} 0 & a_0 & u \\ 0 & \overline{A}_{\Delta_0} & \overline{U} \\ 0 & & 0 \end{bmatrix},
$$

avec

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_0 \\ 0 & \Delta_0 \end{bmatrix} \in \mathcal{D}^0_F(\mathcal{G}_{k-1,\mathrm{D}}) \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} \overline{\Delta} & \overline{\xi} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{D}^0_F((\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}})_{k-1});$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_0 \\ 0 & \overline{A}_\Delta \end{bmatrix} \in E^0_F(\mathcal{G}_{k-1,\mathrm{D}}) \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} \overline{A}_{\Delta_0} & \overline{U} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in E^0_F((\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}})_{k-1}).$$

On observe que l'endomorphisme $\begin{bmatrix} \overline{A}_{\Delta_0} & \overline{U} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est la primitive de la dérivation $\overline{\Delta} = \begin{bmatrix} \overline{\Delta}_0 & \overline{\xi} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ qui définit la $\overline{\Delta}$-extension normale $((\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}})_k, \overline{\rho}_{\mathrm{D}})$. Tout ce qui précède vise à faire remarquer que déformer la KV-structure de $\mathcal{G}_{k+1,\mathrm{D}}$, celles de $\mathcal{G}_{k\mathrm{D}}$ et de $(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}})_k$ étant fixées revient à déformer A_Δ sans modifier ses "composantes" $\begin{bmatrix} 0 & a_0 \\ 0 & \overline{A}_{\Delta_0} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \overline{A}_{\Delta_0} & \overline{U} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ainsi, il s'agit de modifier seulement la dernière composante $u \in \mathbb{R}$ de la première ligne de A_Δ.

CONCLUSION DES OBSERVATIONS: Le théorème ci-dessus résultera pour l'essentiel du Lemme ci-dessous.

Soit $(\mathcal{G}, \rho)$ une KV-structure complète préservant un drapeau normal $F(\mathcal{G})$. Soit $D \in \mathcal{D}^0_F(\mathcal{G})$. On munira $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$ du drapeau normal $F(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}_{\mathrm{D}}$ et on désignera par $\mathrm{Ext}_{\mathrm{D}}(\rho)$ l'ensemble (éventuellement vide) des D-extensions complètes qui préserve le drapeau $F(\mathcal{G}_{\mathrm{D}})$. Ces notations étant fixées on a:

LEMMA. *Soit $(\mathcal{G}, \rho)$ une KV-structure complète. On suppose que ρ préserve un drapeau normal central $F(\mathcal{G})$. Si l'ensemble $\mathrm{Ext}_{\mathrm{D}}(\rho)$ n'est pas vide, alors il existe une* D*-extension $(\mathcal{G}_{\mathrm{D}}, \rho_{\mathrm{D}})$ définie par une primitive $A_{\mathrm{D}} \in E^0_F(\mathcal{G})$ de* D *qui jouit des propriétés suivantes: $A_{\mathrm{D}}(\mathcal{G}_k) = \mathrm{D}(\mathcal{G}_k)$ pour tout idéal $\mathcal{G}_k$ de $F(\mathcal{G})$.*

DÉMONSTRATION. On va procéder par récurrence sur $\dim \mathcal{G} = n$.

1) Si $\dim \mathcal{G} = 2$, $\mathcal{G}$ est commutative. Soit (x, y) des coordonnées compatibles avec le drapeau $F(\mathcal{G})$; ρ a la forme matricielle suivante

$$\rho(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Soit $\mathrm{D} \in \mathcal{D}^0_F(\mathcal{G})$. On a alors

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

On choisit un élément $A_{\mathrm{D}} = \mu \mathrm{D}$ avec $\mu \in \mathbb{R}^*$. Soit $U_{\mathrm{D}} \in \mathcal{G}$ de la forme $U_{\mathrm{D}} = (x_0, 0)$. On a

$$[A_{\mathrm{D}}, \rho(X)] = \rho(\mathrm{D}X) = 0,$$

et

$$(A_{\mathrm{D}}^2 + \mathrm{D}^2 - 2\,A_{\mathrm{D}}\mathrm{D})(x) = \rho(X)U_{\mathrm{D}}$$

quel que soit X dans $\mathcal{G}$. Ces conditions assurent que A_{D} définit une D-extension complète de $(\mathcal{G}, \rho)$. En vertu du choix de A_{D} on a

$$A_{\mathrm{D}}(\mathcal{G}_k) = \mathrm{D}(\mathcal{G}_k) \qquad \text{pour } k \leq 2.$$

2) On suppose que la conclusion du lemme vaut en dimensions $\leq n$. Soient $(\mathcal{G}, \rho)$, $F(\mathcal{G})$ et $\mathrm{D} \in \mathcal{D}^0_F(\mathcal{G})$ comme dans le lemme avec $\dim \mathcal{G} = n+1$. On suppose que $\mathrm{Ext}_{\mathrm{D}}(\rho)$ n'est pas vide. Posons $F(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{G}_{n-1} \subset \mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}$. Puisque $\mathrm{D} \in \mathcal{D}^0_F(\mathcal{G})$, on désignera par $\mathcal{A}$ l'idéal de codimension un de $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$ défini par le couple $(\mathcal{G}_n, \mathrm{D}|_{\mathcal{G}_n})$. De sorte qu'on a le diagramme commutatif d'algèbres de Lie

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A} \arrow[dr] \arrow[ddd, dashed] & \\
\mathcal{G}_n \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddd] & & \mathcal{G}_{\mathrm{D}} \arrow[ddd] \\
 & \mathcal{G} \arrow[ur] \arrow[ddd] & \\
 & \overline{\mathcal{A}} \arrow[dr, dashed] & \\
\overline{\mathcal{G}}_n \arrow[ur, dashed] \arrow[dr] & & \overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}} \\
 & \overline{\mathcal{G}} \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

où $\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}$ est l'algèbre de Lie quotient de $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$ par l'idéal $\mathcal{G}_1$ de $F(\mathcal{G})_{\mathrm{D}}$. Si $(\mathcal{G}, \rho_{\mathrm{D}})$ est un élément de $\overline{\rho}_{\mathrm{D}} \in \mathrm{Ext}_{\mathrm{D}}(\overline{\rho})$, le diagramme ci-dessus devient un diagramme de KV-structures complètes. Ainsi, en vertu de l'hypothèse de récurrence la conclusion du Lemme vaut pour la KV-structure de $\overline{\mathcal{G}}$. L'objectif est de prouver qu'on peut, tout en conservant la validité dans $\overline{\mathcal{G}}$ des conclusions du Lemme, modifier la "composante dans $\mathcal{G}^1$" des A_{D} pour que le Lemme vaille pour $(\mathcal{G}, \rho)$; ("argument de compatibilité"). En identifiant $\mathcal{G}$ avec soit $\mathcal{G}_n \times \mathbb{R}$, soit $\mathbb{R} \times \overline{\mathcal{G}}$, soit $\mathbb{R} \times \overline{\mathcal{G}}_n \times \mathbb{R}$, la dérivation $\mathrm{D} \in \mathcal{D}^0_F(\mathcal{G})$ a les présentations respectives suivantes:

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_0 & \xi \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{D} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \overline{\mathrm{D}} \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_0 & \epsilon \\ 0 & \overline{\mathrm{D}}_0 & \xi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathrm{D}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_0 \\ 0 & \overline{\mathrm{D}}_0 \end{bmatrix} \text{ et } \overline{\mathrm{D}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathrm{D}}_0 & \xi \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'hypothèse de récurrence vaut évidemment pour la KV-structure de $\mathcal{G}_n$, donc pour $(\mathcal{G}_n, \mathrm{D}_0) = \mathcal{A}$. L'argument de compatibilité (que nous supposons valable en dimensions $\leq n$) nous permet d'avoir une primitive (non unique) $A_\mathrm{D} \in E^0_F(\mathcal{G})$ qu'on représente dans $\mathbb{R} \times \overline{\mathcal{G}}_n \times \mathbb{R} \simeq \mathcal{G}$ sous la forme

$$A_\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 0 & a_0 & u \\ 0 & \overline{A}_{\mathrm{D}_0} & \overline{U} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et qui a les propriétés suivantes:

(a) $A_{\mathrm{D}_0} = \begin{bmatrix} 0 & a_0 \\ 0 & \overline{A}_{\mathrm{D}_0} \end{bmatrix}$ définit une D_0-extension complète de $(\mathcal{G}_n, \rho)$ avec $A_{\mathrm{D}_0}(\mathcal{G}_k) = \mathrm{D}_0(\mathcal{G}_k)$, $k \leq n$

(b) $\overline{A}_\mathrm{D} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{\mathrm{D}_0} & \overline{U} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ définit une $\overline{\mathrm{D}}$-extension complète de $(\overline{\mathcal{G}}, \overline{\rho})$ avec $\overline{A}_\mathrm{D}(\overline{\mathcal{G}}) = \overline{\mathrm{D}}(\overline{\mathcal{G}})$, (les autres relations étant données par (a)).

A ce niveau on peut conclure qu'il reste seulement à montrer que l'on peut modifier A_D, tout en conservant les acquis (a) et (b), de sorte que $A_\mathrm{D}(\mathcal{G}) = \mathrm{D}(\mathcal{G})$.

Il est remarquable que si on conserve les "composantes" A_{D_0} et $\overline{A}_\mathrm{D}$ de A_D, la modification portera seulement sur le scalaire u

$$\left(\text{dans } A_\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 0 & a_0 & u \\ 0 & \overline{A}_\mathrm{D} & \overline{U} \end{bmatrix}\right);$$

par ailleurs si A_D détermine une D-extension de $(\mathcal{G}, \rho)$ (avec $\mathcal{G} = \mathcal{G}_n \times \mathbb{R}$), on peut ajouter à A_D un élément arbitraire $\Lambda \in E^0_F(\mathcal{G})$ de la forme

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & \ldots\ldots & 0 & \lambda \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ldots\ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

L'élément $A_\mathrm{D} + \Lambda \in E^0_F(\mathcal{G})$ détermine encore une D-extension de $(\mathcal{G}, \rho)$ qui est complète si celle définie par A_D est complète. On voit donc que pour un choix convenable de Λ, l'hypothèse de récurrence (jointe à la condition de compatibilité) entraîne $A_\mathrm{D}(\mathcal{G}_k) = \mathrm{D}(\mathcal{G}_k)$, pour $k \leq n+1$, d'où le Lemme. ∎

Voici un corollaire intéressant du Lemme.

COROLLAIRE. *Soit $(\mathcal{G}, \rho)$ une KV-structure normale; soit $F(\mathcal{G})$ un drapeau normal central qui vérifie la Définition* 2.1.1. *Si pour* $\mathrm{D} \in \mathcal{D}^0_F(\mathcal{G})$, $\mathrm{Ext}^0_\mathrm{D}(\rho)$ *n'est pas vide, alors ρ possède une* D*-extension normale $(\mathcal{G}_\mathrm{D}, \rho_\mathrm{D})$ pour laquelle le drapeau $F(\mathcal{G}_\mathrm{D}) = F(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}_\mathrm{D}$ vérifie la Définition* 2.1.1.

Voici un complément au Lemme ci-dessus qui sera nécessaire:

PROPOSITION. *Soit* $(\mathcal{G}, \rho)$ *une* KV*-structure normale de dimension* $n+1$. *Soit* $F(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{G}$ *un drapeau normal "central" qui vérifie les conditions* (i) *et* (ii) *de la Définition* 2.1.1. *Soit* $[\mathrm{D}] \in H^1(\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_n)$ *qui définit (à isomorphisme près)* $\mathcal{G}$ *comme extension de* $\mathbb{R}$ *par* $\mathcal{G}_n$ *avec* $\mathrm{D} \in \mathcal{D}_F^0(\mathcal{G}_n)$. *On peut trouver* $\mathrm{D} \in [\mathrm{D}]$ *tel si* A_{D} *est la "primitive" de* D *qui définit* ρ *comme* D*-extension de* $\rho|_{\mathcal{G}_n}$, *on a* $A_{\mathrm{D}}(\mathcal{G}_k) = \mathrm{D}(\mathcal{G}_k)$ *pour* $k \leq n$.

DÉMONSTRATION. On précède par récurrence sur $n+1 = \dim \mathcal{G}$. On observe que la proposition ne présente d'intérêt que si $[\mathrm{D}] \neq 0$. Pour $n = 2$, si $\mathcal{G}$ est abélienne, alors $\rho = 0$ on a alors $[\mathrm{D}] = 0$ et le résultat est évident; sinon $\mathcal{G}$ est l'algèbre de Heisenberg et $F(\mathcal{G})$ est engendré par (e_1, e_2, e_3) avec $[e_2, e_3] = e_1$. On sait que dans la base (e_1, e_2, e_3) on aura

$$\rho(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 0 & ax_3 & (1+a)x_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

avec $a \neq 0$. L'idéal $\mathcal{G}_2$ étant abélienne, on a $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_2, \mathrm{D})$ où D est représenté dans la base (e_1, e_2) par la matrice

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \neq 0.$$

On sait que la primitive A_{D} de D qui définit ρ est de la forme

$$A_{\mathrm{D}} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La constante a étant celle qui figure dans (4) on a donc

$$A_{\mathrm{D}}(\mathcal{G}_k) = \mathrm{D}(\mathcal{G}_k), \qquad k \leq 2.$$

On suppose maintenant que la proposition soit vraie pour les dimensions $\leq n_0 + 1$. Soit $(\mathcal{G}, \rho)$ et $F(\mathcal{G})$ comme dans le hypothèses de la proposition avec $\dim \mathcal{G} = n_0 + 2$. Posons $F(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_1 \subset \ldots \mathcal{G}_{n_0+1} \subset \mathcal{G}$ et $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_{n_0+1}, [\mathrm{D}])$, chaque choix de base $(e_1, \ldots, e_{n_0+1}, e_{n_0+2})$ compatible avec $F(\mathcal{G})$ détermine un représentant $\mathrm{D} \in [\mathrm{D}]$ tel que $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{n_0+1,\mathrm{D}}$. La KV-structure de $\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G}/\mathcal{G}_1$ est normale et le drapeau quotient $F(\overline{\mathcal{G}}) = F(\mathcal{G})$ modulo $\mathcal{G}_1$ vérifie la Définition 2.1.1 (relativement à $(\overline{\mathcal{G}}, \overline{\rho})$). On a donc pour un choix convenable de $\mathrm{D} \in [\mathrm{D}]$, $A_{\mathrm{D}}\mathcal{G}_k = \mathrm{D}\mathcal{G}_k$ modulo $\mathcal{G}_1$. (C'est la traduction du fait que, suivant l'argument de récurrence, la proposition est vraie pour $(\overline{\mathcal{G}}, \overline{\rho})$, $F(\overline{\mathcal{G}})$).

Soit ℓ le nombre entier tel que $C^{\ell+1}(\mathcal{G}) = [\mathcal{G}, C^\ell(\mathcal{G})] = (0)$ et $C^\ell(\mathcal{G}) \neq (0)$. On observe que $\mathcal{G}_1$ est dans $C^\ell(\mathcal{G})$. Puisque D est choisi à une dérivation intérieure près, on peut choisir D de sorte que $\mathcal{G}_1 \subset \mathrm{D}(\mathcal{G}_k)$ pour $k > \dim C^\ell(\mathcal{G})$.

(On observe que pour les $\mathcal{G}_k \subseteq C^\ell(\mathcal{G})$ on aura $A_{\mathrm{D}}(\mathcal{G}_k) = \mathrm{D}(\mathcal{G}_k) = 0$ quel que soit le choix de $\mathrm{D} \in [\mathrm{D}]$).

Ainsi, puisque $\mathcal{G}_1 \subset \mathrm{D}(\mathcal{G}_k)$ entraîne $\mathcal{G}_1 \subset A_{\mathrm{D}}(\mathcal{G}_k)$, on voit qu'en vertu de l'hypothèse de récurrence $A_{\mathrm{D}}(\mathcal{G}_k) = \mathrm{D}(\mathcal{G}_k)$ modulo $\mathcal{G}_1$ entraîne $A_{\mathrm{D}}(\mathcal{G}_k) = \mathrm{D}(\mathcal{G}_k)$, d'où la proposition. ■

Retour au Théorème 2.1.1 tel qu'énoncé ci-dessus.

Voici la situation et les hypothèses: on a le diagramme commutatif des KV-structures (complètes)

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}, \rho) & \longrightarrow & (\mathcal{G}_{\mathrm{D}}, \rho_{\mathrm{D}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\overline{\mathcal{G}}, \overline{\rho}) & \longrightarrow & (\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}, \overline{\rho}_{\mathrm{D}}). \end{array} \tag{5}$$

On suppose que $(\mathcal{G}, \rho)$ (donc $(\overline{\mathcal{G}}, \overline{\rho})$) et $(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}, \overline{\rho}_{\mathrm{D}})$ sont normales. (On suppose en plus que la restriction de ρ_{D} à certains idéaux de $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$ sont normales).

Voici quelques commentaires.

(C_1) Si la donnée principale est $(\mathcal{G}, \rho)$ et si $\mathrm{D} \in \mathcal{D}^0_F(\mathcal{G})$ où $F(\mathcal{G})$ vérifie la condition (i) et (ii) de la Définition 2.1.1, on peut conclure que $(\mathcal{G}, \rho)$ possède une D-extension normale; cela découlera du Lemme. En effet le diagramme (5) assure que $\mathrm{Ext}_{\mathrm{D}}(\rho)$ n'est pas vide. En vertu du choix de $F(\mathcal{G})$, le Lemme ainsi que son corollaire s'appliquent.

(C_2) Dans [13a] on s'intéresse principalement à $(\overline{\mathcal{G}}_{\overline{\mathrm{D}}}, \overline{\rho}_{\mathrm{D}})$, car le Théorème 2.1.1 veut assurer l'existence d'un relèvement normal de $(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}, \overline{\rho}_{\mathrm{D}})$ dans $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$. On s'impose des contraintes supplémentaires, à savoir entre autres qu'un tel relèvement induise $(\mathcal{G}, \rho)$. La situation est donc la suivante: dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}_n & \longrightarrow & \mathcal{G} & \cdots > & \mathcal{G}_{\mathrm{D}} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \vdots \\ \overline{\mathcal{G}}_n & \longrightarrow & \overline{\mathcal{G}} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}} \end{array} \tag{6}$$

les flèches pleines sont des morphismes des structures normales. La donnée principale étant en fait $(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}, \overline{\rho}_{\mathrm{D}})$, on peut *supposer* (sans s'éloigner du problème principal qui est la recherche d'un relèvement normal de $\overline{\rho}_{\mathrm{D}}$ dans $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$) que les drapeaux $F(\mathcal{G})$, $F(\overline{\mathcal{G}})$ et $F(\overline{G}_{\mathrm{D}})$ qui vérifient la Définition 2.1.1 relativement à $(\mathcal{G}, \rho)$, $(\overline{\mathcal{G}}, \overline{\rho})$ et $(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}, \overline{\rho}_{\mathrm{D}})$ sont compatibles: c'est-à-dire que

$$F(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}) = F(\overline{\mathcal{G}}) \subset \overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}} \quad \text{et} \quad F(\mathcal{G}) = \pi^{-1}(F(\overline{\mathcal{G}})).$$

En fait toutes les constructions reposent sur des algorithmes de récurrence. On peut donc supposer:

(i) Soit que l'on s'est donné $(\overline{\mathcal{G}}, \overline{\rho})$ et que $(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}, \overline{\rho}_{\mathrm{D}})$ a été obtenu grâce au Lemme (et à son corollaire), cela fixe $F(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}})$. On a alors $F(\mathcal{G}_{\mathrm{D}}) = \pi^{-1}(F(\mathcal{G}))$. On suppose que $(\mathcal{G}, \rho)$ et $F(\mathcal{G}) = \pi^{-1}(F(\overline{\mathcal{G}}))$ sont compatibles au sens de la Définition 2.1.1. Dans ce cas *la proposition* vaut pour $(F(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}))$; la KV-structure $(\mathcal{G}_{\mathrm{D}}, \rho_{\mathrm{D}})$ satisfait aux conditions $A_{\mathrm{D}}(\mathcal{G}_k) = \mathrm{D}(\mathcal{G}_k)$ modulo $\mathcal{G}_1$.

(ii) On peut supposer que ce sont $(\mathcal{G}, \rho)$ et $F(\mathcal{G})$ qui sont donnés et que $(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}, \overline{\rho}_{\mathrm{D}})$ est obtenu à partir de $(\overline{\mathcal{G}}, \overline{\rho})$ et $F(\overline{\mathcal{G}})$ au moyen du Lemme (et de son corollaire). Dans les deux cas de figures (en gardant en mémoire le problème principal) on peut supposer la compatibilité de $(\mathcal{G}, \rho)$, $(\overline{\mathcal{G}}, \overline{\rho})$ et $(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}, \overline{\rho}_{\mathrm{D}})$ avec $F(\mathcal{G})$, $F(\overline{\mathcal{G}})$ et $F(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}) = F(\overline{\mathcal{G}}) \subset \overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}$ respectivement, (au sens de la Définition 2.1.1.)

(iii) Reste le dernier point suivant: on considère une base $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ dans $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$ telle que $\mathrm{D} = \mathrm{ad}(e_{n+1})$. On considère l'idéal $\mathcal{A} = \mathcal{G}_{n-1} \oplus \mathbb{R} e_{n+1}$ de $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$. Les hypothèses du Théorème 2.1.1 disent entre autres que $\rho_{\mathcal{A}} = \rho_{\mathrm{D}|\mathcal{A}}$ est normale; le drapeau $F(\mathcal{A}) = F(\mathcal{G}_{n-1}) \subset \mathcal{A}$ vérifie la condition (ii) de la Définition 2.1.1. Cela résulte de la *proposition démontrée* ci-dessus.

En effet il suffit seulement de montrer que

$$[\mathcal{A}, \mathcal{G}_k] = \rho_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})\mathcal{G}_k \qquad \text{pour } k \leq n-1.$$

En vertu de la proposition précédente on a visiblement

$$A_{\mathrm{D}}(\mathcal{G}_k) = \mathrm{D}(\mathcal{G}_k) \qquad \text{modulo } \mathcal{G}_1 \text{ pour tout } k.$$

Cela assure en particulier que $[\mathcal{A}, \mathcal{G}_k] = \rho(\mathcal{A})\mathcal{G}_k$ modulo $\mathcal{G}_1$ pour $k \leq n-1$. Le lemme une fois de plus assure que, modulo des modification mineures portant uniquement sur la première ligne de la matrice $A_{\mathrm{D}_0} = A_{\mathrm{D}|\mathcal{G}_{n-1}}$, on peut supposer que $A_{\mathrm{D}}(\mathcal{G}_k) = \mathrm{D}(\mathcal{G}_k)$ pour $k \leq n-1$.

Conclusion (partielle). On peut supposer que, dans le diagramme commutatif des KV-structures (3), les drapeaux obtenus canoniquement à partir de celui de $F(\mathcal{G}_{n-1})$ sont compatibles suivant la Définition 2.1.1 avec celles des KV-structures en jeu qui sont normales c'est-à-dire $\rho, \rho_{\mathcal{A}}, \overline{\rho}$ et $\overline{\rho}_{\mathrm{D}}$. Ainsi, conformément aux présentations $\mathcal{G} \simeq \mathbb{R} \times \overline{\mathcal{G}}_n \times \mathbb{R}$, on voit que l'on peut supposer que la D-extension ρ_{D} est définie par

$$A_{\mathrm{D}} = \begin{bmatrix} 0 & a_0 & u \\ 0 & \overline{A}_{\mathrm{D}_0} & \overline{U} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où

$$\overline{A}_{\mathrm{D}_0} = \begin{bmatrix} 0 & a_0 \\ 0 & \overline{A}_{\mathrm{D}_0} \end{bmatrix}$$

est la primitive de $\overline{\mathrm{D}}$ qui détermine $\overline{\rho}_{\mathrm{D}}$ d'une part, et d'autre part

$$A_{\mathrm{D}_0} = \begin{bmatrix} \overline{A}_0 & \overline{U} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est la primitive de D_0 qui détermine $\rho_{\mathcal{A}}$; le proposition qui a été démontrée plus haut assure que

$$A_{\mathrm{D}}(\mathcal{G}_k) = \mathrm{D}(\mathcal{G}_k) \qquad \text{pour } k \leq n-1.$$

Il suffit donc de prouver qu'on peut modifier A_{D} en $\hat{A}_{\mathrm{D}}$ tel que $\hat{A}_{\mathrm{D}}$ détermine une D-extension $\tilde{\rho}_{\mathrm{D}}$ de ρ avec $\hat{A}_{\mathrm{D}}(\mathcal{G}) = \mathrm{D}(\mathcal{G})$. On a vu que l'unique paramètre qui gouverne cette modification est le coefficient $u \in \mathbb{R}$ dans la matrice

$$A_{\mathrm{D}} = \begin{bmatrix} 0 & a_0 & u \\ 0 & \overline{A}_{\mathrm{D}_0} & \overline{U} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a donc établi que mutatis mutandis, partant du diagramme commutatif (3) des KV-structures et en supposant que $\rho, \rho_{\mathcal{A}}$ et $\overline{\rho}_{\mathrm{D}}$ sont normales, il existe une extension normale de ρ dans $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$ qui induit $\rho_{\mathcal{A}}$ dans $\mathcal{A}$ et se projette dans $\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}$ en $\overline{\rho}_{\mathrm{D}}$. *Cela est la conclusion recherchée.* ∎

OBSERVATION. Il est important de remarquer ce qui suit. Soit $(\mathcal{G}, \rho)$ une KV-structure normale. Soit $F(\mathcal{G})$ un drapeau normal central compatible avec ρ suivant la Définition 2.1.1.

Supposons que ρ soit $\mathcal{D}_F^0(\mathcal{G})$-homotope à zéro ([13b]). Pour $\mathrm{D} \in \mathcal{D}_F^0(\mathcal{G})$ on sait qu'il existe $(A_{\mathrm{D}}, U_{\mathrm{D}}) \in E_F^0(\mathcal{G}) \times \mathcal{G}$ tel que $[A_{\mathrm{D}}, \rho(X)] = \rho(\mathrm{D}X)$ et $(A_{\mathrm{D}}\mathrm{D})(X) = \rho(X)U_{\mathrm{D}}$ pour tout $X \in \mathcal{G}$. On a alors

$$A_{\mathrm{D}} = \mathrm{D} + \mathrm{d}_\rho U_{\mathrm{D}}.$$

On munit $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$ de la D-extension associée à A_{D}. Puisque $[\mathcal{G}, \mathcal{G}_k] = \rho(\mathcal{G})\mathcal{G}_k$, pour tout $\mathcal{G}_k$ dans $F(\mathcal{G})$, on voit que $A_{\mathrm{D}}(\mathcal{G}_k) = \mathrm{D}(\mathcal{G}_k) + \rho(\mathcal{G}_k)U_{\mathrm{D}}$. Par conséquent, pour tout k on a

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{D}}(\mathcal{G}_{\mathrm{D}})\mathcal{G}_k &= A_{\mathrm{D}}(\mathcal{G}_k) + \rho(\mathcal{G})\mathcal{G}_k \\ &= \mathrm{D}(\mathcal{G}_k) + \rho(\mathcal{G}_k)U_{\mathrm{D}} + \rho(\mathcal{G})\mathcal{G}_k. \end{aligned}$$

Puisque $\rho(\mathcal{G}_k)\mathcal{G} \subset [\mathcal{G}, \mathcal{G}_k] = \rho(\mathcal{G})\mathcal{G}_k$, on voit que

$$\rho_{\mathrm{D}}(\mathcal{G}_{\mathrm{D}})\mathcal{G}_k = [\mathcal{G}_{\mathrm{D}}, \mathcal{G}_k].$$

Cela prouve que le drapeau $F[\mathcal{G}_{\mathrm{D}}] = F[\mathcal{G}] \subset \mathcal{G}_{\mathrm{D}}$ est compatible avec ρ_{D} dans le sens de la Définition 2.1.1 dès que $F(\mathcal{G})$ est compatible avec ρ dans le sens de cette même Définition 2.1.1.

2.2. - Extension et relèvement du théorème de nullite

Le but de ce paragraphe est de dégager des significations géométriques et topologiques des propriétés π_i, $1 \leq i \leq 4$, qui ont été mises en évidence dans les deux exemples du n° 1.4.4. On va commencer par donner de ces propriétés un caractère conceptuel.

DÉFINITION 2.2.1. Une KV-structure complète $(\mathcal{G}, \rho)$ est dite de type central (ou tout simplement centrale) lorsqu'elle préserve un drapeau normal central $F(\mathcal{G})$.

Soit $(\mathcal{G}, \nabla)$ une structure localement plate invariante à gauche dans le groupe de Lie G; désignons par $(\mathcal{G}, \rho)$ la KV-structure qui lui correspond dans l'algèbre de Lie de G. Nous supposons que $(\mathcal{G}, \rho)$ est centrale et nous fixons un drapeau normal central

$$F(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \cdots$$

qui est compatible avec $(\mathcal{G}, \rho)$ dans le sens de la Définition 2.1.1. Les notations $\mathcal{D}_F^0(\mathcal{G})$, $E_F^0(\mathcal{G})$ et $[\mathcal{D}_F^0(\mathcal{G})]$ sont celles fixées précédemment.

2.2.1. *Propriétés* π_F

On dira que $(\mathcal{G}, \rho)$ jouit des propriétés $\pi_F(\mathcal{G})$ si les conditions qui suivent sont remplies.

(i) Il existe une application $\mathcal{B}(\mathrm{D}, \mathrm{D}') = (A_{\mathrm{D}}, A_{\mathrm{D}'}, U_{\mathrm{DD}'})$ de $\mathcal{D}_F^0(\mathcal{G}) \times \mathcal{D}_F^0(\mathcal{G})$ dans $E_F^0(\mathcal{G}) \times E_F^0(\mathcal{G}) \times \mathcal{G}$ telle que

$$(\pi_1) \qquad [A_{\mathrm{D}}\rho(X)] - \rho(\mathrm{D}X) = 0, \qquad X \in \mathcal{G}.$$

(ii) Pour tout couple $(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$ d'éléments de $\mathcal{D}_F^0(\mathcal{G})$

$$(\pi_2) \qquad \mathrm{D} \circ \mathrm{D}' - \mathrm{D}' \circ \mathrm{D} \sim 0 \Rightarrow A_{\mathrm{D}} \cdot (A_{\mathrm{D}'} - \mathrm{D}') - (A_{\mathrm{D}'} - \mathrm{D}') \cdot \mathrm{D} = \mathrm{d}_\rho U_{\mathrm{DD}'};$$

où $\mathrm{D} \circ \mathrm{D}' - \mathrm{D}' \circ \mathrm{D} \sim \circ$ signifie que la classe de $\mathrm{D} \circ \mathrm{D}' - \mathrm{D}' \circ \mathrm{D}$ dans $H^1(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ est nulle et $[\mathrm{D}, \mathrm{D}'] = \mathrm{ad}(U_{\mathrm{DD}'} - U_{\mathrm{D}'\mathrm{D}})$.

(iii) Il existe une application $\Omega \mapsto \Phi_\Omega$ de $\partial Z_\rho^1(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ dans $Z_\rho^1(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ telle que, pour chaque $\Omega \in \partial Z_\rho^1(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$,

$$(\pi_3) \qquad \mathrm{D}\Omega \sim \circ \quad \text{dans} \quad C^*(\mathcal{G}, \mathbb{R}) \Rightarrow \psi_{\Omega\mathrm{D}} \sim \circ \quad \text{dans} \quad C_\rho^*(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*).$$

(iv) Pour chaque $\Omega \in Z^2(\mathcal{G}, \mathbb{R})$, on définit l'ensemble $\mathcal{E}_\Omega = \{(\mathrm{D}, \alpha) \in \mathcal{D}_F^0(\mathcal{G}) \times \mathcal{G}^* | \mathrm{D}\Omega = \delta\alpha\}$; de sorte qu'en vertu de (π_3) à chaque $(\mathrm{D}, \alpha) \in \mathcal{E}_\Omega$ correspond une cochaine (non unique) $a(\mathrm{D}, \alpha) \in \mathcal{G}^*$ telle que $\Psi_{\Omega\mathrm{D}} = \mathrm{d}_\rho a(\mathrm{D}, \alpha)$.

Soient $(\mathrm{D}, \alpha), (\mathrm{D}', \alpha')$ et (D'', α'') dans $\mathcal{E}_\Omega$; soit $w \in \mathcal{G}$ tel que $[\mathrm{D}, \mathrm{D}'] - \mathrm{D}'' = \mathrm{ad}(w)$; alors $a(\mathrm{D}, \alpha)$ et $a(\mathrm{D}'\alpha')$ étant fixés on peut choisir $a(\mathrm{D}'', \alpha'')$ de sorte que l'on ait

$$(\pi_4): \qquad \mathrm{D}\alpha' - \mathrm{D}'\alpha - \alpha'' = \Omega^\square(w) \Rightarrow A_\mathrm{D} a(\mathrm{D}', \alpha') A_{\mathrm{D}'} a(\mathrm{D}, \alpha) - a(\mathrm{D}'', \alpha'') = \Phi_\Omega(w).$$

2.2.2. *Signification géométrique des propriétés* π_i

Pour éviter certaines répétitions, commençons par fixer deux éléments D et D′ dans $\mathcal{D}_F^0(\mathcal{G})$ et $\Omega \in Z^2(\mathcal{G}, \mathbb{R})$. On suppose ces données liées par les contraintes suivantes:

(a) $[\mathrm{D}, \mathrm{D}']$ est une dérivation intérieure de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$;

(b) $\mathrm{D}\Omega = \delta\alpha$, $\mathrm{D}'\Omega = \delta\alpha'$.

Ces conditions (a) et (b) signifient que l'on a le cube commutatif d'homomorphismes d'algèbre de Lie suivant

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
\mathcal{G}_\Omega \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "\pi"'] & & \mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}'} \arrow[dr] \arrow[dd, dashed] & \\
& \mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}} \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathcal{G}_{\Omega\mathrm{DD}'} \arrow[dd, "\pi"] \\
\mathcal{G} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "i"'] & & \mathcal{G}_{\mathrm{D}'} \arrow[dr, dashed] & \\
& \mathcal{G}_\mathrm{D} \arrow[rr] & & \mathcal{G}_{\mathrm{DD}'}
\end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches horizontales sont des inclusions et les flèches verticales sont des passages au quotient. Partant du drapeau central $F(\mathcal{G})$ on munit les autres algèbres des drapeaux déduits canoniquement de $F(\mathcal{G})$ par les deux procédés suivants:

$$F(\mathcal{G}_\mathrm{D}) = F(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G},$$

$$F(\mathcal{G}_\Omega) = \pi^{-1}(F(\mathcal{G})).$$

Voici une signification des propriétés π_i, $1 \leq i \leq 4$.

(∗∗) L'ensemble (π_1, π_2) a deux significations remarquables. D'abord π_1 et π_2 entraînent que $(\mathcal{G}, \rho)$ a la propriété de $\mathcal{D}_F^0(\mathcal{G})$-extension, (ou ce qui revient au même, $(\mathcal{G}, \rho)$ vérifie le théorème de nullité du n° 1.4.3). En outre, soit $\mathrm{D} \in \mathcal{D}_F^0(\mathcal{G})$; on équipe $\mathcal{G}_\mathrm{D}$ de la KV-structure ρ_D définie pour (X, x) et (Y, y) dans $\mathcal{G}_\mathrm{D} = \mathcal{G} \times \mathbb{R}$ par

$$\rho_\mathrm{D}(X, x) \cdot (Y, y) = (\rho(X) + xA_\mathrm{D}) \cdot Y + y((A_\mathrm{D} - \mathrm{D})X + xU_{\mathrm{DD}});$$

alors π_2 entraîne que $(\mathcal{G}_{\mathrm{D}}, \rho_{\mathrm{D}})$ vérifie encore le théorème de nullité pour les éléments de $\mathcal{D}_F(\mathcal{G}_{\mathrm{D}})$ où $F(\mathcal{G}_{\mathrm{D}}) = F(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}_{\mathrm{D}}$; si D et D′ vérifient $\mathrm{D} \circ \mathrm{D}' - \mathrm{D}' \circ \mathrm{D} \sim 0$, alors $(\mathcal{G}_{\mathrm{D}}, \rho_{\mathrm{D}})$ et $(\mathcal{G}_{\mathrm{D}'}, \rho_{\mathrm{D}'})$ ont une extension commune dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_{\mathrm{DD}'} \simeq \mathcal{G} \times \mathbb{R}^2$ dont la loi de crochet est définie par la formule suivante

$$[(X, x), (Y, y)] = [X, Y] + \mathrm{D}(x)Y - \mathrm{D}(y)X + \omega(x, y)$$

avec $\mathrm{D}(x) = x_1\mathrm{D} + x_2\mathrm{D}'$ et $\omega(x, y) = (x_1 y_2 - x_2 y_1)(U_{\mathrm{DD}'} - U_{\mathrm{D}'\mathrm{D}})$.

$(***)$ Au couple $(\Omega, \Phi_\Omega) \in \partial Z^1_\rho(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*) \times Z^1_\rho(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ on associe le Ω-relèvement ρ_Ω de ρ défini dans $\mathcal{G}_\Omega \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{G}$ par

$$\rho_\Omega(x, X) \cdot (y, Y) = (\Phi_\Omega(X, Y), \rho(X, Y)).$$

La propriété π_3 signifie que $(\mathcal{G}_\Omega, \rho_\Omega)$ vérifie le théorème de nullité pour les éléments de $\mathcal{D}^0_F(\mathcal{G}_\Omega)$ avec $F(\mathcal{G}_\Omega) = \pi^{-1}(F(\mathcal{G}))$. De plus à l'élément $(\mathrm{D}, \alpha) \in \mathcal{E}_\Omega$, on associe une extension de $(\mathcal{G}_\Omega, \rho_\Omega)$ dans $\mathcal{G}_{\Omega \mathrm{D}}$ qui se projette dans $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$ en la KV-structure $(\mathcal{G}_{\mathrm{D}}, \rho_{\mathrm{D}})$.

$(****)$ Considérons le cube commutatif d'homorphismes d'algèbres de Lie $(*)$. Les propriétés π_i, $1 \leq i \leq 3$, assure qu'à l'exception du sommet $\mathcal{G}_{\Omega \mathrm{DD}'}$ tous les sommets peuvent être munis des KV-structures telles les flèches ad hoc soient des morphismes de KV-structures. La propriété π_4 assure alors l'existence dans le sommet $\mathcal{G}_{\Omega \mathrm{DD}'}$ d'une KV-structure qui fait de $(*)$ un cube commutatif de KV-structure. ∎

On voit que les propriétés π_i, $1 \leq i \leq 4$, donnent en fait des conditions suffisantes pour l'extension et le relèvement du théorème de nullité. On retiendra en outre que ces propriétés π_i sont des propriétés des classes de cohomologie des cocycles en jeu. Autrement dit:

(1) π_1 et π_2 ne dépendent que des classes $[\mathrm{D}] \in H^1(\mathcal{G}, \mathcal{G})$;

(2) π_3 ne dépend que de $[\mathrm{D}] \in H^1(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ et de $[\Omega] \in H^2(\mathcal{G}, \mathbb{R})$;

(3) π_4 ne dépend que des classes $[\mathrm{D}]$, $[\mathrm{D}']$, $[\mathrm{D}'']$ et $[\Omega]$.

Ces remarques légitimes des restrictions imposées aux données D, Ω lors qu'on a examiné l'Exemple 1 du n° 1.4.4.

On peut résumer les commentaires de ce numéro 2.2.2 sous la forme suivante.

PROPOSITION 2.2.3. Si $(\mathcal{G}, \rho)$ jouit des propriétés π_i, $1 \leq i \leq 4$, pour un drapeau normal central $F(\mathcal{G})$, alors pour tout $D \in \mathcal{D}^0_F(\mathcal{G})$ (respectivement pour tout $\Omega \in \partial Z^1_\rho(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$), ρ possède une D-extension (respectivement un Ω-relèvement) qui à la propriété de $\mathcal{D}^0_F(\mathcal{G}_{\mathrm{D}})$-extension (respectivement qui à la propriété de $\mathcal{D}^0_F(\mathcal{G}_\Omega)$-extension. ∎

2.3. Extension et relèvement des propriétés π_i

Ce paragraphe sera consacré à la question de savoir si parmi les D-extensions $(\mathcal{G}_{\mathrm{D}}, \rho_{\mathrm{D}})$ (respectivement parmi les relèvements possibles) obtenus suivant la Proposition 2.2.3, il en existe qui jouissent des propriétés π_i. La réponse est affirmative grâce au théorème qui suit.

THÉORÈME 2.3.1. *Considérons le carré commutatif d'homomorphismes d'algèbres de Lie suivant*

$$
(1) \qquad \begin{array}{ccc}
\mathcal{G}_\Omega & \hookrightarrow & \mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}} \\
\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow \\
\mathcal{G} & \hookrightarrow & \mathcal{G}_{\mathrm{D}}.
\end{array}
$$

On se donne une KV-structure centrale $(\mathcal{G}, \rho)$ ainsi qu'une D*-extension $(\mathcal{G}_{\mathrm{D}}, \rho_{\mathrm{D}})$ et un Ω-relèvement $(\mathcal{G}_\Omega, \rho_\Omega)$. Soit $F(\mathcal{G})$ un drapeau central préservé par ρ. Les autres drapeaux en jeu sont $F(\mathcal{G}_\Omega) = \pi^{-1}(F(\mathcal{G}))$, $F(\mathcal{G}_{\mathrm{D}}) = F(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}_{\mathrm{D}}$ avec* $\mathrm{D} \in \mathcal{D}_F^0(\mathcal{G})$.

Si ρ, ρ_Ω et ρ_{D} jouissent des propriétés π_i, alors ρ_Ω possède une extension $\tilde{\rho}_{\Omega\mathrm{D}}$ dans $\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}$ qui jouit aussi des propriétés π_i et qui se projette dans $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$ en la KV-structure $(\mathcal{G}_{\mathrm{D}}, \rho_{\mathrm{D}})$. ■

DÉMONSTRATION. La démonstration est, mutatis mutandis, analogue à celle du Théorème 4.2.1 de [13b].

Soient Δ et Δ' des éléments de $\mathcal{D}_F^0(\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}})$, le drapeau dans $\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}$ étant $F(\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}) = \pi^{-1}(F(\mathcal{G}_{\mathrm{D}})) = F(\mathcal{G}_\Omega) \subset \mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}$; supposons que l'on ait $[\hat{\Delta}, \hat{\Delta}'] \sim 0$; $\hat{\Delta}$ et $\hat{\Delta}'$ donnent lieu à Δ et à Δ' dans $\mathcal{D}_F^0(\mathcal{G}_{\mathrm{D}})$ avec également $[\Delta, \Delta'] \sim 0$. Puisque $(\mathcal{G}_{\mathrm{D}}, \rho_{\mathrm{D}})$ a les propriétés π_i, on associera à tout couple (Δ, Δ'), avec $[\Delta, \Delta'] \sim 0$, un triplet $(A_\Delta, A_{\Delta'}, U_{\Delta\Delta'}) \in E_F^0(\mathcal{G}_{\mathrm{D}}) \times E_F^0(\mathcal{G}_{\mathrm{D}}) \times \mathcal{G}_{\mathrm{D}}$ qui vérifie π_1 et π_2 pour $(\mathcal{G}_{\mathrm{D}}, \rho_{\mathrm{D}})$. Posons $\xi_{\Delta\Delta'} = U_{\Delta\Delta'} - U_{\Delta'\Delta}$. Désignons par $\mathcal{A}_{\Delta\Delta'}$ l'extension de $\mathbb{R}^2$ par $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$ définie par le triplet $(\Delta, \Delta', \xi_{\Delta\Delta'})$ suivant la loi de crochet décrite au §2.2, c'est-à-dire

$$[(X, x), (Y, y)] = [X, Y] + \Delta(x)Y - \Delta(y)X + \theta(x, y)\xi_{\Delta\Delta'}$$

où $\theta(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$ et $\Delta(x) = x_1 + \Delta + x_2\Delta'$. Il est clair qu'il existe une extension $\hat{\mathcal{A}}_{\Delta\Delta'}$ de $\mathbb{R}^2$ par $\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}$ telle que l'on ait le diagramme commutatif d'algèbre de Lie qui suit,

(2)
$$\begin{tikzcd}
 & & \hat{\mathcal{A}}_{\Delta'} \arrow[drr] \arrow[ddd, dashed] & & \\
\mathcal{G}_\Omega \arrow[r, hook, "i"'] \arrow[ddd, "\pi"] & \mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}} \arrow[ur] \arrow[drr] \arrow[ddd, "\pi"] & & & \hat{\mathcal{A}}_{\Delta\Delta'} \arrow[ddd] \\
 & & & \hat{\mathcal{A}}_{\Delta'} \arrow[ur] \arrow[ddd] & \\
 & & \mathcal{A}_{\Delta'} \arrow[drr, dashed] & & \\
\mathcal{G} \arrow[r, hook, "i"] & \mathcal{G}_{\mathrm{D}} \arrow[ur, dashed] \arrow[drr] & & & \mathcal{A}_{\Delta\Delta'} \\
 & & & \mathcal{A}_\Delta \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Soient $\Phi_\Omega \in Z^1_\rho(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ et $A_{\mathrm{D}} \in E^0_F(\mathcal{G})$ les cochaines qui déterminent ρ_Ω et ρ_{D} respectivement.

Notons que $\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}$ est l'extension de $\mathbb{R}$ par $\mathcal{G}_\Omega$ déterminée par une dérivation de $\mathcal{G}_\Omega$ représentée sous la forme matricielle

$$\tilde{\mathrm{D}} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \mathrm{D} \end{bmatrix}.$$

On a évidemment $\mathrm{D}\Omega = \delta\alpha$. Soit $a(\mathrm{D}, \alpha) \in \mathcal{G}^*$ telle que

$$\psi_{\Omega\mathrm{D}} = \mathrm{d}_\rho a(\mathrm{D}, \alpha).$$

Considérons l'élément de $E^0_F(\mathcal{G}_\Omega)$ représenté par la matrice

$$\tilde{A}_{\mathrm{D}} = \begin{bmatrix} 0 & a(\mathrm{D}, \alpha) \\ 0 & A_{\mathrm{D}} \end{bmatrix};$$

On a une $\tilde{\mathrm{D}}$-extension $\tilde{\rho}$ de ρ_Ω dans $\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}$ définie par $\tilde{A}_{\mathrm{D}}$; cette extension est un relèvement de ρ_{D}. La condition π_4 appliquée à la paire (Δ, Δ') assure l'existence dans $\mathcal{A}_{\Delta\Delta'}$ d'une KV-structure telle que le diagramme suivant est un diagramme commutatif d'homomorphismes de KV-structures centrales

(3)
$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{A}_{\Delta'} \arrow[dr] & \\
\mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{G}_\Delta \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathcal{A}_{\Delta\Delta'}. \\
 & & \mathcal{A}_\Delta \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Notons ρ_Δ, $\rho_{\Delta'}$ et $\rho_{\Delta\Delta'}$ les structures de $\mathcal{A}_\Delta$, $\mathcal{A}_{\Delta'}$ et $\mathcal{A}_{\Delta\Delta'}$ respectivement ainsi fixées.

L'algèbre de Lie $\hat{\mathcal{A}}_{\Delta\Delta'}$ est une extension centrale de $\mathcal{A}_{\Delta\Delta'}$; soit $\omega \in Z^2(\mathcal{A}_{\Delta\Delta'}, \mathbb{R})$ le cocycle qui définit l'extension centrale

$$\mathbb{R} \mapsto \hat{\mathcal{A}}_{\Delta\Delta'} \to \mathcal{A}_{\Delta\Delta'}.$$

Soit $\omega_0 = \omega|_{\mathcal{G}_\Omega}$, le triplet $(\Delta, \Delta', \omega_0)$ vérifie les hypothèses des propriétés π_3 et π_4 pour la KV-structure ρ_{D}; il existe donc dans $\hat{\mathcal{A}}_{\Delta\Delta'}$ une KV-structure centrale qui fait de (2) un diagramme commutatif des KV-structures. Cela prouve que $(\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}, \tilde{\rho})$ jouit des propriétés π_1 et π_2.

Considérons maintenant un 2-cocycle scalaire $\tilde{\Omega} \in \partial Z^1_{\tilde{\rho}}(\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}, \mathcal{G}^*_{\Omega\mathrm{D}})$. Soit $\hat{\omega}_0 = \hat{\Omega}|_{\mathcal{G}_\Omega}$, on a alors $\hat{\omega}_0 \in \partial Z^1_{\partial\Omega}(\mathcal{G}_\Omega, \mathcal{G}^*_\Omega)$; $\hat{\Omega}$ et $\hat{\omega}_0$ déterminent des extensions centrales $\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}\hat{\Omega}} = \mathbb{R} \times \mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}$ et $\mathcal{G}_{\Omega\hat{\omega}_0} = \mathbb{R} \times \mathcal{G}_\Omega$. En tant qu'extension de $\mathbb{R}$ par $\mathcal{G}_{\Omega\hat{\omega}_0}$, $\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}\hat{\Omega}}$ est définie par une dérivation $\hat{\mathrm{D}} \in \mathcal{D}^0_F(\mathcal{G}_{\Omega\hat{\omega}_0})$ qui se projette dans $\mathcal{D}^0_F(\mathcal{G}_\Omega)$ suivant $\hat{\mathrm{D}} \in \mathcal{D}^0_F(\mathcal{G}_\Omega)$. On a donc

$$\hat{\mathrm{D}} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\alpha} \\ 0 & \tilde{\mathrm{D}} \end{bmatrix}$$

avec $\tilde{\mathrm{D}}\hat{\omega}_0 = \delta\tilde{\alpha}$. Les propriétés π_i de ρ_Ω permettent d'associer au triplet $(\hat{\omega}_0, \tilde{\mathrm{D}}, \tilde{\alpha})$ des cochaines à $a(\tilde{\mathrm{D}}, \tilde{\alpha}) \in \mathcal{G}^*_\Omega$, $A_{\tilde{\mathrm{D}}} \in E^0_F(G_\Omega)$ et $\Phi_{\hat{\omega}_0} \in Z^1_{\rho_\Omega}(\mathcal{G}_\Omega, \mathcal{G}^*_\Omega)$ telles que $\psi_{\hat{\omega}_0\tilde{\mathrm{D}}} = \mathrm{d}_{\rho_\Omega} a(\tilde{\mathrm{D}}, \tilde{\alpha})$. On munit $\mathcal{G}_{\Omega\hat{\omega}}$ du $\hat{\omega}_0$-relèvement $\rho_{\Omega\hat{\omega}_0}$ de ρ_Ω défini par $\Phi_{\hat{\omega}}$. Soit $A_{\hat{\mathrm{D}}}$ l'endomorphisme de $\mathcal{G}_{\Omega\hat{\omega}_0}$ représenté par la matrice

$$A_{\hat{\mathrm{D}}} = \begin{bmatrix} 0 & a(\tilde{\mathrm{D}}, \tilde{\alpha}) \\ 0 & A_{\tilde{\mathrm{D}}} \end{bmatrix}.$$

En vertu des propriétés π_1 et π_3 de ρ_Ω, l'endomorphisme $A_{\hat{\mathrm{D}}}$ détermine dans $\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}\hat{\Omega}}$ une $\hat{\mathrm{D}}$-extension $\rho_{\Omega\mathrm{D}\hat{\Omega}}$ de $\rho_{\Omega\hat{\omega}}$ qui donne lieu au diagramme commutatif de KV-structure suivant

$$(4) \qquad \begin{array}{ccc} (\mathcal{G}_{\Omega\hat{\omega}}, \rho_{\Omega\hat{\omega}_0}) & \hookrightarrow & (\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}\hat{\Omega}}, \rho_{\Omega\mathrm{D}\hat{\Omega}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{G}_\Omega, \rho_\Omega) & \hookrightarrow & (\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}, \tilde{\rho}). \end{array}$$

Nous considérons maintenant $\hat{\Delta} \in \mathcal{D}^0_F(\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}})$ et $\hat{\omega} \in \mathcal{G}^*_{\Omega\mathrm{D}}$ tels que $\hat{\Delta}\hat{\Omega} = \delta\hat{\alpha}$. En écrivant $\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}} = \mathcal{G}_\Omega \times \mathbb{R}$, on a

$$\hat{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_0 & \zeta_{\Delta\tilde{\mathrm{D}}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\alpha} = (\alpha, \lambda),$$

avec $(\Delta_0, \xi_{\Delta\hat{\mathrm{D}}}) \in \mathcal{D}^0_F(\mathcal{G}_\Omega) \times \mathcal{G}_\Omega$ et $(\alpha_0, \lambda) \in \mathcal{G}^*_\Omega \times \mathbb{R}$. Rappelons que les cochaines $\Delta_0, \hat{\mathrm{D}}, \tilde{\alpha}$ et $\hat{\omega}_0$ satisfont aux conditions suivantes:

$$\Delta_0\hat{\omega}_0 = \delta\alpha_0, \quad \tilde{\mathrm{D}}\hat{\omega}_0 = \delta\tilde{\alpha}, \quad [\Delta_0, \tilde{\mathrm{D}}] \sim 0 \quad \text{et} \quad \Delta_0\tilde{\alpha} - \tilde{\mathrm{D}}\alpha_0 \in \operatorname{im}\hat{\omega}_0^\square.$$

Ces relations assurent que l'on a le cube commutatif d'homomorphismes d'algèbre de Lie suivant

(5)
$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{G}_{\Omega\hat\omega_0\Delta_0} \arrow[dr] \arrow[ddd, dashed] & \\
\mathcal{G}_{\Omega\hat\omega_0} \arrow[urr] \arrow[dr] \arrow[ddd] & & & \mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}\hat\Omega\hat\Delta} \arrow[ddd] \\
 & \mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}\hat\Omega} \arrow[urr] \arrow[ddd] & & \\
 & & \mathcal{G}_{\Omega\Delta_0} \arrow[dr, dashed] & \\
\mathcal{G}_{\Omega} \arrow[urr, dashed] \arrow[dr] & & & \mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}\hat\Delta} \\
 & \mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}} \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

On observe que les conditions auxquelles sont soumis $\Delta_0, \tilde{\mathrm{D}}, \tilde{\alpha}$ et $\hat{\alpha}_0$ autorisent l'application des propriétés π_3 et π_4 de $(\mathcal{G}_\Omega, \rho_\Omega)$. Laissant fixes les structures $(\mathcal{G}_\Omega, \rho_\Omega)$ et $(\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}, \tilde{\rho})$ on peut munir les autres sommets de (5) des KV-structures qui font de (5) un diagramme commutatif de KV-structure. Cette conclusion entraîne la propriété π_3 pour la KV-structure $(\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}, \tilde{\rho})$, c'est-à-dire l'existence de $a(\hat{\mathrm{D}}, \hat{\alpha}) \in \epsilon_{\hat\Omega}$ tel que $\psi_{\hat\Omega\hat{\mathrm{D}}} = \mathrm{d}_{\tilde\rho} a(\hat{\mathrm{D}}, \hat{\alpha})$, où $\psi_{\hat\Omega\hat{\mathrm{D}}}$ est défini par la cochaine $\Phi_{\hat\Omega}$ qui détermine la structure $\rho_{\Omega\mathrm{D}\hat\Omega}$ de (4).

Il reste à prouver que $\tilde{\rho}$ jouit de la propriété π_4. Pour ce faire on conserve $(\hat\Delta, \hat\alpha) \in \mathcal{E}_{\hat\Omega}$ et on considère des éléments $(\hat\Delta', \hat\alpha')$ et $(\hat\Delta'', \hat\alpha'')$ dans $\mathcal{E}_{\hat\Omega}$ tels que

(6)
$$\begin{aligned}
&[\hat\Delta, \hat\Delta'] - \hat\Delta'' \sim 0,\\
&\hat\Delta\hat\alpha' - \hat\Delta'\hat\alpha - \hat\alpha'' \in \operatorname{im} \hat\Omega^{\square}.
\end{aligned}$$

Ecrivons comme auparavant $\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}} = \mathcal{G}_\Omega \times \mathbb{R}$ et présentons les données ci-dessus sous les formes suivantes:

(7)
$$\begin{cases}
\hat\Delta' = \begin{bmatrix} \Delta_0' & \zeta_{\Delta_0\tilde{\mathrm{D}}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat\Delta'' = \begin{bmatrix} \Delta_0'' & \zeta_{\Delta_0''\tilde{\mathrm{D}}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\\
\hat\alpha' = (\alpha', \lambda'), \quad \hat\alpha'' = (\alpha'', \lambda''),\\
\hat\Omega = \begin{bmatrix} \hat\omega_0 & -{}^t\mu \\ \mu & 0 \end{bmatrix}, \quad \mu \in \mathcal{G}_\Omega^*.
\end{cases}$$

Soit $\hat{W} = (W, \nu) \in \mathcal{G}_\Omega \times \mathbb{R} \simeq \mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}$, on a

$$\hat\Omega^{\square}(\hat{W}) = (\hat\omega_0^{\square}(W) + \nu\mu, -\mu(W)).$$

Supposons que $\hat{W}$ satisfasse aux deux conditions suivantes

$$(8)\qquad \begin{cases} [\hat{\Delta}, \hat{\Delta}'] - \hat{\Delta}'' = \operatorname{ad}\hat{W}, \\ \hat{\Delta}\hat{\alpha}' - \hat{\Delta}'\hat{\alpha} - \hat{\alpha}'' = \hat{\Omega}^{\square}(\hat{W}). \end{cases}$$

Compte tenu de (7), les $\mathcal{G}_{\Omega}$-composantes du système (8) donnent lieu à

$$(9)\qquad \begin{cases} [\Delta_0, \hat{\Delta}_0'] - (\Delta_0'' + \nu\tilde{\mathrm{D}}) = \operatorname{ad}(W) \\ \Delta_0\alpha' - \Delta_0'\alpha - (\alpha'' + \nu\tilde{\alpha}) = \hat{\omega}_0^{\square}(W). \end{cases}$$

Si $\Phi_{\hat{\Omega}} \in Z^1_{\tilde{\rho}}(\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}, \mathcal{G}^*_{\Omega\mathrm{D}})$ est le cocycle qui définit $\rho_{\Omega\mathrm{D}\tilde{\Omega}}$, la "$\mathcal{G}^*_{\Omega}$-composante" de $\Phi_{\hat{\Omega}}(\hat{W})$ est $\Phi_{\hat{\omega}_0}(W) + \nu a(\tilde{\mathrm{D}}, \tilde{\alpha})$.

Puisque $(\mathcal{G}_{\Omega}, \rho_{\Omega})$ jouit des propriétés π_i, la propriété π_4 de ρ_{Ω} assure que pour un choix convenable de $a(\Delta_0'', \alpha'')$, (9) entraîne l'égalité suivante

$$(10)\qquad A_{\Delta_0}a(\Delta_0', \alpha') - A_{\Delta_0'}a(\Delta_0, \alpha) - a(\Delta_0'', \alpha'') - \nu a(\tilde{\mathrm{D}}, \tilde{\alpha}) = \Phi_{\tilde{\omega}_0}(W).$$

Ecrivons l'intégralité des quantités dont la propriété π_4 devrait assurer l'égalité.

Identifions $\mathcal{G}^*_{\Omega\mathrm{D}}$ avec $\mathcal{G}^*_{\Omega} \times \mathbb{R}$ et posons

$$a(\hat{\Delta}, \hat{\alpha}) = (a(\Delta_0, \alpha), t),$$

$$A_{\hat{\Delta}} = \begin{bmatrix} A_{\Delta_0} & U_{\Delta\tilde{\mathrm{D}}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Posons pour simplifier $a_0 = a(\Delta_0, \alpha)$ et $a = a(\hat{\Delta}, \hat{\alpha})$; nous avons alors

$$A_{\hat{\Delta}}a' - A_{\hat{\Delta}'}a - a'' = (A_{\Delta_0}a_0' - A_{\Delta_0'}a_0 - a_0'', a_0(U_{\Delta_0'\tilde{\mathrm{D}}}) - a_0'(U_{\Delta_0\tilde{\mathrm{D}}}) - t''),$$

où les $U_{\Delta\tilde{\mathrm{D}}}$ sont des éléments qui satisfont aux conditions π_1 et π_2 pour $\rho_{\Omega'}$. D'un autre côté on pose

$$\Phi_{\hat{\Omega}}(\hat{W}) = (\Phi_{\hat{\omega}_0}(W) + \nu\tilde{a},\ \tilde{a}(W) - \tilde{\alpha}(W) + \nu\tau).$$

En vertu de l'égalité (10) on voit que pour un choix convenable du nombre réel t'' on aura l'implication suivante

$$\hat{\Delta}\hat{\alpha}' - \hat{\Delta}'\hat{\alpha} - \hat{\alpha}'' = \hat{\Omega}^{\square}(\hat{W}) \Rightarrow A_{\hat{\Delta}}a' - A_{\hat{\Delta}'}a - a'' = \Phi_{\hat{\Omega}}(\hat{W})$$

avec $a'' = (a(\Delta_0'', \alpha''), t'') \in \mathcal{G}^*_{\Omega} \times \mathbb{R}$. Cela prouve que $(\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}, \tilde{\rho})$ jouit de la propriété π_4. Cela achève la démonstration du Théorème 2.3.1. ∎

COMMENTAIRE 2.3.2. Il convient de faire quelques remarques sur l'architecture de la démonstration du Théorème 2.3.1. Pour cela reconsidérons le carré d'homorphismes de KV-structure

$$
(1') \qquad \begin{array}{ccc}
(\mathcal{G}_\Omega, \rho_\Omega) & \hookrightarrow & (\mathcal{G}, \tilde{\rho}) \\
\big\downarrow \pi & & \big\downarrow \pi \\
(\mathcal{G}, \rho) & \hookrightarrow & (\mathcal{G}_{\mathrm{D}}, \rho_{\mathrm{D}})
\end{array}
$$

dans lequel ρ, ρ_Ω et ρ_{D} jouissent des propriétés π_i. Il résulte du schema de la démonstration du Théorème 2.3.1. que les propriétés π_1 et π_2 de $\tilde{\rho}$ résultent des propriétés π_i de ρ_{D} alors que les propriétés π_3 et π_4 du même $\tilde{\rho}$ résultent des propriétés π_i de ρ_Ω. On voit donc que si on suppose que dans une suite exacte de KV-structure

$$0 \to (\mathcal{G}_0, \rho_0) \to (\mathcal{G}, \rho) \to (\mathbb{R}, 0) \to 0$$

$(\mathcal{G}_0, \rho_0)$ jouit des π_i, $1 \leq i \leq 4$, et $(\mathcal{G}, \rho)$ jouit des propriétés π_1 et π_2, alors $(\mathcal{G}, \rho)$ jouit en plus des propriétés π_3 et π_4. Ces remarques seront utiles au §2.4 suivant. ∎

2.4. - Rigidite des propriétés π_i sous l'effet de certaines déformations

Un corollaire important du Théorème 2.3.1 est l'énoncé suivant.

THÉORÈME 2.4.1. *Tout groupe de Lie nilpotent G muni d'un drapeau normal $F(G) = G_1 \subset \ldots$ tel que $C^k(G_i) \in F(G_i)$ possède une structure affine complète invariante à gauche et jouissant des propriétés π_i.* ∎

Une méthode rapide de démonstration du Théorème 2.4.1. consiste à procéder par récurrence sur la dimension de G; le théorème apparaît alors assez aisément comme corollaire du Théorème 2.3.1. ∎

Il convient de rappeler que le but de ce travail est la recherche de réponse à la question suivante: "Tout groupe de Lie résoluble possède-t-il des structures affines invariantes à gauche?"

Nous verrons qu'on obtient des structures affines dans des groupes de Lie résolubles en déformation des structures analogues dans les groupes de Lie nilpotents [13c]. Il n'est donc pas sans intérêt de mettre à jour des propriétés des structures affines dans les groupes de Lie nilpotents qui demeurent invariantes sous l'effet de certaines déformations.

L'exemple des propriétés instables est fourni par les propriétés $\mathcal{P}_F$ des KV-structures normales [13b]. Examinons le cas des structures normales dans le groupe de Heisenberg $\mathcal{H}_3$.

Soit (e_1, e_2, e_3) une base de l'algèbre de Lie $\mathcal{S}_3$ de $\mathcal{H}_3$, on suppose que $[e_2, e_3] = e_1$. Soit $F(\mathcal{G})$ le drapeau normal engendré par (e_1, e_2, e_3). On munit $\mathcal{S}_3$ de la famille ρ_u, $u \in \mathbb{R}$, des KV-structures définies comme il suit

$$\rho_u(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3) = (ux_3y_2 + (1+u)x_2y_3)e_1.$$

On vérifie que ρ_u jouit des propriétés $\mathcal{P}_F$ si et seulement si $u = -\frac{1}{2}$. Cela montre comme les propriétés $\mathcal{P}_F$ (voir [13b]) sont instables. ∎

2.4.2. - *Certaines déformations des KV-structures centrales*

Nous alons montrer dans ce numéro que les π_i, $1 \leq i \leq 4$, restent invariantes lorsque les KV-structures qui les vérifient subissent certaines déformations.

Rappelons qu'étant donnée une structure affine invariante à gauche dans un groupe de Lie (arbitraire) G, les déformations de cette structure au sens Gerstenhaber-Nijenhuis-Richardson ([9], [14], [15]) sont des cochaines symétriques $S \in C^2_\rho(\mathcal{G}, \mathcal{G})$, (i.e. $\partial S = 0$) solutions de l'équation

$$\mathrm{d}_\rho S + \frac{1}{2}[S, S] = 0,$$

$(\mathcal{G}, \rho)$ étant la KV-structure associée à la structure en jeu. Considérons de nouveau un carré commutatif de KV-structure

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}_\Omega, \rho_\Omega) & \hookrightarrow & (\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}, \rho_{\Omega\mathrm{D}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{G}, \rho) & \hookrightarrow & (\mathcal{G}_\mathrm{D}, \rho_\mathrm{D}). \end{array}$$

Si on suppose que ρ, ρ_Ω et ρ_D jouissent des propriétés π_i, avec $\mathrm{D} \in \mathcal{D}^0_F(\mathcal{G})$ le Théorème 2.3.1 assure l'existence d'une déformation S de $\rho_{\Omega\mathrm{D}}$ telle que, si on pose

$$\tilde{\rho} = \rho_{\Omega\mathrm{D}} + S,$$

on a le carré commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}_\Omega, \rho_\Omega) & \hookrightarrow & (\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}, \tilde{\rho}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{G}, \rho) & \hookrightarrow & (\mathcal{G}_\mathrm{D}, \rho_\mathrm{D}) \end{array}$$

dont toutes les KV-structures jouissent des propriétés π_i.

D'une façon générale on peut chercher les déformations de $\rho_{\Omega\mathrm{D}}$ qui conserve soit ρ_Ω, soit ρ_D, soit les deux à la fois. Le premier cas consiste à déformer l'endomorphisme $A_{\tilde{\mathrm{D}}}$ qui détermine $\rho_{\Omega\mathrm{D}}$ comme $\tilde{\mathrm{D}}$-extension de ρ_Ω; le deuxième cas consiste à déformer le couple $(a(\mathrm{D}, \alpha), \Phi_\Omega)$ qui vérifie π_3. Le troisième scenario consiste à déformer uniquement la primitive $a(\mathrm{D}, \alpha)$ de $\psi_{\Omega\mathrm{D}}$.

Nous allons examiner le dernier scenario. Pour fixer les idées, soit $(e_0, e_1, \ldots, e_{n+1})$ une base de $\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}$ qui engendre un drapeau normal central. On identifie $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ avec sa projection comme base de $\mathcal{G}_\mathrm{D}$. Notons

$x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ les coordonnées dans la base $(e_0, e_1, \ldots, e_{n+1})$. A $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ on associe la cochaine $S_{\lambda\mu} \in C^2_{\rho_\Omega}(\mathcal{G}_\Omega, \mathcal{G}_\Omega)$ définie comme il suit:

$$S_{\lambda\mu}(\Sigma x_i e_i, \Sigma y_j e_j) = (\lambda(x_n y_{n+1} + x_{n+1} y_n) + \mu x_{n+1} y_{n+1}) e_0.$$

La cochaine $S_{\lambda\mu}$ est solution de l'équation de déformation; on a donc

$$\mathrm{d}_{\rho_{\Omega\mathrm{D}}} S_{\lambda\mu} + \frac{1}{2}\,[S_{\lambda\mu} S_{\lambda\mu}] = 0.$$

Une autre façon de prouver l'égalité ci-dessus consiste à regarder $\rho_{\Omega\mathrm{D}}$ comme relèvement dans $\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}$ de la KV-structure $(\mathcal{G}_\mathrm{D}, \rho_\mathrm{D})$. Soit alors $\Phi \in Z^1_{\rho_\mathrm{D}}(\mathcal{G}_\mathrm{D}, \mathcal{G}^*_\mathrm{D})$ le cocycle qui définit ce relèvement; il est clair qu'on peut regarder $S_{\lambda\mu}$ comme élément de $C^1_{\rho_\mathrm{D}}(\mathcal{G}_\mathrm{D}, \mathcal{G}^*_\mathrm{D})$; de ce point de vue on voit facilement $\mathrm{d}\rho_\mathrm{D} S_{\lambda\mu} = 0$.

On a ainsi une application de $\mathbb{R}^2$ dans l'ensemble des relèvements de ρ_D dans $\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}$ définie par la relation

$$\rho_{\lambda\mu} = \rho_{\Omega\mathrm{D}} + S_{\lambda\mu}.$$

PROPOSITION 2.4.3. *Pour tout* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\rho_{\lambda\mu}$ *jouit des propriétés* π_i.

DÉMONSTRATION. Cette proposition est immédiate dès qu'on garde à l'esprit les Commentaires 2.3.2. En fait le diagramme suivant est comutatif

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}_\Omega, \rho_\Omega) & \hookrightarrow & (\mathcal{G}_{\Omega\mathrm{D}}, \rho_{\lambda\mu}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{G}, \rho) & \hookrightarrow & (\mathcal{G}_\mathrm{D}, \rho_\mathrm{D}). \end{array}$$

On suppose par ailleurs que ρ, ρ_Ω et ρ_D jouissent des propriétés π_i. On sait que les propriétés π_i de $(\mathcal{G}_\mathrm{D}, \rho_\mathrm{D})$ entraînent les propriétés π_1 et π_2 pour $\rho_{\lambda\mu}$. D'un autre côté, lorsque $\rho_{\lambda\mu}$ jouit des propriétés π_1 et π_2, les propriétés π_i de ρ_Ω entraînent π_3 et π_4 pour $\rho_{\lambda\mu}$; ces assertions résultent de l'architecture de la démonstration du Théorème 2.3.1. ∎

Nous allons mettre en évidence un corollaire intéressant de la Proposition 2.4.3. On fixe un cube commutatif de KV-structures centrales jouissant des propriétés π_i

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{G}_{\Delta\Omega} \arrow[drr] \arrow[ddd, dashed] & & \\
\mathcal{G}_{\Omega} \arrow[ur] \arrow[drr] \arrow[ddd] & & & \mathcal{G}_{\Omega D\Delta} \arrow[ddd] \\
 & & \mathcal{G}_{\Omega D} \arrow[ur] \arrow[ddd] & \\
 & \mathcal{G}_{\Delta} \arrow[drr, dashed] & & \\
\mathcal{G} \arrow[ur, dashed] \arrow[drr] & & & \mathcal{G}_{D\Delta} \\
 & & \mathcal{G}_{D} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Les flèches horizontales sont des inclusions et les flèches verticales sont de surjections correspondant à l'extension centrale

$$\mathbb{R} \to \mathcal{G}_{\Omega D\Delta} \to \mathcal{G}_{D\Delta}.$$

Soit $(e_0, e_1, \ldots, e_{n+1})$ une base de $\mathcal{G}_{\Omega D\Delta}$ compatible avec le cube ci-dessus, i.e.:

$$e_0, \ldots, e_{n+1} \quad \text{engendre } \mathcal{G}_{\Omega},$$

$$e_0, \ldots, e_{n-1} e_n \quad \text{engendre } \mathcal{G}_{\Omega D},$$

$$e_0, \ldots, e_{n-1}, e_{n+1} \quad \text{engendre } \mathcal{G}_{\Delta\Omega}.$$

On identifie $e_1, \ldots, e_{n+1}$ avec leur projection dans $\mathcal{G}_{D\Delta}$; les drapeaux centraux en jeu sont ceux engendrés par les bases ci-dessus. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dans $\mathcal{G}_{\Omega D\Delta}$ pour lequel $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. On définit les scalaires c_{ij}^k et v_{ij}^k en posant

$$[e_i, e_j] = \sum_k c_{ij}^k e_k$$

$$\rho_{\Omega D\Delta}(e_i) e_j = \sum_k v_{ij}^k e_k.$$

THÉORÈME 2.4.4. *Supposons que dans le cube ci-dessus toutes les KV-structures en jeu, à l'exception de $(\mathcal{G}_{\Omega D\Delta}, \rho_{\Omega D\Delta})$, vérifie les relations d'implication suivantes: $c_{ij}^k = 0 \Rightarrow v_{ij}^k = 0$. Alors il existe une déformation $\rho_{\lambda M}$ de $\rho_{\Omega D\Delta}$ qui vérifie les mêmes relations d'implication.* ∎

DÉMONSTRATION. Le théorème est une conséquence immédiate de la Proposition 2.4.3. En fait, en vertu des hypothèses admises il suffit seulement de déformer $\rho_{\Omega D\Delta}$ en $\rho_{\lambda\mu}$ de sorte que l'on ait

$$c_{ij}^k = 0 \Rightarrow \langle \rho_{\lambda\mu}(e_i) e_j, e_k \rangle = 0 \quad \text{pour} \quad \{i, j\} = \{n, n+1\} \quad \text{et} \quad k = 0.$$

Soit $\Phi \in Z^1_{\rho D\Delta}(\mathcal{G}_{\Omega D\Delta}, \mathcal{G}^*_{\Omega D\Delta})$ le cocycle qui définit $\rho_{\Omega D\Delta}$ comme relèvement de la structure en jeu dans $\mathcal{G}_{D\Delta}$; si $c^0_{n \cdot n+1} = 0$ on voit que en prenant

$-\lambda = \Phi(e_n, e_{n+1})$, $-\mu = \Phi(e_{n+1}, e_{n+1})$ et $\rho_{\lambda\mu} = \rho_{\Omega D\Delta} + S_{\lambda\mu}$ on a $\rho_{\lambda\mu}(e_i)e_j = \rho_{\Omega D\Delta}(e_i)e_j$ pour $(i,j) \notin \{n, n+1\}$ et $\langle \rho_{\alpha\mu}(e_n)e_{n+1}, e_0\rangle = 0$. La structure $\rho_{\lambda\mu}$ est centrale et jouit aussi des propriétés π_i; d'où le Théorème 2.4.4. ∎

DÉFINITION 2.4.5. Une KV-structure centrale $(\mathcal{G}, \rho)$ est dite isotrope si elle préserve un drapeau central $F(\mathcal{G})$ engendré par une base orthonormée (par rapport à un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$) (e_i) qui satisfait aux conditions $c_{ij}^k = 0 \Longrightarrow v_{ij}^k = 0$. ∎

En conjuguant le Théorème 2.3.1 avec le Théorème 2.4.4, on a le théorème d'extension suivant:

THÉORÈME 2.4.6. *Soit $(\mathcal{G}, \rho)$ une KV-structure centrale isotrope. Soit $F(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_1 \subset \cdots \mathcal{G}_k \subset \cdots \mathcal{G}$ un drapeau central engendré par une base (orthonormé par rapport à un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$) qui satisfait aux conditions de la Définition* 2.4.5 *avec $C^k(\mathcal{G}_i) \in F(\mathcal{G}_i)$. On fait en plus les hypothèses suivantes*: (a) *Tout idéal $\mathcal{G}_k$ de $F(\mathcal{G})$ muni de $\rho|_{\mathcal{G}_k}$ jouit des propriétés π_i pour le drapeau induit $F(\mathcal{G}_k)$;* (b) *$\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_{/\mathcal{G}_1}$ muni de la structure quotient jouit des propriétés π_i pour le drapeau quotient $\pi F(\mathcal{G})$. Alors pour tout* $(\mathrm{D}, \Omega) \in \mathcal{D}_F^0(\mathcal{G}) \times \partial Z_\rho^1(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$, *$\rho$ possède une* D*-extension* (*respectivement un* Ω*- relèvement*) *isotrope jouissant des propriétés π_i pour le drapeau $F(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}_{\mathrm{D}}$* (*respectivement $\pi^{-1}F(\mathcal{G})$*). ∎

DÉMONSTRATION. Soient $n + 1 = \dim \mathcal{G}$, $\mathcal{A}$ l'idéal de dimension n du drapeau $F(\mathcal{G})$ et $\overline{\mathcal{G}}$ l'algèbre quotient de $\mathcal{G}$ par l'idéal $\mathcal{G}_1$ du drapeau $F(\mathcal{G})$. Soit $(\mathrm{D}, \Omega) \in \mathcal{D}_F^0(\mathcal{G}) \times \partial Z_\rho^1(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$; on a les diagrammes d'homomorphismes d'algèbre de Lie suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_\omega & \hookrightarrow & \mathcal{G}_\Omega \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A} & \hookrightarrow & \mathcal{G} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \hookrightarrow & \mathcal{G}_{\mathrm{D}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\mathcal{G}} & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}. \end{array}$$

Pour établir les conclusions du Théorème 2.4.6 on procède par récurrence sur $\dim \mathcal{G}$. Pour $\dim \mathcal{G} = 1$, le théorème est trivialement vrai; si on suppose que le Théorème 2.4.6 est vrai en dimension $\leq n$ et si on considère le cas de la dimension $n + 1$, on voit que le théorème s'applique aux sommets $\mathcal{A}$ et $\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}$ des carrés ci-dessus; ω étant égal à $\Omega|_{\mathcal{A}}$, $\rho_{\mathcal{A}}$ possède un ω-relèvement isotrope jouissant des propriétés π_i; pour ce qui est du premier carré.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_\omega & \hookrightarrow & \mathcal{G}_\Omega \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A} & \hookrightarrow & \mathcal{G}. \end{array}$$

On peut appliquer le Théorème 2.3.1, puis la Proposition 2.4.3. pour avoir un Ω-relèvement isotrope de $(\mathcal{G}, \rho)$ qui jouit des propriétés π_i. Pour ce qui est du second carré

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \hookrightarrow & \mathcal{G}_{\mathrm{D}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\mathcal{G}} & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}. \end{array}$$

Le Théorème 2.4.6 vaut pour $\overline{\mathcal{G}}$, $(\overline{\mathcal{G}}, \overline{\rho})$ possède donc une extension isotrope $(\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{D}}, \rho_{\overline{\mathrm{D}}})$ qui jouit des propriétés π_i. Le Théorème 2.3.1 joint à la Proposition 2.4.3 assure l'existence dans $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$ d'une D-extension isotrope de ρ qui jouit des propriétés π_i; d'où le Théorème 2.4.6. ∎

2.4.7. - *Exemples de structures isotropes*

1°) On se donne le groupe de Heimsenberg $\mathcal{H}_3$; on fixe le drapeau engendré par une base (e_1, e_2, e_3) avec $[e_2, e_3] = e_1$. Les structures suivantes sont isotropes:

(a) $$\rho(\Sigma x_i e_i)(\Sigma y_j e_j) = \frac{1}{2}(x_3 y_2 - x_2 y_3) e_1;$$

(b) $$\rho(\Sigma x_i e_i)(\Sigma y_j e_j) = (2x_3 y_2 + 3x_2 y_3) e_1.$$

2°) Soit $\mathbb{R}^n_\Omega$ une extension centrale de $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{R}$ déterminée par $\Omega \in \Lambda^2 \mathbb{R}^{n*}$. Fixons une base $(e_1, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{k+2m})$ de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\Omega = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{d}x_{k+1+2j} \wedge \mathrm{d}x_{k+2j+2}$$

où $x_1, \dots, x_n$ sont des coordonnées dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. On définit dans $\mathbb{R}^n_\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ la KV-structure suivante

$$\rho(X) \cdot Y = (\Phi(X, Y), 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

avec

$$\Phi((x_0, x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1, \dots, y_n)) = \sum_{j=1}^{m} (2x_{k+2j+2} y_{k+2j+1} + 3x_{k+2j+1} y_{k+2j+2}).$$

En combinant les Théorèmes 2.3.1 et 2.4.6 on a le théorème suivant

THÉORÈME 2.4.7. *Tout groupe de Lie nilpotent muni d'un drapeau normal* $F(G) = G_1 \subset \dots$ *avec* $C^k(G_i) \in F(G_i)$ *possède une structure affine isotrope jouissant des propriétés* π_i. ∎

DÉMONSTRATION. On procède comme dans [13b]. On commence par présenter l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ du groupe de Lie en jeu comme suite finie d'extension centrale $(\Omega_\ell, \mathcal{A}_{m+\ell})$, $1 \leq \ell \leq \dim[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$, à partir de l'algèbre de

Lie commutative $\mathcal{A}_m = \mathcal{G}/[\mathcal{G},\mathcal{G}]$. En particulier on a $\mathcal{A}_{m+1} = (\Omega_1, \mathcal{A}_m)$. On fixe dans $\mathcal{A}$ une base $(e_1, \ldots, e_{2r}, \ldots, e_n)$ dans laquelle Ω_1 s'écrit sous la forme

$$\Omega_1 = \sum_{j=1}^{r-1} \mathrm{d}x_{2j+1} \wedge \mathrm{d}x_{2j+2}.$$

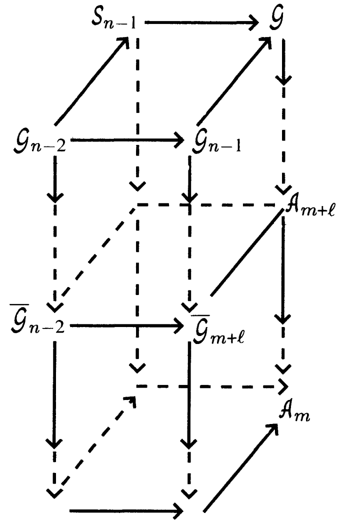
Soit $F(\mathcal{A}_m)$ le drapeau central engendré par $(e_1, \ldots, e_m)$. On relève ce drapeau dans les extensions successives pour obtenir un drapeau central dans $\mathcal{G}$

$$F(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_1 \subset \ldots \subset [\mathcal{G},\mathcal{G}] \subset \ldots \mathcal{G}.$$

On note $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ une base de $\mathcal{G}$ qui se projette sur la base de $\mathcal{A}_m$ fixée auparavant. Soit $\mathcal{S}_{n-1} = \mathcal{G}_{n-2} \otimes \mathbb{R}\epsilon_n$. On a le carré commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{S}_{n-1} \arrow[rr] & & \mathcal{G} \\
\mathcal{G}_{n-2} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathcal{G}_{n-1}. \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

On projette ce carré dans les algèbres de Lie quotients $\mathcal{A}_{m+\ell}$ pour obtenir la tour commutative qui suit



On commence par munir $\mathcal{A}_{m+1}$ de la KV-structure de l'exemple n° 2 ci-dessus, c'est-à-dire

$$\rho(\lambda, X) \cdot (\mu, Y) = (\Phi(X,Y), 0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}_m = \mathcal{A}_{m+1}$$

avec

$$\Phi((x_1,\ldots,x_m),(y_1,\ldots,y_m)) = \sum_{j=0}^{r-1}(2x_{2j+2}y_{2j+1} + 3x_{2j+1}y_{2j+2}).$$

La KV-structure ρ obtenue ainsi que celles qu'elle induit dans les idéaux de $F(\mathcal{A}_{m+1})$ sont isotropes et ont les propriétés π_i pour $F(\mathcal{A}_{m+1})$. C'est ici que réapparait l'intérêt pour les deux exemples du n° 1.4.4. Le Théorème 2.4.6 assure qu'on peut relever ces structures en des structures satisfaisant aux mêmes exigences dans $\mathcal{A}_{m+2}$. On itère cette procédure pour fabriquer dans $\mathcal{G}$ une KV-structure isotrope jouissant des propriétés π_i. ∎

REMARQUE 2.4.8. On a donné du Théorème 2.4.7 une démonstration constructive. Il faut observer que si on suppose le théorème vrai pour les groupes de dimension $< n$, en peut partir d'une KV-structure isotrope dans $b = \mathcal{G}_{n-1}/\mathcal{G}_1$ qui jouit des propriétés π_i et on considère le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_{n-1} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ b & \longrightarrow & \overline{\mathcal{G}} \end{array}$$

auquel on applique le Théorème 2.4.6 pour obtenir dans $\mathcal{G}$ une structure isotrope jouissant des propriétés π_i. ∎

Addendum

Plusieurs demonstrations dans ce travail et dans [13b] reposent sur le choix d'un drapeau normal central $F(G) = G_1 \subset \ldots \subset G$ avec $C^k(G_i) \in F(G_i)$ pour $1 < i \leq \dim G$.

Yves Benoist en observant que ce fait n'était pas possible dans tous les groupes nilpotents en a decouvert un (groupe de Lie nilpotent) qui non seulement ne possède pas un tel drapeau, mais en plus n'admet aucune structure affine. [YB]: C.R. Acad. Sci. Paris **315** (1992) 983-986.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. ALBERT - P. MOLINO, *Pseudogroupes de Lie*, Tome 1, Collection Travaux en cours, Hermann Paris.

[2] L. AUSLANDER, *Simply transitive groups of affine motions*, Amer. J. Math., **99** (1977), 215-222.

[3] N. BOURBAKI, *Chapitre 10, Algèbre homologique*, Hermann Paris.

[4] Y. CARRIERE, *Autour de la conjecture de Markus*, Invent. Math., **95** (1989), 628-645.
[5] L.S. CHARLAP, *Bieberbach groups and flat manifolds*, Universitext Springer.
[6] C. CHEVALLEY - S. EILLENBERG, *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **63** (1948), 85-124.
[7] D. FRIED - W. GOLDMAN, *Three dimensional affine crystallographic groups*, Adv. in Math., **47** (1983), 1-49.
[8] D. FRIED - W. GOLDMAN - M. HIRSCH, *Affine manifolds with nilpotent holonomy*, Comment. Math. Helv., **56** (1981), 487-523.
[9] C. GERSTENHABER, *Deformation of Rings and Algebras*, Ann. of Math., **19** (1964), 59-103.
[10] M. GOZE - J.M. BERMUDEZ, *Algèbres de Lie rigides*, Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie, **88** (1985), 397-415.
[11] J.L. KOSZUL, (a) *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*, Bull. Soc. Math. France, **78** (1950), 66-127.
(b) *Deformations des variétés localement plates*, Ann. Inst. Fourier, **18** (1968), 103-114.
[12] J. MILNOR, *On the fundamental groups of complete affinely flat manifolds*, Adv. in Math., **25** (1977), 178-187.
[13] NGUIFFO B. BOYOM, (a) *The lifting problem for affine structure in nilpotent Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **313** (1989), 347-379.
(b) *Structures affines homotopes à zéro des groupes de Lie nilpotents*, to appear in J. Differential Geom., **31** (1989).
(c) *Structure affine des groupes de Lie résolubles*, preprint Montpellier, Nov. 1989.
[14] A. NIJENHUIS - W. RICHARDSON, *Deformation of Lie algebra structures*, J. of Math. and Mech., (1967) 89-106.
[15] G. RAUCH, *Variation de structure d'algèbre de Lie*, Thèse Doct. Sc., Orsay 1973.

Institut de Mathématique
Université Montpellier II
Place E. Bataillon
34095 Montpellier Cedex 5
France