

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LAURENT MANIVEL

Théorèmes d'annulation pour les fibrés associés à un fibré ample

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 19,
n° 4 (1992), p. 515-565

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1992_4_19_4_515_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Théorèmes d'annulation pour les fibrés associés à un fibré ample

LAURENT MANIVEL

1. - Introduction et résultats

L'objet principal de cet article est à la fois de préciser et de généraliser, au moins partiellement, un théorème d'annulation établi par J.P. Demailly ([4], Théorèmes 0.2 et 0.3) pour un fibré ample sur une variété complexe compacte, selon lequel:

THÉORÈME (Demailly). *Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang d , L un fibré en droites sur une variété complexe compacte X de dimension n , tels que E soit ample et L semi-ample, ou E semi-ample et L ample. Alors si $a \in \mathbb{N}_{\geq}^d$,*

a.
$$H^{n,q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si } q > 0 \quad \text{et } l \geq h(a);$$

b.
$$H^{p,q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si } \begin{cases} l \geq d - 1 + n - p, \\ p + q > n. \end{cases}$$

On désigne ici par $\Gamma^a E$ le fibré associé à E et à la représentation du groupe linéaire $Gl(d, \mathbb{C})$ de poids supérieur $a \in \mathbb{N}_{\geq}^d$, ensemble des d -uplets décroissants d'entiers naturels: $h(a)$ est le nombre de composantes non nulles de a .

La première partie de cet énoncé ne semble guère pouvoir être améliorée ([4], Exemple 0.5), mais la seconde pose le problème de l'exposant optimal du déterminant de E assurant l'annulation du groupe de cohomologie de Dolbeault précédent, en fonction du bidegré (p, q) et du poids $a \in \mathbb{N}_{\geq}^d$.

Dans [5], le théorème d'annulation précédent est démontré, lorsque E est supposé positif au sens de Griffiths (hypothèse a priori plus forte que l'amplitude), lorsque $l \geq h(a) + A(n, p, q)$, où $A(n, p, q)$ est une constante ne dépendant que de n , p et q . D'autre part, il est facile de vérifier que la

borne $l \geq d - 1 + \min(n - p, n - q)$ convient si la suite spectrale de Borel-Le Potier (Paragraphe 2.3) est supposée dégénérée en E_2 pour les fibrés en droites amples naturellement définis sur les variétés de drapeaux des fibrés vectoriels considérés: la borne $l \geq h(a) + \min(n - p, n - q)$ est donc suggérée dans [6] pour les fibrés amples. Nous avons toutefois montré ([21]) que cette hypothèse de dégénérescence n'était en général pas vérifiée, ce qui complique considérablement la situation.

Notre résultat principal permet cependant de confirmer en partie la conjecture de [6]:

THÉORÈME. *Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang d , L un fibré en droites sur une variété complexe compacte X de dimension n , tels que E soit ample et L nef, ou E nef et L ample. Alors si $a \in \mathbb{N}_{\geq}^d$, et $p \geq n - 20$,*

$$H^{p,q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} l \geq h(a) + n - p, \\ p + q > n. \end{cases}$$

Nous généraliserons également la première partie du théorème de Demailly sous une forme qui englobe l'essentiel des théorèmes d'annulation connus pour les fibrés vectoriels amples en degré maximal, à savoir aussi bien celui de Griffiths pour leurs puissances symétriques ([11]), que celui de Le Potier pour leurs puissances extérieures ([19]), ou la généralisation qu'en ont donné Ein et Lazarsfeld ([8]):

THÉORÈME. *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, si a et $u \in \mathbb{N}_{\geq}^d$, si $d \geq h(a) + h(u)$, et si χ est la permutation définie par $\chi(i) = d + 1 - i$, $1 \leq i \leq d$, on a*

$$H^{n,q}(X, \Gamma^{a-\chi(u)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si} \quad l \geq h(a) + u_1 \quad \text{et} \quad q > |u|.$$

Nous donnerons d'ailleurs (Théorème 4) une version de ce théorème en degré non nécessairement maximal (mais généralement proche de n), qui admet le corollaire suivant:

COROLLAIRE. *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on a*

1. $H^{p,q}(X, S^k E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$ si $\begin{cases} l \geq n - p + 1, \\ p + q > n, \end{cases}$ et $p \geq n - 20$.
2. $H^{p,q}(X, \wedge^k E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$ si $\begin{cases} l \geq n - p + k, \\ p + q > n, \end{cases}$ et $p \geq n - 20$.
3. $H^{p,q}(X, \wedge^k E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$ si $\begin{cases} l \geq n - p, \\ p + q > n + d - k, \end{cases}$ et $p \geq n - 20 + d - k$.

Le premier de ces énoncés généralise le théorème de Griffiths, et le dernier celui de Le Potier: on peut d'ailleurs voir dans ce résultat une alternative à

la conjecture de Sommese ([30]), que Schneider et Demailly ([4]) ont prouvée n'être pas vérifiée (cf. [22] pour une autre alternative à cette conjecture, qui ne fait pas intervenir le déterminant de E). Notons que le contre-exemple de Demailly, à savoir l'existence d'un fibré ample de rang $d \geq 2$ sur une variété de dimension $n = 2d$, tel que

$$H^{n-1, n-3}(X, \wedge^2 E) \neq 0,$$

implique que la borne donnée pour l est en l'occurrence optimale pour $p = n - 1$. C'est, malheureusement, à peu près le seul cas pour lequel nous puissions nous prononcer à ce sujet.

Les méthodes utilisées dans cet article sont proches de celles développées par Jean-Pierre Demailly dans [4]. On sait par exemple, après les travaux de Bott ([1]), que chaque fibré $\Gamma^a E \otimes (\det E)^l$ se réalise si $l \geq h(a)$ comme l'image directe d'un fibré en droites ample sur une variété de drapeaux associée à E ([4]). Notre idée essentielle consiste à montrer qu'un fibré $\Gamma^{a-x(u)} E \otimes (\det E)^l$ apparaît, si $l \geq h(a) + u_1$, comme l'image directe du produit tensoriel d'un fibré en droite ample sur une variété de drapeaux, par une puissance extérieure de son fibré cotangent (Proposition 5). Ceci permet de relier les groupes de cohomologie que l'on souhaite annuler, à des groupes de cohomologie de Dolbeault de ce fibré en droites ample, auxquels on pourra appliquer le théorème d'annulation de Kodaira-Nakano, via une suite spectrale de Borel-Le Potier dont les termes d'ordre un seront eux-mêmes déterminés par une suite spectrale de Leray. Toute la difficulté consiste alors, pour conclure, à montrer que nos conditions d'annulation "passent à travers" les suites spectrales impliquées.

L'isomorphisme établi par la Proposition 5 repose sur le calcul de certains groupes de cohomologie de Dolbeault de fibrés en droites homogènes sur des variétés de drapeaux d'un espace vectoriel complexe. Malgré le théorème de Bott, la détermination de ces groupes est malheureusement très délicate (excepté dans le cas des grassmanniennes, pour lequel on dispose de méthodes diagrammatiques relativement commodes: cf. [28] et [21]), du fait de la structure assez opaque du fibré tangent d'une variété de drapeaux générale.

Nous avons dû introduire des filtrations adéquates des puissances extérieures de ce fibré tangent (Section 2.2), faire intervenir différentes propriétés remarquables des représentations du groupe linéaire (Section 2.1), et utiliser le fait que ces groupes de cohomologie interviennent dans des suites spectrales de Borel-Le Potier que l'on sait par ailleurs préciser (Section 3), pour mener ces calculs à bien, sous certaines conditions qui sont responsables des conditions artificielles que nous avons dû introduire sur p dans les énoncés qui précèdent.

Il serait bien évidemment très souhaitable de savoir expliciter en toute généralité ces groupes de cohomologie de Dolbeault des fibrés en droites homogènes sur les variétés de drapeaux. Cette généralisation du théorème de Bott reste cependant hors de notre portée.

Je tiens, enfin, à remercier Jean-Pierre Demailly pour ses suggestions, et pour m'avoir permis d'améliorer grandement la lisibilité de cet article.

2. - Préliminaires

On regroupera dans ce paragraphe un certain nombre de résultats classiques, concernant aussi bien les représentations du groupe linéaire que la structure des variétés de drapeaux, et qui seront par la suite utilisés très régulièrement.

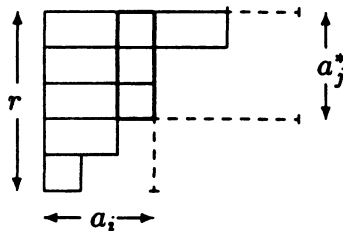
2.1. - Représentations du groupe linéaire

Soit W un espace vectoriel complexe de dimension r . Le groupe linéaire $Gl(W)$ est un groupe de Lie complexe réductif ([16]), dont les représentations irréductibles sont en correspondance avec les r -uplets décroissants d'entiers relatifs: si $a \in \mathbb{Z}^r$, on notera $\Gamma^a W$ la représentation de poids supérieur a si celui-ci est décroissant, et l'on conviendra sinon que $\Gamma^a W = 0$.

On notera $\mathbf{1}_1, \dots, \mathbf{1}_r$ la base canonique de \mathbb{Z}^r , et l'on posera $\mathbf{1}_{i,j} = \sum_{k=1}^j \mathbf{1}_k$, $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{1,r}$. Les puissances extérieures et symétriques $\wedge^k W$ et $S^k W$ sont alors les $Gl(W)$ -modules irréductibles de poids respectifs $\mathbf{1}_{1,k}$ et $k\mathbf{1}_1$. De plus, on a l'identité

$$\Gamma^{a+l} W = \Gamma^a W \otimes (\det W)^l.$$

On pourra représenter un poids $a \in \mathbb{N}_{\geq}^r$ sous forme d'un diagramme d'Young, autrement dit d'un tableau de r lignes dont la i -ème est de longueur a_i .



Représentation d'un poids par un diagramme d'Young

On définira de plus

- $|a|$ comme la somme des composantes de a ;
- $s(a)$ comme la suite des entiers $(0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = r)$ tels que $a_{s_i} > a_{s_{i+1}}$ si $0 \leq i \leq m - 1$;
- a^* comme le poids dual de a , c'est-à-dire défini par $a_j^* = \text{card}\{i, a_i \geq j\}$, de sorte que $h(a) = a_1^*$.

Notons que si $s(a) = (0 = s_0 < \dots < s_m = r = a_1^*)$, alors $s(a^*) = (0 = t_0 < \dots < t_m = a_1)$ avec $a_{s_i} = t_{m+1-i}$ et $a_{t_j}^* = s_{m+1-j}$.

2.1.1. *La règle de Littlewood-Richardson*

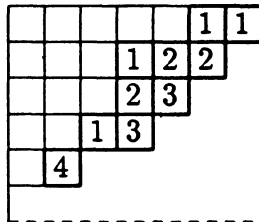
L'anneau de Grothendieck \mathcal{A}_r des combinaisons à coefficients dans \mathbb{Z} de représentations de $Gl(W)$ est un \mathbb{Z} -module libre, dont on notera le produit (tensoriel) sous la forme suivante:

$$\Gamma^a W \otimes \Gamma^b W = \bigotimes_{c \in \mathbb{Z}^r} n_{a,b}(c) \Gamma^c W.$$

Pour déterminer les multiplicités $n_{a,b}(c)$, on utilisera à de multiples reprises la *règle de Littlewood-Richardson* ([18]). Supposons les poids a et b positifs et décroissants: on appellera *a-tableau de base b* un tableau numéroté dont la i -ème ligne contient d'abord b_i cases non numérotées, puis un certain nombre de cases numérotées, de telle sorte que l'entier j apparaisse au total exactement a_j fois. Un tel diagramme sera dit *admissible* s'il obéit aux restrictions suivantes:

- (A) Les entiers numérotant chaque ligne sont, lorsque qu'ils sont lus de gauche à droite, en ordre croissant.
- (B) Aucune colonne ne contient deux fois le même entier.
- (C) Pour chaque entier i compris entre 1 et r , le poids dont la j -ième composante est la somme de b_j et du nombre de cases de la j -ième ligne du tableau numérotées d'entiers au plus égaux à i , est décroissant. En particulier, si l'on note c'_j le nombre de cases numérotées de la j -ième ligne du tableau, le poids $b+c'$, qui est le "poids total" du diagramme, est décroissant.
- (D) Si w est la suite des entiers du tableau lus de droite à gauche et de haut en bas, alors pour tous les entiers i et j , i apparaît au moins aussi souvent que $i+1$ parmi les j premiers termes de w .

EXEMPLE.



Un *a*-tableau de base *b* admissible avec $b = (5, 3, 3, 2, 1, 0)$ et $a = (4, 3, 2, 1, 0, 0)$.

Alors, selon la règle de Littlewood-Richardson, un tel tableau contribue à $\Gamma^b W \otimes \Gamma^a W$ pour $\Gamma^{b+c} W = \Gamma^c W$, et $\Gamma^b W \otimes \Gamma^a W$ est la somme des contributions de tous les a -tableaux de base b admissibles.

EXEMPLE. Le produit tensoriel d'un $GL(W)$ -module $\Gamma^a W$, $a \in \mathbb{N}_{\geq}^r$, par une puissance symétrique ou extérieure de W est donnée par l'une des formules suivantes:

$$(S) \quad \Gamma^a W \otimes S^k W = \bigotimes_{b \in \sigma_k(a)} \Gamma^b W,$$

où $\sigma_k(a) = \{b \in \mathbb{N}^r, a_i \leq b_i \leq a_{i-1}, q \leq i \leq r, \text{ et } |b| = |a| + k\}$, et

$$(\wedge) \quad \Gamma^a W \otimes \wedge^k W = \bigotimes_{b \in \lambda_k(a)} \Gamma^b W,$$

où $\lambda_k(a) = \{b \in \mathbb{N}^r, b_i - a_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq r, \text{ et } |b| = |a| + k\}$.

En effet, dans le premier cas, le règle de Littlewood-Richardson implique de considérer les tableaux de base a , auxquels sont ajoutées k cases numérotées de l'entier 1. Les conditions (A), (C) et (D) sont alors automatiquement vérifiées, alors que (B) équivaut aux inégalités $b_i \leq a_{i-1}$, $1 \leq i \leq r$, si b est le poids total du tableau numéroté.

De même, dans le second cas, on considère des tableaux de base a auxquels on adjoint une case numérotée de chacun des entiers compris entre 1 et k . Les conditions (A) et (D) imposent que si la case numérotée de l'entier j apparaît sur la i_j -ième ligne, l'on ait $i_1 > \dots > i_k$, le poids total associé s'écrivant $b = a + \sum_{j=1}^k \mathbf{1}_{i_j}$. De plus, (B) est nécessairement vérifiée, et (C) équivaut à la décroissance du poids b , qui, comme dans le cas précédent, est de multiplicité un.

Cas de poids non positifs. Le produit tensoriel de $GL(W)$ -modules irréductibles dont les poids ne sont pas positifs se détermine encore grâce à la règle de Littlewood-Richardson, via une simple translation selon les puissances du déterminant de W . On écrira en général un poids décroissant non positif sous la forme $a - \chi(u)$, où $\chi \in \Sigma_r$ (le groupe des permutations de $\mathbb{N}_r^* = \{1, \dots, r\}$, qui agit naturellement sur \mathbb{Z}^r), est définie par $\chi(i) = r + 1 - i$, où a et $-\chi(u)$ sont respectivement formés des composantes positives et négatives du poids $a - \chi(u)$: les poids a et u sont alors positifs, décroissants, et tels que $h(a) + h(u) \leq r$ (les parties non nulles de a et $-\chi(u)$ sont disjointes).

Si les composantes d'un produit tensoriel de $GL(W)$ -modules irréductibles ont des poids supérieurs dont les modules sont la somme des modules des poids des facteurs de ce produit, il n'en est bien sur pas de même des parties positives et négatives de ces poids. On utilisera cependant le lemme suivant:

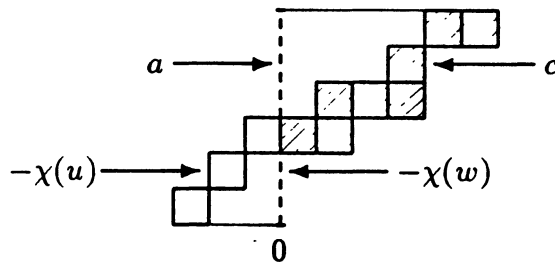
LEMME 1.

1. Si a et b sont décroissants dans \mathbb{Z}^r , $\Gamma^{a+b}W$ est un facteur de $\Gamma^aW \otimes \Gamma^bW$.
2. Soient $a, b, c, u, v, w \in \mathbb{N}_{\geq}^r$ des poids tels que les sommes $h(a) + h(u)$, $h(b) + h(v)$, $h(c) + h(w)$ soient inférieurs ou égales à r . Alors si $\Gamma^{c-\chi(w)}W$ est une composante de $\Gamma^{a-\chi(u)} \otimes \Gamma^{b-\chi(v)}W$, on a

$$|w| \leq |u| + |v| \text{ et } |c| \leq |a| + |b|.$$

PREUVE.

1. Il suffit de le vérifier pour $a, b \in \mathbb{N}_{\geq}^r$. Mais alors, $\Gamma^{a+b}W$ est la contribution à $\Gamma^aW \otimes \Gamma^bW$ du b -tableau de base a dont la i -ème ligne est numérotée de b_i fois l'entier i , et de cet entier seulement: un tel diagramme est évidemment admissible (remarquons au passage que la multiplicité de $\Gamma^{a+b}W$ dans $\Gamma^aW \otimes \Gamma^bW$ est exactement un: en effet, un b -tableau de base a ne peut, s'il est admissible, avoir d'autres entiers que des 1 sur sa première ligne; s'il contribue à $\Gamma^aW \otimes \Gamma^bW$ pour $\Gamma^{a+b}W$, tous ses 1 doivent être sur sa première ligne, et en itérant ce raisonnement, tous ses i se trouvent sur sa i -ème ligne: il coïncide donc avec le tableau défini plus haut).
2. D'après la première partie du lemme, il suffit de supposer que $\Gamma^{c-\chi(w)}W$ est un facteur de $\Gamma^{a-\chi(u)}W \otimes \Gamma^bW \otimes \Gamma^{-\chi(v)}W$. Dans un premier temps, on effectuera le produit tensoriel de $\Gamma^{a-\chi(u)}$ par Γ^bW en multipliant d'abord le premier de ces facteurs par une puissance $(\det W)^l$ suffisamment grande pour que le poids obtenu soit dans \mathbb{N}^r (c'est-à-dire $l \geq u_1$), en appliquant ensuite à ce poids et à b la règle de Littlewood-Richardson, et en multipliant enfin chacun des termes obtenus par $(\det W)^{-l}$. Une telle multiplication par une puissance du déterminant revient simplement à décaler de l unités l'origine des abscisses pour les tableaux de base $a - \chi(u) + l\mathbf{1}$. D'après la règle de Littlewood-Richardson, chaque facteur $\Gamma^{c-\chi(w)}W$ correspond donc à un b -tableau de base $a - \chi(u) + l\mathbf{1}$, de la forme suivante:



Les cases numérotées de ce tableau sont celles que l'on a hachurées: le poids a (respectivement $-\chi(u)$) correspond aux cases non hachurées situées à

droite (respectivement à gauche) de la ligne pointillée, qui est elle-même l'image du bord gauche du tableau par translation de l unités. Le poids \tilde{c} (respectivement $-\chi(\tilde{w})$) désignant, comme on l'a remarqué, la partie positive (respectivement négative) du poids total $\tilde{c} - \chi(\tilde{w})$ associé à ce tableau, correspond aux cases situées à droite (respectivement aux cases non hachurées situées à gauche) de la ligne pointillée. Le nombre total de cases numérotées étant égal, d'après la règle de Littlewood-Richardson, à $|b|$, on pourra donc écrire

$$|\tilde{c}| = |a| + b_+, \quad |\tilde{w}| = |u| - b_-, \quad \text{avec } |b| = b_+ + b_-,$$

b_+ et b_- désignant le nombre de cases hachurées situées respectivement à droite et à gauche de la ligne pointillée.

Reste à effectuer le produit tensoriel de $\Gamma^{\tilde{c}-\chi(\tilde{w})}W$ par $\Gamma^{-\chi(v)}W$: on montrerait de la même façon que, $\Gamma^{\tilde{c}-\chi(w)}W$ étant un facteur de ce produit, alors

$$|c| = |\tilde{c}| - v_-, \quad |w| = |\tilde{w}| + v_+, \quad \text{avec } |v| = v_+ + v_-.$$

D'où, finalement, $|c| = |a| + b_+ - v_- \leq |a| + |b|$, et $|w| = |u| - b_- + v_+ \leq |u| + |v|$.

2.1.2. Formules de déterminants

On peut déduire des formules (S) et (A) que chaque représentation irréductible de $GL(W)$ est combinaison linéaire, dans l'anneau de Grothendieck \mathcal{A}_r , de produits tensoriels de puissances symétriques ou extérieures de W ([13], p. 184).

PROPOSITION 1. *L'anneau de Grothendieck \mathcal{A}_r est engendré:*

1. *par les puissances extérieures $\wedge^k W$, $0 \leq k \leq r$, et $(\det W)^{-1}$, et l'on a la formule, si $a \in \mathbb{N}_{\geq}^r$, et pour tout entier $\alpha \geq a_1$,*

$$\Gamma^\alpha W = \det(\wedge^{a_i - i + j} W)_{1 \leq i, j \leq \alpha};$$

2. *par les puissances symétriques $S^k W$, $k \geq 0$, et $(\det W)^{-1}$, et l'on a la formule, si $a \in \mathbb{N}_{\geq}^r$, et pour tout entier $\beta \geq a_1^*$,*

$$\Gamma^\alpha W = \det(S^{a_i - i + j} W)_{1 \leq i, j \leq \beta}.$$

PREUVE. Démontrons par exemple la seconde de ces formules par récurrence sur β : si l'on développe le déterminant D considéré par rapport à sa dernière colonne, il vient

$$D = \bigoplus_{k=1}^{\beta} (-1)^{\beta+k} S^{a_k - k + \beta} W \otimes \Gamma^{\sum_{j=1}^{k-1} a_j \mathbf{1}_j + \sum_{j=k+1}^{\beta} (a_j - 1) \mathbf{1}_{j-1}} W,$$

ce qu'on peut écrire

$$D = \bigoplus_{k=1}^{\beta} (-1)^{\beta+k} \bigoplus_{d \in P_k(a)} \Gamma^d W,$$

où $P_k(a)$ est l'ensemble des r -uplets positifs décroissants d , de même module que a , et tels que $a_j \leq d_j \leq a_{j-1}$ si $1 \leq j < k$, $a_{k+1} - 1 \leq d_k \leq a_{k-1}$, et $a_{j+1} - 1 \leq d_j \leq a_j - 1$ si $k < j \leq r$. Mais $P_k(a) = Q_k(a) \cup Q_{k-1}(a)$, où $Q_k(a)$ est l'ensemble des r -uplets positifs décroissants d , de même module que a , tels que $a_j \leq d_j \leq a_{j-1}$ si $1 \leq j \leq k$ et $a_{j+1} - 1 \leq d_j \leq a_j - 1$ si $k < j \leq r$: donc

$$D = \bigoplus_{d \in Q_{\beta}(a)} \Gamma^d W \oplus (-1)^{\beta+1} \bigoplus_{d \in Q_0(a)} \Gamma^d W.$$

Mais $Q_0(a) = \emptyset$ et $Q_{\beta}(a) = \{a\}$, ce qui démontre la formule annoncée.

REMARQUE 1. La seconde de ces formules, dite *formule de Jacobi-Trudi* est l'analogue de la formule de Giambelli en calcul de Schubert ([9], de même que la formule de produit tensoriel (S) est à rapprocher de la formule de Pieri, qui explicite l'intersection d'un cycle de Schubert quelconque avec un cycle de Schubert "spécial"), ou de la formule qui définit les polynômes de Schur en fonction des classes de Chern usuelles d'un fibré vectoriel complexe.

On peut déduire des identités précédentes d'autres formules qui les généralisent, et expriment un $GL(W)$ -module irréductible comme un produit tensoriel de $GL(W)$ -modules qui ne sont pas simplement des puissances extérieures ou symétriques: ces formules nous seront utiles au Paragraphe 4. Rappelons tout d'abord un développement du déterminant qui remonte à Laplace ([2]):

LEMME 2. Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ une partition d'un entier ρ , avec $\mu_1, \dots, \mu_m \geq 1$. Soit $\Sigma_{\rho}(\mu) \subset \Sigma_{\rho}$ l'ensemble des permutations σ de $\{1, \dots, \rho\}$ telles que, si l'on note $\nu_i = \mu_1 + \dots + \mu_i$,

$$\sigma(\nu_{i-1} + 1) \leq \dots \leq \sigma(\nu_i), \quad \text{si } 1 \leq i \leq m.$$

Si $\sigma \in \Sigma_{\rho}(\mu)$, et si $A = (a_{i,j}) \in M_{\rho}(\mathcal{A})$, où \mathcal{A} est un anneau commutatif, soit

$$\Delta_{\mu}^{\sigma}(A) = \prod_{i=1}^m \det(a_{\nu_{i-1}+j, \sigma(\nu_{i-1}+k)})_{1 \leq j, k \leq \mu_i}.$$

Alors si $\epsilon(\sigma)$ est la parité de la permutation σ ,

$$\det A = \sum_{\sigma \in \Sigma_{\rho}(\mu)} \epsilon(\sigma) \Delta_{\mu}^{\sigma}(A).$$

COROLLAIRE 1. Soit $u \in \mathbb{N}^r$: alors si $s(u) = (0 = s_0 < \dots < s_m = u_1^*)$,

$$\Gamma^u W = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{u_1^*}} \epsilon(\sigma) \bigotimes_{i=1}^m \Gamma \sum_{k=1}^{s_i - s_{i-1}} (u_{s_i} + \sigma(s_i + 1 - k) - (s_i + 1 - k)) \mathbb{1}_k W.$$

PREUVE. Appliquons le lemme précédent à la matrice à coefficients dans l'anneau \mathcal{A} des représentations de $Gl(W)$, $A = (S^{u_i - i + j} W)_{1 \leq i, j \leq u_1^*}$, et à la partition $\mu_i = s_i - s_{i-1}$, $1 \leq i \leq m$, de u_1^* . Ici $\nu_i = s_i$, donc si $\sigma \in \Sigma_{u_1^*}(\mu)$,

$$\Delta_{\mu}^{\sigma}(A) = \prod_{i=1}^m \det(S^{u_{s_{i-1} + j(s_{i-1} + j) + \sigma(s_{i-1} + k)} W})_{1 \leq j, k \leq s_i - s_{i-1}},$$

$$\Delta_{\mu}^{\sigma}(A) = \prod_{i=1}^m \det(S^{u_{s_i - (s_{i-1} + j) + \sigma(s_{i-1} + k)} W})_{1 \leq j, k \leq s_i - s_{i-1}}.$$

Inversons complètement les lignes et les colonnes de chacune des matrices dont $\Delta_{\mu}^{\sigma}(A)$ est le produit des déterminants: il vient après transposition

$$\Delta_{\mu}^{\sigma}(A) = \prod_{i=1}^m \det(S^{u_{s_i} + \sigma(s_i + 1 - j) - (s_i + 1 - j) - j + k} W)_{1 \leq j, k \leq s_i - s_{i-1}},$$

donc d'après la Proposition 1,

$$\Gamma^u W = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{u_1^*}(\mu)} \epsilon(\sigma) \bigotimes_{i=1}^m \Gamma \sum_{k=1}^{s_i - s_{i-1}} (u_{s_i} + \sigma(s_i + 1 - k) - (s_i + 1 - k)) \mathbb{1}_k W,$$

et cette somme peut s'étendre à $\Sigma_{u_1^*}$ tout entier, puisque pour une permutation σ n'appartenant pas à $\Sigma_{u_1^*}(\mu)$, un facteur $\Gamma \sum_{k=1}^{s_i - s_{i-1}} (u_{s_i} + \sigma(s_i + 1 - k) - (s_i + 1 - k)) \mathbb{1}_k W$ au moins est nul.

2.2. - Variétés de drapeaux

2.2.1. Grassmanniennes et formule de Cauchy

Si V est un espace vectoriel complexe de dimension d , on notera $G_r(V)$ la grassmannienne des sous-espaces de codimension r de V : c'est une variété complexe compacte de dimension $n = r(d - r)$, quotient de l'espace $\text{Isom}(\mathbb{C}, V)$ des isomorphismes de \mathbb{C}^d sur V par l'action d'un sous-groupe parabolique de $Gl(\mathbb{C}^d)$. En particulier, l'action transitive du groupe linéaire $Gl(V)$ permet d'identifier le fibré tangent à la grassmannienne, au quotient du fibré trivial des endomorphismes de V par un sous-fibré W_r dont la fibre au-dessus d'un sous-espace V_r de codimension r de V , est l'espace des endomorphismes u de V tels que $u(V_r) \subset V_r$:

$$TG_r(V) \simeq \text{End}(V)/W_r.$$

Notons S le *fibré tautologique* sur $G_r(V)$ dont la fibre au-dessus de V_r est précisément ce sous-espace de V , et Q le *fibré quotient universel*, de rang r , quotient du fibré trivial $G_r(V) \times V$ par le fibré tautologique:

$$0 \rightarrow S \rightarrow G_r(V) \times V \rightarrow Q \rightarrow 0.$$

Le fibré $\text{End}(V)/W_r$ s'identifie alors naturellement à celui des homomorphismes de S dans Q :

$$TG_r(V) \simeq Q \otimes S^*.$$

Notons alors $\Omega_{G_r(V)}^p$ le fibré des p -formes holomorphes sur la grassmannienne, puissance extérieure p -ième du fibré cotangent: c'est donc une puissance extérieure d'un produit tensoriel de fibrés vectoriels holomorphes. Or la *formule de Cauchy*, que l'on peut démontrer par exemple au moyen des formules (S) et (\wedge) précédentes ([12], [17]), exprime précisément la décomposition d'une puissance extérieure d'un produit tensoriel d'espaces vectoriels complexes en termes de représentations associées à chacun de ces espaces. En l'occurrence, on obtient la décomposition holomorphe suivante:

$$\Omega_{G_r(V)}^p \simeq \bigoplus_{u \in \sigma_{r,d-r}^p} \Gamma^{-\chi(u)} Q \otimes \Gamma^{u^*} S,$$

où $\sigma_{r,d-r}^p$ est le sous-ensemble de \mathbb{N}_{\geq}^r formé des poids u de module p tels que $u_1 \leq d - r$, de façon à ce que u^* puisse être considéré comme un élément de \mathbb{N}_{\geq}^{d-r} .

2.2.2. Variétés de drapeaux générales

Les grassmanniennes $G_r(V)$ sont les plus simples des variétés de drapeaux de l'espace vectoriel complexe V : si $s = (s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_m = d)$, on notera $M_s(V)$ la variété des drapeaux D de la forme

$$D = (V_{s_m} = 0 \subset V_{s_{m-1}} \subset \dots \subset V_{s_0} = V), \quad \text{où } \text{codim}_V V_{s_i} = s_i.$$

C'est une variété complexe compacte de dimension

$$N_s = \sum_{i=1}^{m-1} s_i(s_{i+1} - s_i),$$

ce que l'on peut vérifier, par exemple, en la considérant comme un empilement de fibrés en grassmanniennes.

De même que pour les grassmanniennes, on peut associer à chaque élément ϕ de l'espace $\text{Isom}(\mathbb{C}^d, V)$, si l'on note ϕ_i , $1 \leq i \leq d$, les images des vecteurs de la base canonique de \mathbb{C}^d , le drapeau défini par

$$V_{s_i} = \text{Vect}(\phi_{s_{i+1}}, \dots, \phi_d).$$

Ceci permet d'identifier $M_s(V)$ au quotient de $\text{Isom}(\mathbb{C}^d, V)$ par l'action du groupe parabolique B_s de $Gl(\mathbb{C}^d)$ constitué des isomorphismes $u = (u_{jk})_{1 \leq j, k \leq d}$ de \mathbb{C}^d tels que $u_{jk} = 0$ s'il existe un entier i compris entre 1 et $m - 1$, pour lequel $j \leq s_i < k$.

En particulier, si $s_i = i$ pour i compris entre 0 et d , on obtient la variété des drapeaux complets $M(V)$, qui est le quotient de $\text{Isom}(\mathbb{C}^d, V)$ par l'action du sous-groupe de Borel de $Gl(\mathbb{C}^d)$ des matrices triangulaires inférieures inversibles.

L'action transitive de $Gl(V)$ sur $M_s(V)$ induit l'isomorphisme

$$TM_s(V) \simeq \text{End}(V)/W_s,$$

où W_s est le sous-fibré du fibré trivial des endomorphismes de V dont la fibre au-dessus du drapeau D est constituée des endomorphismes qui le laissent invariant. La forme de Killing $(g, h) \mapsto \text{trace}(gh)$ de l'algèbre de Lie semi-simple $\text{End}(V)$, étant non dégénérée, induit alors l'identification

$$T^*M_s(V) \simeq W_s^\perp,$$

et l'on vérifie que

$$W_{s,D}^\perp = \{g \in \text{End}(V), g(V_{s_{i-1}}) \subset V_{s_i}, 1 \leq i \leq m\}.$$

Notons alors E_i , $1 \leq i \leq m$, le fibré sur $M_s(V)$ dont la fibre au-dessus du drapeau D est le quotient $V_{s_{i-1}}/V_{s_i}$. Le fibré W_s^\perp admet une filtration par des fibrés \mathcal{F}_μ de la forme

$$\mathcal{F}_{\mu,D} = \{g \in \text{End}(V), g(V_{s_{i-1}}) \subset V_{s_{\mu(i)}}, 1 \leq i \leq m\},$$

filtration dont le quotient gradué associé est la somme

$$\mathcal{Q}_s = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq m} E_i^* \otimes E_j.$$

En conséquence, sa puissance extérieure p -ième admet de même une filtration, que l'on notera (\mathcal{F}^p) , dont le quotient est la puissance extérieure p -ième du quotient précédent, à savoir

$$\mathcal{Q}_s^p = \wedge^p \mathcal{Q}_s = \bigoplus_{\sum_{ij} p_{ij} = p} \bigotimes_{1 \leq i < j \leq m} \wedge^{p_{ij}} (E_i^* \otimes E_j);$$

ce que la formule de Cauchy permet finalement décrire

$$\mathcal{Q}_s^p = \bigoplus_{\sum_{ij} |u_{ij}| = p} \bigotimes_{1 \leq i < j \leq m} \Gamma^{-\chi(u_{ij})} E_i \otimes \Gamma^{u_{ij}} E_j.$$

Notons que pour que les fibrés $\Gamma^{-\chi(u_{ij})}E_i$ et $\Gamma^{u_{ij}}E_j$ soient tous deux non nuls, il faut que u_{ij} ait au plus $s_i - s_{i-1}$ composantes, inférieures ou égales à $s_j - s_{j-1}$. En particulier,

$$\sum_{i < j} |u_{ij}| \leq \sum_{i < j} (s_i - s_{i-1})(s_j - s_{j-1}) = N_s,$$

ce qui implique que pour $p = N_s$, $\mathcal{Q}_s^{N_s}$ se réduit à un unique terme correspondant à $u_{ij} = (s_j - s_{j-1})\mathbf{1}_{1, s_i - s_{i-1}}$: d'où l'on déduit l'isomorphisme

$$K_{M_s(V)} = \mathcal{Q}_s^{\kappa(s)},$$

où le poids $\kappa(s)$ du fibré canonique est donné par la formule

$$\kappa(s) = \sum_{i=1}^m (s_i + s_{i-1} - d)\mathbf{1}_{s_{i-1}+1, s_i}.$$

On utilisera la filtration (\mathcal{F}^p) de $\wedge^p T M_s(V)$ pour filtrer de la même manière le fibré $\Omega_{M_s(V)}^{N_s-p}$ des $(N_s - p)$ -formes holomorphes, selon l'isomorphisme

$$\Omega_{M_s(V)}^{N_s-p} = K_{M_s(V)} \otimes \wedge^p T M_s(V).$$

La cohomologie du quotient associé sera déterminée par le théorème de Bott.

2.2.3. Le théorème de Bott

Considérons sur la variétés de drapeaux $M_s(V)$, les fibrés en droites homogènes

$$Q_s^a = \bigotimes_{i=1}^m (\det E_i)^{a_{s_i}},$$

où $a \in \mathbb{Z}^d$ est un poids tel que $a_{s_{i-1}+1} = \dots = a_{s_i}$ si $1 \leq i \leq m$. Le fibré en droites Q_s^a est ample si et seulement si $a_{s_{i-1}} > a_{s_i}$, $1 \leq i \leq m$ ([4], on dira que a est alors strictement décroissant relativement à s), ce qui généralise d'ailleurs au cas des variétés de drapeaux quelconques, le plongement de Plücker des grassmanniennes. De plus, la cohomologie d'un tel fibré est donnée par un théorème dû à Bott ([1]), et dont Demazure a donné une preuve remarquablement simple ([7]):

THÉORÈME (Bott). Soit $a \in \mathbb{Z}^d$, soit $c(d) = (1, 2, \dots, d)$, et définissons le poids $\xi(a) = (a - c(d))^{\geq} + c(d)$, où $(a - c(d))^{\geq}$ est la suite décroissante d'entiers obtenue par permutation de la suite $a - c(d)$; alors si $i(a)$ est le nombre d'inversions strictes de $a - c(d)$,

$$H^q(M(V), Q^a) = \delta_{q, i(a)} \Gamma^{\xi(a)} V,$$

où δ désigne le symbole de Kronecker. En particulier, la cohomologie du fibré quotient Q^a n'est pas nulle si et seulement si les composantes de $a - c(d)$ sont deux à deux distinctes: on dira alors que le poids a est régulier.

On utilisera plutôt, dans ce qui suit, le théorème de Bott sous la forme suivante:

PROPOSITION 2. *Etant donnés des poids décroissants $a_i \in \mathbb{Z}^{s_i - s_{i-1}}$, $1 \leq i \leq m$, soit $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{Z}^d$. Alors*

$$H^q \left(M_s(V), \bigotimes_{i=1}^m \Gamma^{a_i} E_i \right) = \delta_{q,i(a)} \Gamma^{\xi(a)} V.$$

PREUVE. Considérons la projection naturelle $\pi_s: M(V) \rightarrow M_s(V)$, où $M(V)$ est la variété des drapeaux complets de $V: M(V) = M_t(V)$, avec $t_i = i$ si $0 \leq i \leq d$. L'image réciproque par π_s d'un drapeau $D = (0 = V_{s_0} \subset \dots \subset V_{s_0} = V)$ s'identifie au produit des variétés de drapeaux complets $M(V/V_{s_1}) \times M(V_{s_1}/V_{s_2}) \times \dots \times M(V_{s_{m-1}}/V_{s_m})$. De plus, la restriction du fibré $Q^a = Q_t^a$, défini sur $M(V)$, à la fibre $\pi_s^{-1}(D)$ de π_s s'identifie au produit des fibrés Q^{a_1} sur $M(V/V_{s_1}), \dots, Q^{a_m}$ sur $M(V_{s_{m-1}}/V_{s_m})$. Par conséquent, la formule de Kunneth implique que

$$H^q(\pi_s^{-1}(D), Q^a|_{\pi_s^{-1}(D)}) = \bigoplus_{q_1 + \dots + q_m = q} \bigotimes_{i=1}^m H^{q_i}(M(V_{s_{i-1}}/V_{s_i}), Q^{a_i}).$$

Mais chaque a_i étant décroissant, $H^{q_i}(M(V_{s_{i-1}}/V_{s_i}), Q^{a_i}) = \delta_{q_i,0} \Gamma^{a_i}(V_{s_{i-1}}/V_{s_i})$ d'après le théorème de Bott, de sorte que les fibrés images directes par π_s du fibré Q^a sur $M(V)$ sont donnés par

$$R^q_{\pi_s*} Q^a = \delta_{q,0} \bigotimes_{i=1}^m \Gamma^{a_i} E_i.$$

Il vient donc, encore d'après le théorème de Bott,

$$H^q \left(M_s(V), \bigotimes_{i=1}^m \Gamma^{a_i} E_i \right) = H^q(M(V), Q^a) = \delta_{q,i(a)} \Gamma^{\xi(a)} V.$$

Enfin, on déduira des propriétés cohomologiques du quotient de la filtration (\mathcal{F}^p) de $\wedge^p TM_s(V)$, telles que les détermine le théorème précédent, certaines propriétés cohomologiques de $\Omega_{M_s(V)}^{N_s - p}$ par l'intermédiaire du lemme usuel suivant:

LEMME 3. *Considérons une filtration (\mathcal{F}) d'un fibré \mathcal{E} sur une variété de drapeaux $M_s(V)$, et notons \mathcal{Q} le fibré quotient associé. Alors*

1. *Supposons que $H^q(M_s(V), \mathcal{Q}) = 0$ si $q \geq q_0$, alors $H^q(M_s(V), \mathcal{E}) = 0$ si $q \geq q_0$.*
2. *Supposons le fibré \mathcal{E} et la filtration (\mathcal{F}) équivariantes sous l'action de $Gl(V)$: ceci permet d'écrire*

$$\begin{cases} H^q(M_s(V), \mathcal{Q}) = \bigoplus_v \hat{\nu}(v, q) \Gamma^v V, \\ H^q(M_s(V), \mathcal{E}) = \bigoplus_v \nu(v, q) \Gamma^v V. \end{cases}$$

Alors si $\hat{\nu}(v, q) = 0$ lorsque $q \geq q_0(v)$, $\nu(v, q) = 0$ si $q \geq q_0(v)$.

3. *Avec les notations précédentes, $\sum_q (-1)^q \nu(v, q) = \sum_q (-1)^q \hat{\nu}(v, q)$.*

PREUVE.

1. Si $H^q(M_s(V), \mathcal{Q}) = 0$ pour $q \geq q_0$, notons $\mathcal{G}_i = \mathcal{F}_i / \mathcal{F}_{i+1}$ les quotients de la filtration (\mathcal{F}) , de sorte que $\mathcal{Q} = \bigoplus_i \mathcal{G}_i$. Alors $H^q(M_s(V), \mathcal{G}_i) = 0$ si $q \geq q_0$ pour tout entier i , de sorte que les suites exactes longues de cohomologie associées aux suites exactes

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_{i+1} \rightarrow \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{G}_i \rightarrow 0$$

impliquent par récurrence sur i que $H^q(M_s(V), \mathcal{F}_i) = 0$ si $q \geq q_0$ pour tout i . En particulier, comme $\mathcal{F}_0 = \mathcal{E}$, $H^q(M_s(V), \mathcal{E}) = 0$ si $q \geq q_0$.

2. Si \mathcal{E} et la filtration (\mathcal{F}) sont équivariantes sous l'action de $Gl(V)$, chaque groupe de cohomologie $H^q(M_s(V), \mathcal{F}_i)$ est un $Gl(V)$ -module, et le lemme de Schur permet de reproduire le raisonnement précédent pour chaque composante isotypique.
3. Notons $\nu(\mathcal{F}, v, q)$ la multiplicité de $\Gamma^v V$ dans $H^q(M_s(V), \mathcal{F})$. Alors, de même que la somme alternée des dimensions des groupes de cohomologie d'une suite exacte longue est nulle, le lemme de Schur implique ici que

$$\sum_q (-1)^q \nu(\mathcal{F}_i, v, q) = \sum_q (-1)^q \nu(\mathcal{F}_{i+1}, v, q) + \sum_q (-1)^q \nu(\mathcal{G}_i, v, q),$$

et la somme alternée $\sum_q (-1)^q \nu(v, q)$ peut par conséquent s'écrire,

$$\sum_q (-1)^q \nu(\mathcal{F}_0, v, q) = \sum_i \sum_q (-1)^q \nu(\mathcal{G}_i, v, q) = \sum_q (-1)^q \hat{\nu}(v, q).$$

2.3. - La suite spectrale de Borel-Le Potier

Soit X une variété complexe compacte de dimension n , munie d'un fibré vectoriel holomorphe E de rang d , et d'un fibré en droites L . A toute famille d'entiers $s = (0 = s_0 < \dots < s_m = d)$ peut être associée la variété $Y = M_s(V)$ des drapeaux de E : Y est une variété complexe compacte de dimension $n + N_s$,

munie d'une projection naturelle $\theta: Y \rightarrow X$ dont chaque fibre d'identifie à la variété des drapeaux incomplets "de forme s " de la fibre correspondante de E . Le fibré Ω_Y^p des p -formes holomorphes sur Y est alors filtré par les fibrés

$$F^{t,p} = \Omega_Y^{p-t} \wedge \theta^* \Omega_X^t, \quad 0 \leq t \leq p,$$

dont on notera $G^{t,p} = F^{t,p}/F^{t+1,p} = \Omega_{Y/X}^{p-t} \otimes \theta^* \Omega_X^t$ les quotients associés: $\Omega_{Y/X}^{p-t}$ désigne ici le fibré des $(p-t)$ -forme holomorphes "relatives" aux fibres de θ .

Si $c \in \mathbb{Z}^d$ est tel que $c_{s_{i-1}+1} = \dots = c_s$, si $1 \leq i \leq m$, on définit comme sur une variété de drapeaux d'un espace vectoriel complexe un fibré en droites canonique Q_s^c .

LEMME 4. *Supposons $c \in \mathbb{N}_{\geq}^d$ strictement décroissant relativement à s . Alors si E est ample et L nef, ou E nef et L ample, le fibré en droites $Q_s^c \otimes \theta^* L$ est ample sur $Y = M_s(E)$.*

PREUVE. Si E est ample, Q_s^c l'est aussi d'après [4], de même, a fortiori, que $Q_s^c \otimes \theta^* L$. Si E n'est que nef, on peut d'après [23] considérer un morphisme surjectif fini $\phi: Z \rightarrow X$ tel qu'il existe sur Z une racine $|c|$ -ième de L , autrement dit un fibré en droites M tel que

$$\phi^* L = M^{|c|}.$$

Ce fibré en droites est ample, de même que $\phi^* E \otimes M$. De plus, la variété $M_s(F)$, en tant que fibré au-dessus de Z , s'identifie à l'image réciproque par ϕ de $M_s(E)$, et l'image réciproque de $Q_s^c \otimes \theta^* L$ n'est alors autre que le fibré en droites de poids c sur $M_s(F)$ que l'on notera $Q_s^c(F)$. Ce fibré étant ample d'après la première partie de cette preuve, il en est donc bien de même de $Q_s^c \otimes \theta^* L$ sur $Y = M_s(E)$.

Notons que $\Omega_Y^p \otimes Q_s^c \otimes \theta^* L$ est lui-même muni d'une filtration $\mathcal{F}^{t,p} = F^{t,p} \otimes Q_s^c \otimes \theta^* L$, de quotients $\mathcal{G}^{t,p} = G^{t,p} \otimes Q_s^c \otimes \theta^* L$. Il existe donc ([10]) pour chaque entier p une suite spectrale dont les termes d'ordre un sont donnés par

$${}^p E_1^{t,q-t} = H^q(Y, \mathcal{G}^{t,p}),$$

et dont les groupes de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}(Y, Q_s^c \otimes \theta^* L)$ sont l'aboutissement: on appellera cette suite spectrale la *suite spectrale de Borel-Le Potier* d'ordre p associée à la projection $\theta: Y \rightarrow X$, et au fibré $Q_s^c \otimes \theta^* L$ sur Y ([19-20], [3]).

Les termes d'ordre un ${}^p E_1^{t,q-t}$ de cette suite spectrale sont eux mêmes l'aboutissement d'une suite spectrale de Leray de termes d'ordre deux

$$E_2^{i,j} = H^{t,i}(X, H^{p-t,j}(M_s(E), Q_s^c) \otimes L),$$

où l'on désigne par $H^{p-t,j}(M_s(E), Q_s^c)$ le fibré $R_{\theta_*}^j(\Omega_{Y/X}^{p-t} \otimes Q_s^c)$, autrement dit où l'on calcule la cohomologie de Dolbeault de Q_s^c sur chaque fibre: ce fibré image

directe admet une action équivariante de $Gl(E)$, donc s'identifie à une fibré associé sur X au fibré E . L'étude de la suite spectrale de Borel-Le Potier sur les variétés de drapeaux de fibrés vectoriels est donc très étroitement liée à celle de la cohomologie de Dolbeault des fibrés en droites canoniques sur les variétés de drapeaux d'un espace vectoriel complexe. On utilisera d'ailleurs ce lien dans un sens comme dans l'autre: on déduira bien sûr des propriétés de ces groupes de cohomologie de Dolbeault, différents théorèmes d'annulation pour les fibrés associés à des fibrés amples par exemple; mais, réciproquement, on déduira ces propriétés en partie du fait qu'elles ont pour conséquence certaines particularités de la suite spectrale de Borel-Le Potier, et que celle-ci doit par exemple être compatible avec le théorème d'annulation de Kodaira-Nakano lorsque $Q_s^c \otimes \theta^* L$ est ample (en particulier dans les conditions du lemme précédent). On aura besoin pour cela de "tester" cette suite spectrale sur des exemples calculables, qui feront l'objet du paragraphe suivant.

3. - Un exemple de non-annulation

On met en évidence, dans ce paragraphe, certains groupes de cohomologie non nuls de fibrés vectoriels amples sur des variétés de drapeaux. Ces groupes non nuls, étant de degré maximal, nous permettront d'obtenir différentes propriétés de certains groupes de cohomologie de Dolbeault de fibrés en droites homogènes sur d'autres variétés de drapeaux.

PROPOSITION 3. *Soit $v \in \mathbb{N}_{\geq}^d$. Alors si l et h sont des entiers compris entre 1 et $d - h(v)$, il existe une variété complexe compacte X_v , munie d'un fibré vectoriel nef E de rang d , et d'un fibré en droites ample L , qui pour chaque d -uplet $b \in \mathbb{N}_{\geq}^d$ tel que $h(b) \leq h$, vérifie les propriétés suivantes:*

1. $H^{n,q}(X_v, \Gamma^{b-\chi(v)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$ si et seulement si $q \neq |v|$.
2. $H^{n,q}(X_v, \Gamma^{b-\chi(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$ pour tout $q \geq 0$ si $|w| \leq |v|$ et $w \neq v$.

REMARQUE 2. L'hypothèse $h(b) \leq h \leq d - h(v)$ implique que les poids b et $-\chi(v)$ ont des composantes non nulles disjointes, donc constituent respectivement les parties positive et négative du poids $b - \chi(v)$.

PREUVE. Notons $s(v^*) = (0, s_1, \dots, s_m)$, et posons

$$\sigma = (0, d + s(v^*)) = (0, d, d + s_1, \dots, d + s_m).$$

Soit $X_v = M_\sigma(V)$, où V est un espace vectoriel complexe de dimension $d + s_m$, variété sur laquelle est défini le fibré vectoriel homogène, de rang d , $E = E_1$. Ce fibré est globalement engendré sur X_v puisque quotient d'un fibré trivial, donc est nef. On supposera de plus que $L = Q_\sigma^c$ est un fibré en droites homogène

ample sur X_v : autrement dit, le poids c est supposé strictement décroissant relativement à σ ; ses composantes seront précisées ultérieurement.

1. Appliquons le théorème de Bott au calcul des groupes

$$H^{n,q}(X_v, \Gamma^{b-\chi(v)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = H^q(M_\sigma(V), \Gamma^{b-\chi(v)} E \otimes (\det E)^l \otimes Q_\sigma^{c+\kappa(\sigma)}).$$

Le poids du fibré canonique $K_{M_\sigma(V)}$ est ici

$$\begin{aligned} \kappa(\sigma) &= -s_m \mathbf{1}_{1,d} + \sum_{i=1}^m (d + s_{i-1} + s_i - s_m) \mathbf{1}_{d+s_{i-1}+1, d+s_i} \\ &= -s_m \mathbf{1} + \sum_{i=1}^m (d + s_{i-1} + s_i) \mathbf{1}_{d+s_{i-1}+1, d+s_i}, \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$H^{n,q}(X_v, \Gamma^{b-\chi(v)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = H^q(M_\sigma(V), \bigotimes_{i=1}^{m+1} \Gamma^{b^i(v)} E_i) \otimes (\det V)^{-s_m},$$

avec $b(v) = (b^1(v), \dots, b^{m+1}(v)) = (b + l\mathbf{1} - \chi(v), 0, \dots, 0) + c + \kappa(\sigma) + s_m \mathbf{1}$. Comme b et $-\chi(v)$ ont des composantes non nulles disjointes, ce poids peut s'écrire

$$\begin{aligned} b(v) &= \left(\underbrace{b + (l + c_d) \mathbf{1}}_{h(b)}, \underbrace{l + c_d}_{d-h(b)-t_m}, \underbrace{l + c_d - v_{t_m}}_{t_m-t_{m-1}}, \dots, \underbrace{l + c_d - v_{t_1}}_{t_1}, \right. \\ &\quad \left. \underbrace{d + c_{d+s_1} + s_1}_{s_1}, \dots, \underbrace{d + c_{d+s_m} + s_{m-1} + s_m}_{s_m-s_{m-1}} \right), \end{aligned}$$

où l'on a noté $s(v) = (0, t_1, \dots, t_m)$. Remarquons (se reporter au Paragraphe 1.1.1 de la première partie) que $v_{t_i} = s_{m+1-i}$ et $v_{s_i}^* = t_{m+1-i}$, de sorte que si l'on pose

$$c_d - c_{d+s_i} = d - l + s_{i-1} + s_i - t_{m+1-i}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

c_d étant quelconque, alors

$$b(v) = (l + c_d) \mathbf{1} + \left(\underbrace{b}_{h(b)}, \underbrace{0}_{d-h(b)-t_m}, \underbrace{-s_1}_{t_m-t_{m-1}}, \dots, \underbrace{-s_m}_{t_1}, \underbrace{t_m}_{s_1}, \dots, \underbrace{t_1}_{s_m-s_{m-1}} \right).$$

On obtient donc pour $b(v) - (l + c_d - d)\mathbf{1} - c(d + s_m)$ l'expression suivante:

$$\left(\underbrace{b + d\mathbf{1} - c(h(b))}_{h(b)}, \underbrace{d - h(b) - 1, \dots, t_m}_{d-h(b)-t_m}, \right. \\ \left. \underbrace{t_m - s_1 - 1, \dots, t_{m-1} - s_1, \dots, t_1 - s_m - 1, \dots, -s_m}_{t_m-t_{m-1}}, \underbrace{\phantom{t_m - s_1 - 1, \dots, t_{m-1} - s_1, \dots, t_1 - s_m - 1, \dots, -s_m}}_{t_1} \right. \\ \left. \underbrace{t_m - 1, \dots, t_m - s_1, \dots, t_1 - s_{m-1} - 1, \dots, t_1 - s_m}_{s_1}, \underbrace{\phantom{t_m - 1, \dots, t_m - s_1, \dots, t_1 - s_{m-1} - 1, \dots, t_1 - s_m}}_{s_m-s_{m-1}} \right).$$

Les s_m dernières composantes de ce poids correspondent très précisément aux espaces laissés par ses $d - h(b)$ composantes précédentes: il est donc régulier, et contient $\sum_{i=1}^m (s_i - s_{i-1})t_{m+1-i}$, c'est-à-dire $|v|$ inversions. De plus, $\xi(b(v)) = b + (l + c_d)\mathbf{1}$, et le théorème de Bott, dans sa version du paragraphe précédent, implique que

$$H^{n,q}(X_v, \Gamma^{b-\chi(v)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = \delta_{q,|v|} \Gamma^b V \otimes (\det V)^{l+c_d-s_m}.$$

L'assertion 1 est donc démontrée, à condition de vérifier que L est ample, c'est-à-dire que c est strictement décroissant relativement à σ . Et l'on a bien

$$c_{d+s_i} - c_{d+s_{i+1}} = (t_{m+1-i} - t_{m-i}) + (s_{i+1} - s_{i-1}) > 0$$

si $i \geq 1$, et, si $l \leq d - h(v)$ (puisque $t_m = v_1^* = h(v)$),

$$c_d - c_{d+s_1} = d - 1 + s_1 - t_m \geq d - l + 1 - h(v) > 0.$$

2. Soit $w \in \mathbb{N}_{\geq}^d$ tel que $|w| \leq |v|$. On pourra écrire comme précédemment le poids $b(w) - (l - c_d - d)\mathbf{1} - c(d + s_m)$, où $b(w) = (b + l\mathbf{1} - \chi(w), 0, \dots, 0) + c + \kappa(\sigma) + s_m\mathbf{1}$, sous la forme

$$\left(\underbrace{b - c(h(b)) + d\mathbf{1}}_{h(b)}, \underbrace{d - h(b) - 1, \dots, w_1^*}_{d-h(b)-w_1^*}, \underbrace{w_1^* - 1 - w_{w_1^*}, \dots, -w_1}_{w_1^*}, \right. \\ \left. \underbrace{t_m - 1, \dots, t_m - s_1, \dots, t_1 - s_{m-1} - 1, \dots, t_1 - s_m}_{s_1}, \underbrace{\phantom{t_m - 1, \dots, t_m - s_1, \dots, t_1 - s_{m-1} - 1, \dots, t_1 - s_m}}_{s_m-s_{m-1}} \right).$$

Si ce poids est régulier, il contient nécessairement des inversions entre ses d premières composantes (dont certaines sont négatives) et ses s_m dernières composantes (dont certaines sont positives). En particulier, il doit exister un entier i tel que $i - w_{i+1} \geq t_m$. Mais alors a fortiori $i \geq t_m$, ce qui signifie qu'au moins t_m des d premières composantes admettent des inversions avec

les s_m dernières: ces composantes correspondent alors à certains espaces entre composantes successives du poids $(t_m - 1, \dots, t_1 - s_m)$. Or on a vu que les t_m premiers espaces de ce poids correspondent exactement à ceux qui sont comblés lorsque $w = v$. Une récurrence immédiate implique donc ici, si $b(w) - c(d + s_m)$ est régulier, que $w_i \geq v_i$ pour tout entier i compris entre 1 et $t_m = v_1^*$. Mais alors $|w| > |v|$ si w est distinct de v .

PROPOSITION 4. *Sous les mêmes hypothèses que pour la proposition précédente, si $n + |v| - 20 \leq p < n$ et $d - h(b) \geq h(v) + n - p$, alors*

$$H^{p,q}(X_v, \Gamma^{b-\chi(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$$

si $p + q \geq n + |w|$, où $w \in \mathbb{N}_{\geq}^d$ est tel que $h(b) + h(w) \leq d$.

PREUVE. Soit $p < n$, et posons $\pi = n - p$, de sorte que

$$\begin{aligned} H^{p,q}(X_v, \Gamma^{b-\chi(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) \\ = H^q(X_v, \Gamma^{b-\chi(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes Q_\sigma^{c+\kappa(\sigma)} \otimes \wedge^\pi TX_v). \end{aligned}$$

Soit \mathcal{G} l'un des produits tensoriels du quotient de la filtration (\mathcal{F}^π) de $\wedge^\pi TX_v$:

$$\mathcal{G} = \bigotimes_{1 \leq i < j \leq m+1} \Gamma^{u_{ij}^*} E_i \otimes \Gamma^{-\chi(u_{ij})} E_j,$$

où chaque u_{ij} est un poids positif décroissant, et $\sum_{1 \leq i < j \leq m+1} |u_{ij}| = \pi$.

Notons de plus $\Gamma^{\beta+l\mathbf{1}} E \otimes \Gamma^\gamma E_2 \otimes \dots \otimes \Gamma^{\gamma^{m+1}} E_{m+1}$ une composante de $\Gamma^{b-\chi(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes \mathcal{G}$. Les produits tensoriels sur E, E_2, \dots, E_{m+1} s'effectuant séparément, $\Gamma^\beta E$ est donc une composante de $\Gamma^{b-\chi(w)} E \otimes (\otimes_{j=2}^{m+1} \Gamma^{u_{ij}^*} E)$: chacun des poids u_{ij}^* étant positif, le Lemme 1 implique que la partie négative de β soit plus petite que celle de $b - \chi(w)$. Autrement dit, si l'on écrit

$$\beta = \left(\underbrace{\tilde{\beta}}_{\tilde{h}}, \underbrace{-\chi(\tilde{w})}_{d-\tilde{h}} \right),$$

où $\tilde{\beta}$ et \tilde{w} sont positifs et $\tilde{h} = h(\tilde{\beta})$, alors pour tout entier i compris entre 1 et $d - \tilde{h}$, on a $0 \leq \tilde{w}_i \leq w_i$ (et de la même façon, $\tilde{\beta}_j \geq b_j$), donc en particulier $|\tilde{w}| \leq |w|$. Notons γ le poids $(\gamma^2, \dots, \gamma^{m+1})$; le poids $(\beta + l\mathbf{1}, \gamma) + c + \kappa(\sigma) + s_m \mathbf{1}$ se déduit alors de $b(v)$ en changeant b en $\tilde{\beta}$ et w en \tilde{w} pour ce qui est de ses d premières composantes, et en ajoutant γ à ses s_m dernières composantes: on obtient ainsi l'expression

$$(l + c_d)\mathbf{1} + \left(\underbrace{\tilde{\beta}}_{\tilde{h}}, \underbrace{0}_{d-\tilde{h}-\tilde{w}_1^*}, \tilde{w}_{\tilde{w}_1^*}, \dots, -\tilde{w}_1, t_m + \gamma_1, \dots, t_1 + \gamma_{s_m} \right).$$

On en déduit, en tenant compte des identités $t_i = v_{s_{m+1}-i}^*$, l'expression suivante du poids $\theta = (\beta + l\mathbf{1}, \gamma) + c + \kappa(\sigma) - (l + c_d - d - s_m)\mathbf{1} - c(d + s_m)$:

$$\theta = (\tilde{\beta} + d\mathbf{1} - c(\tilde{h}), d - \tilde{h} - 1, \dots, \tilde{w}_1^*, \tilde{w}_1^* - 1 - \tilde{w}_{\tilde{w}_1^*}, \dots, -\tilde{w}_1, v_1^* + \gamma_1 - 1, \dots, v_{s_m}^* + \gamma_{s_m} s_m).$$

LEMME 5. Si $d - h \geq h(v) + \pi$, alors pour tout entier i compris entre 1 et s_m ,

$$d - \tilde{h} > v_i^* + \gamma_i - i.$$

PREUVE. Rappelons que $\Gamma^{\tilde{\beta}-\chi(\tilde{w})}E \otimes \Gamma^{\gamma^2}E_2 \otimes \dots \otimes \Gamma^{\gamma^{m+1}}E_{m+1}$ est une composante de $\Gamma^{b-\chi(w)}E \otimes \left(\otimes_{1 \leq i < j \leq m+1} \Gamma^{u_{ij}^*}E_i \otimes \Gamma^{-\chi(u_{ij})}E_j \right)$. Or, d'après le Lemme 1, la somme des composantes de la partie positive (respectivement négative) d'un produit tensoriel est majorée par la somme des composantes des parties positives (respectivement négatives) des poids de chacun des termes de ce produit: en l'occurrence,

$$|\tilde{\beta}| + \sum_{i=1}^{s_m} \gamma_i^+ \leq |b| + \sum_{i < j} |u_{ij}^*| = |b| + \pi,$$

où l'on a noté $\gamma_i^+ = \max(\gamma_i, 0)$. D'autre part, les inégalités $\tilde{\beta}_j \geq b_j$ impliquent que $\tilde{h} - h(b)$ ne peut excéder $|\tilde{\beta}| - |b|$. Par conséquent, pour tout entier i compris entre 1 et s_m ,

$$\tilde{h} - h(b) + \gamma_i \leq |\tilde{\beta}| - |b| + \gamma_i^+ \leq \pi,$$

et, a fortiori, si $d - h(b) \geq h(v) + \pi$,

$$d - \tilde{h} - \gamma_i \geq d - h(b) - \pi \geq h(v) = v_1^* > v_i^* - i.$$

Ce lemme implique que le poids θ , étant supposé régulier, ne présente aucune inversion faisant intervenir ses \tilde{h} premières composantes. Pour estimer le nombre de ses inversions, il suffira donc de distinguer celles qui se produisent entre ses s_m dernières composantes et les $d - \tilde{h}$ précédentes, que l'on appellera *inversions relatives*, et celles qui ont lieu à l'intérieur du groupe de ses s_m dernières composantes, que l'on appellera *inversions internes*.

LEMME 6. Le nombre des inversions relatives est inférieur à $|w|$.

PREUVE. Ecrivons les $d - \tilde{h}$ composantes de $-\chi(\tilde{w})$ sous la forme

$$\left(\underbrace{0}_{x_0}, \underbrace{-1}_{x_1}, \dots, \underbrace{-\mu}_{x_\mu} \right).$$

On obtient alors pour les $d - \tilde{h} + s_m$ dernières composantes de θ , qui sont désormais les seules à nous intéresser, l'expression

$$(y_0 - 1, \dots, y_i - i + 1, y_i - i - 1, \dots, y_{\mu+1} - \mu, v_1^* + \gamma_1 - 1, \dots, v_{s_m} + \gamma_{s_m} - s_m),$$

où l'on a posé $y_i = x_i + \dots + x_\mu$. Si ce poids provient d'un poids régulier et admet des inversions relatives, il existe donc des entiers i_1, \dots, i_ρ , et une application injective ϕ de $\{1, \dots, \rho\}$ dans $\{1, \dots, \mu\}$, telle que $1 \leq k \leq \rho$,

$$v_{i_k}^* + \gamma_{i_k} - i_k = y_{\phi(k)} - \phi(k).$$

Le nombre d'inversions relatives impliquant $v_{i_k}^* + \gamma_{i_k}$ est alors $y_{\phi(k)}$, et le nombre d'inversions total est par conséquent

$$\sum_k y_{\phi(k)} \leq \sum_{i=1}^\mu y_i = |\tilde{w}| \leq |w|.$$

LEMME 7. Si $\pi > 0$, et $\pi + |v| \leq 20$ ou $\pi \leq 10$, le nombre des inversions internes est strictement inférieure à π .

PREUVE. Le lecteur courageux pourra se reporter à l'appendice pour la (pénible) démonstration de ce lemme essentiel.

CONCLUSION. D'après les deux lemmes qui précèdent et le théorème de Bott, chaque facteur \mathcal{G} du quotient de la filtration (\mathcal{F}^π) de $\wedge^\pi TX_v$ vérifie, si $n + |v| - 20 \leq p < n$ et $d - h \geq h(v) + \pi$,

$$H^q(X_v, \Gamma^{b-\chi(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes Q_\sigma^{c+\kappa(\sigma)} \otimes \mathcal{G}) = 0$$

si $q \geq |w| + \pi$; le Lemme 3 implique donc que

$$H^{p,q}(X_v, \Gamma^{b-\chi(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$$

sous les conditions de la Proposition 4, qui est donc démontrée.

4. - Cohomologie de Dolbeault des fibrés en droites sur les variétés de drapeaux

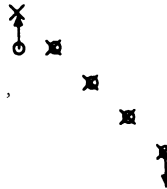
Soient $a, u \in \mathbb{N}_{\geq 1}^d$, avec $h(a) + h(u) \leq d$. Le premier objectif de ce paragraphe est de démontrer que si $d - h(a)$ est suffisamment grand, et si $l \geq h(a) + u_1$, il existe une variété de drapeaux $M_s(V)$ d'un espace vectoriel complexe de dimension d , et un fibré en droites Q_s^c ample sur cette variété, tels que la cohomologie de $\Omega_{M_s(V)}^p \otimes Q_s^c$ s'annule en degré p strictement supérieur à une valeur pour laquelle cette cohomologie fait précisément apparaître le $Gl(V)$ -module $\Gamma^{a-\chi(u)} V \otimes (\det V)^l$: c'est dans ce type de situation que la suite spectrale de Borel-Le Potier sera la plus commode à utiliser.

Supposons, pour donner une idée de ce qui va suivre, que $u = \mathbf{1}_1$, et que $M_s(V)$ et le poids c soient définis de telle manière que le poids $c + \kappa(s)$ soit

égal à $a + l\mathbf{1} - \mathbf{1}_{h(a)+1}$. Pour calculer les groupes de cohomologie

$$H^{p,q}(M_s(V), Q_s^c) = H^q(M_s(V), Q_s^{c+\kappa(s)} \otimes \wedge^{n-p} TM_s(V)),$$

il s'agira, d'après le théorème de Bott et la filtration (\mathcal{F}^{n-p}) de $\wedge^{n-p} TM_s(V)$, de considérer les sommes régulières du poids $c + \kappa(s) - c(d)$ et des poids des différents facteurs du quotient de cette filtration. En l'occurrence, les $d - h(a)$ dernières composantes de $c + \kappa(s) - c(d) = a + l\mathbf{1} - \mathbf{1}_{h(a)+1} - c(d)$ peuvent être retréprésentées selon le schéma suivant (où elles le sont par des \circ , alors que celles de $l\mathbf{1} - c(d)$ le sont par des \times , avec en l'occurrence $d - h(a) = 5$):



Celles d'indices $h(a) + 1$ et $h(a) + 2$ étant égales, le théorème de Bott implique que les groupes de cohomologie $H^{n,q}(M_s(V), Q_s^c)$ sont nuls. En degré $p = n - 1$, on devra ajouter au poids $c + \kappa(s) - c(d)$, d'après la forme du quotient de la filtration (\mathcal{F}^1) de $TM_s(V)$, des poids de la forme $\mathbf{1}_{s_i+1} - \mathbf{1}_{s_{j+1}}$, avec $i < j$. Le seul d'entre eux qui permette d'obtenir un poids régulier est $\mathbf{1}_{h(a)+1} - \mathbf{1}_d$, le poids associé étant $a + l\mathbf{1} - \mathbf{1}_d$, sans qu'aucune inversion ait été créée: on a donc démontré que

$$H^{n-1,q}(M_s(V), Q_s^c) = \delta_{q,0} \Gamma^{a-1_d} V \otimes (\det V)^l.$$

Pour généraliser ce type de résultat au cas d'un poids u quelconque, on devra faire face à deux difficultés. D'une part, les différents facteurs du quotient de la filtration (\mathcal{F}^{n-p}) de $\wedge^{n-p} TM_s(V)$ peuvent contribuer pour différentes valeurs de q : on utilisera les résultats de la section précédente pour démontrer que leur contribution totale est nulle en degré $q > 0$. D'autre part, pour déterminer cette contribution totale en degré $q = 0$, on devra recombinaer les contributions de ces différents facteurs: c'est alors le corollaire 1 qui permettra d'aboutir.

Soient donc $a, u \in \mathbb{N}_{\geq}^d$ des poids tels que $d - h(a) \geq u_1 + u_1^*$ (ce qui implique, comme $u_1^* = h(u)$, que $h(a) + h(u) \leq d$). Si l'on note respectivement $s(a) = (\rho_0 = 0, \dots, \rho_{m-1} = h(a), \rho_m = d)$ et $s(-\chi(u^*)) = (\sigma_0 = 0, \dots, \sigma_p = u_1)$, on

peut alors poser

$$\begin{aligned}
 s &= (s_0 = 0, s_1 = \rho_1, \dots, s_{m-1} = h(a), \\
 &\quad s_m = h(a) + \sigma_1, \dots, s_{m+p-1} = h(a) + \sigma_p, s_{m+p} = d), \\
 c &= a + l\mathbf{1} - \delta_{d-h(a)-u_1} \chi(u^*) - \kappa(s),
 \end{aligned}$$

où δ_t est l'opérateur de translation de t unités à gauche: cette dernière expression généralise celle que l'on a tenté de justifier pour $u = \mathbf{1}_1$, et l'on a $s = s(c)$.

LEMME 8. c est strictement décroissant relativement à s , et sa dernière composante c_d est positive ou nulle si et seulement si $l \geq h(a) + u_1$.

PREUVE. Le poids $\kappa(s)$ est de la forme

$$\left(\underbrace{\dots}_{h(a)}, \underbrace{2h(a) + \sigma_1 - d}_{\sigma_1}, \dots, \underbrace{2h(a) + \sigma_{p-1} + \sigma_p - d}_{\sigma_p - \sigma_{p-1}}, \underbrace{h(a) + \sigma_p}_{d - h(a) - \sigma_p} \right);$$

en particulier, il est croissant, et strictement croissant relativement à s . De plus, $a - \delta_{d-h(a)-u_1} \chi(u^*)$ peut être scindé en deux parties décroissantes, celles de ses $h(a) + u_1$ premières et de ses $d - h(a) - u_1$ dernières composantes, de sorte que les deux parties correspondantes de c sont strictement décroissantes relativement à s . Reste à vérifier que la première domine strictement la seconde, ce qui équivaut à l'inégalité.

$$c_{h(a)+u_1} = l - u_1^* - (2h(a) + \sigma_{p-1} + \sigma_p - d) > c_{h(a)+u_1+1} = l - (h(a) + u_1).$$

Comme $\sigma_{p-1} < \sigma_p = u_1$, cette inégalité est conséquence de l'hypothèse $d - h(a) \geq u_1 + u_1^*$. Enfin, $c_d = c_{h(a)+u_1+1} = l - h(a) - u_1$.

PROPOSITION 5. Supposons que $d - h(a) \geq |u| + u_1 + u_1^*$. Alors si V est un espace vectoriel complexe de dimension d ,

1. $H^{p,q}(M_s(V), Q_s^c) = 0$ si $p > N_s - |u|$, $q \geq 0$,
2. $H^{N_s - |u|, q}(M_s(V), Q_s^c) = 0$ si $q > 0$,
3. $H^{N_s - |u|, 0}(M_s(V), Q_s^c) = \Gamma^{a - \chi(u)} V \otimes (\det V)^l$.

PREUVE.

1. Posons $\pi = n - p$: on peut alors écrire

$$H^{p,q}(M_s(V), Q_s^c) = H^q \left(M_s(V), Q_s^{a - \delta_{d-h(a)-u_1} \chi(u^*)} \otimes \wedge^\pi T M_s(V) \right) \otimes (\det V)^l.$$

Considérons donc une composante Γ d'un produit tensoriel \mathcal{G} du quotient de la filtration (\mathcal{F}^π) de $\wedge^\pi TM_s(V)$, que l'on peut écrire sous la forme

$$\mathcal{G} = \bigotimes_{1 \leq i < j \leq m+1} \Gamma^{u_i^*} E_i \otimes \Gamma^{-\chi(u_{ij})} E_j,$$

$$\Gamma = \left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} \Gamma^{\gamma^i} E_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{j=1}^p \Gamma^{\phi^j} E_{m+j-1} \right) \otimes \Gamma^{-\chi(\xi)} E_{m+p}.$$

Notons γ (respectivement ϕ) le poids $(\gamma^1, \dots, \gamma^{m-1})$ (respectivement (ϕ^1, \dots, ϕ^p) , et $a(\gamma, \phi, \xi) = a - \delta_{d-h(a)-u_1} \chi(u^*) - c(d) + (\gamma, \phi, -\chi(\xi))$. Le théorème de Bott et le Lemme 3 impliquent, si la cohomologie de $\Omega_{M_s(V)}^p \otimes Q_s^c$ n'est pas identiquement nulle, qu'un au moins des poids $a(\gamma, \phi, \xi)$ doit être régulier. Les deux remarques suivantes impliquent que ce ne peut être le cas si $\pi < |u|$:

REMARQUES. Supposons que $a(\gamma, \phi, \xi)$ ne comprenne pas d'inversion entre ses composantes correspondant aux poids ϕ (c'est-à-dire à $-\delta_{d-h(a)-u_1} \chi(u^*)$) et $-\chi(\xi)$. Le poids ξ est décroissant: si sa dernière composante était non nulle (c'est-à-dire sa $(d - h(a)u_1)$ -ième composante, puisque, c'est le rang de E_{m+p}), on aurait $|\xi| \geq d - h(a) - u_1$. Mais $\Gamma^{-\chi(\xi)} E_{m+p}$ provenant du produit tensoriel $\bigotimes_{i=1}^{m+p-1} \Gamma^{-\chi(u_{i,m+p})} E_{m+p}$,

$$|\xi| = \sum_{i=1}^{m+p-1} |u_{i,m+p}| \leq \sum_{i < j} |u_{i,j}| = \pi < |u|.$$

On aurait donc $d - h(a) - u_1 < |u|$, ce qui est contraire à l'hypothèse $d - h(a) \geq |u| + u_1 + u_1^*$.

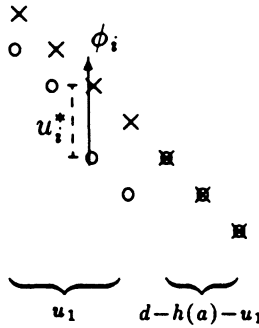
Si $a(\gamma, \phi, \xi)$ est régulier, ses composantes d'indices compris entre $h(a) + 1$ et $h(a) + u_1$ doivent donc être strictement supérieures à la $(h(a) + u_1 + 1)$ -ième composante de $-c(d)$. Comme elles doivent de plus être distinctes, la i -ème selon l'ordre croissant doit dépasser cette composante d'au moins i unités: par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{u_1} (-c(d)_{h(a)+u_1+1} + i) \leq \sum_{j=h(a)+1}^{h(a)+u_1} a(\gamma, \phi, \xi)_j$$

$$= -|u| + |\phi| + \sum_{i=1}^{u_1} (-c(d)_{h(a)+u_1+1-i}),$$

soit encore $|\phi| \geq |u|$. Mais si l'on note ϕ^+ (respectivement ϕ^-) le poids formé des composantes positives (respectivement de l'opposé des composantes négatives) de ϕ , alors $|\phi| = |\phi^+| - |\phi^-|$, et le Lemme 1 implique que $|\phi| \leq |\phi^+| \leq \pi$. Le poids $a(\gamma, \phi, \xi)$ ne peut donc être régulier si $\pi < |u|$. On a représenté ci-dessous la position relative des $d - h(a)$ dernières composantes de $a(\gamma, \phi, \xi)$, représentées par

des \circ , alors que celles de $-c(d)$ le sont par des \times (en l'occurrence, $u^* = (2, 2, 1, 1)$ et $u = (4, 2)$):



REMARQUE 3. Notons au passage que si $|u| = \pi$, $a(\gamma, \phi, \xi)$ ne peut être régulier que si toutes les composantes de ϕ sont positives, et de somme égale à π . Les composantes positives de γ sont alors nécessairement nulles, donc a fortiori ses composantes négatives également, puisque d'après la forme du produit tensoriel définissant \mathcal{G} , l'existence d'une composante strictement négative de γ impliquerait celle d'une composante strictement positive d'indice inférieur.

Supposons maintenant que $a(\gamma, \phi, \xi)$ comprenne au moins une inversion entre ses composantes correspondant aux poids ϕ et $-\chi(\xi)$. Supposons qu'une de ces inversions ait lieu entre des composantes d'indices respectifs $h(a) + i$ et $d - j$, avec $1 \leq i \leq u_1$ et $j \geq 0$. On aurait donc

$$a(\gamma, \phi, \xi)_{h(a)+i} < a(\gamma, \phi, \xi)_{d-j}.$$

Mais de même, comme on l'a noté plus haut, que la première composante de $-\chi(\xi)$ est nulle si $\pi < |u| \leq d - h(a) - u_1$, les $(d - h(a) - u_1 - |\xi|)$ premières composantes de ce poids doivent également être nulles, ce qui implique que les $a(\gamma, \phi, \xi)_m$, pour m compris entre $h(a) + u_1 + 1$ et $d - |\xi|$, forment une suite consécutive d'entiers. Le poids $a(\gamma, \phi, \xi)$ étant supposé régulier, on peut donc supposer $d - j \geq d - |\xi|$, d'où

$$a(\gamma, \phi, \xi)_{h(a)+i} < -(d - |\xi|).$$

Or $a(\gamma, \phi, \xi)_{h(a)+i} = -u_{u_1+1-i}^* - (h(a) + i) + \phi_i$, avec $\phi_i \geq -(\pi - |\xi|)$ puisque, encore d'après le Lemme 1, la somme des composantes négatives de γ et de ϕ doit être inférieure à $\pi - |\xi|$. Donc

$$a(\gamma, \phi, \xi)_{h(a)+i} \geq -h(a) - u_1 - u_1^* - \pi + |\xi|,$$

et les deux inégalités qui précèdent sont contradictoires lorsque $\pi \leq |u| \leq d - h(a) - u_1 - u_1^*$. Le poids $\alpha(\gamma, \phi, \xi)$ ne peut donc, sous l'hypothèse faite, être régulier si $\pi < |u|$.

2. Supposons que $\pi = |u|$. D'après la remarque précédente, si les groupes de cohomologie $H^q(M_s(V), Q_s^{a-\delta_d-h(a)-u_1\chi(u^*)} \otimes \Gamma)$ ne sont pas tous nuls, il faut que Γ soit de la forme

$$\Gamma = \bigotimes_{j=1}^p \Gamma^{\phi^j} E_{m+j-1} \bigotimes \Gamma^{-\chi(\xi)} E_{m+p},$$

les poids ϕ^1, \dots, ϕ^p étant positifs, et tels que $\sum_{i=1}^p |\phi^i| = |\xi| = \pi = |u|$. De plus, le poids $\alpha(0, \phi, \xi)$ ne peut présenter d'inversion entre ϕ_1, \dots, ϕ_p d'une part, et $-\chi(\xi)$ d'autre part: au contraire, les poids ϕ^1, \dots, ϕ^p doivent compenser le terme en $-\chi(u^*)$ de c , ce pour quoi leurs modules sont tout juste suffisants. Ceci implique qu'il est possible d'écrire le groupe de cohomologie de Dolbeault de bidegré $(N_s - |u|, q)$ de Q_s^c sous la forme

$$H^{N_s-|u|,q}(M_s(V), Q_s^c) = \bigoplus_{|v|=|u|} \nu(v, q) \Gamma^{a-\chi(v)} V \otimes (\det V)^l.$$

Les poids ϕ^1, \dots, ϕ^p étant susceptibles de faire apparaître entre eux des inversions, les multiplicités $\nu(v, q)$ sont a priori non nulles pour $q > 0$. La Proposition 3 permet cependant de démontrer le résultat suivant:

LEMME 9. Pour tout poids $v \in \mathbb{N}_{\geq}^d$, $\nu(v, q) = 0$ si $q > 0$.

PREUVE. Soit en effet $v \in \mathbb{N}_{\geq}^d$ tel que $|v| = |u|$. D'après la Proposition 3, il existe si l est compris entre 1 et $d - h(v)$ une variété complexe compacte X_v de dimension n , un fibré vectoriel nef E de rang d , et un fibré en droites L ample sur X_v , tels que

$$H^{n,q}(X_v, \Gamma^{a-\chi(v)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si et seulement si } q \neq |v|,$$

$$H^{n,q}(X_v, \Gamma^{a-\chi(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \forall q \geq 0 \text{ si } |w| \leq |u| \text{ et } w \neq v.$$

Considérons la suite spectrale de Borel-Le Potier d'ordre $P = n + N_s - |u|$ associée à la projection $\theta : Y = M_s(E) \rightarrow X_v$, et au fibré en droites $Q_s^c \otimes \theta^* L$ sur Y . Les seuls termes éventuellement non nuls de cette suite spectrale sont les groupes

$${}^P E_1^{n,q-n} = H^q(Y, \mathcal{G}^{n,P}) = H^{P,q}(Y, Q_s^c \otimes \theta^* L),$$

puisque l'on a vérifié que les groupes de cohomologie relatifs $H^{p,q}(M_s(E), Q_s^c)$ étaient nuls en degré $p > N_s - |u|$: elle dégénère donc en E_1 . De plus, ${}^P E_1^{n,q-n}$ est l'aboutissement d'une suite spectrale de Leray dont le terme d'ordre deux s'écrit

$$E_2^{i,j} = H^{n,i}(X_v, H^{N_s-|u|,j}(M_s(E), Q_s^c) \otimes L),$$

c'est-à-dire, d'après l'identité qui précède,

$$E_2^{i,j} = \bigoplus_{|w|=|u|} \nu(w, j) H^{n,i}(X_v, \Gamma^{a-\chi(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L).$$

D'après la Proposition 3, on a donc $E_2^{i,j} = \delta_{i,|u|} \nu(v, j) H$; avec $H \neq 0$, ce qui implique que la suite spectrale de Leray dégénère en E_2 , et

$${}^P E_1^{n,q-n} = \nu(v, q - |u|) H.$$

Mais les multiplicités $\nu(w, q)$ ne dépendant pas de l , on peut supposer que l soit compris entre $h(a) + u_1$ et $d - |u| \leq d - h(v)$: alors $Q_s^c \otimes \theta^* L$ est ample d'après les Lemmes 4 et 5, et le théorème d'annulation de Kodaira-Nakano implique que

$${}^P E_1^{n,q-n} = H^{P,q}(Y, Q_s^c \otimes \theta^* L) = 0$$

si $q > |u|$. Donc $\nu(v, q) = 0$ si $q > 0$.

3. Reste à préciser $H^{N_s, -|u|, 0}(M_s(V), Q_s^c)$. Considérons donc à nouveau les produits tensoriels du quotient de la filtration (\mathcal{F}^π) de $\wedge^\pi T M_s(V)$ qui sont susceptibles de contribuer à ce groupe, c'est-à-dire de la forme

$$\mathcal{G}(\phi^1, \dots, \phi^p) = \left(\bigotimes_{i=1}^p \Gamma^{\phi^i} E_{m+i-1} \right) \otimes \left(\bigotimes_{j=1}^p \Gamma^{-\chi(\phi^j)} E_{m+p} \right),$$

avec $\sum_{i=1}^p |\phi^i| = |u|$. Soit $\Gamma^{-\chi(\xi)} E_{m+p}$ une composante de $\bigotimes_{j=1}^p \Gamma^{-\chi(\phi^j)} E_{m+p}$. On a vu que, si $a(0, \phi, \xi)$ est régulier, le poids $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^p)$ devait compenser le terme en $-\chi(u^*)$ de c : leurs modules sont juste suffisants à ce que les composantes de $-\delta_{d-h(a)-u_1} \chi(u^*) - c(d) + \phi$ d'indices compris entre $h(a) + 1$ et $h(a) + u_1$ prennent les valeurs de celles de $-c(d)$ de mêmes indices. Mais elles peuvent le faire dans n'importe quel ordre: $a(0, \phi, \xi)$ est donc régulier si et seulement si il existe une permutation $\sigma \in \Sigma_{u_1}$ telle que pour j compris entre 1 et u_1 ,

$$(-\delta_{d-h(a)-u_1} \chi(u^*) - c(d))_{h(a)+\sigma^{-1}(j)} + \phi_{\sigma^{-1}(j)} = -c(d)_{h(a)+u_1+1} + j,$$

c'est-à-dire

$$-u_{u_1+1-j}^* + \phi_j = \sigma(j) - j.$$

Dans ces conditions, le théorème de Bott associe au poids $a(0, \phi, \xi)$ le $Gl(V)$ -module $\Gamma^{a-\chi(\xi)} V \otimes (\det V)^l$, et cela en degré $q = i(\sigma)$. En conséquence,

$$H^q(M_s(V), Q_s^{c+\kappa(\xi)}) \otimes \mathcal{G}(\phi^1, \dots, \phi^p) = \delta_{q, i(\sigma)} \bigotimes_{\xi} m(\phi; \xi) \Gamma^{a-\chi(\xi)} V \otimes (\det V)^l,$$

où $m(\phi; \xi)$ est la multiplicité de $\Gamma^{-\chi(\xi)}E_{m+p}$ dans $\otimes_{j=1}^p \Gamma^{-\chi(\phi^j)}E_{m+p}$. De plus, la dernière partie du Lemme 3 implique que la somme alternée, dans l'anneau de Grothendieck des représentations de $Gl(V)$, de tous les $Gl(V)$ -modules ainsi obtenus,

$$\bigoplus_q (-1)^q H^q \left(M_s(V), \bigoplus_{|\phi|=|u|} \mathcal{G}(\phi^1, \dots, \phi^p) \otimes Q_s^{c+\kappa(s)} \right)$$

coïncide avec la somme alternée $\bigoplus_q (-1)^q H^{N_s-|u|,q}(M_s(V), Q_s^c)$, autrement dit, d'après la proposition précédente, avec $H^{N_s-|u|,0}(M_s(V), Q_s^c)$. Il vient

$$H^{N_s-|u|,0}(M_s(V), Q_s^c) = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{u_1}} (-1)^{i(\sigma)} \bigoplus_{\xi} m(\phi; \xi) \Gamma^{\alpha-\chi(\xi)} V \otimes (\det V)^l.$$

Remarquons que par symétrie, si W est un espace vectoriel complexe de dimension $d - h(a) - u_1$,

$$\bigotimes_{j=1}^p \Gamma^{\phi^j} W = \bigoplus_{\xi} m(\phi; \xi) \Gamma^{\xi^*} W.$$

Par conséquent,

$$H^{N_s-|u|,0}(M_s(V), Q_s^c) = \bigoplus_{\xi} \mu(\xi) \Gamma^{\alpha-\chi(\xi)} V \otimes (\det V)^l,$$

où les multiplicités $\mu(\xi)$ sont définies par l'identité, d'après les relations liant les poids ϕ et les permutations σ ,

$$\bigoplus_{\xi} \mu(\xi) \Gamma^{\xi^*} W = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{u_1}} (-1)^{i(\sigma)} \otimes_{k=1}^p \Gamma^{\sum_{i=\sigma_p-\sigma_k+1}^{\sigma_p-\sigma_k-1} (u_{\sigma_k}^* + \sigma(j)-j) \mathbf{1}_{j-\sigma_p+\sigma_k} W}.$$

Mais le corollaire 1 implique alors que $\mu(\xi) = 0$ si $\xi \neq u$, et que $\mu(u) = 1$. On obtient donc finalement

$$H^{N_s-|u|,0}(M_s(V), Q_s^c) = \Gamma^{\alpha-\chi(u)} V \otimes (\det V)^l,$$

et la proposition est démontrée.

Les groupes de cohomologie $H^{N_s-|u|-\pi,q}(M_s(V), Q_s^c)$ semblent, pour $\pi > 0$, d'un calcul plus délicat encore que pour $\pi = 0$. On pourra cependant les écrire a priori sous la forme

$$H^{N_s-|u|-\pi,q}(M_s(V), Q_s^c) = \bigoplus_{\substack{b, v \in \mathbb{N}_s^d, \\ h(b)+h(v) \leq d}} \nu_{\pi}(b, v, q) \Gamma^{b-\chi(v)} V \otimes (\det V)^l.$$

Cette écriture permet simplement de distinguer les parties positive et négative des poids supérieurs des différentes composantes du $GL(V)$ -module $H^{N_s - |u| - \pi, q}(M_s(V), Q_s^c)$. Notons que les multiplicités $\nu_\pi(b, v, q)$ sont indépendantes de l . Les deux propositions qui suivent sont consacrées à différentes propriétés de ces multiplicités.

PROPOSITION 6. *Supposons que $d - h(a) \geq |u| + u_1 + u_1^* + \pi$. Alors si les multiplicités $\nu_\pi(b, v, q)$ ne sont pas toutes nulles lorsque q varie, les poids b et v possèdent les propriétés suivantes:*

- (a) $|u| \leq |v| \leq |u| + \pi,$
- (b) $h(b) \leq h(a) + \min(\pi, u_1),$
- (c) $h(b) + v_1 \leq h(a) + u_1 + \pi.$

PREUVE. Considérons, comme pour la proposition précédente, un poids $a(\gamma, \phi, \xi)$ auquel le théorème de Bott associe une composante $\Gamma^{b - \chi(v)}V \otimes (\det V)^l$ d'un groupe de cohomologie de $\Omega_{M_s(V)}^{N_s - |u| - \pi} \otimes Q_s^c$. L'hypothèse $d - h(a) \geq |u| + u_1 + u_1^* + \pi$ implique, comme on l'a vérifié dans la preuve de cette proposition, que les $d - h(a) - u_1$ dernières composantes de $a(\gamma, \phi, \xi)$ ne participent à aucune inversion de ce poids. De plus, la dernière composante du poids ξ est nécessairement nulle, et, $a(\gamma, \phi, \xi)$ étant supposé régulier, ceci implique, pour que le terme en $-\chi(u^*)$ de c puisse être compensé, que la somme des composantes de ϕ soit au moins égale à $|u|$. Mais d'après la forme du produit tensoriel dont provient $a(\gamma, \phi, \xi)$, la somme des composantes de ϕ est inférieure à celle des composantes de ξ , puisque celles-ci proviennent en partie des composantes de ϕ , et en partie de celles de γ . De plus, comme ces composantes ne participent à aucune inversion, les $d - h(a) - u_1$ premières composantes de v sont précisément celles de ξ , donc

$$|v| \geq |\xi| \geq |\phi| \geq |u|.$$

De plus, la dernière composante de ξ étant nulle, et comme v correspond à la partie négative de $b - \chi(v)$, on a $v = \xi$, et le Lemme 1 implique que

$$|v| = |\xi| \leq |u| + \pi.$$

Il est de plus clair que $h(b) \leq h(a) + u_1$, puisqu'au poids γ correspondent $d - h(a) - u_1$ composantes négatives ou nulles du poids $b - \chi(v)$. Le Lemme 1 implique également que la somme des composantes de ϕ (qui doivent être positives) soit au plus égale à $|u| + \pi$: une partie de cette somme, égale à $|u|$, doit compenser le terme en $-\chi(u^*)$ du poids c ; parmi les composantes de $a(\gamma, \phi, \xi)$ d'indices compris entre $h(a) + 1$ et $h(a) + u_1$, au moins $(u_1 - |\phi| + |u|)^+$ correspondent donc à des composantes nulles de $b - \chi(v)$, donc

$$h(b) \leq h(a) + |\phi| - |u| \leq h(a) + \pi.$$

Plus précisément encore, $v_1 = \xi_1$ étant donné, la forme du produit tensoriel auquel est associé le poids $a(\gamma, \phi, \xi)$, à savoir

$$\mathcal{G} = \bigotimes_{i < j} \Gamma^{u_i^*} E_i \otimes \Gamma^{-\chi(u_j)} E_j,$$

implique que $\sum_{i=1}^{m-1} |u_{i,m+p}| \geq \xi_1 - u_1$. En effet, la règle de Littlewood-Richardson implique que si $\Gamma^g W$ est une composante de $\Gamma^e W \otimes \Gamma^f W$, W étant un espace vectoriel complexe de dimension quelconque, l'on ait $g_1 \leq e_1 + f_1$: en l'occurrence, la somme des rangs des fibrés E_m, \dots, E_{m+p-1} est égale à u_1 , qui majore donc la somme des premières composantes des poids $u_{i,m+p}$ pour i compris entre m et $m+p-1$. Par symétrie, la dernière composante d'un poids du produit tensoriel $\bigotimes_{i=m}^{m+p-1} \Gamma^{-\chi(u_{i,m+p})} E_{m+p}$ est donc au moins égale à $-u_1$, et la somme des composantes des poids $u_{i,m+p}$, pour i compris entre 1 et $m-1$, doit donc être au moins égale à $\xi_1 - u_1$. A fortiori, il en est de même de la somme de leurs modules.

Comme $\sum_{j>i} |u_{ij}| = |u| + \pi$, il vient $|\phi| \leq \sum_{i=1}^{m+p-1} \sum_{j>i} |u_{ij}| \leq |u| + \pi + u_1 - \xi_1$. D'où

$$h(b) \leq h(a) + |\phi| - |u| \leq h(a) + \pi + u_1 - v_1,$$

et la proposition est démontrée.

PROPOSITION 7. Si $d - h(a) \leq |u| + u_1 + u_1^* + \pi$, si $|u| + \pi \leq 20$ ou $\pi \leq 10$, et si les poids b et v vérifient les inégalités de la proposition précédente,

$$\nu_\pi(b, v, q) = 0 \quad \text{si } q > |u| + \pi - |v|.$$

PREUVE. On procédera par récurrence sur π et récurrence descendante sur $|v|$.

Pour $\pi = 0$, on sait que $\nu_0(b, v, q) = \delta_{b,a} \nu(v, q)$ (on l'on considère un poids v de même module que u), donc d'après la proposition précédente $\nu_0(b, v, q) = 0$ si $q > 0$ et $d - h(a) \geq |u| + u_1 + u_1^*$.

Supposons maintenant π strictement positif, et que la proposition ait été démontrée pour les multiplicités d'indice strictement inférieur à π , et pour les multiplicités d'indice π des poids w tels que $|w| > |v|$. D'après la Proposition 3, il existe une variété complexe compacte X_v , un fibré nef E de rang d et un fibré en droites ample L sur X_v tels que si $1 \leq l \leq d - |u| - \pi$ (cette inégalité impliquant $l \leq d - h(v)$ d'après la Proposition 6), si $b \in \mathbb{N}_{\geq}^d$ et $h(b) \leq h = h(a) + \min(u_1, \pi)$, on ait

$$H^{n,i}(X_v, \Gamma^{b-\chi(v)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = \delta_{i,|v|} H(b), \quad \text{avec } H(b) \neq 0.$$

$$H^{n,i}(X_v, \Gamma^{b-\chi(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si } i \geq 0, |w| \leq |v| \text{ et } w \neq v,$$

et, si $n - \max(10, 20 - |v|) \leq p < n$ et $d - h \geq h(v) + n - p$,

$$H^{p,i}(X_v, \Gamma^{b-\chi(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$$

dès que $i \geq |w| + n - p$. Considérons donc la suite spectrale de Borel-Le Potier d'ordre $P = n + N_s - |u| - \pi$ associée à la projection $\theta: Y = M_s(E) \rightarrow X_v$ et au fibré en droites $Q_s^c \otimes \theta^* L$ sur Y . Son terme d'ordre un ${}^P E_1^{n-\tau, q-n+\tau}$ est l'aboutissement d'une suite spectrale de Leray dont on notera le terme d'ordre deux

$${}^\tau E_2^{i,j} = H^{n-\tau,i}(X_v, H^{N_s-|u|-\pi+\tau,j}(M_s(E), Q_s^c) \otimes L).$$

D'après la Proposition 6, chaque composante de $H^{N_s-|u|-\pi+\tau,j}(M_s(E), Q_s^c)$ peut s'écrire sous la forme $\Gamma^{b-\chi(w)} E \otimes (\det E)^l$, avec $h(b) \leq h(a) + \min(u_1, \pi - \tau) \leq h$ et $|u| \leq |w| \leq |u| + \pi - \tau$. Il vient

$${}^\tau E_2^{i,j} = \bigoplus_{b,w} \nu_{\pi-\tau}(b, w, j) H^{n-\tau,i}(X_v, \Gamma^{b-\chi(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L).$$

D'autre part, l'hypothèse $|u| + \pi \leq 20$ ou $\pi \leq 10$ implique $|v| + \tau \leq 20$ ou $\tau \leq 10$, et l'inégalité $d - h(b) \geq \tau + |v|$ est conséquence de la minoration

$$d - h(a) \geq |u| + u_1 + \pi \geq \tau + (|u| + \pi - \tau) + \min(u_1, \pi - \tau).$$

On peut donc appliquer la Proposition 4, selon laquelle

$$H^{n-\tau,i}(X_v, \Gamma^{b-\chi(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si } i \geq \tau + |w|,$$

Si $0 < \tau \leq \pi$, l'hypothèse de récurrence donne de plus

$$\nu_{\pi-\tau}(b, w, j) = 0 \quad \text{si } j > |u| + \pi - \tau - |w|.$$

On obtient ainsi

$${}^\tau E_2^{i,j} = 0 \quad \text{si } j > |u| + \pi - \tau - |w| \text{ ou } i > |w| + \tau - 1,$$

donc ${}^P E_1^{n-\tau, q-n+\tau} = 0$ si $q \geq |u| + \pi$. Or les seuls morphismes éventuellement non nuls de la suite spectrale de Borel-Le Potier qui en impliquent les termes de bidegré $(n, q - n)$ sont les

$${}^P d_r^{n-\tau, q-n+\tau-1}; {}^P E_r^{n-\tau, q-n+\tau-1} \rightarrow {}^P E_r^{n, q-n}.$$

Mais ${}^P E_r^{n-\tau, q-n+\tau-1}$, qui provient de ${}^P E_1^{n-\tau, q-n+\tau-1}$, est nul pour tout entier $\tau \geq 1$ dès que $q > |u| + \pi$, de sorte que sous cette hypothèse, ${}^P E_1^{n, q-n} = {}^P E_\infty^{n, q-n}$ est un quotient d'une filtration de $H^{P,q}(Y, Q_s^c \otimes \pi^* L)$. Si $l \geq h(a) + u_1$, d'après le Lemme 5 et le théorème d'annulation de Kodaira-Nakano, ${}^P E_1^{n, q-n}$ est donc nul dès que $q > |u| + \pi$.

D'autre part, toujours d'après les propriétés cohomologiques de X_v, E et L ,

$${}^0 E_2^{i,j} = \delta_{i,|v|} \bigoplus_b \nu_\pi(b, v, j) H(b) \bigoplus_{b, |w| > |v|} \nu_\pi(b, w, j) H^{n,i}(X_v, \Gamma^{b-\chi(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L).$$

Par hypothèse, le terme de la seconde de ces sommes correspondant au poids w est nul si $j > |u| + \pi - |w|$ ou $i > |w|$, donc en particulier si $i + j > |u| + \pi$. Les morphismes de la suite spectrale de Leray

$$d_m^{j|v|,j} : {}^0 E_m^{j|v|,j} \rightarrow {}^0 E_m^{j|v|+m, j+1-m}$$

sont donc nuls pour tout $m \geq 2$ dès que $j > |u| + \pi - |v| - 1$. De même, les morphismes

$$d_m^{j|v|-m, j+m-1} : {}^0 E_m^{j|v|-m, j+m-1} \rightarrow {}^0 E_m^{j|v|, j}$$

sont nuls si l'on a $j + m - 1 > |u| + \pi - |w|$ dès que $|w| > |v|$, donc pour tout $m \geq 2$ dès que $j > |u| + \pi - |v| - 2$. Sous ce hypothèses,

$${}^0 E_2^{j|v|, j} = \bigoplus_b \nu_\pi(b, v, j) H(b) = {}^0 E_\infty^{j|v|, j}$$

est un quotient d'une filtration de ${}^P E_1^{n, |v|+j-n}$, qui s'annule si $|v| + j > |u| + \pi$. Par conséquent,

$$\nu_\pi(b, v, j) = 0 \quad \text{si } j > |u| + \pi - |v|,$$

et la proposition est démontrée.

5. - Théorèmes d'annulation

Nous sommes à présent en mesure de démontrer nos théorèmes d'annulation pour la cohomologie des fibrés amples.

5.1. - Cas de degré n et $n - 1$

Considérons une variété complexe compacte X de dimension n , E un fibré vectoriel holomorphe de rang d et L un fibré en droites holomorphe sur X . Soient $a, u \in \mathbb{N}_{\geq}^d$ tels que $d - h(a) \geq |u| + u_1 + u_1^*$. Alors la Proposition 5 implique que la suite spectrale de Borel-Le Potier d'ordre $P = n + N_s - |u|$ associée à la projection $\theta: Y = M_s(E) \rightarrow X$, et au fibré en droites $Q_s^c \otimes \theta^* L$ sur Y , où s et c sont définis comme au paragraphe précédent, admet pour termes d'ordre un les groupes

$${}^P E_1^{n, q-n} = H^{n, q}(X, \Gamma^{a-\chi(u)} E \otimes (\det E)^l \otimes L),$$

alors que ${}^P E_1^{p, q-p} = 0$ si $p \neq n$. Cette suite spectrale dégénère donc en E_1 , et l'on obtient ainsi la généralisation suivante d'un théorème d'isomorphisme de Demailly ([4], 3.10), qui généralisait lui-même le théorème d'isomorphisme de Griffiths ([11]):

THÉORÈME 1. *Sous les hypothèses précédentes,*

$$H^{n,q}(X, \Gamma^{\alpha-\chi(u)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = H^{n+N_s-|u|,q}(M_s(E), Q_s^c \otimes \theta^* L).$$

Si E est ample (respectivement nef) et L nef (respectivement ample), les Lemmes 4 et 8 impliquent que $Q_s^c \otimes \theta^* L$ est ample dès que $l \geq h(a) + u_1$. On peut donc déduire du théorème d'annulation de Kodaira-Nakano que

$$H^{n,q}(X, \Gamma^{\alpha-\chi(u)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si } l \geq h(a) + u_1, \quad q > |u|,$$

et $d - h(a) \geq |u| + u_1 + u_1^*$. Mais cette condition sur d est superflue: en effet (je dois cette remarque à Jean-Pierre Demailly), si E est nef de rang d , le fibré $E_\delta = E \otimes \mathcal{O}_X^{\oplus \delta}$ est nef de rang $d + \delta$. Si δ est assez grand, on pourra donc appliquer le résultat qui précède à E_δ et à L . Le fibré $\Gamma^{\alpha-\chi(u)} E \otimes (\det E)^l$ étant une composante de $\Gamma^{\alpha-\chi(u)} E_\delta \otimes (\det E_\delta)^l$, sa cohomologie de Dolbeault s'annule sous les mêmes conditions.

Si l'on suppose seulement que L est nef, et E ample, on sait que $\det E$ est ample, et que $S^k E \otimes (\det E)^{-1}$ l'est également si k est suffisamment grand. Fixons un tel entier k : il existe alors ([23]) un morphisme surjectif fini $\phi: Z \rightarrow X$ tel que Z admette un fibré en droites M vérifiant

$$\phi^*(\det E) = M^k.$$

Ce fibré en droites est ample, de même que $F = \phi^* E \otimes M^{-1}$ et $\lambda = \phi^* L \otimes M^{|a|-|u|+ld}$: d'après ce qui précède, F étant nef a fortiori,

$$H^{n,q}(Z, \Gamma^{\alpha-\chi(u)} F \otimes (\det F)^l \otimes \lambda) = 0 \quad \text{si } l \geq h(a) + u_1, \quad q > |u|.$$

Or ce groupe de cohomologie coïncide avec $H^{n,q}(Z, \phi^*(\Gamma^{\alpha-\chi(u)} E \otimes (\det E)^l \otimes L))$, et, le morphisme ϕ étant fini, sa nullité implique celle de $H^{n,q}(X, \Gamma^{\alpha-\chi(u)} E \otimes (\det E)^l \otimes L)$, en vertu du lemme suivant:

LEMME 10. *Soit $\phi: Z \rightarrow X$ un morphisme surjectif fini de variétés complexes compactes, et F un fibré sur X . Alors le morphisme*

$$\phi^*: H^{p,q}(X, F) \rightarrow H^{p,q}(Z, \phi^* F)$$

est injectif.

PREUVE. Considérons un élément de $H^{p,q}(X, F)$, que représente une forme u de classe C^∞ , à valeurs dans F . Si son image par ϕ^* est nulle, il existe une forme v sur Z , à valeurs dans $\phi^* F$, telle que $\phi^* u = d'' v$. Considérons ces formes comme des courants, et prenons leurs images par ϕ_* : il vient, si ν est le nombre de feuillettes de ϕ ,

$$\phi_* \phi^* u = \nu u = \phi_*(d'' v) = d''(\phi_* v).$$

La classe de u est donc nulle pour la cohomologie des courants: et celle-ci coïncide avec la cohomologie des formes.

On obtient donc la généralisation suivante de la première partie du théorème de Demailly:

THÉORÈME 2. Soient E un fibré de rang d , et L un fibré en droites sur une variété complexe compacte X de dimension n , et supposons E ample et L nef, ou E nef et L ample. Alors

$$H^{n,q}(X, \Gamma^{\alpha-\chi(u)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si } l \geq h(a) + u_1 \text{ et } q > |u|.$$

REMARQUE 4. Dans le cas où $a = 0$ et $l = u_1$, on obtient, si l'on pose $v = u_1 \mathbf{1} - \chi(u)$,

$$H^{n,q}(X, \Gamma^v E \otimes L) = 0 \quad \text{si } q > dv_1 - |v|.$$

Notons que le fibré $\Gamma^v E$ est, d'après la règle de Littlewood-Richardson, une composante du produit tensoriel $\wedge^{k_1} E \otimes \dots \otimes \wedge^{k_m} E$ si et seulement si $|v| = k_1 + \dots + k_m$, et $v_i^* + \dots + v_i^* \geq k_1 + \dots + k_i$ pour tout entier i . Or ceci implique que $m \geq v_1$, et l'on peut donc écrire le résultat précédent sous la forme

$$H^{n,q}(X, \wedge^{k_1} E \otimes \dots \otimes \wedge^{k_m} E \otimes L) = 0 \quad \text{si } q > \sum_{i=1}^m (d - k_i).$$

On retrouve ainsi la généralisation du théorème de Le Potier qu'ont donnée Ein et Lazarsfeld ([8]), et que le Théorème 5 permettra d'étendre en degré p suffisamment proche de n sous la forme

$$H^{p,q}(X, \wedge^{k_1} E \otimes \dots \otimes \wedge^{k_m} E \otimes (\det E)^{n-p} \otimes L) = 0 \quad \text{si } p + q > n + \sum_{i=1}^m (d - k_i).$$

REMARQUE 5. Pour ce qui est des puissance symétriques du fibré E , le Théorème 2, et son cas particulier de la remarque précédente, impliquent que

$$H^{n,q}(X, S^k E \otimes L) = 0 \quad \text{si } q > k(d - 1).$$

Il est facile de voir que ceci tient encore en bidegré quelconque, au sens où

$$H^{p,q}(X, S^k E \otimes L) = 0 \quad \text{si } p + q > n + k(d - 1).$$

Donnons même un énoncé plus général:

THÉORÈME 3. Si E est ample et L nef, ou E nef et L ample, et si $a \in \mathbb{N}_{\geq}^d$, on a

$$H^{p,q}(X, \Gamma^a E \otimes L) = 0 \quad \text{si } p + q > n + \sum_{i=1}^d (d + 1 - 2i)a_i.$$

PREUVE. Notons $r_1 = a_1^*, \dots, r_m = a_m^*$, les composantes non nulles du poids dual de a , et considérons la variété $Y = G_{r_1}(E) \times \dots \times G_{r_m}(E)$, produit fibré au-dessus de X de grassmanniennes du fibré vectoriel E : Y est une variété complexe de dimension $n + \sum_{i=1}^m r_i(d - r_i)$, munie d'une projection π sur X qui est le produit des projections π_i des grassmanniennes $G_{r_i}(E)$ sur X .

Notons λ_i le déterminant du fibré quotient sur $G_{r_i}(E)$: on sait que ce fibré, sur chacune des fibres de π_i , n'a de cohomologie qu'en bidegré $(0, 0)$, pour lequel on obtient la puissance extérieure d'ordre r_i de cette fibre. Considérons alors sur Y le fibré en droites

$$\mathcal{L} = \pi_1^* \lambda_1 \otimes \dots \otimes \pi_m^* \lambda_m \otimes \pi^* L.$$

Ce fibré est ample, et, d'après ce qui précède et la formule de Künneth,

$$H^{p,q}(Y, \mathcal{L}) = H^{p,q}(X, \wedge^{r_1} E \otimes \dots \otimes \wedge^{r_m} E \otimes L).$$

Le théorème de Kodaira-Nakano implique alors l'annulation du membre de droite de cette identité pour $p + q > \dim Y$. Mais le nombre d'entiers r_i égaux à j étant $a_j - a_{j+1}$, on a

$$\dim Y = n + \sum_{j=1}^d (a_j - a_{j+1})j(d - j) = n + \sum_{i=1}^d (d + 1 - 2i)a_i.$$

Comme, d'après la remarque précédente, $\Gamma^\alpha E$ est une composante de $\wedge^{r_1} E \otimes \dots \otimes \wedge^{r_m} E$, le Théorème 3 est donc démontré.

Notons d'ailleurs que ce théorème est optimal. Soit en effet $G_d(V)$ la grassmannienne des sous-espaces de codimension d d'un espace vectoriel complexe V de dimension $dl + |a|$, avec $l > 0$, et Q le fibré quotient sur cette grassmannienne: c'est un fibré nef, puisque quotient d'un fibré trivial, et son fibré déterminant est ample. Or on peut vérifier, par exemple à l'aide des méthodes de diagrammes introduites par Snow ([28]), que

$$H^{p,q}(G_d(V), \Gamma^\alpha Q \otimes (\det Q)^l) = \det V \neq 0$$

si $p = d \frac{l(l-1)}{2} + \sum_{i=1}^d (d+1-i)a_i = q + d(l-1) + |a|$, donc, $G_d(V)$ étant de dimension $n = d(d(l-1) + |a|)$, en bidegré tel que

$$p + q = n + \sum_{i=1}^d (d+1-2i)a_i.$$

Pour revenir aux puissances symétriques, Le Potier, Peternell et Schneider ([23]) ont remarqué que si E est un fibré vectoriel globalement engendré, et F un fibré, de rang quelconque, tels que

$$H^q(X, S^k E \otimes F) = 0 \quad \text{si } q \geq q_0 \text{ et } 0 \leq k \leq k_0,$$

il en était nécessairement de même pour $q \geq \max(q_0, n - k_0)$ et k quelconque. En appliquant ceci à $F = \Omega_X^p \otimes L$ et $q_0 = n - p + k_0(d - 1) + 1$, il vient:

COROLLAIRE 2. *Si E est un fibré vectoriel de rang d , globalement engendré, et L un fibré en droites ample sur une variété complexe compacte X de dimension n , alors*

$$H^{p,q}(X, S^k E \otimes L) = 0 \quad \text{si } q > d(n - p), \quad k \geq 0.$$

Nous allons maintenant utiliser le Théorème d'isomorphisme 1 pour étendre au bidegré $(n - 1, q)$ la deuxième partie du théorème de Demailly.

THÉORÈME 4. *Soient E un fibré de rang d , L un fibré en droites, sur une variété complexe compacte X de dimension n . Supposons E ample et L nef, ou E nef et L ample. Alors si $a \in \mathbb{N}_{\geq}^d$, et $p \geq n - 1$,*

$$H^{p,q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si } l \geq h(a) + \min(n - p, n - q) \text{ et } p + q > n.$$

PREUVE. Si $u = 0$, le poids c et la suite s introduits au Paragraphe 4 sont simplement

$$s = s(a) \quad \text{et} \quad c = a - \kappa(s(a)).$$

Les Propositions 5, 6 et 7 impliquent que si $d - h(a) \geq 1$, les groupes de cohomologie de Dolbeault relatifs de bidegré $(N_{s(a)}, q)$ et $(N_{s(a)} - 1, q)$ de $Q_{s(a)}^c$ sur $M_{s(a)}(E)$ peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} H^{N_{s(a)},q}(M_{s(a)}(E), Q_{s(a)}^c) &= \delta_{q,0} \Gamma^a E \otimes (\det E)^l, \\ H^{N_{s(a)}-1,q}(M_{s(a)}(E), Q_{s(a)}^c) &= \bigoplus_{h(b) \leq h(a)} \delta_{q,0} \lambda(b) \Gamma^{b-1_a} E \otimes (\det E)^l \\ &\quad \bigoplus_{h(b) \leq h(a)} (\delta_{q,0} \mu(b) + \delta_{q,1} \nu(b)) \Gamma^b E \otimes (\det E)^l. \end{aligned}$$

En fait, la première des ces identités est une application triviale du théorème de Bott. Pour ce qui est de la seconde, les groupes de cohomologie $H^{N_{s(a)}-1,q}(M_{s(a)}(E), Q_{s(a)}^c)$ se calculent en considérant les poids

$$c + \kappa(s(a)) + \mathbf{1}_{s_i+1} - \mathbf{1}_{s_j} = a + \mathbf{1}_{s_i+1} - \mathbf{1}_{s_j}, \quad i < j.$$

Les poids a étant évidemment strictement décroissant relativement à $s(a)$, il est clair qu'un tel poids, s'il est régulier, ne peut être que décroissant. En distinguant les poids pour lesquels $s_j = d$ ou $s_j \leq h(a)$, on peut donc en fait écrire

$$H^{N_{s(a)}-1,q}(M_{s(a)}(E), Q_{s(a)}^c) = \delta_{q,0} \bigoplus_{h(b) \leq h(a)} (\lambda(b) \Gamma^{b-1_a} E \otimes \mu(b) \Gamma^b E) \otimes (\det E)^l.$$

Considérons alors la suite spectrale de Borel-Le Potier d'ordre $P = n + N_{s(a)} - 1$ associée à θ et au fibré $Q_{s(a)}^c \otimes \theta^* L$ sur Y . D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}
 {}^P E_1^{n-1, q-n+1} &= H^{n-1, q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l \otimes L), \\
 {}^P E_1^{n, q-n+1} &= \bigoplus_{h(b) \leq h(a)} H^{n, q+1}(X, (\lambda(b)\Gamma^{b-1_d} E \oplus \mu(b)\Gamma^b E) \otimes (\det E)^l \otimes L),
 \end{aligned}$$

alors que ${}^P E_1^{p, q-p} = 0$ si p est distinct de n et $n - 1$. Le seul morphisme éventuellement non nul impliquant les termes de cette suite spectrale de bidegré $(n - 1, q - n + 1)$ est donc

$${}^P d_1^{n-1, q-n+1} : {}^P E_1^{n-1, q-n+1} \rightarrow {}^P E_1^{n, q-n+1}.$$

Mais d'après le théorème de Demailly,

$$H^{n, q+1}(X, \Gamma^b E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si } q \geq 0 \text{ et } l \geq h(a),$$

alors que d'après le Théorème 2,

$$H^{n, q+1}(X, \Gamma^{b-1_d} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si } q > 0 \text{ et } l > h(a).$$

On a donc ${}^P E_1^{n, q-n+1} = 0$ dès que $q \geq 1$ et $l \geq h(a) + 1$, ou, bien entendu, dès que $q = n$. Dans ces conditions, ${}^P E_1^{n-1, q-n+1} = {}^P E_\infty^{n-1, q-n+1}$ est un quotient d'une filtration de $H^{n+N_{s(a)}-1, q}(Y, Q_{s(a)}^c \otimes \theta^* L)$ qui est nul, d'après le théorème de Kodaira-Nakano, lorsque $l \geq h(a)$ et $q \geq 2$. On obtient donc bien

$$H^{n-1, q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$$

si $l \geq h(a) + 1$ et $q \geq 2$, ou $l \geq h(a)$ et $q \geq n$. Ceci, compte tenu du Théorème 2, achève donc la démonstration du Théorème 4.

5.2. - Cas général

On peut généraliser les théorèmes précédents à des groupes de cohomologie de plus bas degré.

THÉOREME 5. *Supposons $p \geq n - \max(10, 20 - |u|)$. Alors si E est ample et L nef, ou E nef et L ample,*

$$H^{p, q}(X, \Gamma^{a-\chi(u)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si } \begin{cases} l \geq h(a) + u_1 + n - p, \\ p + q > n + |u|. \end{cases}$$

PREUVE. Posons

$$\pi(a, u) = \min \left(\frac{1}{3}(d - h(a) - 2|u|), \max(10, 20 - |u|) \right),$$

et procédons tout d'abord par récurrence sur $\pi = n - p \leq \pi(a, u)$. En reprenant les notations de la Proposition 5, considérons la suite spectrale de Borel-Le Potier d'ordre $P = n + N_s - |u| - \pi$ associée à la projection $\theta: Y = M_s(E) \rightarrow X$ et au fibré $Q_s^c \otimes \theta^*L$ sur Y . D'après cette proposition,

$${}^P E_1^{n-\pi, q-n+\pi} = H^{n-\pi, q}(X, \Gamma^{a-\chi(u)}E \otimes (\det E)^l \otimes L),$$

et ${}^P E_1^{n-\rho, q-n+\rho} = 0$ si $\rho > \pi$. Considérons les morphismes

$${}^P d_\tau^{n-\pi, q-n+\pi}: {}^P E_\tau^{n-\pi, q-n+\pi} \rightarrow {}^P E_\tau^{n-\pi+\tau, q-n+\pi+1-\tau},$$

avec $1 \leq \tau \leq \pi$. Le groupe de cohomologie ${}^P E_1^{n-\pi+\tau, q-n+\pi+1-\tau}$ est l'aboutissement d'une suite spectrale de Leray dont les termes d'ordre deux sont donnés par

$${}^\tau E_2^{i, j} = H^{n-\pi+\tau, i}(X, H^{N_s-|u|-\tau, j}(M_s(E), Q_s^c) \otimes L).$$

Les hypothèses $d - h(a) \geq 2|u| + 3\pi$ et $\pi > 0$ permettent d'appliquer les Propositions 6 et 7, selon lesquelles

$${}^\tau E_2^{i, j} = \bigoplus_{b, v} \nu_\tau(b, v, j) H^{n-\pi+\tau, i}(X, \Gamma^{b-\chi(v)}E \otimes (\det E)^l \otimes L),$$

avec, si $\nu_\tau(b, v, j) > 0$, les inégalités suivantes:

- (i) $|u| \leq |v| \leq |u| + \tau,$
- (ii) $h(b) \leq h(a) + \min(u_1, \tau),$
- (iii) $h(b) + v_1 \leq h(a) + u_1 + \tau,$
- (iv) $j \leq |u| + \tau - |v|.$

Les inégalités qui précèdent impliquent que $d - h(b) \geq 2|v| + 3(\pi - \tau)$: ${}^\tau E_2^{i, j}$ est donc nul, par hypothèse de récurrence, si $l \geq h(b) + v_1 + \pi - \tau$, et dès que $i > \pi - \tau + |v|$ ou $j > |u| + \tau - |v|$ pour chaque poids v , donc en particulier si $l \geq h(a) + u_1 + \pi$ et $i + j > |u| + \pi$. Par conséquent,

$${}^P E_1^{n-\pi+\tau, q-n+\pi+1-\tau} = 0 \quad \text{si } l \geq h(a) + u_1 + \pi \text{ et } q \geq |u| + \pi.$$

On obtient donc

$${}^P E_1^{n-\pi, q-n+\pi} = {}^P E_\infty^{n-\pi, q-n+\pi},$$

qui est un quotient d'une filtration de $H^{n+N_s-|u|-\pi, q}(Y, Q_s^c \otimes \theta^*L)$, donc nul, d'après le théorème d'annulation de Kodaira-Nakano, dès que $q > |u| + \pi$. Le théorème est donc démontré pour $p \geq n - \pi(a, u)$, et les remarques qui précèdent le Théorème 2 prouvent que la partie de cette condition qui porte sur d est superflue.

REMARQUE. 6. Etant donné un poids b , le théorème précédent permet d'estimer, en fonction de l'entier l , la valeur de la somme des degrés au-delà

de laquelle doivent s'annuler les groupes $H^{p,q}(X, \Gamma^b E \otimes (\det E)^l \otimes L)$. Posons en effet, pour un entier r ,

$$a = \mathbf{1}_{1,b_{i+1}^*} + \cdots + \mathbf{1}_{1,b_i^*} \quad \text{et} \quad a = \mathbf{1}_{1,d-b_i^*} + \cdots + \mathbf{1}_{1,d-b_1^*}.$$

Alors $b = a - \chi(u) + i\mathbf{1}$, et le Théorème 5 peut donc se réécrire sous la forme, pour p assez proche de n ,

$$H^{p,q}(X, \Gamma^b E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} l \geq b_{i+1}^* + n - p, \\ p + q > n + \sum_{j=1}^i (d - b_j^*). \end{cases}$$

Le Théorème 5 admet un certain nombre de conséquences intéressantes, relatives par exemple aux puissances extérieures, symétriques ou tensorielles d'un fibré ample, et qui précisent ou généralisent certains résultats antérieurs.

THÉORÈME 6. *Si E est ample et L nef, ou E nef et L ample, sur une variété complexe compacte X de dimension n , et si $p \geq n - 20$, alors*

$$H^{p,q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} l \geq h(a) + n - p, \\ p + q > n. \end{cases}$$

COROLLAIRE 3. *Sous les mêmes hypothèses, on a*

1. $H^{p,q}(X, S^k E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$ si $\begin{cases} l \geq n - p + 1, \\ p + q > n, \end{cases}$ et $p \geq n - 20$.
2. $H^{p,q}(X, \wedge^k E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$ si $\begin{cases} l \geq n - p + k, \\ p + q > n, \end{cases}$ et $p \geq n - 20$.
3. $H^{p,q}(X, \wedge^k E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$ si $\begin{cases} l \geq n - p, \\ p + q > n + d - k, \end{cases}$ et $p \geq n - 10$.

COROLLAIRE 4. *Sous les mêmes hypothèses,*

$$H^{p,q}(X, E^{\otimes k} \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} l \geq n - p + k, \\ p + q > n, \end{cases} \quad \text{et} \quad p \geq n - 20.$$

PREUVE. Le Théorème 6 correspond au cas $u = 0$ du théorème précédent, le Corollaire 3 à $a = k\mathbf{1}_1$ et $u = 0$ pour 1, $a = \mathbf{1}_{1,k}$ et $u = 0$ pour 2, $a = 0$ et $u = \mathbf{1}_{1,d-k}$ pour 3. Enfin, le Corollaire 4 est conséquence du fait que chaque puissance tensorielle $E^{\otimes k}$ est somme de fibrés associés de la forme $\Gamma^a E$ avec $|a| = k$, donc en particulier $h(a) \leq k$.

REMARQUE 7. Encore une fois, on peut raisonnablement imaginer que tous les théorèmes précédents sont vrais sans les restrictions qu'on a dû faire sur p , et qui ne lui permet pas de s'écarter trop de n . Cette restriction semble plutôt

le fait des méthodes utilisées dans cet article, et nous n'avons pas su nous en débarrasser. L'idéal serait sans doute de pouvoir, dans tous les cas, expliciter les groupes de cohomologie de Dolbeault des fibrés en droites canoniques sur les variétés de drapeaux d'un espace vectoriel complexe, comme on sait le faire sur la grassmannienne. Malgré certains travaux, déjà anciens, de Kostant ([14] et [15]), cela semble cependant un problème difficile.

5.3. - Fibrés de rang deux

On conclura cet article par quelques remarques sur la cohomologie des fibrés amples de rang deux. Si $E \rightarrow X$ est un fibré vectoriel de rang deux sur une variété complexe compacte de dimension n , si $Y = \mathbb{P}(E^*)$ et si $\pi: Y \rightarrow X$ est la projection naturelle, la filtration de Borel-Le Potier de Ω_Y^{p+1} se réduit à la suite exacte

$$0 \rightarrow \pi^* \Omega_X^{p+1} \rightarrow \Omega_Y^{p+1} \rightarrow \pi^* \Omega_X^p \otimes \Omega_{Y/X}^1 \rightarrow 0.$$

Considérons un poids positif et décroissant $a = (k + l, l)$, $k > 0, l \geq 0$, de sorte que

$$Q^a = \mathcal{O}_E(k) \otimes \pi^*(\det E)^l.$$

Le théorème de Bott implique que

$$R_{\pi_*}^q Q^a = \delta_{q,0} S^k E \otimes (\det E)^l,$$

$$R_{\pi_*}^q (\Omega_{Y/X}^1 \otimes Q^a) = \delta_{q,0} S^{k-2} E \otimes (\det E)^{l+1},$$

et par conséquent, la suite exacte précédente, tensorisée par Q^a , a pour image par π la suite exacte

$$0 \rightarrow \Omega_X^{p+1} \otimes S^k E \otimes (\det E)^l \rightarrow \pi_* (\Omega_Y^{p+1} \otimes Q^a) \rightarrow \Omega_X^p \otimes S^{k-2} E \otimes (\det E)^{l+1} \rightarrow 0.$$

Notons également que d'après ce qui précède,

$$R^q (\Omega_Y^{p+1} \otimes Q^a) = 0 \quad \text{si } q > 0,$$

ce qui implique, si L est un fibré en droites sur X , l'isomorphisme

$$H^q(X, \pi_* (\Omega_Y^{p+1} \otimes Q^a) \otimes L) = H^{p,q}(Y, Q^a \otimes \pi^* L).$$

La suite exacte précédente induit donc la suite exacte longue de cohomologie:

$$\dots \rightarrow H^{p+1,q}(Y, Q^a \otimes \pi^* L) \rightarrow H^{p,q}(X, S^{k-2} E \otimes (\det E)^{l+1} \otimes L)$$

$$\rightarrow H^{p+1,q+1}(X, S^k E \otimes (\det E)^l \otimes L) \rightarrow H^{p+1,q+1}(Y, Q^a \otimes \pi^* L) \rightarrow \dots$$

Le théorème de Kodaira-Nakano implique donc la proposition suivante:

PROPOSITION 8. Si E est ample de rang deux et L nef, ou E nef et L ample, et si $p + q > n$, alors

$$H^{p,q}(X, S^{k-2}E \otimes (\det E)^{l+1} \otimes L) = H^{p+1,q+1}(X, S^k E \otimes (\det E)^l \otimes L).$$

Le théorème de Demailly et le théorème de Le Potier (qui, en l'occurrence, est plus fort que notre Théorème 5) sont, puisque $S^k E$ est de rang $k + 1$, respectivement équivalents à

$$\begin{aligned} H^{p,q}(X, S^k E \otimes (\det E)^l \otimes L) &= 0 & \text{si } p + q > n, & \quad l > n - p, \\ H^{p,q}(X, S^k E \otimes (\det E)^l \otimes L) &= 0 & \text{si } p + q > n + k, & \quad l \geq 0. \end{aligned}$$

Si l'on suppose E globalement engendré, on peut obtenir les conditions d'annulation suivantes, qui sont indépendantes de k :

THÉORÈME 7. Soient E un fibré de rang deux globalement engendré, L un fibré en droites ample sur une variété complexe compacte X de dimension n . Alors le groupe de cohomologie $H^{p,q}(X, S^k E \otimes (\det E)^l \otimes L)$, avec $k > 0$ et $l \geq 0$, est nul pour $p + q > n$ sous l'une des conditions suivantes:

1. $l > \min(n - p, n - q)$,
2. $p > 2(n - q)$,
3. $l \geq n - p - \delta$ et $p - q < \frac{1}{2}(n - 3\delta)$, avec $\delta \geq 0$,
4. $l \geq \frac{1}{3}(p - 1)$,
5. $p > \frac{2}{3}n$ et $q \geq p$ (ou $p \geq \frac{2}{3}n$ et $q > p$).

PREUVE. On démontre 1 par récurrence en utilisant la proposition précédente, qui traduit la dégénérescence en E_2 de la suite spectrale de Borel-Le Potier ([4]), alors que 2 se déduit du Corollaire 2. Quant à 3, il est équivalent pour $p = n - \delta$ au théorème de Le Potier, et se déduit par récurrence sur δ de la proposition précédente. Si l'on procède comme au Corollaire 2, 3 implique l'annulation des groupes considérés pour

$$l > \frac{1}{3}[p - 2(p + q - n)],$$

ce qui entraîne 4. Enfin, 5 est conséquence de 3 appliqué à $\delta = \frac{n}{3}$ et $\delta = \frac{n-1}{3}$.

REMARQUE 8. La dernière assertion de ce théorème est à rapprocher d'une propriété du fibré quotient Q , de rang d et globalement engendré, sur la

grassmannienne $G_d(V)$ des sous-espaces de codimension d d'un espace vectoriel complexe V , selon laquelle

$$H^{p,q}(G_d(V), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l) = 0$$

si $q > p$, pour tout poids $a \in \mathbb{N}_{\geq}^d$ et tout entier naturel l . Il serait intéressant de savoir s'il s'agit là d'une propriété générale de la cohomologie des fibrés amples ou globalement engendrés: autrement dit, les fibrés E et L vérifiant par exemple les conditions du théorème précédent, mais E étant de rang quelconque, quel est le plus petit entier $\mu(n, a)$ tel que pour $l \geq 0$,

$$H^{p,q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si } q > p \geq \mu(n, a)?$$

APPENDICE

DÉMONSTRATION DU LEMME 7. Rappelons qu'il s'agit de majorer le nombre d'inversions strictes de l'ordre parmi les $v_1 = s_m$ dernières composantes d'un poids de la forme

$$(*, \dots, *, v_1^* + \gamma_1 - 1, \dots, v_{s_m}^* + \gamma_{s_m} - s_m),$$

où le poids $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{s_m})$ est constitué des s_m dernières composantes du poids d'un facteur d'un produit tensoriel

$$\mathcal{G} = \bigotimes_{1 \leq i < j \leq m+1} \Gamma^{u_{ij}^*} E_i \otimes \Gamma^{-\chi(u_{ij})} E_j,$$

avec $\sum_{i < j} |u_{ij}| = \pi$. La forme de ce produit tensoriel implique, si l'on pose $\mu_i = v_i^* - i$ pour $1 \leq i \leq s_m$, que:

- $\alpha 1.$ la suite $(\mu_i)_{1 \leq i \leq s_m}$ est strictement décroissante;
- $\alpha 2.$ si $\mu_{i-1} - \mu_i = 1$, alors $\gamma_{i-1} \geq \gamma_i$;
- $\alpha 3.$ si $\gamma_i \geq 0$, alors $\sum_{j > i} \gamma_j^- \geq \gamma_i$;
- $\alpha 4.$ $\sum_i \gamma_i^+ \leq \sum_j \gamma_j^- \leq \pi$.

En effet, $\alpha 1$ est une évidence, $\alpha 2$ provient du fait que si $\mu_{i-1} - \mu_i = 1$, alors $v_{i-1}^* = v_i^*$, ce qui implique que (γ_{i-1}, γ_i) est une partie d'un poids γ^k d'un fibré associé à un fibré E_k , poids qui est nécessairement décroissant. L'assertion $\alpha 3$ est conséquence du fait qu'à chaque poids u_{ij}^* participant à un γ^k correspond le poids $-\chi(u_{ij})$, de même module, participant à un γ^l , avec $l > k$. Enfin, l'égalité $\sum_{i < j} |u_{ij}| = \pi$, et le fait que les poids positifs u_{ij}^* ne participent pas à γ , impliquent $\alpha 4$.

On supposera que les entiers de la suite $(\mu_i + \gamma_i)_{1 \leq i \leq s_m}$ sont deux à deux distincts (si ce n'était pas le cas, la contribution du facteur considéré au groupe de cohomologie correspondant serait nulle d'après le théorème de Bott), et l'on notera $N_\mu(\gamma)$ le nombre d'inversions strictes de cette suite. Il existe alors un entier ι tel que si $\pi > 0$ et $\pi + |\nu| \leq \iota$, l'on ait

$$N_\mu(\gamma) < \pi.$$

On se propose, dans cet appendice, de montrer que $\iota \geq 20$ (cette estimation étant d'ailleurs probablement très mauvaise). Ce sera la conséquence de la suite de lemmes suivante:

LEMME A. Notons n_γ le nombre d'entiers γ_i non nuls, et Γ_+ (respectivement Γ_-) le nombre d'entiers $\gamma_i > 1$ (respectivement $\gamma_i < -1$) que ne précède (respectivement qui ne précèdent) aucun $\gamma_j < 0$ (respectivement $\gamma_j > 0$). Alors

$$N_\mu(\gamma) \leq \sum_{i=1}^{s_m} |\gamma_i| - n_\gamma - \Gamma_+ - \Gamma_-.$$

PREUVE. Posons $\mu_i^+ = \mu_i + \gamma_i^+$, et notons $N_\mu^+(\gamma)$ le nombre d'inversions larges de la suite $(\mu_i^+)_{1 \leq i \leq s_m}$. Si $j < i$ et $\mu_j^+ \leq \mu_i^+$, alors $\mu_j \leq \mu_i^+ = \mu_i + \gamma_i^+$, donc $j \geq i - \gamma_i^+$ puisque la suite $(\mu_k)_{1 \leq k \leq s_m}$ est strictement décroissante: en particulier, $\gamma_i > 0$. De plus, si $\mu_{i-\gamma_i}^- \geq \mu_i^+$, alors nécessairement $\mu_j = \mu_i + i - j$ si $i - \gamma_i \leq j \leq i$. Mais $\alpha 2$ implique alors que la suite $(\gamma_j)_{i-\gamma_i \leq j \leq i}$ est décroissante, ce qui est contradictoire. Il vient

$$\text{Card}\{j < i, \mu_j^+ \leq \mu_i^+\} \leq (\gamma_i^+ - 1)^+.$$

D'autre part, si l'entier i est tel que $\gamma_i \geq 2$ et $\gamma_j \geq 0$ si $j < i$, alors $\mu_j^+ = \mu_j + \gamma_j$ si $j \leq i$, et comme par hypothèse ces entiers sont distincts deux à deux,

$$\text{Card}\{j < i, \mu_j^+ \leq \mu_i^+\} \leq \gamma_i - 2.$$

On obtient donc la majoration

$$N_\mu^+(\gamma) \leq \sum_{i=1}^{s_m} (\gamma_i^+ - 1)^+ - \Gamma_+.$$

De même, si l'on note $N_\mu^-(\gamma)$ le nombre d'inversions de la suite $(\mu_i + \gamma_i)_{1 \leq i \leq s_m}$ par rapport à la suite $(\mu_i^+)_{1 \leq i \leq s_m}$, on obtiendra, en raisonnant de manière analogue, l'inégalité

$$N_\mu^-(\gamma) \leq \sum_{i=1}^{s_m} (\gamma_i^- - 1)^+ - \Gamma_-.$$

D'où l'estimation annoncée, puisque l'inégalité $N_\mu(\gamma) \leq N_\mu^+(\gamma) + N_\mu^-(\gamma)$ implique

$$N_\mu(\gamma) \leq \sum_{i=1}^{s_m} (|\gamma_i| - 1)^+ - \Gamma_+ - \Gamma_- = \sum_{i=1}^{s_m} |\gamma_i| - n_\gamma - \Gamma_+ - \Gamma_-.$$

REMARQUE A1. Plus généralement, on aura la même majoration si Γ^+ (respectivement Γ_-) désigne le nombre d'entiers $\gamma_i > 1$ (respectivement $\gamma_i < -1$) ne donnant pas plus de $|\gamma_i| - 2$ inversions: ce que l'on supposera dans ce qui suit.

Notons également que si $\gamma_i > 1$ donne $\gamma_i - 1$ inversions, la démonstration qui précède implique que $\mu_{i-1} - \mu_i = 2$, $\mu_{j-1} - \mu_j = 1$ si $i - \gamma_i + 1 < j < i$, et $\gamma_{i-\gamma_i+1}^+ = 0$. Mais dans ce cas, $\mu_i + \gamma_i = \mu_{i-\gamma_i+1}$, autrement dit $\mu_i^+ = \mu_{i-\gamma_i+1}^+$. Les entiers $(\mu_j + \gamma_j)_{1 \leq j \leq s_m}$ étant supposés distincts deux à deux, ceci implique que $\gamma_{i-\gamma_i+1} < 0$, donc d'après $\alpha 2$ que $\gamma_j < 0$ si $i - \gamma_i < j < i$. Autrement dit, si γ_i ne participe pas à Γ_+ , ses prédécesseurs participeront à n_γ , puisqu'ils doivent être non nuls. C'est essentiellement sur ce jeu que reposeront les preuves des lemmes qui vont suivre.

REMARQUE A2. Les inégalités des $\alpha 4$ peuvent être strictes, si les poids u_{ij}^* et $-\chi(u_{ki})$, après produit tensoriel, donnent des poids dont la somme des composantes positives (respectivement négatives) est strictement inférieure à celle des poids de départ: on dira qu'il y a eu compensation. Un tel phénomène rend plus efficace l'estimation du Lemme A, et l'on se permettra, au Lemme C, de supposer qu'il n'a pas lieu: c'est a priori la situation la moins favorable.

LEMME B. Si $\max_i |\gamma_i| \leq 3$, alors $N_\mu(\gamma) < \pi$.

PREUVE. Pour chaque entier i compris entre 1 et s_m , notons n_i le nombre d'inversions, avec des composantes d'indices aussi bien inférieurs que supérieurs (à la différence du lemme précédent: chaque inversion sera donc comptée deux fois), impliquant l'entier $\mu_i + \gamma_i$. Supposons par exemple $\gamma_i \geq 0$: si $\max_j |\gamma_j| \leq 3$, $\alpha 2$ implique que

- (a) si $\mu_i + \gamma_i < \mu_j + \gamma_j$ avec $j > i$, alors nécessairement $j = i + 1$, $\mu_i - \mu_{i+1} = 2$, $\gamma_i = 0$ et $\gamma_{i+1} = 3$;
- (b) si $\mu_i + \gamma_i > \mu_j + \gamma_j$ avec $j < i$, alors $j < i$, alors $j \geq 1 - \gamma_i - 1$, et si cette inégalité est une égalité, on doit avoir $\mu_{i-1} - \mu_i = 2$, $\mu_j - \mu_{i-1} = i - j - 1$ et $\gamma_j = \dots = \gamma_{i-1} = -3$.

Par conséquent, $n_i \leq \gamma_i + 2$. De plus,

- (c) si $n_i = \gamma_i + 2$, alors nécessairement $\mu_{i-1} - \mu_i = \mu_i - \mu_{i+1} = 2$, $\gamma_{i-1} = -3$, $\gamma_i = 0$ et $\gamma_{i+1} = 3$, de sorte que les entiers $(\mu_j + \gamma_j)_{i-1 \leq j \leq i+1}$ forment une suite d'entiers consécutifs qui ne peuvent participer à aucune autre inversion, avec

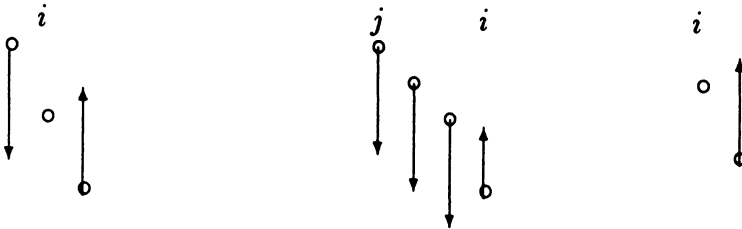
$$n_{i-1} + n_i + n_{i+1} = 6 = |\gamma_{i-1}| + |\gamma_i| + |\gamma_{i+1}|.$$

- (d) si $n_i = \gamma_i + 1$, alors soit $\gamma_i = 0$, $\mu_i - \mu_{i+1} = 2$ et $\gamma_{i+1} = 3$, auquel cas les entiers $\mu_i + \gamma_i$ et $\mu_{i+1} + \gamma_{i+1}$ ne peuvent participer à aucune autre inversion, et

$$n_i + n_{i+1} = 2 < |\gamma_i| + |\gamma_{i+1}| = 3;$$

soit $\gamma_j = \dots = \gamma_{i-1} = -3$ avec $j = i - \gamma_i - 1$, auquel cas les entiers $(\mu_k + \gamma_k)_{j \leq k \leq i}$ sont consécutifs, ne peuvent participer à aucune autre inversion, et

$$\begin{aligned} n_j + \dots + n_i &= 1 + \dots + 1 + (\gamma_i + 1) = 2\gamma_i + 2 < |\gamma_j| + \dots + |\gamma_i| \\ &= (\gamma_i + 1) \times 3 + \gamma_i = 4\gamma_i + 3. \end{aligned}$$



Configurations pour lesquelles $n_i > \gamma_i$

On peut donc définir une partition de $\{1, \dots, s_m\}$ en sous-ensembles $(I_k)_{1 \leq k \leq \sigma}$ tels que

$$\sum_{i \in I_k} n_i \leq \sum_{i \in I_k} |\gamma_i|,$$

d'où $N_\mu(\gamma) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s_m} n_i \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s_m} |\gamma_i|$: et cette estimation peut se préciser, en raisonnant comme au lemme précédent, en

$$N_\mu(\gamma) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s_m} |\gamma_i| - \Gamma_+ - \Gamma_-.$$

D'après $\alpha 4$, le membre de droite de cette inégalité est au plus égal à π , et l'égalité ne peut avoir lieu que si $\sum_i \gamma_i^+ = \sum_j \gamma_j^- = \pi$ et $\Gamma_+ = \Gamma_- = 0$. Mais d'après $\alpha 3$, le dernier entier γ_i non nul est nécessairement négatif, et si $\Gamma_- = 0$, il doit être égal à -1 . Mais alors il ne peut participer à aucune

inversion, autrement dit $n_i = 0 < |\gamma_i|$. L'inégalité précédente ne peut donc être une égalité, et $N_\mu(\gamma) < \pi$.

LEMME C. *Si la suite $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq s_m}$ ne contient pas plus de trois termes strictement négatifs (ou strictement positifs), et si $\pi \leq 10$, alors $N_\mu(\gamma) < \pi$.*

PREUVE. Supposons (cf. la Remarque A2) qu'il ne se produise aucune compensation entre les poids des différents termes du produit tensoriel \mathcal{G} , dont provient γ , et par exemple qu'il existe exactement trois termes strictement négatifs: disons γ_{i_1} , γ_{i_2} et γ_{i_3} , avec $i_1 < i_2 < i_3$. La forme du produit tensoriel \mathcal{G} implique alors que les γ_j positifs ou nuls sont:

- (i) nuls au-delà de i_3 ,
- (ii) au plus égaux à un entre i_2 et i_3 ,
- (iii) au plus égaux à deux entre i_1 et i_2 ,
- (iv) au plus égaux à trois en deçà de i_1 .

En effet, si par exemple i_1 et i_2 d'une part, i_2 et i_3 d'autre part, ne sont pas consécutifs, γ_{i_1} , γ_{i_2} et γ_{i_3} correspondent nécessairement à des puissances symétriques d'exposants $|\gamma_{i_1}|$, $|\gamma_{i_2}|$ et $|\gamma_{i_3}|$ de fibrés $E_{k_1}^*$, $E_{k_2}^*$ et $E_{k_3}^*$. Celle-ci ne peuvent provenir que de produits tensoriels de puissances symétriques, et les termes positifs de γ doivent donc provenir de produits tensoriels de puissances extérieures: et un produit tensoriel de m puissances extérieures donne des poids dont les composantes ne peuvent excéder m .

En conséquence, ces termes positifs ou nuls ne peuvent admettre d'inversions entre eux que lorsque

$$\gamma_{i-1} = 0, \quad \gamma_i = 3, \quad \mu_{i-1} - \mu_i = 2.$$

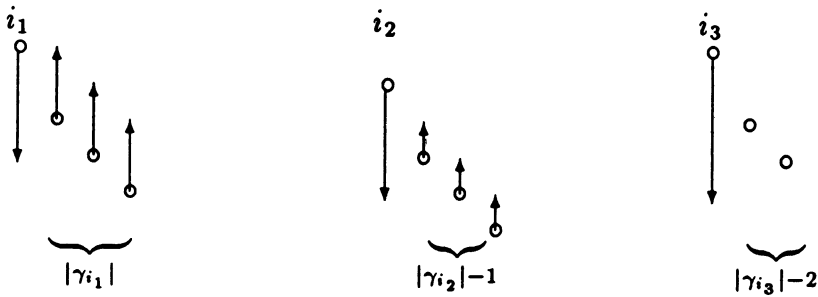
Les trois unités d'un tel entier γ_i doivent alors provenir chacune d'un des trois γ_{i_k} . Si l'on note ν le nombre de telles inversions, ceci implique que

$$\nu \leq \min(|\gamma_{i_1}|, |\gamma_{i_2}|, |\gamma_{i_3}|).$$

D'autre part, les nombres d'inversions associées à $\mu_{i_1} + \gamma_{i_1}$, $\mu_{i_2} + \gamma_{i_2}$, $\mu_{i_3} + \gamma_{i_3}$, sont respectivement majorés par $|\gamma_{i_1}|$, $|\gamma_{i_2}| - 1$ et $(|\gamma_{i_3}| - 2)^+$ (ces valeurs maximales correspondant au schéma ci-dessous). Il vient

$$N_\mu(\gamma) \leq |\gamma_{i_1}| + |\gamma_{i_2}| - 1 + (|\gamma_{i_3}| - 2)^+ + \nu.$$

Si $\gamma_{i_3} = -1$, on obtient $N_\mu(\gamma) \leq |\gamma_{i_1}| + |\gamma_{i_2}| < \pi$. Si $\gamma_{i_3} \leq -2$, alors $N_\mu(\gamma) \leq |\gamma_{i_1}| + |\gamma_{i_2}| + |\gamma_{i_3}| + \nu - 3 \leq \pi + \nu - 3$, et si ces inégalités étaient des égalités γ_{i_1} , γ_{i_2} et γ_{i_3} seraient respectivement dans les configurations suivantes:



D'après $\alpha 4$, ceci impliquerait que $\pi \geq \sum_j \gamma_j^+ \geq 2|\gamma_{i_1}| + |\gamma_{i_2}| - 1 + 3\nu$. Si l'on suppose de plus $N_\mu(\gamma) \geq \pi$, il vient

- (a) soit $N_\mu(\gamma) = \pi + \nu - 3$, d'où $\nu \geq 3$ et $\pi \geq 2 \times 1 + 3 \times 3 = 11$ d'après l'inégalité précédente,
 - (b) soit $N_\mu(\gamma) \leq \pi + \nu - 4$, d'où $\nu \geq 4$ et $\pi \geq 3\nu \geq 12$,
- ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\pi \leq 10$.

LEMME D. Si $\pi \leq 10$, alors $N_\mu(\gamma) < \pi$.

PREUVE. Supposons $N_\mu(\gamma) \geq \pi$ et $\pi \leq 10$. D'après le lemme précédent, la suite $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq s_m}$ a au moins quatre termes strictement positifs et quatre strictement négatifs. De plus, le Lemme B implique que $\max_i |\gamma_i| \geq 4$: il existe donc un entier i_0 tel que, par exemple, $\gamma_{i_0} \geq 4$. La forme du produit tensoriel définissant \mathcal{G} implique alors

- (a) soit qu'au moins γ_{i_0} entiers γ_j , pour $j > i_0$, soient strictement négatifs;
- (b) soit, s'il y a eu compensation par des poids positifs, et si seulement $\gamma_{i_0} - \delta$ entiers γ_j , pour $j > i_0$, sont strictement négatifs, que

$$\sum_j \gamma_j^+ \leq \sum_i \gamma_i^- \leq \pi - \delta.$$

Si $n_\gamma = 8$, on a exactement quatre γ_i non nuls de chaque signe, $\gamma_{i_0} = 4$ et le Lemme A implique que

$$\pi \leq N_\mu(\gamma) \leq 2(\pi - \delta) - 8 - \Gamma_+ - \Gamma_-,$$

donc $2\delta + \Gamma_+ + \Gamma_- \leq \pi - 8 \leq 2$, et par conséquent $\delta \leq 1$. Il existe donc au plus un entier γ_j strictement négatif pour $j < i_0$. Mais alors, γ_{i_0} ne peut donner plus de $\gamma_{i_0} - 2$ inversions (puisque s'il en donnait $\gamma_{i_0} - 1$, les entiers γ_j , avec $i_0 - \gamma_{i_0} < j < i_0$, devraient être strictement négatifs), donc $\Gamma_+ > 0$, $\delta = 0$ et $\pi \geq 9$.

Si l'on avait $\sum_j \gamma_j^- < \pi$, le Lemme A et α_4 impliqueraient que $N_\mu(\gamma) \leq 2\pi - 10 - \Gamma_+ - \Gamma_- < \pi$: comme on a fait l'hypothèse contraire, $\sum_j \gamma_j^- = \pi \geq 9$, et cette somme étant somme de quatre termes non nuls, il existe un entier $\gamma_{j_0} \leq -3$. Si l'on raisonne comme pour Γ_+ il vient $\Gamma_- > 0$, et le Lemme A implique que $\pi = 10$.

Dans ce cas, soit, l'on a trois $\gamma_j \leq -3$, donc $\Gamma_- \geq 2$ et $N_\mu(\gamma) < \pi$, soit trois γ_j sont égaux à -2 , et le quatrième à -4 . Chacun des γ_j égaux à -2 doit alors donner une inversion dans la preuve du Lemme A, ce qui implique que $\gamma_{j+1} = 1$: mais alors $\sum_{i=1}^{s_m} \gamma_i^+ < \pi$, donc $N_\mu(\gamma) < \pi$.

Enfin, si $n_\gamma \geq 9$, on montre comme précédemment que $\Gamma_+ + \Gamma_- \geq 2$, d'où $N_\mu(\gamma) \leq 2\pi - 11 < \pi$.

LEMME E. Si $|v| \leq 9$, alors $N_\mu(\gamma) \leq 10$.

PREUVE. La propriété α_2 implique, comme on a noté $s(v^*) = (0 = s_0 < \dots < s_m = v_1)$, que

$$N_\mu(\gamma) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq m} (s_i - s_{i-1})(s_j - s_{j-1})$$

(on ne peut avoir d'inversions entre composantes correspondant à un même fibré E_i , autrement dit comprises entre des entiers $s_{i-1} + 1$ et s_i). Si l'on note $n(v^*)$ le membre de droite de cette inégalité, il suffit donc de montrer que pour tout poids v de module inférieur ou égale à 9, $n(v) \leq 10$.

Il est clair que $n(v) \leq C_{v_1}^2$: c'est donc le cas si $v_1^* \leq 5$, et l'on peut donc supposer que v a au moins six termes non nuls. Notons ν_i le nombre de composantes de v égales à i . On a

$$9 \geq |v| \geq \nu_1 + 2(\nu_1^* - \nu_1),$$

ce qui implique que $\nu_1 \geq 2\nu_1^* - 9 \geq 3$. Comme v est de module au plus égal à 9, il vient $\sum_{j \geq 3} \nu_j \leq 2$. Enfin,

- (a) si cette somme vaut deux, alors $v = (33111)$ et $n(v) = 6$,
- (b) si elle vaut un, $\nu_1 + 2\nu_2 \leq 6$ et

$$n(v) = \nu_1\nu_2 + \nu_1 + \nu_2 \leq 6 + 5\nu_2 - 2\nu_2^2 \leq 9,$$

- (c) si elle est nulle, $\nu_1 + 2\nu_2 \leq 9$ et

$$n(v) = \nu_1\nu_2 \leq \nu_2(9 - \nu_2) \leq 10.$$

CONCLUSION. Supposons $\pi + |v| \leq 20$: si $\pi \leq 10$, le Lemme D implique que $N_\mu(\gamma) < \pi$. Si $\pi > 10$, alors $|v| \leq 9$ et le Lemme E implique que $N_\mu(\gamma) \leq 10 < \pi$. Le Lemme 7 est donc démontré.

REFERENCES

- [1] R. BOTT, *Homogeneous vector bundles*, Ann. of Math. **66**, 203-248 (1957).
- [2] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématiques, Livre 2, Chapitre 3, Algèbre multilinéaire*, Hermann, Paris, 1958.
- [3] A. BOREL, *A spectral sequence for complex analytic bundles*, in Hirzebruch, F.: Topological methods in algebraic geometry, Berlin-Heidelberg-New York, Springer Verlag, 1966.
- [4] J.P. DEMAILLY, *Vanishing theorems for tensor powers of an ample vector bundle*, Invent. Math. **91**, 203-220 (1988).
- [5] J.P. DEMAILLY, *Théorèmes d'annulation pour la cohomologie des puissances tensorielles d'un fibré positif*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., **305**, 419-422 (1987).
- [6] J.P. DEMAILLY, *Vanishing theorems for tensor powers of a positive vector bundle*, Lecture Notes in Math. 1339, Springer Verlag, 1988.
- [7] B. DEMAZURE, *A very simple proof of Bott's theorem*, Invent. Math. **33**, 271-272 (1976).
- [8] L. EIN - R. LAZARSFELD, *A theorem on the syzygies of smooth projective varieties of arbitrary dimension*, preprint.
- [9] P.A. GRIFFITHS - J. HARRIS, *Principles of algebraic geometry*, Wiley Interscience, New York, 1978.
- [10] R. GODEMENT, *Théorie des faisceaux*, Hermann, 1958.
- [11] P.A. GRIFFITHS, *Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles*, in Global analysis, papers in honor of K. Kodaira, Princeton Univ. Press, Princeton, 1969, 185-251.
- [12] M. KAPRANOV, *On the derived category of coherent sheaves on Grassmann manifolds*, Math. USSR Izv. **24**, 183-192 (1985).
- [13] D. KNUTSON, *λ -rings and the representation theory of the symmetric group*, Lecture Notes 308, Springer, 1973.
- [14] B. KOSTANT, *Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem*, Ann. of Math. **74**, 329-387 (1961).
- [15] B. KOSTANT, *Lie algebra cohomology and generalized Schubert cells*, Ann. of Math. **77**, 72-144 (1962).
- [16] H. KRAFT, *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, Aspekter der Mathematik, Band D1, Braunschweig, Vieweg Sohn, 1985.
- [17] A. LASCoux, *Fonctions de Schur et grassmanniennes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **281**, 851-854 (1975).
- [18] I.G. MAC DONALD, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford, Clarendon Press, 1979.
- [19] J. LE POTIER, *Annulation de la cohomologie à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe positif de rang quelconque*, Math. Ann. **218**, 35-53 (1975).
- [20] J. LE POTIER, *Cohomologie de la Grassmannienne à valeurs dans les puissances extérieures et symétriques du fibré universel*, Math. Ann. **266**, 257-270 (1977).
- [21] L. MANIVEL, *Un exemple de non dégénérescence en E_2 de la suite spectrale de Borel-Le Potier*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **311**, 31-36 (1990).

- [22] L. MANIVEL, *Un théorème d'annulation pour les puissances extérieures d'un fibré ample*, J. reine angew. Math. **422**, 91-116 (1991).
- [23] TH. PETERNELL - J. LE POTIER - M. SCHNEIDER, *Direct images of sheaves of differentials and the Atiyah class*, Math. Z. **196**, 75-85 (1987).
- [24] TH. PETERNELL - J. LE POTIER - M. SCHNEIDER, *Vanishing theorems, linear and quadratic normality*, Invent. Math. **87**, 573-586 (1987).
- [25] M. SCHNEIDER, *Ein einfacher Beweis des Verschwindungssatzes für positive holomorphe Vektorraumbündel*, Manuscripta Math. **11**, 95-101 (1974).
- [26] M. SCHNEIDER, *Some remarks on vanishing theorems for holomorphic vector bundles*, Math. Z. **186**, 135-142 (1984).
- [27] B. SHIFFMAN - A.J. SOMMESE, *Vanishing theorems on complex manifolds*, Progr. Math. **56**, Birkhäuser, 1985.
- [28] D. SNOW, *Cohomology of twisted holomorphic forms on Grassmann manifolds and quadric hypersurfaces*, Math. Ann. **276**, 159-176 (1986).
- [29] D. SNOW, *On the ampleness of homogeneous vector bundles*, Trans. Amer. Math. Soc. **294**, 585-594 (1986).
- [30] A.J. SOMMESE, *Submanifolds of abelian varieties*, Math. Ann. **233**, 229-256 (1978).

Institut Fourier
Université de Grenoble I
B.P. 74
38402 Saint Martin d'Hères
France