

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

PAUL GAUDUCHON

Structures de Weyl et théorèmes d'annulation sur une variété conforme autoduale

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 18, n° 4 (1991), p. 563-629

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1991_4_18_4_563_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Structures de Weyl et théorèmes d'annulation sur une variété conforme autoduale

PAUL GAUDUCHON

Introduction

A toute variété orientée M de dimension 4, munie d'une structure conforme définie-positive c , est associée l'espace des *twisteurs* (projectifs) (ZM, \mathcal{J}) , fibré au-dessus de M , qui, lorsque c est *autoduale*, est une variété complexe de dimension 3. Le fibré tangent vertical Θ sur ZM est muni d'une structure hermitienne canonique—de rang 1—et d'une *classe d'équivalence* canonique de structures holomorphes. Toutefois, le choix d'une structure holomorphe particulière dans cette classe d'équivalence dépend du choix d'une métrique dans c et Θ ne possède pas de structure holomorphe canonique (i.e., déterminée par c). En particulier, Θ n'est jamais un *sous-fibré holomorphe* du fibré tangent de ZM (Proposition 6).

Lorsque le premier nombre de Betti b_1 de M —qui est aussi celui de ZM —n'est pas nul, Θ admet des structures holomorphes qui n'appartiennent pas à classe canonique.

Après une première partie introductive, où est développée, en particulier, la notion de *structure de Weyl* qui joue un rôle central tout au long de cette étude, l'objet de la seconde partie est de donner une description explicite de l'ensemble des structures holomorphes naturelles de Θ , en établissant (Théorème 1) un isomorphisme naturel d'espaces affines entre

a) l'espace des structures holomorphes *naturelles* et *réelles* de Θ —ou une de ses puissances tensorielles Θ^p —et l'espace des structures de Weyl *autoduales* sur (M, c) ,

b) l'espace des structures holomorphes naturelles et “imaginaires pures” de Θ —ou Θ^p —et l'espace des connexions hermitiennes autoduales du fibré produit $M \times \mathbb{C}$ sur M (correspondance de Atiyah-Ward).

Ces bijections, compatibles avec les relations d'équivalence naturelles de chacun des ensembles concernés, donnent une description explicite du groupe des classes d'équivalence des structures holomorphes sur Θ —ou Θ^p —, dont

l'origine est la classe canonique, et fournit, en particulier, une démonstration élémentaire du fait que l'irrégularité q de ZM est égale à b_1 (cf. [HI1] Th. (4.1), pour $m = 0$, Cf. aussi [VI]). (Rappelons que, pour une variété compacte kählérienne, on a $q = b_1/2$).

Dans la troisième partie, nous établissons, comme dans le cas usuel où les structures de Weyl considérées sont les connexions de Levi-Civita des métriques de c , une *correspondance de Penrose* qui identifie les sections holomorphes de Θ ou Θ^p , munis de la structure holomorphe déterminée par une structure de Weyl D , et les solutions de l'*opérateur de Penrose* (*twistor operator* dans [A-H-S] et [HI1]) opérant sur les sections du fibré A^-M des endomorphismes antisymétriques anti-autoduaux du fibré tangent TM , ou, pour $p > 1$, les sections de $S_0^p(A^-M)$, puissance tensorielle symétrique à trace nulle d'ordre p de A^-M (Proposition 8). Puis, nous étendons à cette situation, où les connexions D ne sont pas, en général, des connexions métriques, les techniques usuelles de Weitzenböck de la géométrie riemannienne (Proposition 9).

Nous étendons ainsi, à l'ensemble des structures holomorphes de Θ^p , $p > 0$, le fait, bien connu quand les structures holomorphes considérées appartiennent à la classe d'équivalence canonique, [PO] Prop. 5.2, que Θ^p n'admet aucune section holomorphe non-identiquement nulle si (M, c) , compacte, contient une métrique à courbure scalaire négative, et, dans le cas où c contient une métrique à courbure scalaire nulle, aucune section holomorphe non-identiquement nulle relativement à toute structure holomorphe *n'appartenant pas à la classe canonique* (Théorème 2 a) et b)). Nous montrons également que le fibré produit $ZM \times \mathbb{C}$ sur ZM n'admet pas (M compacte) de section holomorphe non-identiquement nulle pour toute structure holomorphe de $ZM \times \mathbb{C}$ non-équivalente à la structure produit (Théorème 2 c)).

Une seconde démonstration du Théorème 2 est donnée, qui en étend partiellement les résultats au cas positif, fondée sur la forme particulièrement simple décrite par le Lemme 5 de la *forme de Chern* γ^D de Θ déterminée par la structure de Weyl (autoduale) D et le fait remarquable que la métrique hermitienne sur ZM construite à partir de D est *standard* au sens de [GA1] 1.14, cf. Appendice A et la présentation de cet appendice à la fin de l'introduction. Nous pouvons dès lors évaluer le *degré* de Θ relatif à cette métrique—qui fait intervenir la courbure scalaire totale au lieu de la courbure scalaire ponctuelle—et le fait général qu'un fibré holomorphe en droites complexes dont le degré est négatif ne possède pas de section holomorphe non-identiquement nulle, cf. III.4 et Appendice A.

Le Théorème 2, combiné avec un récent travail de M. Ville [VI], implique que ZM ne contient aucun diviseur non-trivial si c contient une métrique à courbure scalaire totale négative (M compacte), cf. Remarque 17. Ce résultat figure dans [VI], avec l'hypothèse supplémentaire $b_1 = 0$.

La démonstration que nous en donnons, dans le cas général, est calqué, compte-tenu du Théorème 2, sur celle de [VI] Th. 1.

En marge de cette étude, nous montrons que la forme de Chern γ^D déterminée par la structure de Weyl D est définie-positive et constitue de ce

fait une structure Kählerienne, si et seulement si le tenseur de Ricci Ric^D de D est *fortement-positif*, i.e., si la composante $\tilde{\text{Ric}}^D$ de la courbure R^D de D identifiée à Ric^D est positive comme endomorphisme (symétrique) de $\Lambda^2 TM$ (Proposition 4). La condition de forte-positivité de Ric^D constitue une extension naturelle de la condition “ D est la connexion le Levi-Civita d’une métrique d’Einstein à courbure scalaire positive” pour laquelle la Proposition 4 est bien connue. J’ignore si elle peut être remplacée par la condition plus faible (d’un point de vue algébrique) “ Ric^D est une forme définie-positive”.

Notre étude se termine par deux appendices.

Dans l’Appendice A, nous évaluons les crochets des *champs de vecteurs distingués* sur l’espace des twisteurs déterminés par une structure de Weyl, et leurs images par la structure presque-complexe canonique J de ZM . Nous en déduisons une démonstration élémentaire du théorème d’intégrabilité de J (en toutes dimensions paires), essentiellement identique à celle de [DV], et diverses caractérisations des métriques hermitiennes \tilde{g}^D sur ZM que l’on obtient naturellement à partir du couple (D, g) constitué d’une structure de Weyl D et d’une métrique g dans la classe conforme. Nous montrons en particulier que \tilde{g}^D est une métrique hermitienne *standard* dès lors que D est autoduale (fermée si la dimension de M est supérieure à 4) et que le couple (D, g) est *distingué*, i.e., la 1-forme qui mesure la différence entre D et la connexion de Levi-Civita de g est g -cofermée. Comme nous l’avons déjà signalé, ce fait joue un rôle central dans une des démonstrations du Théorème 2.

Dans l’Appendice B, qui est de nature générale, nous proposons un mode de construction systématique des formules de Weitzenböck naturelles de la géométrie riemannienne à partir de la théorie des opérateurs différentiels naturels d’ordre 1 invariant conformes, dont nous donnons pour ce faire un exposé rapide, dans le langage des structures de Weyl que nous utilisons tout au long de cette étude, tiré de [FE] et de [HI1].

Ce mode de construction éclairé, nous semble-t-il, la nature des formules de Weitzenböck riemanniennes naturelles, i.e. associées à une représentation linéaire du groupe orthogonal, et des théorèmes d’annulation qui leur sont associés, cf. la Proposition 13 de la Remarque 19. En outre, la forme des formules de Weitzenböck obtenues de cette manière se prête naturellement à un traitement unifié dans les cadres riemannien et conforme et leur extension aux structures de Weyl autres que les connexions de Levi-Civita, cf. Proposition 12 et le paragraphe III.3.

Je remercie tous mes amis et collègues qui ont bien voulu prêter leur concours ou leur attention à ce travail, particulièrement ceux du Centre de Mathématiques de l’Ecole Polytechnique ainsi que ceux de l’Institut de Mathématique de Florence qui m’ont gentiment offert la possibilité d’en soumettre une partie à leur critique dans leur merveilleuse ville.

Je dois une reconnaissance particulière à Marina Ville sans les précieux encouragements de qui je n’aurais sans doute pas entrepris la rédaction de cette étude, dont une part est directement motivée par ses propres travaux et dont certains résultats, en particulier le Corollaire du Théorème 2 signalé dans la

Remarque 17, sont l'aboutissement d'une reflexion commune.

Je remercie Claude LeBrun dont les suggestions sont à l'origine de la seconde démonstration du Théorème 2 exposée dans le paragraphe III.4, Yves Benoist dont les avis sûrs m'ont été précieux dans l'élaboration de l'Appendice B, Massimiliano Pontecorvo à qui je dois d'avoir pu rectifier les résultats du paragraphe II.7.

Je remercie enfin le referee qui a attiré mon attention sur certaines références contenues dans la Note finale de la première partie.

I. - Les structures de Weyl d'une variété conforme

Dans cette partie introductive, nous rassemblons quelques faits de géométrie conforme organisés autour de l'importante notion de structure de Weyl. Dans toute la suite, (M, c) note une variété C^∞ , connexe, de dimension $n > 2$ (égale à 4 dans la majeure partie de l'article), munie d'une structure conforme définie-positive c . Tous les objets géométriques considérés sont C^∞ .

Nous noterons TM et T^*M respectivement les fibrés tangent et cotangent de M , RM le fibré des repères de TM , QM le sous-fibré des repères c -orthonormés. Si g est une métrique riemannienne dans la classe conforme déterminée par c , nous noterons Q^gM le fibré des repères g -orthonormés de TM . Si M est orientée—ce qui est le cas à partir de I.4—les repères considérés sont directs.

Les espaces fibrés RM , QM et Q^gM sont des fibrés principaux sur M de groupe structural respectivement le groupe linéaire $GL(n, \mathbf{R})$, le groupe conforme $CO(n)$ et le groupe orthogonal $O(n)$ d'ordre n (respectivement, si M est orientée, le groupe spécial linéaire $GL^+(n, \mathbf{R})$, le groupe spécial conforme $CO^+(n)$ et le groupe spécial orthogonal $SO(n)$ d'ordre n).

I.1. - Le poids d'un fibré vectoriel

Nous rappelons la construction générale suivante. A tout G -fibré principal P sur M (G groupe de Lie) et à toute représentation linéaire $\mu : G \rightarrow \text{Aut}V$, i.e., tout homomorphisme de G dans le groupe $\text{Aut}V$ des automorphismes d'un espace vectoriel (réel ou complexe) V , est associé un fibré vectoriel $E^\mu = P \times V / \mu$, quotient du produit direct $P \times V$ par l'action (à droite) de G définie par

$$(1) \quad (s, v) \cdot \gamma = (s \cdot \gamma, \mu(\gamma^{-1})v), \quad s \in P, \gamma \in G, v \in V,$$

cf. par exemple [K-N] Ch. I.5.

Du fait de l'isomorphisme canonique $CO(n) = O(n) \times \mathbf{R}^+$ —dans lequel le groupe multiplicatif des réels positifs \mathbf{R}^+ est identifié au sous-groupe des dilatations—toute représentation linéaire irréductible μ de $CO(n)$ est identifiée

au couple (μ_0, w) où μ_0 est la restriction de μ à $O(n)$ —également irréductible—et w , le *poids* de μ , est déterminé par la restriction de μ à \mathbf{R}^+ qui est de la forme

$$(2) \quad \mu(a) = a^w \cdot I, \quad a \in \mathbf{R}^+,$$

où I est l'identité de V et w un nombre réel ou complexe suivant que V est réel ou complexe.

Nous dirons que le fibré vectoriel E^μ associé à μ et au $CO(n)$ -fibré principal QM est *de poids* (conforme) w (ainsi que les sections de E^μ).

Chaque fibré vectoriel sur M déterminé, via RM , par une représentation linéaire de $Gl(n, \mathbf{R})$ possède un *poids naturel* qui est le poids de la restriction de cette représentation à $CO(n)$. Avec cette convention, les poids naturels de TM et T^*M sont respectivement $+1$ et -1 (contrairement à [FE] et [HI1] où ils sont de signe opposé).

Nous noterons AM le *fibré des endomorphismes antisymétriques* (relativement à c) de TM (ou T^*M) et $\text{ad}QM$ le *fibré adjoint* déterminé par QM via la représentation adjointe Ad de $CO(n)$ sur son algèbre de Lie $\text{co}(n)$. L'un et l'autre sont de poids 0 et $\text{ad}QM$ est identifié canoniquement à la somme orthogonale

$$(3) \quad \text{ad}QM = \mathbf{R} \cdot I \oplus AM,$$

où $\mathbf{R} \cdot I$ est le fibré trivial (de poids 0) engendré par l'identité I de TM .

Le fibré vectoriel AM est muni d'une *structure euclidienne canonique* définie par

$$(4) \quad \langle a, b \rangle = -\frac{1}{2} \text{trace}(a \circ b), \quad a, b \in A_x M, \quad x \in M.$$

Pour tout réel w , nous noterons L^w le *fibré des scalaires de poids* w sur M , i.e., le fibré vectoriel réel de rang 1, naturellement orienté (donc trivial), déterminé, via RM , par la représentation linéaire λ^w de $Gl(n, \mathbf{R})$ définie par

$$(5) \quad \lambda^w : \gamma \in Gl(n, \mathbf{R}) \rightarrow |\det \gamma|^{w/n} \in \mathbf{R}^+ = Gl^+(1, \mathbf{R}),$$

où \det note le déterminant.

Le fibré des scalaires de poids 1 sera noté simplement L et le fibré des scalaires de poids 0 s'identifie canoniquement au fibré produit $M \times \mathbf{R}$.

Le fibré S^2T^*M des formes bilinéaires symétriques sur TM , qui est de poids naturel -2 , se décompose en la somme orthogonale

$$(6) \quad S^2T^*M = S_0^2TM \oplus \mathbf{R} \cdot [g],$$

où $\mathbf{R} \cdot [g]$ note le sous-fibré engendré par les métriques de la classe conforme, naturellement identifié au fibré L^{-2} des scalaires de poids -2 .

Pour toute section ψ de S^2T^*M , nous noterons $\text{tr}\psi$ la *trace (conforme)* de ψ , i.e. la projection de ψ dans $\mathbf{R} \cdot [g]$, et ψ_0 la partie à trace nulle de ψ , i.e. sa projection dans $S_0^2T^*M$.

La trace conforme sera considérée alternativement comme une section de S^2T^*M , proportionnelle aux métriques de la classe conforme, ou comme un scalaire de poids -2 , réalisé, pour toute métrique g dans c , par la *trace métrique* $\text{tr}_g\psi$ de ψ relative à g .

Pour tout g dans c , on a ainsi

$$(7) \quad \text{tr}\psi = \frac{1}{n} \text{tr}_g\psi \cdot g.$$

I.2. - Structures de Weyl sur une variété conforme

DEFINITION 1. Une *structure de Weyl* sur (M, c) est une connexion linéaire D sur TM

a) *conforme*, i.e. induite par une connexion $CO(n)$ -équivariante sur QM , et

b) *symétrique*, i.e. de torsion nulle.

Une structure de Weyl D est *fermée* si elle est, au voisinage de tout point de M , la connexion de Levi-Civita d'une métrique locale dans la classe conforme, *exacte* si elle est la connexion de Levi-Civita d'une métrique globale dans c . Dans les deux cas, la métrique, locale ou globale, est définie à un facteur constant près par la structure de Weyl.

L'ensemble des structure de Weyl s'identifie naturellement, cf. Remarque 1, à l'espace des connexions linéaires sur le fibré L des scalaires de poids 1 et, comme tel, est un espace affine modelé sur l'espace des 1-formes réelles sur M . De façon précise, deux structures de Weyl D_1 et D_2 sur (M, c) sont liées par

$$(8) \quad D_2 = D_1 + \tilde{\theta},$$

où θ est une 1-forme réelle sur M et $\tilde{\theta}$ la 1-forme à valeurs dans le fibré adjoint $\text{ad}QM$, identifiée à θ , définie par

$$(9) \quad \tilde{\theta}(X) = \theta(X) \cdot I + \theta \wedge X.$$

NOTE. Pour tous θ et X dans T_x^*M et T_xM respectivement, $x \in M$, nous noterons $\theta \wedge X$ l'endomorphisme antisymétrique (de poids 0) de T_xM défini par

$$(10) \quad (\theta \wedge X)Y = \theta(X)Y - g(X, Y)\theta^*,$$

où g est une métrique quelconque dans la classe conforme et θ^* le dual riemannien de θ relatif à g .

L'ensemble des structures de Weyl fermées (resp. exactes) est le sous-espace affine modelé sur le sous-espace des 1-formes réelles fermées (resp. exactes) de M , cf. Remarque 1.

Deux structures de Weyl sont *équivalentes* si elles diffèrent par une 1-forme exactes. En particulier, les connexions de Levi-Civita des métriques (globales) dans c sont équivalentes en tant que structures de Weyl.

Chaque connexion conforme sur TM , en particulier chaque structure de Weyl D , induit, pour toute représentation linéaire (réelle ou complexe) $\mu: CO(n) \rightarrow \text{Aut } V$, une connexion linéaire (réelle ou complexe) D^μ sur le fibré vectoriel E^μ , dont la distribution horizontale est égale, par définition, à la projection sur $E^\mu = QM \times V / \mu$ de la distribution horizontale $CO(n)$ -équivalente sur QM qui détermine D .

Si D_1 et D_2 sont liées par (8), les connexions induites D_1^μ et D_2^μ satisfont, si $\mu = (\mu_0, w)$,

$$(11) \quad \begin{aligned} D_2^\mu &= D_1^\mu + d\mu(\tilde{\theta}) \\ &= D_1^\mu + \sum_{i=1}^n d\mu_0(\theta \wedge e_i) \otimes e_i^* + w \cdot I \otimes \theta, \end{aligned}$$

où $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$, est un repère orthonormé (conforme) au point considéré et $\{e_i^*\}$ le repère dual (algébrique).

NOTE. Pour $\mu = (\mu_0, w)$, représentation linéaire de $CO(n)$, nous noterons $d\mu_0$ à la fois la différentielle de μ_0 à l'origine, qui est un homomorphisme $CO(n)$ -équivalent de l'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(n)$ dans l'algèbre de Lie $\text{End } V$ des endomorphismes de V , et l'homomorphisme (géométrique) de AM dans le fibré $\text{End } E^\mu$ des endomorphismes de E^μ qu'elle détermine. De même, $d\mu$ notera la différentielle à l'origine de μ et l'homomorphisme de $\text{ad } QM$ dans $\text{End } E^\mu$ qu'elle détermine (dont $d\mu_0$ est la restriction à AM).

REMARQUE 1. Une structure conforme étant fixée sur M , le \mathbf{R}^+ -fibré principal L^+ constitué des éléments positifs de L (relativement à son orientation naturelle) s'identifie au fibré des éléments de longueur, au sens de H. Weyl [WE] §16, et les sections (locales ou globales) de L^+ s'identifient clairement aux métriques (locale ou globales) dans la classe conforme.

Les structures (de Weyl) introduites par H. Weyl dans [WE] aux fins de généraliser la géométrie riemannienne dans le contexte conforme, coïncident, dans le langage actuel des connexions, avec les connexions \mathbf{R}^+ -équivalentes sur L^+ , i.e. avec les connexions linéaires sur L .

L'observation fondamentale de H. Weyl [WE] §18.11, cf. aussi [FO], qui constitue l'extension naturelle à la géométrie conforme du *Théorème fondamental de la géométrie riemannienne* (existence et unicité de la connexion de Levi-Civita)—et justifie la Définition 1—est celle-ci: l'application qui, à toute connexion linéaire D sur TM associe la connexion induite D^L sur L détermine, par restriction, un *isomorphisme affine de l'espace des connexions linéaires*

conformes symétriques sur TM sur l'espace des connexions linéaires sur L .

Par cet isomorphisme, les structures de Weyl fermées sont identifiées aux connexions plates, i.e. à holonomie localement triviale, de L et les structures de Weyl exactes sont identifiées aux connexions triviales, i.e. à holonomie triviale, de L : si D^L est plate (resp. triviale), L^+ est localement (resp. globalement) trivialisable par une section parallèle, définie à un facteur constant (positif) près, identifiée à une métrique locale (resp. globale) dans la classe conforme, dont D est la connexion de Levi-Civita.

Dans le projet initial de H. Weyl, la connexion D^L est interprétée comme un potentiel électro-magnétique, et la courbure ρ^D de D^L est le champ électromagnétique correspondant.

Comme on sait, ce schéma initial a dû être substantiellement modifié en substituant au groupe R^+ le groupe unitaire (compact) $U(1)$ —vu comme un groupe de “symétries internes”—et le fibré L^+ par un $U(1)$ -gibré principal auxiliaire, non directement lié à la géométrie conforme de M .

Ainsi modifiée, la théorie de H. Weyl a trouvé son plein épanouissement dans la physique moderne des particules, sous le nom de “théorie de jauge”, ou “théorie des champs de Yang-Mills”, cf. par exemple [BO1] (le terme même d’“invariance de jauge”, *Eichinvarianz*, est dû à H. Weyl, cf. [WE] Preface to the first american printing).

I.3. - La courbure d'une structure de Weyl

La courbure R^D d'une structure de Weyl D est la 2-forme sur M à valeurs dans le fibré adjoint $ad\,QM$ définie par

$$(12) \quad R^D(X \wedge Y) = D_{[X,Y]} - [D_X, D_Y], \quad X, Y \in T_x M, \quad x \in M.$$

La courbure ρ^D de la connexion induite D^L sur L , qui est une 2-forme réelle fermée (exacte puisque L est trivial) sur M est définie de façon similaire. La courbure R^D se décompose en la somme orthogonale

$$(13) \quad R^D = \tilde{R}^D + \tilde{\rho}^D,$$

où \tilde{R}^D est de type riemannien et le terme additionnel $\tilde{\rho}^D$, identifié à ρ^D , est défini par

$$(14) \quad \begin{aligned} \tilde{\rho}^D(X \wedge Y) &= \rho^D(X, Y) \cdot I + \frac{1}{2} [\rho^D, X \wedge Y] \\ &= \rho^D(X, Y) \cdot I + \frac{1}{2} (\rho^D(X) \wedge Y - \rho^D(Y) \wedge X). \end{aligned}$$

NOTE. Dans (14), ρ^D et $X \wedge Y$ sont considérés comme des endomorphismes de TM de poids respectifs -2 et $+2$, en posant

$$(15) \quad \rho^D(X)Y = \rho^D(X, Y), \quad (X \wedge Y)Z = g(X, Z)Y - g(Y, Z)X, \quad g \in c.$$

Le crochet $[\rho^D, X \wedge Y]$ ainsi que les produits extérieurs $\rho^D(X) \wedge Y$ et $\rho^D(Y) \wedge X$ sont alors des éléments bien déterminés (de poids 0) de AM . Cf. aussi (10).

Chacune des composantes \tilde{R}^D et $\tilde{\rho}^D$ de R^D satisfait la première identité de Bianchi, mais non la seconde en général. La *composante riemannienne* \tilde{R}^D prend ses valeurs dans le sous-fibré AM de $\text{ad } QM$, et sera considérée comme un endomorphisme de poids -2 (symétrique) de AM . Elle se décompose en la somme orthogonale

$$(16) \quad \tilde{R}^D = \tilde{\text{Ric}}^D + W,$$

où W , le *tenseur de Weyl* de la structure conforme c , est indépendant de la structure de Weyl D et $\tilde{\text{Ric}}^D$, l'*opérateur de Ricci* (symétrisé) de D est de la forme

$$(17) \quad \tilde{\text{Ric}}^D(X \wedge Y) = h^D(X) \wedge Y - h^D(Y) \wedge X,$$

où h^D , le *tenseur de Ricci normalisé* (symétrisé) de D , est une forme bilinéaire.

L'opérateur de Ricci se décompose à son tour en la somme orthogonale

$$(18) \quad \tilde{\text{Ric}}^D = \tilde{\text{Scal}}^D + \tilde{\text{Ric}}_0^D,$$

où $\tilde{\text{Scal}}^D$ est la trace et $\tilde{\text{Ric}}_0$ la partie à trace nulle de $\tilde{\text{Ric}}^D$ (considéré, ainsi que ses composantes, comme des endomorphismes—de poids -2 —de AM).

Nous obtenons ainsi, en combinant (13), (16) et (18), la décomposition orthogonale

$$(19) \quad R^D = \tilde{\text{Scal}}^D + \tilde{\text{Ric}}_0 + W + \tilde{\rho}^D,$$

qui généralise la décomposition usuelle de la courbure riemannienne, cf. par exemple [BE] Ch. 1.G. Le terme additionnel $\tilde{\rho}^D$ est nul, par définition, si et seulement si D est fermée.

La décomposition (13) explicite le fait que l'espace (algébrique) $\tilde{\mathcal{K}}(n)$ des tenseurs de courbure des structures de Weyl attachées à une structure conforme, vu comme espace de représentation, de poids -2 , de $CO(n)$, est la somme directe de l'espace (algébrique) $\mathcal{K}(n)$ des tenseurs de courbure riemanniens et de $\Lambda^2(\mathbf{R}^n)$, plongé dans $\tilde{\mathcal{K}}(n)$ comme il est indiqué en (14). La décomposition (19) est alors la traduction géométrique de la décomposition de $\tilde{\mathcal{K}}(n)$ en facteurs irréductibles sous l'action de $CO(n)$.

Une décomposition différente de R^D est obtenue, par projection orthogonale, à partir de la décomposition (3) de $\text{ad } QM$:

$$(20) \quad R^D = R_A^D + F^D,$$

où F^D est la *courbure translationnelle* de D , égale à $I \otimes \rho^D$, et R_A^D , la *courbure directionnelle* de D , est l'endomorphisme de poids -2 , non symétrique en

général, de AM induit par R^D . Chacune des composantes R_A^D et F^D satisfait la deuxième identité de Bianchi (relative à D), mais non la première en général. La courbure directionnelle R_A^D est la somme orthogonale

$$(21) \quad R_A^D = \tilde{h}_A^D + W,$$

où W est le tenseur de Weyl de c tandis que \tilde{h}_A^D est de la forme

$$(22) \quad \tilde{h}_A^D(X \wedge Y) = h_A^D(X) \wedge Y - h_A^D(Y) \wedge X,$$

où h_A^D est une forme bilinéaire réelle, non symétrique en général, sur M , égale à

$$(23) \quad h_A^D = h^D + \frac{1}{2} \rho^D.$$

Le tenseur de Ricci normalisé h^D et ρ^D , i.e. la partie de la courbure R^D qui dépend effectivement de D , sont déterminés par la forme bilinéaire S^D , obtenue par contraction de R^D , définie par

$$(24) \quad S^D(X, Y) = \text{trace} \{Z \rightarrow R^D(X \wedge Z)Y\}, \quad X, Y, Z \in T_x M, \quad x \in M,$$

dont la partie antisymétrique est égale à $\frac{n}{2} \rho^D$.

Nous appellerons *tenseur de Ricci* (symétrisé) de D la partie symétrique Ric^D de S^D , *courbure scalaire* de D la trace (conforme) Scal^D de Ric^D , qui est un scalaire de poids -2 , égal à deux fois la trace de \tilde{R}^D (ou de R_A^D).

Le tenseur de Ricci normalisé h^D est lié au tenseur de Ricci Ric^D par

$$(25) \quad \begin{aligned} h^D &= \frac{1}{2(n-1)} \text{Scal}^D + \frac{1}{(n-2)} \text{Ric}_0^D \\ &= \frac{1}{2n(n-1)} \text{Scal}_g^D \cdot g + \frac{1}{(n-2)} \text{Ric}_0, \end{aligned}$$

où g est une métrique quelconque dans c et Scal_g^D est la trace métrique de Ric^D relativement à g , cf. (7).

Si D_1 et D_2 sont deux structures de Weyl liées par (8), on vérifie aisément les relations suivantes

$$(26) \quad \rho^{D_2} = \rho^{D_1} - d\theta,$$

$$(27 \text{ a}) \quad \text{Ric}^{D_2} = \text{Ric}^{D_2} \cdot \text{tr } D_1 \theta + (n-2) \left[-D_1 \theta + \frac{1}{2} d\theta + \theta \otimes \theta - n \cdot \text{tr } \theta \otimes \theta \right],$$

$$(27 \text{ b}) \quad \text{Scal}^{D_2} = \text{Scal}^{D_1} - 2(n-1) \text{tr } D_1 \theta - (n-1)(n-2) |\theta|^2.$$

NOTE. La dérivée covariante $D_1 \theta$ est une forme bilinéaire dont $\text{tr } D_1 \theta$ est la trace conforme, considérée comme une forme bilinéaire dans (27 a) et comme

un scalaire de poids -2 dans (27 b), cf. (7). De même, $|\theta|^2$ est un scalaire de poids -2 , égal à la trace conforme de $\theta \otimes \theta$, réalisé, pour toute métrique g dans c , par la norme au carré de θ relativement à g .

REMARQUE 2. Pour chaque représentation linéaire (irréductible) $\mu = (\mu_0, w)$ de $CO(n)$, la courbure R^{D^μ} de la connexion induite D^μ est déterminée par (cf. (20))

$$(28) \quad \begin{aligned} R^{D^\mu} &= d\mu(R^D) \\ &= d\mu_0(R_A^D) + w \cdot F^D. \end{aligned}$$

DEFINITION 2. Le tenseur de Ricci de D est *fortement-positif* (resp. *fortement-négatif*) si l'opérateur de Ricci $\tilde{\text{Ric}}^D$, vu comme endomorphisme de poids -2 de AM , est défini-positif (resp. défini-négatif).

On déduit immédiatement de (17) que Ric^D est fortement-positif si et seulement si le tenseur de Ricci normalisé h^D est 2-positif, i.e. satisfait l'inégalité

$$(29 \text{ a}) \quad h^D(X, X) + h^D(Y, Y) > 0,$$

soit encore, par (25), si et seulement si le tenseur de Ricci lui-même vérifie

$$(29 \text{ b}) \quad \text{Ric}^D(X, X) + \text{Ric}^D(Y, Y) > \frac{1}{(n-1)} \text{Scal}^D,$$

pour tout couple c -orthonormé $\{X, Y\}$.

NOTE. (29 a)-(29 b) sont des inégalités entre scalaires de poids -2 . Elles doivent être renversées lorsque fortement-positif est remplacé par fortement-négatif.

Il résulte de (29 b) que la forte-positivité (resp. forte-négativité) de Ric^D implique sa positivité (resp. négativité) en tant que forme bilinéaire symétrique.

L'implication inverse n'est pas vraie.

Toutefois, Ric^D est clairement fortement-positif (resp. fortement-négatif) lorsque D est une *structure de Weyl d'Einstein*, i.e. telle que $\tilde{\text{Ric}}_0^D$ —donc aussi Ric_0^D —est nul, à courbure scalaire positive (resp. négative), puisque, dans ce cas, l'opérateur de Ricci est réduit à sa partie scalaire $1/n(n-1)\text{Scal}^D \cdot I$.

REMARQUE 3. Si $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres de Ric^D , qui sont des scalaires de poids -2 , la condition de forte-positivité de Ric^D équivaut à la *condition de pincement*

$$(30 \text{ a}) \quad \lambda_i + \lambda_j > \frac{1}{(n-2)} \sum_{k \neq i, j} \lambda_k, \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

qui, pour $n = 4$, se réduit à la seule inégalité

$$(30 \text{ b}) \quad \lambda_1 + \lambda_2 > \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_4).$$

(Inégalité renversées dans le cas négatif). Cf. [PL] où d'autres implications de ce type de conditions sont examinées, en particulier dans le cas négatif.

OBSERVATION CONCERNANT LES NOTATIONS. Les formes bilinéaires h^D et Ric^D définies dans ce paragraphe sont *symétriques* par définition. Elles diffèrent des formes bilinéaires h^D et Ric^D de [GA2] qui sont respectivement égales, avec les notations adoptées ici, à h_A^D et $\text{Ric}^D + (n - 2)/2 \cdot \rho^D$.

I.4. - L'espace de twisteurs d'une variété conforme orientée de dimension paire

Dans ce paragraphe, M est orientée et de dimension paire $n = 2m$ (supérieure ou égale à 4).

DEFINITION 3. L'espace des twisteurs (projectifs) ZM de (M, c) est l'espace fibré au-dessus M dont chaque fibre $Z_x M$ est la variété (compacte) des structures complexes orthogonales négatives de $T_x M$.

NOTE. Une structure complexe de $T_x M$ sera vue comme un automorphisme de $T_x M$, noté génériquement J , de carré $-I$. Elle est *orthogonale* si J est une isométrie relativement à la structure conforme c . Elle est *négative* si l'orientation commune de $T_x M$ induite par les repères J -adaptés $\{e_1, J e_1, \dots, e_m, J e_m\}$ est l'opposée de l'orientation de $T_x M$.

Puisqu'une structure complexe J est orthogonale si et seulement si elle est antisymétrique, l'espace des twisteurs ZM est un *sous-fibré* de AM (et, comme tel, est de poids naturel 0).

L'espace des twisteurs ZM est une variété de dimension paire $2\tilde{m} = m(m + 1)$ dont nous noterons $T ZM$ le fibré tangent et $T^V ZM$ le *fibré tangent vertical*, i.e. le sous-fibré de $T ZM$ constitué des vecteurs tangents aux fibres de la projection naturelle, notée π , de ZM sur M .

Chaque fibre $Z_x M$ de ZM étant naturellement réalisée comme une sous-variété de l'espace vectoriel $A_x M$, chaque fibre $T^V J ZM$ du fibré tangent vertical, $J \in Z_x M$, s'identifie *naturellement* au sous-espace de $A_x M$ constitué des éléments J -antilineaires, i.e. qui anticommulent à J :

$$(31) \quad T^V J ZM = \{a \in A_x M \mid J \circ a = -a \circ J\}.$$

Il résulte de cette identification—que nous ferons implicitement dans la suite—que le fibré vectoriel $T^V ZM$ est muni d'une *structure complexe naturelle* J définie par

$$(32) \quad J a = J \circ a = -a \circ J, \quad a \in T^V J ZM, \quad J \in ZM.$$

La structure euclidienne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de AM , restreinte à chaque fibre $T_J^V ZM$ de $T^V ZM$, est clairement compatible avec J et constitue, conjointement avec J , la *structure hermitienne canonique* h de $T^V ZM$.

La restriction de la structure hermitienne canonique h à chaque fibre $Z_x M$ induit, sur $Z_x M$, une structure presque-hermitienne canonique, invariante par l'action (transitive) naturelle de $SO(T_x M)$ (= le groupe des automorphismes de $T_x M$ qui préservent l'orientation et chaque métrique de la classe conforme), définie par

$$(33) \quad A \cdot J = A \circ J \circ A^{-1}, \quad A \in SO(T_x M), \quad J \in Z_x M.$$

Cette structure presque-hermitienne est *kählérienne* (comme il résulte immédiatement des formules (A 10), Appendice A), isomorphe à la structure kählérienne symétrique—essentiellement unique, cf. par ex. [BE] Ch. 8.E—du quotient $SO(2m)/U(m)$, où $U(m)$ note le groupe unitaire d'ordre m canoniquement plongé dans $SO(2m)$.

L'espace des twisteurs ZM possède lui-même une *structure presque-complexe canonique* J , dont la restriction à chaque fibre coïncide avec la structure complexe définie par (27), et dont nous rappelons la construction.

Toute structure de Weyl D sur (M, c) détermine une connexion sur ZM , considéré comme sous-fibré de AM , i.e., pour tout J dans $Z_x M$, une décomposition en somme directe

$$(34) \quad T_J ZM = T_J^V ZM \oplus H_J^D$$

où H_J^D est l'*espace horizontal* déterminé par D , identifié, au moyen de la projection π , à l'espace $T_x M$.

Tout vecteur U dans $T_J ZM$ s'écrit ainsi, de façon unique, sous la forme

$$(35) \quad U = (v^D(U), X)$$

où X est la projection de U dans $T_x M$ et $v^D(U)$, la *partie principale* de U (relativement à D), est la projection de U dans $T_J^V ZM$ parallèlement à H_J^D .

La partie principale $v^D(U)$ de U est déterminée par D de la façon suivante: si U est engendré par une courbe $J(t)$ dans ZM , $-1 < t < 1$, avec $J(0) = J$, $\dot{J}(0) = U$, on a

$$(36) \quad v^D(U) = (D_X J(t))(x),$$

où $D = D^{Ad}$ note la connexion induite sur AM .

Il en résulte, par (9) et (11), que les parties principales de U relativement à deux structures de Weyl liées par (8) satisfont la relation

$$(37) \quad v^{D_2} = v^{D_1} + [\theta \wedge X, J].$$

Avec ces notations, la structure presque-complexe canonique J sur ZM est définie par

$$(38) \quad JU = (J \circ v^D(U), JX), \quad U \in T_J ZM, \quad J \in ZM$$

où D est une structure de Weyl quelconque sur (M, c) .

Il résulte clairement de (37) que la définition de J ne dépend pas du choix de D . Par construction même de J , le fibré tangent vertical $T^V ZM$ est un sous-fibré complexe du fibré tangent $(T ZM, J)$, et chaque fibre $Z_x M$ est une sous-variété complexe de ZM . Le calcul explicite de la torsion complexe (tenseur de Nijenhuis) de J conduit aisément aux résultats bien-connus suivants, cf. Appendice A:

1) si $m > 2$, J est intégrable si et seulement si le tenseur de Weyl de c est nul, i.e. la structure conforme c est *plate*,

2) si $m = 2$, J est intégrable si et seulement si le demi-tenseur de Weyl négatif W_- de c (cf. paragraphe suivant) est nul, i.e. la structure conforme c est *autoduale*.

I.5. - La dimension 4

Lorsque n est égal à 4, l'isomorphisme $\text{Spin}(4) = \text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1)$, cf. infra Remarque 4, induit une décomposition de l'algèbre de Lie $\text{spin}(4) = \mathfrak{so}(4)$ en la somme directe

$$(39) \quad \mathfrak{so}(4) = \mathfrak{so}^+(4) \oplus \mathfrak{so}^-(4)$$

où $\mathfrak{so}^+(4)$ et $\mathfrak{so}^-(4)$ sont les algèbres de Lie des sous-groupes $\text{Sp}(1) \times \{1\}$ et $\{1\} \times \text{Sp}(1)$ respectivement. Ces sous-algèbres sont invariantes par l'action adjointe de $SO(4)$ et leurs complexifications s'identifient respectivement, comme espaces de représentation de $SO(4)$, à Δ_+^2 et Δ_-^2 (cf. Remarque 4).

Si M est orientée, de dimension 4, la décomposition (39) induit une décomposition en somme directe orthogonale de tous les fibrés vectoriels (réels) associés, via le $CO^+(4)$ -fibré principal QM , à la représentation adjointe de $SO(4)$ et à un poids (réel) quelconque. En particulier, le fibré AM s'écrit

$$(40) \quad AM = A^+M \oplus A^-M,$$

où les sous-fibrés A^+M et A^-M , respectivement associés à $\mathfrak{so}^+(4)$ et $\mathfrak{so}^-(4)$, sont constitués des éléments *autoduaux* (resp. *antiautoduaux*) de AM . L'involution de AM déterminée par (40), égale à l'identité sur A^+M et moins l'identité sur A^-M , est notée $*$ (*opérateur de Hodge*). Les éléments de A^+M commutent avec ceux de A^-M et tout élément a de A^+M ou A^-M vérifie la relation

$$(41) \quad a^2 = -\frac{1}{2} |a|^2 \cdot I.$$

Le tenseur de Weyl W de la structure conforme c , vu comme un endomorphisme de poids -2 de AM , commute à $*$, i.e. préserve chaque sous-fibré A^+M et A^-M , et se décompose en la somme orthogonale

$$(42) \quad W = W^+ + W^-,$$

où les *demi-tenseurs de Weyl* (resp. *positif* et *négatif*) sont définis par

$$(43) \quad W^+ = \frac{1}{2}(W + W^*), \quad W^- = \frac{1}{2}(W - W^*).$$

L'action de W^+ (resp. W^-) sur A^-M (resp. A^+M) est triviale et induit, par restriction, un endomorphisme de poids -2 , symétrique et de trace nulle, de A^+M (resp. A^-M).

Pour chaque structure de Weyl D , l'opérateur de Ricci $\tilde{\text{Ric}}^D$, lui-même vu comme un endomorphisme de poids -2 de AM , se décompose en sa partie scalaire $\tilde{\text{Scal}}^D$, égale à $1/12 \cdot \text{Scal}^D \cdot \text{Id}_{|AM}$, et sa partie à trace nulle $\tilde{\text{Ric}}_0^D$ qui *anticommut*e à $*$, i.e. *échange* les sous-fibrés A^+M et A^-M , [S-T].

Le terme additionnel $\tilde{\rho}^D$ se décompose lui-même en

$$(44) \quad \tilde{\rho}^D = \tilde{\rho}_+^D + \tilde{\rho}_-^D,$$

où ρ_+^D et ρ_-^D sont respectivement la composante autoduale et antiautoduale de ρ^D , et $\tilde{\rho}_+^D$ et $\tilde{\rho}_-^D$, définis par (14), agissent *trivialement* sur A^-M et A^+M respectivement.

Dans les deux définitions suivantes, M est orientée et de dimension 4.

DEFINITION 3. Une structure conforme c est *autoduale* (resp. *antiautoduale*) si le demi-tenseur de Weyl négatif W_- (resp. le demi-tenseur de Weyl positif W_+) de c est nul.

DEFINITION 4. Une structure de Weyl D est *autoduale* (resp. *antiautoduale*) si la courbure ρ^D de la connexion D^L induite sur L est autoduale (resp. antiautoduale), i.e. si ρ_-^D (resp. ρ_+^D) est nul.

NOTE. On prendra garde au fait que les Définitions 3 et 4 sont indépendantes l'une de l'autre.

Les structures de Weyl autoduales sont les "instantons" de la théorie de Weyl, vue comme une "théorie de jauge" de groupe R^+ , i.e., via l'identification $D \rightarrow D^L$, les connexions autoduales, au sens usuel, de L , cf. Remarque 1.

Une structure de Weyl fermée est à la fois autoduale et antiautoduale. Inversement on a le

LEMME 1. Si M est compacte, toute structure de Weyl autoduale (ou antiautoduale) est fermée.

DEMONSTRATION. Puisque L est trivial, la courbure ρ^D de D^L est une 2-forme exacte. Il résulte immédiatement de la théorie de Hodge élémentaire sur

une variété compacte qu'une 2-forme réelle exacte, autoduale ou anti-autoduale, est nulle. □

Nous noterons \mathcal{D}_+ l'espace affine des structures de Weyl autoduales sur (M, c) , \mathcal{D} le sous-espace affine des structures de Weyl fermées.

Ces deux espaces coïncident lorsque M est compacte (Lemme 1).

L'ensemble $[\mathcal{D}_+]$ des classes d'équivalences des structures de Weyl autoduales s'identifie naturellement avec l'espace vectoriel $H_+^1(M, \mathbf{R})$, quotient de l'espace vectoriel des 1-formes réelles sur M dont la différentielle est autoduale par le sous-espace des 1-formes exactes, i.e. au groupe de cohomologie d'ordre 1 du complexe elliptique réel

$$(45) \quad 0 \rightarrow \mathcal{A}^0(M) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1(M) \xrightarrow{d_+} \mathcal{A}_+^2(M) \rightarrow 0,$$

où $\mathcal{A}^0(M)$, $\mathcal{A}^1(M)$, $\mathcal{A}_+^2(M)$ notent respectivement le faisceau des germes de fonctions, de 1-formes, de 2-formes autoduales réelles sur M , et d_+ la composante autoduale de la différentielle extérieure, cf. [HI1] p. 188, Rem. 1.

Dans cette identification, l'origine de $H_+^1(M, \mathbf{R})$ représente la totalité des connexions de Levi-Civita des métriques (globales) appartenant à la classe conforme c .

Lorsque M est compacte, $H_+^1(M, \mathbf{R})$, donc aussi $[\mathcal{D}_+]$, coïncide avec l'espace de cohomologie de De Rham $H^1(M, \mathbf{R})$ (Lemme 1), dont la dimension (finie), égale au premier nombre de Betti $b_1 = b_1(M)$ de M , est aussi égale au premier nombre de Betti de l'espace des twisteurs ZM puisque la fibre de π est connexe et simplement connexe (suite exacte d'homotopie).

REMARQUE 4. Le groupe spinoriel d'ordre 4 $\text{Spin}(4)$ est isomorphe au produit direct $\text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1)$, où $\text{Sp}(1)$ est le groupe des quaternions de norme 1.

La projection naturelle ρ de $\text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1)$ sur $SO(4)$ qui réalise cette identification s'écrit

$$(46) \quad \rho((q_1, q_2)) \cdot u = q_1 \cdot u \cdot q_2^{-1}, \quad u \in \mathbf{H} = \mathbf{R}^4, \quad q_1, q_2 \in \text{Sp}(1) \subset \mathbf{H},$$

où \mathbf{H} note le corps des quaternions.

Nous noterons Δ_+ et Δ_- les représentations tautologiques (complexes) de $\text{Spin}(4) = \text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1)$ induites respectivement par la première et la deuxième projection sur $\text{Sp}(1)$, via l'identification de \mathbf{H} avec \mathbf{C}^2 et de $\text{Sp}(1)$ avec le groupe spécial unitaire $SU(2)$.

Les représentations (complexes) irréductibles de $\text{Spin}(4)$ sont les représentations $\Delta_+^p \otimes \Delta_-^q$ où Δ_+^p (resp. Δ_-^q) est la puissance tensorielle symétrique (complexe) d'ordre p (resp. d'ordre q) de Δ_+ (resp. Δ_-).

Parmi celles-ci, celles pour lesquelles la somme $p + q$ est paire sont induites par les représentations irréductibles de $SO(4)$. Elles possèdent en outre une structure réelle naturelle induite par les structures quaternionniennes naturelles de Δ_+ et Δ_- , et sont ainsi les complexifiées de représentations réelles (irréductibles) que nous noterons encore $\Delta_+^p \otimes \Delta_-^q$ ($p + q$ pair). Pour chaque

poids (réel) w , la représentation (réelle) $(\Delta_+^p \otimes \Delta_-^q, w)$ de $CO^+(4)$ détermine, via QM , un fibré vectoriel (réel) de rang $(p+1)(q+1)$ qui ne dépend que de la structure conforme et de l'orientation de M . En particulier, les fibrés vectoriels (réels) déterminés par $(\Delta_+ \otimes \Delta_-, 1)$, $(\Delta_+ \otimes \Delta_-, -1)$, $(\Delta_\pm^2, -2)$, $(\Delta_\pm^2, 0)$ s'identifient canoniquement à TM , T^*M , au fibré $\Lambda_\pm^2 M$ des 2-formes réelles \pm -autoduales, à $A^\pm M$ respectivement. Nous donnerons, en II.6, une interprétation géométrique des fibrés de poids zéro associés à Δ_-^{2p} (p entier positif) qui jouent un rôle important dans la suite.

NOTE. Les structures de Weyl apparaissent en divers contextes, notamment en géométrie hermitienne où il a été observé [VA], cf. aussi [GA1], qu'une structure complexe adaptée à une structure conforme c détermine sur c une structure de Weyl D , fermée si et seulement si la structure hermitienne est localement conformément kählérienne. (Les structures de Weyl que nous appelons fermées, i.e. les connexions globales sur M qui sont localement, mais non nécessairement globalement, des connexions de Levi-Civita, ont été considérées en [TA]).

En dimension (réelle) 4, une structure hypercomplexe détermine à la fois une structure conforme (autoduale) et une structure de Weyl, appelée *connexion d'Obata*, autoduale (donc fermée dans le cas compact) et d'Einstein, cf. [SA2] Ch. 9, [P-S]. Une classification de ces variétés dans le cas compact figure en [BY].

Une interprétation de nature "twistorielle" des structures de Weyl-Einstein en dimension 3 figure en [HI3], cf. aussi [P-T], et [TO] où une classification de ces structures est donnée dans le cas compact. La référence standard pour la construction de l'espace des twisteurs d'une variété riemannienne autoduale de dimension 4 est [A-H-S], cf. aussi [SA1] et, en toutes dimensions, [DV]. La présentation que nous donnons ici est proche de [DV].

II. - Les structures holomorphes naturelles du fibré tangent vertical

II.1. - Le fibré tangent vertical en dimension 4

Nous supposons désormais—sauf mention contraire explicite—que M est orientée, de dimension 4, et que la structure conforme c est autoduale.

L'espace des twisteurs (ZM, \mathcal{J}) est alors une variété complexe de dimension 3.

Comme espace fibré au-dessus de M , ZM est un sous-fibré de A^-M dont chaque fibre $Z_x M$ est la sphère $S_{\sqrt{2}}(A^-M)$ de rayon $\sqrt{2}$ de A_x^-M , cf. I(41), isomorphe, comme variété kählérienne symétrique, à la droite projective complexe canonique CP^1 (de courbure sectionnelle 1/2).

Nous noterons dans la suite Θ le fibré tangent vertical $T^V ZM$ sur ZM , considéré comme un fibré vectoriel complexe de rang 1 muni de la structure hermitienne canonique h définie en I.4. Pour chaque J dans $Z_x M$, on a une

décomposition en somme directe orthogonale

$$(1) \quad A_x^- M = \mathbf{R} \cdot J \oplus \Theta_J$$

i.e. la fibre Θ_J de Θ en J est, à la fois, l'espace des éléments de $A_x^- M$ qui anticommute à J et l'orthogonal de J dans $A_x^- M$. En outre, $A_x^- M$ est la réunion des Θ_J lorsque J décrit la fibre $Z_x M$.

Le commutateur dans chaque fibre Θ_J est lié à la forme de Kähler $\Omega^{(x)}$ sur $Z_x M$ par

$$(2) \quad [a, b] = \Omega^{(x)}(a, b) \cdot J.$$

Dans la suite, Θ sera considéré comme un *sous-fibré* du fibré vectoriel $\pi^{-1}(A^- M)$, image réciproque de $A^- M$ sur ZM , et nous noterons Π la projection orthogonale de $\pi^{-1}(A^- M)$ sur Θ .

Pour J dans $Z_x M$, la valeur Π^J de Π en J est explicitée par

$$(3) \quad \Pi^J(a) = \frac{1}{2} (a + J \circ a \circ J) = a - \frac{1}{2} \langle a, J \rangle \cdot J.$$

L'involution anti-holomorphe naturelle σ sur ZM , définie par

$$(4) \quad \sigma(J) = -J,$$

dont la restriction à chaque fibre $Z_x M = S_{\sqrt{2}}(A_x^- M)$ est l'antipodie, se relève, via la différentielle σ_* de σ sur $Z_x M$, en une involution $\tilde{\sigma}$ de Θ , \mathbf{C} -antilinéaire sur les fibres, suivant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Theta & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & \Theta \\ \downarrow & & \downarrow \\ ZM & \xrightarrow{\sigma} & ZM. \end{array}$$

Via l'identification naturelle de Θ_J et Θ_{-J} , comme sous-espaces de $A_x^- M$, l'involution $\tilde{\sigma}$ se réduit à *moins* l'identité.

Pour chaque x sur M , la restriction $\Theta|_{Z_x M} = \Theta^{(x)}$ de Θ à $Z_x M$ est, par définition, le fibré tangent de la variété complexe $Z_x M$ et possède, de ce fait, une structure holomorphe canonique, qui est clairement *réelle*, i.e. σ -invariante. En particulier, σ induit une structure réelle sur l'espace vectoriel (complexe) $A_x^- M \otimes \mathbf{C}$ des sections holomorphes de $\Theta^{(x)}$, dont les éléments réels sont les champs de Killing de $Z_x M$, i.e. les champs de vecteurs engendrés par l'action du groupe spécial orthogonal $SO(T_x M)$.

Avec cette convention, les *champs* (verticaux) *distingués* \tilde{a} sur $Z_x M$ définis, pour $a \in A_x^- M$, par

$$(6) \quad \tilde{a}(J) = \Pi^J(a), \quad J \in Z_x M,$$

sont les champs holomorphes imaginaires purs, tandis que le champ de Killing $J\bar{a}$ est engendré par l'action du groupe à un paramètre $\exp(-t/2 \cdot a)$ dans $SO(T_x M)$.

Bien que chaque restriction $\Theta^{(x)}$ possède une structure holomorphe bien déterminée, le fibré Θ lui-même, s'il admet une classe d'équivalence canonique de structures holomorphes, ne possède pas de structure holomorphe distinguée.

Notre objectif, dans cette seconde partie, est de décrire explicitement l'espace affine des structures holomorphes sur Θ , soit encore, de façon équivalente, compte-tenu de l'existence d'une structure hermitienne canonique sur Θ , l'espace affine des *connexions de Chern* sur Θ , i.e. des connexions hermitiennes à courbure J -invariante (i.e. de type $(1, 1)$).

REMARQUE 5. Toute connexion hermitienne ∇ sur Θ est déterminée par sa partie de type $(0, 1)$ $\bar{\partial}^\nabla$ qui est l'*opérateur de Cauchy-Riemann* d'une structure pré-holomorphe sur Θ , et la correspondance $\nabla \rightarrow \bar{\partial}^\nabla$ est un isomorphisme d'espaces affines de l'espace des connexions hermitiennes sur l'espace des structures pré-holomorphes sur Θ . La courbure $R^\nabla = -\nabla \circ \nabla$ de ∇ est J -invariante si et seulement si $\bar{\partial}^\nabla$ satisfait la condition d'intégrabilité $\bar{\partial}^\nabla \circ \bar{\partial}^\nabla = 0$, i.e. si la structure pré-holomorphe $\bar{\partial}^\nabla$ est holomorphe (Théorème de Koszul-Malgrange). Dans la suite, nous identifierons librement la connexion de Chern ∇ et la structure holomorphe $\bar{\partial}^\nabla$.

Une section (locale) ξ de θ $\bar{\partial}^\nabla$ -holomorphe (nous dirons aussi ∇ -holomorphe) est caractérisée par le fait que la dérivée covariante $\nabla\xi$, vue comme une 1-forme sur ZM à valeurs dans Θ , est J -linéaire (i.e. de type $(0, 1)$):

$$(7) \quad \xi \text{ } \nabla\text{-holomorphe} \Leftrightarrow \nabla_{JU}\xi = J\nabla_U\xi, \quad J \in ZM, U \in T_J ZM.$$

Puisque Θ est de rang 1 complexe, le *groupe de jauge complexe* g^C s'identifie canoniquement avec le groupe des fonctions sur ZM à valeurs dans le groupe multiplicatif \mathbf{C}^* des nombres complexes non-nuls, tandis que le *groupe de jauge* g s'identifie avec le sous-groupe des fonctions à valeurs dans le groupe S^1 des complexes de norme 1.

Deux structures holomorphes sur Θ sont *équivalentes* si les opérateurs de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}^\nabla_1$ et $\bar{\partial}^\nabla_2$ sont *conjugués* par un élément Φ de g^C , i.e., en posant $\Phi = \rho e^{i\phi}$, s'il existe deux fonctions ρ et ϕ sur ZM , à valeurs respectivement dans \mathbf{R}^+ et dans S^1 , telles que les connexions de Chern correspondantes ∇_1 et ∇_2 vérifient

$$(8) \quad \nabla_2 = \nabla_1 + (d^c \log \rho - d\phi) \otimes J,$$

avec $d^c = J \circ d = i(\bar{\partial} - \partial)$. On observe que les connexions ∇_1 et ∇_2 ne sont elles-mêmes conjuguées que si $d^c \log$ est nulle, i.e. si Φ est (à un facteur constant près) un élément de g .

REMARQUE 6. Pour chaque x dans M , la connexion de Chern $\nabla^{(x)}$ de $\Theta^{(x)} = T(Z_x M)$ coïncide avec la connexion de Levi-Civita de la variété

kählérienne $Z_x M$, i.e. la connexion induite par projection orthogonale, via le plongement isométrique de $Z_x M = S_{\sqrt{2}}(A_x^- M)$ dans $A_x^- M$, de la connexion triviale sur le produit $Z_x M \times A_x^- M$.

Pour toute section ξ de $\Theta^{(x)}$, vue comme une fonction sur $Z_x M$ à valeurs dans $A_x^- M$, on a donc, au point J de $Z_x M$,

$$(9) \quad \nabla_b^{(x)} \xi = \Pi^J(b \cdot \xi), \quad b \in T_J(Z_x M) = \Theta_J^{(x)} = \Theta_J,$$

où $b \cdot \xi$ note la dérivée ordinaire de ξ dans la direction de b . En particulier, la dérivée covariante d'une section distinguée \tilde{a} , cf. (6), est donnée par

$$(10) \quad \nabla_b^{(x)} \tilde{a} = -\frac{1}{2} \langle a, J \rangle \cdot b, \quad b \in \Theta_J.$$

La courbure $R^{(x)}$ de $\nabla^{(x)}$ est égale à

$$(11) \quad \begin{aligned} R_{a,b}^{(x)} c &= \frac{1}{2} (\langle c, a \rangle b - \langle c, b \rangle a) \\ &= \frac{1}{2} [[a, b], c] \\ &= \frac{1}{2} \Omega^{(x)}(a, b) Jc. \end{aligned}$$

La forme de Chern $\gamma^{(x)} = \frac{1}{2\pi i} R^{(x)}$ de $\Theta^{(x)}$, déterminée par $\nabla^{(x)}$, est donc égale à $\frac{1}{4\pi} \Omega^{(x)}$, ce qui montre le fait bien connu que $\Theta^{(x)}$ est isomorphe au carré tensoriel H^2 , où H est le fibré tautologique dual $\mathcal{O}(1)$ sur $Z_x M \simeq CP^1$.

REMARQUE 7. Pour tout x dans M , le *fibré normal* $N^{(x)}$ sur $Z_x M$, dont la fibre en J est le quotient $T_J ZM / \Theta_J$, est canoniquement identifié comme fibré vectoriel réel, via la projection π_* de $T_J ZM$ sur $T_x M$, au fibré produit $Z_x M \times T_x M$. Il possède une structure euclidienne canonique, définie à une homothétie globale près, déterminée par tout choix de métrique sur $T_x M$ dans la classe conforme, et une structure complexe tautologique $J^{(x)}$, clairement compatible avec la structure euclidienne, définie par

$$(12) \quad J^{(x)} X = JX, \quad X \in T_x M = N_J^{(x)}.$$

Le fibré vectoriel complexe $(N^{(x)}, J^{(x)})$ possède une structure holomorphe canonique dont l'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}^{N^{(x)}}$ est défini par

$$(13) \quad \bar{\partial}_a^{N^{(x)}} X = \frac{1}{2} (J(Ja \cdot X)), \quad J \in Z_x M, \quad a \in T_J Z_x M = \Theta_J,$$

pour toute section X de $N^{(x)}$, considérée comme une fonction sur $Z_x M$ à valeurs dans $T_x M$. En particulier, les sections *constantes* de $N^{(x)}$ et leurs images par

$J^{(x)}$ sont holomorphes. La connexion de Chern $\nabla^{N^{(x)}}$ déterminée par $\bar{\partial}^{N^{(x)}}$ et l'une quelconque des structures hermitiennes homothétiques de $N^{(x)}$ est donnée, avec les mêmes notations, par

$$(14) \quad \nabla_a^{N^{(x)}} X = a \cdot X + \frac{1}{2} a(JX).$$

La courbure $R^{N^{(x)}}$ de $\nabla^{N^{(x)}}$ est donc égale, au point J de $Z_x M$, à

$$(15) \quad R_{ab}^{N^{(x)}} X = \frac{1}{4} \Omega^{(x)}(a, b) \cdot JX,$$

$$a, b \in T_J(Z_x M) = \Theta_J, \quad X \in T_x M = N_J^{(x)}.$$

Il en résulte, cf. fin de la Remarque 6, que $N^{(x)}$ est isomorphe, comme fibré vectoriel complexe et comme fibré holomorphe, à la somme directe $H \oplus H$.

En particulier, l'espace vectoriel complexe des sections holomorphes de $N^{(x)}$ est de dimension 4 et coïncide de ce fait avec l'espace engendré sur \mathbb{C} par l'espace vectoriel (réel) des sections constantes de $N^{(x)}$, i.e. l'espace $T_x M$.

II.2. - Structures holomorphes réelles et structures de Weyl autoduales

DEFINITION 5. Une structure holomorphe sur Θ est *naturelle* si sa restriction à chaque fibre $Z_x M$ coïncide avec la structure holomorphe canonique de $\Theta^{(x)}$.

PROPOSITION 1. *Toute structure holomorphe sur Θ est équivalente à une structure naturelle.*

DEMONSTRATION. Conséquence du fait que pour chaque x dans M la restriction $\Theta^{(x)}$ ne possède, à équivalence près, qu'une seule structure holomorphe, isomorphe à H^2 . \square

DEFINITION 6. Nous dirons qu'une structure holomorphe sur Θ , identifiée à la connexion de Chern ∇ , est *réelle* ($= \sigma$ -invariante) si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite.

i) Pour toute section locale ξ de Θ , ∇ -holomorphe au voisinage de $J \in Z_x M$, la section $\bar{\xi}$, définie par

$$(16) \quad \bar{\xi} = \bar{\sigma} \circ \xi \circ \sigma,$$

est ∇ -holomorphe au voisinage de $-J$.

ii) Pour toute section ξ de Θ , on a

$$(17 \text{ a}) \quad \nabla_U \bar{\xi} = \bar{\sigma} \circ \nabla_{\sigma+U} \circ \sigma, \quad J \in Z_x M, \quad U \in T_J ZM,$$

i.e., en écriture abrégée,

$$(17 \text{ b}) \quad \nabla \bar{\xi} = \bar{\nabla} \xi.$$

iii) L'involution $\bar{\sigma}$ de Θ , considérée comme une variété complexe via la structure holomorphe ∇ , est anti-holomorphe.

iv) L'isomorphisme de fibrés vectoriels complexes de Θ sur $\overline{\sigma^*\Theta}$, induit par $\bar{\sigma}$, est holomorphe.

NOTE. Pour tout fibré vectoriel complexe E , nous notons \bar{E} le fibré vectoriel complexe dont le fibré vectoriel réel sous-jacent est celui de E et dont la structure complexe est la structure conjuguée. Le fibré $\overline{\sigma^*\Theta} = \sigma^*\bar{\Theta}$ est muni de la structure holomorphe obtenue à partir de celle de Θ par transport de structure de long de σ . Les sections holomorphes locales de $\sigma^*\bar{\Theta}$ sont les sections de la forme

$$(18) \quad \tilde{\zeta} : J \rightarrow (J, \zeta(-J)) \in (\sigma^*\bar{\Theta})_J, \quad J \in ZM,$$

où ζ est une section holomorphe locale de Θ au voisinage de $-J = \sigma(J)$.

PROPOSITION 2. *Chaque structure de Weyl autoduale sur (M, c) détermine une structure holomorphe naturelle et réelle sur θ . Deux structures de Weyl autoduales déterminent des structures holomorphes équivalentes si et seulement si elles sont elles-mêmes équivalentes.*

DEMONSTRATION. La construction d'une connexion de Chern ∇ sur Θ à partir d'une structure de Weyl D sur (M, c) est calquée sur la construction de $\nabla^{(x)}$ en chaque point x de M .

La structure de Weyl D , qui est une connexion linéaire sur TM , induit, via la représentation adjointe de $CO^+(4)$, une connexion linéaire D^{Ad} , que nous noterons simplement D , sur le fibré vectoriel A^-M .

Cette connexion induit une connexion linéaire π^*D sur le fibré image réciproque $\pi^*(A^-M)$, puis, via la projection orthogonale Π de $\pi^*(A^-M)$ sur θ , la connexion cherchée ∇ .

La connexion $\nabla = \Pi \circ \pi^*D$ est \mathbf{R} -linéaire, préserve clairement la structure euclidienne de Θ , et, pour chaque x dans M , sa restriction à $\Theta^{(x)}$ coïncide avec la connexion de Levi-Civita $\nabla^{(x)}$ de Z_xM puisque la restriction de π^*D à Z_xM est la connexion triviale sur $Z_xM \times A_x^-M$ (Remarque 6).

Le fait que ∇ est J -linéaire résulte simplement du Lemme suivant.

LEMME 2. *La dérivée covariante relative à π^*D de J , considérée comme section tautologique de $\pi^*(A^-M)$, est égale, en J , à*

$$(19) \quad (\pi^*D)_U J = v^D(U), \quad U \in T_J ZM,$$

où $v^D(U)$ est la partie principale de U relative à D .

DEMONSTRATION. Le Lemme résulte simplement de l'expression I (36) de la partie principale $v^D(U)$. \square

Si ξ est une section de Θ , on a, compte-tenu du Lemme 2,

$$\begin{aligned}\nabla_U(J\xi) &= \nabla_U(J \circ \xi) \\ &= \Pi^J(v^D(U) \circ \xi(J)) + J \circ \nabla_U \xi \\ &= J\nabla_U \xi,\end{aligned}$$

puisque l'endomorphisme composé $v^D(U) \circ \xi(J)$ est J -linéaire. Ainsi, toute structure de Weyl D sur (M, c) —autoduale ou non—induit une connexion hermitienne ∇ sur θ .

Pour écrire la courbure R^∇ de ∇ , il sera commode d'introduire les *sections distinguées* de Θ (ou *champs de vecteurs verticaux distingués* sur ZM) \tilde{a} définis par (6) où a est une *section* de A^-M , et les *champs de vecteurs horizontaux distingués* \tilde{X} sur ZM , associés aux champs de vecteurs X sur M , définis, au moyen de D , par

$$\begin{aligned}(20) \quad \tilde{X}(J) &= \text{relevé } D\text{-horizontal de } X(x) \\ &= \text{unique élément de } H_J^D \text{ dont la projection} \\ &\quad \text{dans } T_x M \text{ est égale à } X(x), \quad J \in Z_x M.\end{aligned}$$

On a alors

LEMME 3. *La courbure R^∇ de la connexion hermitienne ∇ déterminée par une structure de Weyl (quelconque) D sur (M, c) est donnée, pour a, b, c dans Θ_J et \tilde{X}, \tilde{Y} dans H_J^D (de projection X et Y dans $T_x M$), par*

$$\begin{aligned}\text{i)} \quad R_{b,c}^\nabla a &= R_{b,c}^{(x)} a = \frac{1}{2} \Omega^{(x)}(b, c) J a \\ \text{ii)} \quad R_{b,\tilde{X}}^\nabla a &= 0 \\ \text{iii)} \quad R_{\tilde{X},\tilde{Y}}^\nabla a &= \Pi^J([R^D(X \wedge Y), a])\end{aligned}$$

où R^D est la courbure de D , vue comme un homomorphisme de $\Lambda^2 TM$ dans $\text{ad } QM$.

DEMONSTRATION. Si \tilde{a} est une section distinguée de Θ , il résulte aisément de la définition (6) et du Lemme 2 que sa dérivée covariante relative à ∇ est donnée par

$$(21) \quad \nabla_U \tilde{a} = D_{\tilde{X}} \tilde{a} - \frac{1}{2} \langle a, J \rangle \cdot v^D(U), \quad U \in T_J ZM,$$

où X est la projection de U dans $T_x M$.

Les parties i) et iii) du Lemme 3 se déduisent aisément de (21).

Pour ii), on a, pour a, b dans θ_J , \tilde{X} dans H_J^D ,

$$R_{b,\tilde{X}}^\nabla a = \nabla_{\tilde{X}}(\nabla_{\tilde{b}} \tilde{a}) - \nabla_b(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{a}) - \nabla_{[\tilde{X}, \tilde{b}]} \tilde{a}$$

où \tilde{a}, \tilde{b} d'une part, \tilde{X} d'autre part, notent, dans le membre de droite, des extensions distinguées de a, b et \tilde{X} , que nous supposons telles, par commodité, que les dérivées covariantes $D_X a$ et $D_X b$ soient nulles au point x .

En particulier, le crochet $[\tilde{X}, \tilde{b}]$, qui est égal au champ distingué vertical $D_{\tilde{X}} b$, cf. (A 11), est nul sur la fibre $Z_x M$, ainsi donc que le troisième terme dans le second membre de l'inégalité ci-dessus. On vérifie aisément, à l'aide de (21), qu'il en va de même pour les deux autres termes, ce qui démontre ii). \square

Puisque la partie complètement verticale de R^∇ , donnée par i), est indépendante de D et évidemment de type (1, 1), et la partie "mixte", donnée par ii), est nulle, la connexion ∇ est une connexion de Chern si et seulement si la composante horizontale de R^∇ , donnée par iii), est J -invariante, i.e. si la courbure R^D de la structure de Weyl D vérifie, en tout point x de M , la propriété suivante:

(P) pour tout J dans $Z_x M$ et tous a, b dans Θ_J , le commutateur $[R^D(a), b]$ est J -linéaire.

NOTE. La courbure R^D est considérée ici comme un homomorphisme de poids -2 de AM dans $ad QM$.

La composante \tilde{Scal}^D de R^D , cf. I.(19), vérifie clairement (P) puisque le commutateur de deux éléments J -antilinéaires est J -linéaire. La composante \tilde{Ric}_0^D de R^D vérifie également (P) puisque elle envoie a dans $A_x^+ M$, dont tous les éléments commutent avec b qui appartient à $A_x^- M$.

La composante W_+ du tenseur de Weyl de c a une action triviale sur a qui appartient à $A_x^- M$, cf. I.5, et W_- est nul par hypothèse. Il reste le terme additionnel $\tilde{\rho}^D$ dont l'action sur a se réduit à sa partie anti-autoduale $\tilde{\rho}_-^D$, cf. I (14) et I.5. Ainsi, la connexion hermitienne ∇ est une connexion de Chern si et seulement si la structure de Weyl D est autoduale.

La dernière assertion de la Proposition 2 se déduit du

LEMME 4. Si D_1 et D_2 sont deux structures de Weyl (quelconques) liées par I (8), les connexions hermitiennes ∇_1 et ∇_2 déterminées respectivement par D_1 et D_2 sont liées par

$$(22) \quad \nabla_2 = \nabla_1 + (J\pi^*\theta) \otimes J.$$

DEMONSTRATION. Par (21), on a, pour a dans Θ_J , J dans $Z_x M$, U dans $T_J ZM$,

$$(\nabla_2 - \nabla_1)_U a = \Pi^J((D_2 - D_1)_X a)$$

où X est la projection de U dans $T_x M$.

Par I (11), on a donc

$$(\nabla_2 - \nabla_1)_U a = \Pi^J([\theta \wedge X, a]).$$

La seule contribution non-triviale de $\theta \wedge X$ dans la formule précédente est donnée par sa composante anti-autoduale et J -linéaire, i.e. sa projection orthogonale sur la droite engendrée par J dans $A_x M$, qui est égale à $\frac{1}{2} \langle \theta \wedge X, J \rangle J$, i.e. encore à $\frac{1}{2} (J\theta)(X) J$.

On a donc

$$\begin{aligned} (\nabla_2 - \nabla_1)U a &= \frac{1}{2} (J\theta)(X) [J, a] \\ &= (J\theta)(X) J a, \end{aligned}$$

ce qui montre le Lemme 4. \square

Si D_1 et D_2 sont deux structures de Weyl équivalentes, la 1-forme θ est la différentielle df d'une fonction réelle f sur M et la différences $\nabla_2 - \nabla_1$ est égale, en vertu du Lemme 3, à $d^c(\pi^* f)$. Les structures holomorphes identifiées à ∇_1 et ∇_2 sont donc équivalentes, cf. (8). Inversement, si les structures holomorphes ∇_1 et ∇_2 sont équivalentes, il existe deux fonctions \tilde{f} et $\tilde{\phi}$ sur ZM à valeurs dans R et S^1 respectivement telles que

$$(23) \quad d^c \tilde{f} + d\tilde{\phi} = J\pi^* \theta.$$

Il résulte de (23) que la fonction $\Phi = e^{(\tilde{f} + i\tilde{\phi})}$ est holomorphe, donc constante sur chaque fibre $Z_x M$. Ainsi, les fonctions \tilde{f} et $\tilde{\phi}$ sont de la forme $\pi^* f$ et $\pi^* \phi$ où f et ϕ sont définies sur M . Le relation (23) s'écrit alors

$$J(\theta - df) = d\phi$$

pour tout x dans M et tout J dans $Z_x M$, d'où résulte que les deux membres sont nuls. Ainsi, θ est exacte et les structures de Weyl D_1 et D_2 sont équivalentes.

Il reste à montrer que la structure holomorphe ∇ est réelle, i.e. satisfait la relation (17), ce qui est clair à partir de (21) compte-tenu des relations

$$(24) \quad \sigma_* U = (-v^D(U), X), \quad U = (v^D(U), X) \in T_J ZM, \text{ cf. I (35),}$$

$$(25) \quad \tilde{\sigma} a = -a, \quad a \in \Theta_J = \Theta_{-J}.$$

\square

REMARQUE 8. La Proposition 2 implique l'existence d'une *classe d'équivalence canonique de structures holomorphes* sur Θ , celle dont les représentants naturels—qui sont aussi réels—sont induits par les structures de Weyl exactes sur (M, c) , i.e. par les connexions (globalement) de Levi-Civita dans la classe conforme.

REMARQUE 9. Lorsque la dimension $n = 2m$ de M est supérieure à 4 et la structure conforme c est plate (i.e. J est intégrable sur ZM), la démonstration de la Proposition 2 montre aisément que la *connexion hermitienne* $\nabla = \Pi \circ (\pi^* D)$ sur le fibré tangent vertical Θ (qui est alors un fibré vectoriel hermitien de

rang $m(m - 1)/2$ est une connexion de Chern, i.e. détermine une structure holomorphe (réelle) sur θ , si et seulement si la structure de Weyl D est fermée et d'Einstein, i.e. D est localement la connexion de Levi-Civita d'une métrique riemannienne à courbure sectionnelle constante dans la classe conforme, cf. infra Remarque 12.

II.3. - La forme de Chern associée a une structure de Weyl autoduale

La forme de Chern de la connexion de Chern ∇ déterminée par la structure de Weyl (autoduale) D est la 2-forme réelle J -invariante (fermée) γ^D définie par

$$(26) \quad \gamma^D = \frac{1}{2\pi i} R^\nabla.$$

Elle est déterminée par le

LEMME 5. Pour tout J dans ZM , de projection x dans M , on a

- i) $\gamma^D|_{\theta_J} = \frac{1}{4\pi} \Omega^{(x)}$,
- ii) $\gamma^D(a, \tilde{X}) = 0$,
- iii) $\gamma^D(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \frac{1}{2\pi} (-h^D(X, JY) + h^D(JX, Y))$,

pour tout vecteur vertical a et tous vecteurs D -horizontaux \tilde{X} et \tilde{Y} , de projections respectives X et Y dans T_xM , où $\Omega^{(x)}$ est la forme de Kähler canonique de la fibre Z_xM et h^D le tenseur de Ricci normalisé de D .

DEMONSTRATION. Les partie i) et ii) sont une ré-écriture, compte-tenu de la définition (26), des parties correspondantes du Lemme 3. Le second membre de Lemme 3 iii), qui détermine la partie horizontale de R^∇ , donc de γ^D , peut être modifié en observant, comme dans la démonstration du Lemme 4, que la seule contribution non-nulle a priori de $R^D(X \wedge Y)$ est donnée par sa composante anti-autoduale et J -linéaire, qui est égale à $1/2 \langle R^D(X \wedge Y), J \rangle \cdot J$.

Ainsi, si \tilde{X} et \tilde{Y} sont deux vecteurs D -horizontaux dans T_JZM , de projections respectives X et Y dans T_xM , et a un élément de l'espace vertical Θ_J , on a

$$(27) \quad R^\nabla_{\tilde{X}, \tilde{Y}} a = \frac{1}{2} \langle R^D(X \wedge Y), J \rangle \cdot [J, a] = \langle R^D(X \wedge Y), J \rangle \cdot Ja,$$

et donc

$$(28) \quad \gamma^D(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \frac{1}{2\pi} \langle R^D(X \wedge Y), J \rangle.$$

Puisque la structure conforme c et la structure de Weyl D sont l'une et l'autre autoduales, tandis que J est anti-autodual, les composantes $\tilde{\rho}^D = \tilde{\rho}_+^D$ et $W = W_+$ de R^D , cf. I (19), donnent une contribution nulle dans (28), où seul

intervient de façon non-nulle a priori l'opérateur de Ricci $\tilde{\text{Ric}}^D$. La relation (28) peut donc être ré-écrite sous la forme

$$(29) \quad \gamma^D(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \frac{1}{2\pi} \langle \tilde{\text{Ric}}(X \wedge Y), J \rangle,$$

qui, compte-tenu de I (17), n'est autre que le second membre de Lemme 5 iii). \square

PROPOSITION 4. *La forme de Chern γ^D est définie-positive sur ZM si et seulement si le tenseur de Ricci de D est fortement-positif.*

DEMONSTRATION. D'après le Lemme 5, la composante verticale de γ^D , qui est indépendante de D , est égale, au facteur $1/4\pi$ près, à la forme de Kähler canonique de la fibre correspondante et est, de ce fait, définie positive pour toute structure de Weyl autoduale. Comme γ^D est la somme directe de sa composante verticale et sa composante horizontale, Lemme 5 ii), elle est définie-positive si et seulement si il en est de même de cette dernière. Par Lemme 5 iii), on a

$$(30) \quad \gamma^D(\tilde{X}, J\tilde{X}) = \frac{1}{2\pi} (h^D(X, X) + h^D(JX, JX)), \quad X \in T_x M,$$

et γ^D est définie-positive si et seulement si le second membre de (30) est positif pour tout X non-nul de $T_x M$, tout J de $Z_x M$, tout x de M . Puisque, pour X fixé, non-nul, dans $T_x M$, $\{X, JX\}$ décrit la totalité des couples orthonormés de premier élément X quand J décrit la fibre $Z_x M$, cette condition équivaut à I (29 a) qui équivaut elle-même à la forte-positivité de Ric^D . \square

COROLLAIRE. *Si (M, c) admet une structure de Weyl autoduale à tenseur de Ricci fortement-positif, son espace des twisteurs (ZM, J) est kählérien. En particulier, si (M, c) est compacte et admet une structure de Weyl fermée à tenseur de Ricci fortement-positif, elle est isomorphe à la sphère S^4 ou au plan projectif complexe CP^2 munis de leurs structures conformes canoniques.*

DEMONSTRATION. La première partie du Corollaire est une conséquence immédiate de la Proposition 4 puisque γ^D est fermée et détermine ainsi sur ZM , lorsqu'elle est définie-positive, une métrique kählérienne et, même, une métrique de Hodge puisque γ^D est une forme entière.

La seconde partie du Corollaire repose sur le fait bien connu, cf. [HI2], que S^4 et CP^2 sont les seules variétés conformes compactes (orientées) de dimension 4 dont l'espace des twisteurs est kählérien. \square

NOTE 1. Puisque Θ est une racine carrée du fibré anti-canonique de ZM , cf. Remarque 13, les formes γ^D sont aussi, à un facteur $1/2$ près, des représentants de la première classe de Chern de (ZM, J) .

NOTE 2. Puisque la condition de forte-positivité de Ric^D est ouverte, le Corollaire implique clairement que les structures conformes canonique de S^4

et CP^2 sont isolées dans l'espace des modules des classes d'équivalence des structures conformes autoduales—plates dans le cas de S^4 —sur ces variétés. Ceci est aussi une conséquence du Théorème A de [PO].

NOTE 3. Les hypothèses du Corollaire sont vérifiées en particulier lorsque c contient une métrique d'Einstein à courbure scalaire positive, cf. I.3.

Dans ce cas, le Corollaire est bien connu, cf. [HI2], [F-K], [BE] Th. 13.3.

NOTE 4. Il est facile de vérifier, grâce au Lemme 5, que γ^D coïncide, à un facteur $1/4\pi$ près, avec la forme de Kähler Ω_g^D de la métrique g^D sur ZM considérée dans l'Appendice A si et seulement si le couple (D, g) satisfait les hypothèses de Proposition 11 a), i.e. D est la connexion de Levi-Civita de g et g est une métrique d'Einstein de courbure scalaire égale à 6.

II.4. - Structures holomorphes non-reelles et correspondance d'Atiyah-Ward

Considérons le fibré produit $M \times \mathbf{C}$ sur M , considéré avec sa structure hermitienne canonique. Toute connexion hermitienne sur $M \times \mathbf{C}$ est de la forme

$$(31) \quad d^\beta = d + \beta \otimes i$$

où $d = d^0$ note la connexion triviale (i.e. la dérivée ordinaire) et β est une 1-forme réelle sur M . Deux connexions d^{β_1} et d^{β_2} sont équivalentes (i.e. conjuguées) si et seulement si il existe un élément du groupe de jauge de $M \times \mathbf{C}$, i.e. une fonction ϕ sur M à valeurs dans S^1 telle que

$$(32) \quad \beta_2 = \beta_1 + d\phi.$$

La connexion d^β est autoduale si sa courbure est une 2-forme autoduale. Puisque la courbure de d^β est égale à $-d\beta \otimes i$, la connexion d^β est autoduale si et seulement si la différentielle $d\beta$ est autoduale.

Nous noterons \mathcal{A}_+ l'espace affine des connexions hermitiennes autoduales sur $M \times \mathbf{C}$, \mathcal{A} le sous-espace des connexions hermitiennes plates. Ces deux espaces coïncident lorsque M est compacte (Lemme 1). En choisissant pour origine la connexion produit d^0 , nous considérerons \mathcal{A}_+ et \mathcal{A} comme des espaces vectoriels (réels) et nous identifierons la connexion d^β avec la 1-forme β . L'ensemble $[\mathcal{A}_+]$ des classes d'équivalence des connexions hermitiennes autoduales sur $M \times \mathbf{C}$ est naturellement identifié au quotient de l'espace vectoriel $H_+^1(M, \mathbf{R})$ par le sous-groupe $H^1(M, \mathbf{Z})$. Lorsque M est compacte, $[\mathcal{A}_+]$ est ainsi identifié au tore réel $H^1(M, \mathbf{R})/H^1(M, \mathbf{Z})$.

L'image réciproque de $M \times \mathbf{C}$ sur ZM par π est encore le fibré produit $ZM \times \mathbf{C}$, dont le produit tensoriel (complexe) avec Θ est canoniquement identifié à Θ . Toute connexion hermitienne ∇ sur Θ et toute connexion hermitienne d^β sur $M \times \mathbf{C}$ induisent, par produit tensoriel, une connexion hermitienne ∇^β sur Θ , égale à

$$(33) \quad \nabla^\beta = \nabla + \pi^* \beta \otimes J.$$

PROPOSITION 5 (Correspondance de Atiyah-Ward). *Si ∇ est une connexion de Chern, ∇^β est une connexion de Chern si et seulement si d^β est autoduale. Les structures holomorphes de Θ identifiées à ∇^{β_1} et ∇^{β_2} sont isomorphes si et seulement si les connexions d^{β_1} et d^{β_2} sont conjuguées.*

Si ∇ est la connexion de Chern, naturelle et réelle, induite par une structure de Weyl autoduale D de (M, c) , ∇^β est naturelle et est réelle si et seulement si β est nulle.

DEMONSTRATION. Par (33), la courbure de ∇^β est égale à $R^\nabla - \pi^* d\beta \otimes J$.

La connexion hermitienne ∇^β est donc de Chern si et seulement si la 2-forme réelle $d\beta$ est, en tout point x de M , de type $(1, 1)$ relativement à toutes les structures complexes de $T_x M$ dans $Z_x M$, si et seulement si $d\beta$ est autoduale, car l'espace $A_x^+ M$ est l'intersection des espaces des éléments J -linéaires de $A_x M$ lorsque J parcourt $Z_x M$.

Les structures holomorphes ∇^{β_1} et ∇^{β_2} sont équivalentes si et seulement si existent sur ZM $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\phi}$ à valeurs dans R^+ et S^1 respectivement telles que

$$d^c \tilde{\rho} + d\tilde{\phi} = \pi^*(\beta_2 - \beta_1),$$

d'où nous concluons, comme dans la démonstration de la Proposition 2, que est égale à $\phi \circ \pi$ et $\beta_1 - \beta_2$ à $d\phi$, i.e. que les connexions d^{β_1} et d^{β_2} sont conjuguées au moyen de ϕ .

Si ∇ est une connexion de Chern induite par une structure de Weyl autoduale D sur (M, c) , on a, pour toute section distinguée \tilde{a} de θ , cf. (21) et (33),

$$(34) \quad \nabla_U^\beta \tilde{a} = D_X^\sim \tilde{a} - \frac{1}{2} \langle a, J \rangle \cdot v^D(U) + \beta(X) J \tilde{a},$$

d'où l'on déduit aisément, compte-tenu des relations (24) et (25), pour toute section ξ de Θ , cf. (18), la relation

$$(35) \quad \overline{\nabla^\beta \xi} = \nabla^{-\beta} \bar{\xi}$$

ce que l'on peut traduire en disant que $\nabla^{-\beta}$ est la *conjuguée* de ∇^β .

En particulier, la structure holomorphe identifiée à ∇^β est réelle si et seulement si β est nulle. \square

II.5. - Les structures holomorphes du fibré tangent vertical

THEOREME 1. *Soient (M, c) une variété conforme orientée autoduale de dimension 4, ZM l'espace des twisteurs (projectifs) de (M, c) muni de sa structure complexe canonique, Θ le fibré tangent vertical sur ZM muni de sa structure canonique de fibré vectoriel hermitien de rang 1.*

Toute connexion de Chern naturelle sur Θ s'écrit de façon unique sous la forme ∇^β , où ∇ est la connexion de Chern induite par une structure de Weyl

autoduale D sur (M, c) et d^β une connexion hermitienne autoduale sur le fibré produit $M \times \mathbf{C}$.

Les structures holomorphes de Θ identifiées à $\nabla_1^{\beta_1}$ et $\nabla_2^{\beta_2}$ sont isomorphes si et seulement si les structures de Weyl correspondantes D_1 et D_2 sont équivalentes ainsi que les connexions d^{β_1} et d^{β_2} .

Du fait des Propositions 3 et 5, le Théorème 1 équivaut clairement à la

PROPOSITION 6. Toute connexion de Chern naturelle $\tilde{\nabla}$ sur Θ se déduit de l'une d'elle ∇_0 par

$$(36) \quad \tilde{\nabla} = \nabla_0 + (J\pi^*\theta_1 + \pi^*\theta_2) \otimes J,$$

où θ_1 et θ_2 sont des 1-formes autoduales sur M , uniquement déterminées par $\tilde{\nabla}$ et ∇_0 .

DEMONSTRATION. Toute connexion hermitienne $\tilde{\nabla}$ sur Θ s'écrit

$$\tilde{\nabla} = \nabla_0 + \alpha \otimes J,$$

où α est une 1-forme réelle sur ZM .

La connexion $\tilde{\nabla}$ est une connexion de Chern si et seulement si

$$d\alpha \text{ est de type } (1, 1).$$

La structure holomorphe identifiée à $\tilde{\nabla}$ est naturelle si et seulement si la restriction de α à chaque sous-espace vertical Θ_J de $T_J ZM$ est nulle.

Ainsi, pour tout x dans M , la 1-forme réelle α détermine une fonction α_x sur la fibre $Z_x M$ à valeurs dans l'espace cotangent $T_x^* M$ —qu'on identifiera à l'espace tangent $T_x M$ au moyen d'une métrique g quelconque dans la classe conforme—, donc une section du fibré normal $N^{(x)}$, cf. Remarque 7. On a, pour J dans $Z_x M$,

$$(37) \quad (d\alpha)(a, \tilde{X}) = (a \cdot \alpha_x)(X), \quad a \in \Theta_J = T_J(Z_x M), \quad X \in T_x M,$$

où, dans le membre de gauche, \tilde{X} note un élément quelconque de $T_J ZM$ de projection X dans $T_x M$, et où $a \cdot \alpha_x$ note la dérivée ordinaire de α_x dans la direction de a .

La J -invariance de $d\alpha$ implique alors

$$(38) \quad (a \cdot \alpha_x)(X) = (Ja \cdot \alpha_x)(JX),$$

i.e. α_x est une section holomorphe de $N^{(x)}$, cf. (13).

Il existe donc, cf. fin de le Remarque 7, deux éléments bien déterminés $\theta_1(x)$ et $\theta_2(x)$ de $T_x M$ tels que $\alpha_x(J) = \theta_1(x) + J\theta_2(x)$, et donc, sur M , deux 1-formes réelles bien déterminées θ_1 et θ_2 telles que

$$(39) \quad \alpha = \pi^*\theta_1 + J\pi^*\theta_2.$$

La J -invariance de $d\alpha$ équivaut alors à

$$(40) \quad \langle d\theta_1, X \wedge Y - JX \wedge JY \rangle = \langle d\theta_2, X \wedge JY + JX \wedge Y \rangle, \\ X, Y \in T_x M, \quad x \in M,$$

soit encore, en identifiant $d\theta_1$ et $d\theta_2$ à des sections de AM au-moyen de g ,

$$(41) \quad \langle d\theta_1, a \rangle + \langle d\theta_2, J \circ a \rangle = 0,$$

pour tout J dans $Z_x M$ et tout a dans Θ_J .

La relation (41) équivaut au fait que les deux sections distinguées $d\tilde{\theta}_1$ et $d\tilde{\theta}_2$ de Θ déterminées par $d\theta_1$ et $d\theta_2$ vérifient

$$(42) \quad d\tilde{\theta}_1 = -J d\tilde{\theta}_2,$$

qui implique que les deux membres sont nuls puisque $d\tilde{\theta}_1$ et $d\tilde{\theta}_2$ sont l'une et l'autre imaginaires pures, cf. II.1.

Ainsi, les 2-formes réelles $d\theta_1$ et $d\theta_2$ sont J -invariantes en tout point x de M pour tout J dans $Z_x M$, donc autoduales. \square

Soit \mathcal{X} l'espace affine des structures holomorphes naturelles de Θ (identifiées à la connexion de Chern correspondante).

Le Théorème 1 peut s'écrire sous la forme suivante (cf. I.5 et II.4 pour les notations).

L'application du produit $\mathcal{D}_+ \times \mathcal{A}_+$ dans \mathcal{X} qui, à tout couple (D, β) associe la connexion de Chern ∇^β est un isomorphisme d'espaces affines:

$$(43 \text{ a}) \quad \mathcal{X} = \mathcal{D}_+ \times \mathcal{A}_+.$$

Il induit une bijection

$$(43 \text{ b}) \quad [\mathcal{X}] = [\mathcal{D}_+] \times [\mathcal{A}_+] = H_+^1(M, \mathbf{R}) \times (H_+^1(M, \mathbf{R})/H^1(M, \mathbf{Z})),$$

où $[\mathcal{X}]$ note l'ensemble des classes d'isomorphisme des structures holomorphes de Θ , qui, par la Proposition 1, est aussi l'ensemble des classes d'isomorphisme des structures holomorphes naturelles de Θ .

Dans (43 a), le facteur \mathcal{D}_+ , déterminé par l'origine distinguée de \mathcal{A}_+ , est identifié au sous-espace \mathcal{X}_R des éléments réels de \mathcal{X} , et dans (43 b), le facteur $[\mathcal{D}_+] = H_+^1(M, \mathbf{R})$ est identifié au sous-espace $[\mathcal{X}]_R$ des éléments réels de $[\mathcal{X}]$, i.e. ceux dont les représentants naturels sont réels.

Nous utiliserons principalement les identifications (43 a-b) dans le cas où M est compacte. Dans ce cas, l'espace vectoriel $H_+^1(M, \mathbf{R})$ coïncide (cf. Lemme 1) avec l'espace de cohomologie de de Rham $H^1(M, \mathbf{R})$ dont chaque élément ω sera ainsi considéré, indifféremment, comme une classe d'équivalence de structure de Weyl (fermée) sur (M, c) ou comme une classe d'isomorphisme de structures holomorphes (réelles) de Θ .

Nous dirons que ω est la *partie réelle* d'une classe d'isomorphisme de structures holomorphes de Θ si celle-ci se projette sur ω via l'identification (43 b).

REMARQUE 10. L'ensemble $[\mathcal{M}]$ possède un élément distingué (réel), figuré par l'origine de $H_+^1(M, \mathbf{R})$, dont les représentants naturels sont induits, via la connexion de Levi-Civita, par les métriques (globales) de la classe conforme c , cf. Remarque 8.

De ce fait, $[\mathcal{M}]$ est naturellement identifié à l'ensemble des classes d'isomorphismes des structures holomorphes du fibré produit $ZM \times \mathbf{C}$, i.e. à la *variété de Picard* (restreinte) $\text{Pic}_0(ZM)$ de ZM . L'identification (43 b) implique donc une identification naturelle

$$(43 \text{ c}) \quad \text{Pic}_0(ZM) = H_+^1(M, \mathbf{R}) \times (H_+^1(M, \mathbf{R})/H^1(M, \mathbf{Z})).$$

La variété de Picard $\text{Pic}_0(ZM)$ est elle-même naturellement identifiée au quotient de l'espace vectoriel (complexe) $H^1(M, \mathcal{O})$ par le sous-groupe $H^1(M, \mathbf{Z})$, où \mathcal{O} note le faisceau structural de la variété complexe ZM et $H^1(M, \mathcal{O})$ est interprété comme un espace de cohomologie de Dolbeault, i.e. le quotient de l'espace des 1-formes complexes $\bar{\partial}$ -fermées sur ZM par le sous-espace des 1-formes $\bar{\partial}$ -exactes.

La démonstration des Propositions 1 et 6 montre que l'application qui, à tout couple (θ_1, θ_2) de 1-formes réelles sur M associe la 1-forme complexe sur ZM $(J\pi^*\theta_1 + \pi^*\theta_2) \otimes J$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels (réels)

$$(44) \quad H^1(M, \mathcal{O}) = H_+^1(M, \mathbf{R}) \oplus H_+^1(M, \mathbf{R}),$$

dans lequel les facteurs du membre de droite figurent respectivement les sous-espaces réel et imaginaire pur de $H^1(M, \mathcal{O})$ pour la structure réelle induite par σ , et qui induit à son tour l'identification (43 c).

L'isomorphisme d'espaces vectoriels complexes $H^1(M, \mathcal{O}) = H_+^1(M, \mathbf{C})$ qui se déduit immédiatement de (44) est un cas particulier, pour $m = 0$, du Th. 4.1 de [HI1].

Cf. aussi [VI] Lemme 1.

Dans le cas où M est compacte (ainsi donc que ZM), l'identification (44) implique, par le Lemme 1, que l'*irrégularité* q de ZM , i.e. la dimension (complexe) de $H^1(M, \mathcal{O})$, est égale à b_1 , tandis que (43 c) montre que, si b_1 est positif, la variété de Picard $\text{Pic}_0(ZM)$ n'est pas compacte (contrairement au cas kählérien) mais est le produit du tore (réel) $H^1(M, \mathbf{R})/H^1(M, \mathbf{Z})$ par l'espace vectoriel $H^1(M, \mathbf{R})$ qui constituent respectivement sa partie σ -anti-invariante et sa partie σ -invariante.

II.6. - Les puissances tensorielles du fibré tangent vertical

La description que nous avons donnée des structures holomorphes naturelles se repose fondamentalement sur la réalisation de Θ comme sous-fibré

vectorel (réel) du fibré induit π^*A^-M , où A^-M , le fibré des endomorphismes antisymétriques anti-autoduaux de TM , est aussi le fibré vectoriel de poids 0 associé à la forme réelle canonique de la représentation Δ_-^2 de $SO(4)$, cf. Remarque 1.

Nous obtenons une description analogue pour la $p^{\text{ème}}$ puissance tensorielle (complexe) Θ^p de Θ en substituant à la représentation Δ_-^2 la représentation Δ_-^{2p} dont le fibré vectoriel de poids 0 associé $S_0^p(A^-M)$ sur M peut être décrit de la manière suivante.

Soit $S^p(A^-M)$ la $p^{\text{ème}}$ puissance tensorielle symétrique (réelle) de A^-M , avec $S^0(A^-M) = A^-M$. Le fibré $S^p(A^-M)$ est un fibré vectoriel réel sur M de rang $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$.

Pour $p > 1$, il existe un homomorphisme *trace* de $S^p(A^-M)$ dans $S^{p-2}(A^-M)$, clairement surjectif, défini sur les éléments décomposés de $S^p(A^-M)$ par

$$(45) \quad a_1 0 \dots 0 a_p \xrightarrow{\text{trace}} \sum_{i < j} \langle a_i, a_j \rangle \cdot a_1 0 \dots 0 \hat{a}_i 0 \dots 0 \hat{a}_j 0 \dots 0 a_p.$$

où 0 note le produit symétrique dans $S^p(A^-M)$ et $\hat{}$ désigne un élément manquant. Le noyau $S_0^p(A^-M)$ de cet homomorphisme, qui est un fibré vectoriel réel de rang $\frac{(p+1)(p+2)}{2} - \frac{(p-1)p}{2} = 2p+1$, est clairement le fibré cherché, car Δ_{\pm}^{2p} sont les seules représentations irréductibles de $SO(4)$ de dimension $2p+1$.

Dans la suite, nous poserons $S_0^1(A^-M) = A^-M$.

Compte-tenu de la structure euclidienne canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de A^-M qui identifie A^-M à son dual, le fibré $S_0^p(A^-M)$ pourra être considéré comme le fibré des formes p -linéaires symétriques sur A^-M à trace nulle (condition vide pour $p = 1$). Pour J dans $Z_x M$, nous noterons de même $S^p(\Theta_J)$ la $p^{\text{ème}}$ puissance tensorielle symétrique *réelle* de l'espace vectoriel Θ_J et $S_0^p(\Theta_J)$ sa partie à trace nulle.

LEMME 6. *Le fibré vectoriel $S_0^p(\Theta)$ sur ZM , dont la fibré en J est l'espace $S_0^p(\Theta_J)$, possède une structure complexe naturelle et est naturellement identifié comme fibré vectoriel complexe, à Θ^p .*

DEMONSTRATION. Le rang de $S^p(\Theta)$ est égal à $p+1$. Celui de $S_0^p(\Theta)$ est donc égal à $(p+1) - (p-1) = 2$ pour tout p . Le fibré $S^p(\Theta)$, donc aussi $S_0^p(\Theta)$ possède une structure euclidienne naturelle induite par celle de Θ . Il possède une structure complexe, encore notée J , compatible avec la structure euclidienne, que nous définissons de la manière suivante.

Pa commodité, nous identifions les éléments de $S^p(\Theta)$ avec les formes p -linéaires symétriques sur Θ . La condition de trace nulle équivaut à la condition

$$(46) \quad \Psi(J \circ a_1, a_2, \dots, a_p) = \Psi(a_1, J \circ a_2, \dots, a_p) = \dots = \Psi(a_1, a_2, \dots, J \circ a_p).$$

La structure complexe J de Θ_J est alors définie par

$$(47) \quad (J\Psi)(a_1, \dots, a_p) = -\Psi(J \circ a_1, \dots, a_p) = \dots = -\Psi(a_1, \dots, J \circ a_p).$$

En particulier, l'homomorphisme de $\Theta_J \times \dots \times \Theta_J$ (p fois) dans $S^p(\Theta_J)$ défini par

$$(48) \quad (a_1, \dots, a_p) \rightarrow a_1 0 \dots 0 a_p,$$

composé avec la projection orthogonale de $S^p(\Theta_J)$ sur $S^p_0(\Theta_J)$, est \mathbb{C} -linéaire et induit en J l'isomorphisme cherché de Θ^p sur $S^p_0(\Theta)$. \square

Il résulte du Lemme 6 que, pour tout entier positif p , le fibré Θ^p est réalisé comme le sous-fibré $S^p_0(\Theta)$ du fibré image réciproque $\pi^*S^p_0(A^-M)$ sur ZM .

Nous noterons encore Π la projection orthogonale de $\pi^*S^p_0(A^-M)$ sur le sous-fibré Θ^p , Π^J la projection orthogonale de $S^p_0(A^-M)$ sur $S^p_0(\Theta_J)$ pour J dans Z_xM .

Pour toute section $a^{(p)}$ de $S^p_0(A^-M)$, nous notons $\tilde{a}^{(p)}$ la section distinguée de Θ^p associée à $a^{(p)}$, définie par

$$(49) \quad (\tilde{a}^{(p)})(J) = \Pi^J(a^{(p)}).$$

Pour chaque x dans M , la restriction de Θ^p à la fibre Z_xM possède une structure holomorphe canonique, produit tensoriel (p fois) de la structure holomorphe canonique de $\Theta^{(x)}$, isomorphe à H^{2p} , cf. Remarque 6.

L'espace des sections holomorphes de la restriction de Θ^p à chaque Z_xM est \mathbb{C} -engendré par l'espace des sections distinguées $\tilde{a}_x^{(p)}$, pour $a_x^{(p)}$ dans la fibre $S^p_0(A^-M)$, i.e. s'identifie canoniquement à l'espace complexifié $S^p_0(A^-M) \otimes \mathbb{C}$.

Chaque structure de Weyl D sur (M, c) détermine, via la représentation Δ^{2p} de poids 0 de $CO^+(4)$, une connexion linéaire, encore notée D , sur le fibré $S^p_0(A^-M)$, une connexion induite π^*D sur le fibré induit $\pi^*S^p_0(A^-M)$, et, par projection orthogonale, une connexion R -linéaire $\nabla^{(p)}$ sur le sous-fibré $S^p_0(\Theta) = \Theta^p$ de $\pi^*S^p_0(A^-M)$.

La démonstration de la Proposition 2 s'applique sans modification substantielle au cas $p > 1$, et montre que $\nabla^{(p)}$ est hermitienne, naturelle et réelle, et est une connexion de Chern si et seulement si la structure de Weyl D est autoduale. On vérifie aisément que $\nabla^{(p)}$ est égale au produit tensoriel (p fois) de la connexion ∇ induite par D sur Θ . La dérivée covariante relative à $\nabla^{(p)}$ d'une section distinguée $\tilde{a}^{(p)}$ s'écrit, cf. (21),

$$(50) \quad \nabla^{(p)}_{\tilde{v}} \tilde{a}^{(p)} = D_{\tilde{x}} a^{(p)} - \frac{1}{2} \langle a^{(p)}, J \rangle 0 v^D(U)$$

où $\langle a^{(p)}, J \rangle$ note la contraction, dans $S^{p-1}(A^-M)$, de $a^{(p)}$ avec J , définie, sur les éléments décomposés de $S^p(A^-M)$, par

$$(51) \quad \langle a_1 0 \dots 0 a_p, J \rangle = \sum_i \langle a_i, J \rangle a_1 0 \dots 0 \hat{a}_i 0 \dots 0 a_p.$$

Les considérations faites précédemment à propos de Θ valent, mutatis mutandis, pour Θ^p , $p > 1$, en particulier le Théorème 1 qui reste inchangé lorsqu'on substitue Θ^p à Θ dans sa formulation.

II.7. - Fibré tangent vertical et fibré tangent horizontal

Dans ce paragraphe, M est orientée, de dimension paire $n = 2m \geq 4$.

Nous supposons que la structure presque-complexe J sur ZM est intégrable, i.e. que la structure conforme c est autoduale si $n = 4$, plate si $n > 4$.

Le fait que le fibré tangent vertical Θ ne possède pas de structure holomorphe canonique pour $n = 4$ est corroboré par la proposition générale suivante.

PROPOSITION 6. *Le fibré tangent vertical sur l'espace des twisteurs ZM de (M, c) n'est pas un sous-fibré holomorphe du fibré tangent de ZM .*

Un sous-fibré complexe F d'un fibré vectoriel holomorphe $(E, \bar{\partial})$ est un *sous-fibré holomorphe* s'il est $\bar{\partial}$ -stable, i.e. s'il est localement trivialisable par des sections holomorphes de E .

La Proposition 5 peut donc être paraphrasée en disant que Θ ne peut être trivialisé par des champs de vecteurs holomorphes sur ZM . Elle peut être renforcée sous la forme suivante.

PROPOSITION 6bis. *Il n'existe aucun champ de vecteurs local non-trivial holomorphe et vertical sur ZM .*

Une section locale ξ de Θ , vue comme un champ de vecteur vertical sur ZM , est holomorphe si la dérivée de Lie $L_\xi J$ de J dans la direction de ξ est nulle.

La Proposition 6 se déduit alors immédiatement de (54) dans le Lemme suivant.

LEMME 7. *Pour toute section distinguée \tilde{a} de Θ , considérée comme un champ de vecteur sur ZM , la dérivée de Lie $L_{\tilde{a}} J$ s'écrit, relativement à toute structure de Weyl D , cf. I (35), sous la forme*

$$(53) \quad (L_{\tilde{a}} J)(U) = (\Pi^J(J \circ D_X a - D_{JX} a), (\tilde{a}(J))(X)),$$

$$U \in T_J ZM, \quad J \in Z_x M,$$

où X est la projection de U dans $T_x M$.

Pour toute section ξ de Θ et tout vecteur U dans $T_J ZM$, la projection de $(L_\xi J)(U)$ dans $T_x M$ est égale à

$$(54) \quad \pi_*((L_\xi J)(U)) = (\xi(J))(\pi_* U).$$

NOTE. Comme dans le cas de la dimension 4, la *section distinguée* \tilde{a} de Θ , associée à une section a de AM , est définie par, cf. (6),

$$(55) \quad \tilde{a}(J) = \Pi^J(a) = \frac{1}{2} (a + J \circ a \circ J).$$

En dimension 4, la composante autoduale de a donne une contribution nulle dans (55) et nous pouvons nous borner alors, comme nous l'avons fait, à ne considérer que les sections a de A^-M .

DEMONSTRATION DU LEMME 7. Comme Θ est engendré par ses sections distinguées, (54) se déduit facilement de (53).

Pour toute section ξ de Θ , la dérivée de Lie $L_\xi J$ est égale, en J , à

$$(56) \quad (L_\xi J)(U) = [\xi, JU] - J[\xi, U], \quad U \in T_J ZM,$$

où, dans le membre de droite, U note une extension quelconque de U au voisinage de J sur ZM . La relation (53) se déduit alors immédiatement de Appendice A, (A10)-(A11)-(A12). □

REMARQUE 9. L'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}^{ZM}$ déterminant la structure holomorphe canonique du fibré tangent de la variété complexe (ZM, J) s'écrit

$$(57) \quad \bar{\partial}_V^{ZM} V = -\frac{1}{2} (J \circ L_V J)(U), \quad U \in T_J ZM,$$

où V est une section locale de TZM .

Lorsque $n = 4$, il résulte clairement de (53) que l'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}^\nabla$, qui est la partie de type $(0, 1)$ de la connexion de Chern ∇ déterminée par la structure de Weyl D , est donné par

$$(58) \quad \bar{\partial}_V^\nabla \xi = -\frac{1}{2} v^D (J \circ L_\xi J)(U), \quad U \in T_J ZM,$$

où ξ est une section locale de $\Theta \subset TZM$ et où v^D note la partie principale relative à D , cf. I.4.

Si le fibré tangent vertical Θ n'est jamais un sous-fibré holomorphe de TZM , il n'en va pas de même pour le *sous-fibré horizontal* H^D déterminé par une structure de Weyl D , dont la fibre en J est l'espace horizontal H_J^D , cf. I (34), qui possède une structure complexe tautologique (définie par I (38)) et une classe conforme de structures hermitiennes (mais pas de structure hermitienne distinguée) induite tautologiquement par la structure conforme c .

De fa çon précise, on a la

PROPOSITION 7. *Le sous-fibré horizontal H^D de TZM déterminé par une structure de Weyl D est un sous-fibré holomorphe si et seulement si D est*

autoduale et d'Einstein ($n = 4$), fermée et de courbure réduite à sa partie scalaire ($n > 4$).

DEMONSTRATION. Le fibré horizontal H^D est engendré par ses sections distinguées \tilde{X} , où X est un champ de vecteur sur M , cf. (20). Ainsi, H^D est un sous-fibré holomorphe de TZM si et seulement si $(L_{\tilde{X}}J)(U)$ est horizontal, pour tout J dans ZM et tout U dans T_jZM .

Il résulte de (A11)–(A14) que $(L_{\tilde{X}}J)(U)$ est nul si U est vertical et que la partie principale de $(L_{\tilde{X}}J)(\tilde{Y})$ est donnée par

$$(59) \quad v^D((L_{\tilde{X}}J)(\tilde{Y})) = [R^D(X \wedge JY), J] - J \circ [R^D(X \wedge Y), J].$$

Par hypothèse, le tenseur de Weyl négatif W_- de (M, c) est nul si $n = 4$, et le tenseur de Weyl W est nul pour $n > 4$.

Dans le premier cas ($n = 4$), la contribution de W_+ dans le second membre de (59) est nulle aussi puisque les éléments de A_x^+M sont J -linéaires pour tout J dans Z_xM .

De même, la seule contribution non-nulle a priori, dans le second membre de (59), de la composante $\tilde{\rho}^D$ de la courbure R^D , cf. I (19), est donnée par la partie anti-autoduale $\tilde{\rho}_-^D$ de $\tilde{\rho}^D$ et, plus précisément, la partie antisymétrique $\frac{1}{2}[\rho_-^D, X \wedge Y] = \frac{1}{2}(\rho_-^D(X) \wedge Y - \rho_-^D(Y) \wedge X)$ de $\tilde{\rho}_-^D(X \wedge Y)$, puisque la courbure translationnelle F^D , cf. I (20), donne évidemment une contribution nulle dans (59).

Enfin, la composante scalaire $\tilde{\text{Scal}}^D$ de R^D donne clairement une contribution nulle dans le second membre de (59), dans lequel nous pouvons ainsi substituer à R^D l'opérateur $\tilde{k} : X \wedge Y \rightarrow k(X) \wedge Y - k(Y) \wedge X$, avec $k = \frac{1}{2} \text{Ric}_0^D + \frac{1}{2} \rho_-^D$ ($n = 4$), $k = \frac{1}{(n-2)} \text{Ric}_0^D + \frac{1}{2} \rho_-^D$ ($n > 4$), cf. I (22).

Le second membre de (59) est identiquement nul en x (pour tous X, Y dans T_xM et tout J dans Z_xM) si et seulement si k —vu comme un endomorphisme de poids -2 de T_xM —commute à J pour tout J dans Z_xM , si et seulement si k est nul puisqu'il est orthogonal à l'identité. \square

REMARQUE 11. Lorsque H^D est un sous-fibré holomorphe de TZM , la structure holomorphe induit sur le quotient TZM/H^D , qui est naturellement identifié au fibré tangent vertical Θ , coïncide avec la structure holomorphe ∇ induite sur Θ par la structure de Weyl D , cf. Proposition 2 et Remarque 9. En d'autres termes, si D satisfait les conditions de la Proposition 7, la projection verticale v^D , vue comme une 1-forme J -linéaire sur ZM à valeurs dans le fibré holomorphe (Θ, ∇) , est holomorphe.

De façon précise, la Proposition 7 peut être paraphrasée, compte-tenu de la Proposition 2 et de la Remarque 9, sous la forme suivante

PROPOSITION 7bis. Soit D une structure de Weyl sur (M, c) .

a) ($n > 4$). D induit une structure holomorphe sur le fibré tangent vertical Θ si et seulement si elle est fermée et sa courbure est réduite à sa partie

scalaire. La projection verticale v^D est alors holomorphe.

b) ($n = 4$). D induit une structure holomorphe sur Θ si et seulement si elle est autoduale, et v^D est holomorphe si et seulement si elle est, en outre, d'Einstein.

Sous cette forme, la Proposition 7 est bien connue, au moins en dimension 4, lorsque D est une connexion de Levi-Civita, i.e. une structure de Weyl exacte, cf. [BE] Th. 13.81, p. 390.

Dans la suite de ce paragraphe, nous supposons que la dimension n de M est égale à 4.

Si la structure de Weyl D satisfait les conditions de la Proposition 7, i.e. si D est une structure de Weyl autoduale d'Einstein, le fibré horizontal H^D est un sous-fibré holomorphe de TZ et la restriction de la structure holomorphe de H^D à chaque fibre $Z_x M$ coïncide avec la structure holomorphe canonique du fibré normal $N^{(x)}$, cf. Remarque 7.

En particulier, chaque section holomorphe réelle (= σ -invariante) de H^D est nécessairement une section distinguée \tilde{X} , où X est un champ de vecteurs sur M , cf. la fin de la Remarque 7.

Si \tilde{X} et \tilde{Y} sont deux champs horizontaux distingués sur ZM , il résulte de (A13-14) que l'on a au point J de $Z_x M$, la relation

$$(60) \quad (L_{\tilde{X}} J)(\tilde{Y}) = (0, [J, DX]Y),$$

où DX est considéré comme un endomorphisme de TM .

Ainsi, \tilde{X} est une section holomorphe de H^D si et seulement si le champ de vecteurs X satisfait la condition

- (H) le commutateur $[J, DX]$ est nul en tout point x de M , pour tout J dans la fibre $Z_x M$.

On en déduit aisément la

PROPOSITION 8. Si D est une structure de Weyl autoduale d'Einstein sur (M, c) , l'espace des sections holomorphes σ -invariantes du fibré horizontal H^D est identifié, via le relèvement horizontal $X \rightarrow \tilde{X}$, au sous-espace de l'espace des champs de vecteurs conformes sur (M, c) constitué des champs de vecteurs X dont la dérivée covariante DX est de la forme

$$DX = 1/4 \operatorname{tr}(DX) \cdot I + D_+^a X,$$

où $D_+^a X$ note la composante antisymétrique autoduale de DX , $\operatorname{tr}(DX)$ la trace de DX , I l'identité de TM .

Lorsque M est compacte, les structures de Weyl-Einstein autoduales, qui sont alors fermées (cf. Lemme 2), appartiennent à l'une des deux catégories suivantes

(i) les connexions de Levi-Civita des métriques d'Einstein contenues dans la classe conforme c ,

(ii) la structure de Weyl plate canonique d'une variété riemannienne "de type $S^1 \times S^3$ ", i.e. localement isométrique au produit $S^1 \times S^3$.

On obtient alors aisément, à partir de la Proposition 8, une description complète de l'espace des sections holomorphes de H^D .

Ces points seront développés dans une publication ultérieure.

REMARQUE 13. ($n = 4$). La structure holomorphe canonique du fibré tangent TZM induit une structure holomorphe canonique sur le fibré anticanonique $K^*ZM = \Lambda_{\mathbb{C}}^3(TZM, J)$ de la variété complexe ZM . Le carré tensoriel Θ^2 du fibré tangent vertical θ est isomorphe, comme fibré hermitien, à K^*ZM , mais non canoniquement. De façon précise, chaque métrique (globale) g dans la classe conforme détermine un isomorphisme de fibrés hermitiens de Θ^2 sur K^*ZM défini de la manière suivante: à tout couple (a, b) de $\Theta_J \times \Theta_J$, $J \in T_x M$, nous associons l'élément $a \wedge \tilde{X} \wedge b \sim (X)$ de $\Lambda_{\mathbb{C}}^3(TZM, J)$, où X est un élément g -unitaire quelconque de $T_x M$.

Cette application, clairement J -bilinéaire, ne dépend pas du choix de X , et détermine l'isomorphisme cherché du carré tensoriel (complexe) Θ_J^2 dans K^*ZM .

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la structure holomorphe induite sur Θ^2 par l'isomorphisme $\Theta^2 \rightarrow K^*ZM$ déterminé par g et la structure holomorphe canonique de K^*ZM coïncide avec la structure holomorphe induite sur Θ^2 par la connexion de Levi-Civita D^g de g , cf. II.5.

III. - Les sections holomorphes du fibré tangent vertical et ses puissances tensorielles

III.1. - Un Théorème d'annulation sur les variétés conformes compactes de type négatif ou de type zero

Une structure conforme définie positive c sur M est de type positif (resp. de type négatif, resp. de type zéro) si elle contient une métrique (riemannienne) dont la courbure scalaire est positive (resp. négative, resp. nulle).

Si M est compacte, il résulte d'un théorème démontré grâce aux contributions successives de H. Yamabe, N.S. Trudinger et T. Aubin, cf. [BB] Th. III.5, que c est de type négatif si et seulement si sa constante de Yamabe, cf. [BB] Déf. III.3, est négative, i.e. si et seulement si elle contient une métrique dont la courbure scalaire totale $\int_M \text{Scal}_g \cdot v_g$ est négative, et que c est de type

zéro si et seulement si sa constante de Yamabe est nulle, si et seulement si elle contient une métrique dont la courbure scalaire totale est nulle mais aucune dont la courbure scalaire totale soit négative.

Que (M, c) soit ou non compacte, les puissances tensorielles positives du dual Θ^* de Θ n'admettent pas de sections holomorphes non-identiquement nulle sur ZM relativement à aucune structure holomorphe naturelle—donc aucune structure holomorphe par le Lemme 1—puisque la restriction de $(\Theta^*)^p$, $p > 0$, à chaque fibre $Z_x M$ est isomorphe à une puissance tensorielle positive du fibré tautologique H^* de $Z_x M = CP^1$.

Si (M, c) est compacte et de type négatif, il est également connu que les puissances tensorielles positives de Θ ne possèdent pas non plus de section holomorphe non-identiquement nulle pour toute structure holomorphe dans la classe d'équivalence canonique, i.e. dans le langage utilisé ici, induite par une structure de Weyl exacte, cf. [PO] Prop. 5.2.

Un des objectifs de cette troisième partie est d'étendre ce résultat à toutes les structures holomorphes de Θ et ses puissances tensorielles, décrites par le Théorème 1. De façon précise, on a le

THEOREME 2. *Soient (M, c) une variété conforme (définie positive) orientée, compacte, autoduale de dimension 4, ZM l'espace des twisteurs de (M, c) muni de sa structure complexe canonique J , Θ le fibré tangent vertical sur ZM muni de sa structure hermitienne canonique de rang 1.*

a) *Si c est de type négatif, les puissances tensorielles complexes positives de Θ ne possèdent pas de sections holomorphes non identiquement nulles relativement à aucune de leurs structures holomorphes.*

b) *Si c est de type zéro, les puissances tensorielles positives de Θ ne possèdent pas de sections holomorphes non identiquement nulles relativement à aucune de leurs structures holomorphes dont la partie réelle n'appartient pas à la classe canonique.*

c) *Quel que soit le type de c , le fibré produit $\Theta^0 = ZM \times \mathbf{C}$ ne possède pas de section holomorphe non identiquement nulle relativement à aucune de ses structures holomorphes non-équivalentes à la structure holomorphe produit.*

OBSERVATION PRELIMINAIRE. Il suffit, grâce à la Proposition 1, de ne considérer que les structures holomorphes *naturelles* de Θ^p .

Il suffit même de ne considérer que les structures holomorphes *naturelles et réelles*, i.e. induites par une structure de Weyl autoduale sur (M, c) , Proposition 2.

En effet, si ξ est une section holomorphe non identiquement nulle de Θ^p pour la structure holomorphe naturelle ∇^β , la section conjuguée $\bar{\xi}$ définie par II (16) est une section holomorphe de Θ^p pour la structure holomorphe "conjuguée" $\nabla^{-\beta}$, cf. II.3, et $\xi \otimes \bar{\xi}$ est une section holomorphe non identiquement nulle de Θ^{2p} relativement à la structure holomorphe réelle $\nabla^{(2)} = \nabla \otimes 1 + 1 \otimes \nabla$.

Une première démonstration du Théorème 2 (parties a) et b)) est calquée sur la démonstration connue dans le cas où les structures de Weyl considérées sont exactes et repose sur la correspondance de Penrose et les techniques de Weitzenböck associées à une structure de Weyl D , développées respectivement, également pour leur intérêt propre, dans les paragraphes III.2 et III.3.

La démonstration directe, qui nous a été en partie suggérée par C. LeBrun, repose sur le Lemme 5 et le fait, démontré dans l'Appendice A, que les métriques hermitiennes naturelles fabriquées sur ZM à partir d'une structure de Weyl D sont *standard* au sens de [GA1].

L'argument de cette démonstration est développé dans le paragraphe III.4 et conduit à une généralisation partielle du Théorème 2, dans le cas où c est de type quelconque, sous la forme de la Proposition 10. Le Théorème 2 a) possède un important Corollaire, lié à un travail récent de M. Ville, signalé dans la Remarque 17.

III.2. - La correspondance de Penrose associée à une structure de Weyl

Dans ce paragraphe, M n'est pas supposée compacte. Nous choisissons une structure de Weyl (autoduale) D sur (M, c) et nous notons simplement ∇ (pour $\nabla^{(p)}$, cf. II.6), la connexion de Chern induite par D sur Θ^p , où p est un entier positif quelconque. Soit ξ une section ∇ -holomorphe de Θ^p . Pour chaque point x de M , la restriction de ξ à la fibre $Z_x M$ est holomorphe relativement à la structure holomorphe canonique de $\Theta^p_{|Z_x M}$ et s'identifie ainsi à un élément de l'espace complexifié $S^p_0(A^-M) \otimes \mathbb{C}$. Il en résulte que toute section ∇ -holomorphe ξ de Θ^p est de la forme $\tilde{a} + J\tilde{b}$, où a et b sont deux sections bien définies de $S^p_0(A^-M)$. Sauf à substituer à ξ la section imaginaire pure $\xi - \bar{\xi}$ ou $J\xi - (J\bar{\xi})$, nous supposons que ξ est la section distinguée \tilde{a} déterminée par une section a de $S^p_0(A^-M)$. La dérivée covariante ∇ de \tilde{a} est explicitée en II.(50) où le terme d'ordre zéro est clairement J -linéaire puisque la projection verticale v^D est elle-même J -linéaire (cf. définition II.(47) de la structure complexe de $S^p_0(A^-M)$). Ainsi, la section distinguée \tilde{a} est ∇ -holomorphe, cf. II.(7), si et seulement si la section a satisfait la condition

$$(Q) \quad D_{JX}a = J \circ D_X a \quad \text{pour tous } x \text{ dans } M, X \text{ dans } T_x M \text{ et} \\ J \text{ dans } Z_x M.$$

La condition (Q) est une condition linéaire, $SO(T_x M)$ -invariante en tout point x de M , portant sur la dérivée covariante Da vue comme une section du fibré vectoriel $S^p_0(A^-M) \otimes T^*M$. Elle détermine ainsi un sous-fibré vectoriel de $S^p_0(A^-M) \otimes T^*M$, associé à une sous-représentation (réelle) de la représentation $\Delta_-^{2p} \otimes (\Delta_+ \otimes \Delta_-)$, affectée du poids -1 , de $CO^+(4)$ (considérée elle-même comme une représentation réelle, cf. Remarque 4).

La représentation $\Delta_-^{2p} \otimes (\Delta_+ \otimes \Delta_-)$ se décompose en la somme

$$(1) \quad \Delta_-^{2p} \otimes (\Delta_+ \otimes \Delta_-) = \Delta_-^{2p+1} \otimes \Delta_+ \oplus \Delta_-^{2p-1} \otimes \Delta_+$$

où les deux représentations du membre de droite, affectées l'une et l'autre du poids -1 , sont $C^0(4)$ -irréductibles (décomposition de Clebsch-Gordan).

Nous noterons $B_1^{(p)}$ et $B_2^{(p)}$ les sous-fibrés de $S_0^p(A^-M) \otimes T^*M$ associés respectivement aux représentations (réelles) $\Delta_-^{2p+1} \otimes \Delta_+$ et $\Delta_-^{2p-1} \otimes \Delta_+$, Π_1 et Π_2 les projections orthogonale de $S_0^p(A^-M) \otimes T^*M$ sur $B_1^{(p)}$ et $B_2^{(p)}$ respectivement.

LEMME 8. *La section a de $S_0^p(A^-M)$ satisfait la condition (Q) si et seulement si la dérivée covariante Da est une section du sous-fibré $B_2^{(p)}$ de $S_0^p(A^-M) \otimes T^*M$.*

DEMONSTRATION. Puisque Θ^P possède, au moins localement, des sections ∇ -holomorphes et que, par ailleurs, il est bien clair que toutes les sections distinguées ne sont pas ∇ -holomorphes, nous pouvons affirmer a priori (Lemme de Schur) que a satisfait (Q) si et seulement si Da est une section de l'un ou l'autre (à déterminer) des deux sous-fibrés $B_1^{(p)}$ ou $B_2^{(p)}$.

Il suffit donc de montrer que a satisfait (Q) si Da est une section de $B_2^{(p)}$.

Les sous-fibrés $B_1^{(p)}$ et $B_2^{(p)}$ peuvent être décrits de la façon suivante.

Il existe un homomorphisme naturel de trace de $S_0^p(A^-M) \otimes T^*M$ dans $S^{p-1}(A^-M) \otimes T^*M$ défini sur les éléments décomposés par

$$(2) \quad a_1 0 \dots 0 a_p \otimes \alpha \xrightarrow{\text{trace}} \sum_{\kappa=1}^p a_1 0 \dots 0 \hat{a}_\kappa 0 \dots 0 a_p \otimes a_\kappa(\alpha)$$

où les a_i sont considérés comme des endomorphismes de T^*M . Le fibré $B_1^{(p)}$ est égal au noyau de l'homomorphisme trace, tandis que $B_2^{(p)}$ est identifié à son image dans $S_0^{p-1}(A^-M) \otimes T^*M$, identifiée à son tour au noyau de la trace dans $S_0^{p-1}(A^-M) \otimes T^*M$, i.e. à $B_1^{(p-1)}$. En particulier, les éléments de $B_2^{(p)}$ sont engendrés par les éléments de la forme

$$(3) \quad \sum_{i=1}^4 ((e_i \wedge \alpha)_- 0 a_1 0 \dots 0 a_{p-1}) \otimes e_i^*$$

où les a_κ sont des éléments de A_x^-M , $x \in M$, α un élément de T_xM , $(e_i \wedge \alpha)_-$ la composante anti-autoduale de $(e_i \wedge \alpha)$, $\{e_i\}$ une base orthonormée (conforme) de T_xM , $\{e_i^*\}$ la base duale (algébrique) de T_xM , $i = 1, \dots, 4$.

On a alors la succession d'égalités suivante:

$$\begin{aligned}
 & \sum_i (\mathcal{J}\Pi^J((e_i \wedge \alpha)_- 0 a_1 0 \dots 0 a_{p-1})) \otimes J e_i^* \\
 &= \sum_i (\Pi^J(J(e_i \wedge \alpha)_- 0 a_1 0 \dots 0 a_{p-1})) \otimes J e_i^* \\
 &= \sum_i (\Pi^J(J e_i \wedge \alpha)_- 0 a_1 0 \dots 0 a_{p-1}) \otimes J e_i^* \\
 &= \sum_i (\Pi^J(e_i \wedge \alpha)_- 0 a_1 0 \dots 0 a_{p-1}) \otimes e_i^*,
 \end{aligned}$$

—où intervient le fait que $\{J e_i^*\}$ est la base duale de $\{J e_i\}$ —, qui montre que tout élément de la forme (3), donc tout élément de $B_2^{(p)}$, satisfait la condition (Q). \square

DEFINITION 7. Pour tout nombre réel w , tout entier positif p et toute structure de Weyl D sur (M, c) , l'opérateur de Penrose et l'opérateur de Dirac d'ordre (ou *spin*) p et de poids w attachés à D sont respectivement définis par

$$(4) \quad P_1^{(D,p,w)} = \Pi_1 \circ D^{(\Delta_+^{2p}, w)} \quad P_2^{(D,p,w)} = \Pi_2 \circ D^{(\Delta_-^{2p}, w)}.$$

L'un et l'autre sont des opérateurs différentiels d'ordre 1 agissant sur les sections du fibré $S_0^p(A^-M)$ affecté du poids w , à valeurs respectivement dans $B_1^{(p)}$ et $B_2^{(p)}$, affectés du poids $w - 1$.

Nous aurons avantage, dans la suite, à considérer que les opérateurs de Penrose et de Dirac prennent l'un et l'autre leurs valeurs dans $S_0^p(A^-M) \otimes T^*M$ —affecté du poids -1 —, en les composant implicitement avec l'injection naturelle de $B_1^{(p)}$ et $B_2^{(p)}$ dans $S_0^p(A^-M) \otimes T^*M$.

On a alors la relation tautologique

$$(5) \quad P_1^{(D,p,w)} + P_2^{(D,p,w)} = D^{(\Delta_+^{2p}, w)},$$

i.e. les opérateurs de Penrose et de Dirac que nous considérons ici sont normalisés de telle manière que leur somme est égale à la dérivée covariante, cf. Appendice B.

Le Lemme 8 implique immédiatement la

PROPOSITION 8 (Correspondance de Penrose). *Pour toute structure de Weyl autoduale D et tout entier positif p , l'application $a \rightarrow \tilde{a}$ constitue un isomorphisme de l'espace des solutions de l'opérateur de Penrose (d'ordre p et poids 0) associé à D , opérant sur les sections de $S_0^p(A^-M)$, et l'espace des sections holomorphes imaginaires pures de Θ^p , muni de la structure holomorphe (réelle) induite par D .*

REMARQUE 14. Les arguments produits dans ce paragraphe n'utilisent pas l'autodualité de la structure conforme c ni de la structure de Weyl D et prouvent plus généralement que l'application $a \rightarrow \bar{a}$ constitue, pour toute structure de Weyl D et toute structure conforme sur M , un isomorphisme entre l'espace des solutions de $P_1^{(D,p,0)}$ et celui des sections (imaginaires pures) "holomorphes" de Θ^p , i.e. qui satisfont la relation II.(7), où ∇ est la connexion hermitienne induite par D . En d'autres termes, la correspondance de Penrose s'étend sans modification au cas où la structure presque-complexe J sur l'espace des twisteurs n'est pas intégrable et où Θ et ses puissances tensorielles sont munis de la structure pré-holomorphe déterminée par l'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}^\nabla$.

REMARQUE 15. Pour chaque valeur p , il existe un poids (unique) $w_1(p)$ tel que l'opérateur de Penrose $P_1^{(D,p,w_1(p))}$ ne dépend pas de la structure de Weyl D , i.e. est entièrement déterminé sur les sections du fibré vectoriel $(S_0^p(A^-M), w_1(p))$ par la seule structure conforme c , cf. Appendice B. Il existe de même un tel poids distingué (unique) $w_2(p)$ pour l'opérateur de Dirac possédant la même propriété. De façon explicite, on a

$$(6) \quad w_1(p) = p \quad w_2(p) = -(p + 1),$$

Cf. [FE] et [HI1]—où la convention de signe concernant les poids est inversée—et, infra, la démonstration du Lemme 9. L'opérateur de Penrose qui intervient dans la correspondance de Penrose est de poids 0—comme l'espace des twisteurs lui-même—et n'est donc pas invariant conforme, i.e. dépend effectivement de la structure de Weyl D pour tous les ordres p positifs.

III.3. - Formules de Weitzenböck associées a une structure de Weyl

Une fois établie la Correspondance de Penrose sous la forme de la Proposition 8, la seconde partie de la preuve du Théorème 2 utilise les techniques de Weitzenböck appliquées à l'opérateur de Penrose (d'indice p positif et de poids 0) $P_1^{(D,p,0)}$ —que nous noterons simplement $P_1^{(D,p)}$ —associé à une structure de Weyl autoduale D . On a le

LEMME 9. Soit (M, c) une variété conforme orientée de dimension 4 autoduale. Pour toute structure de Weyl autoduale D sur (M, c) et tout entier positif p , on a

$$(7) \quad -\frac{(2p + 1)}{(p + 1)} \text{trace} \left(D^{(\Delta^{2p} \otimes \tau)} \circ P_1^{(D,p)} \right) = -\text{trace} \left(D^{(\Delta^{2p} \otimes \tau)} \circ D^{\Delta^{2p}} \right) - \frac{p}{6} \text{Scal}^D \cdot I \Big|_{S_0^p(A^-M)}.$$

DEMONSTRATION. La relation (7) est une relation entre opérateurs de poids -2 agissant sur les sections de $S_0^p(A^-M)$ à valeurs dans $S_0^p(A^-M)$, où $D^{\Delta^{2p}}$ et $D^{(\Delta^{2p} \otimes \tau)}$ sont les dérivées covariantes induites par D sur $S_0^p(A^-M)$ et

$S_0^p(A^-M) \otimes T^*M$ respectivement. Nous appliquons la théorie générale développée en Appendice B (Proposition 12b)) au cas où $n = 4$, $\mu_0 = \Delta_-^{2p}$ et $w = 0$. La représentation tautologique τ est isomorphe à la représentation $\Delta_+ \otimes \Delta_-$ de $SO(4)$ et la décomposition (B 1) coïncide avec la décomposition (1) de Clebsch-Gordan, avec $\mu_1 = \Delta_-^{2p+1} \otimes \Delta_+$ et $\mu_2 = \Delta_-^{2p-1} \otimes \Delta_+$. Les opérateurs de Penrose et de Dirac d'ordre p et poids 0 de Définition 7 coïncident avec les opérateurs notés respectivement, dans la théorie générale, P_1^μ et P_2^μ , avec $\mu = (\Delta_-^{2p}, 0)$.

Un calcul simple montre que le nombre de Casimir (normalisé) $c(p, q)$ de chaque représentation irréductible $\Delta_+^p \otimes \Delta_-^q$ de $SO(4)$ — $p + q$ pair—est égal à

$$(8) \quad c(p, q) = \frac{1}{2} (p^2 + q^2) + (p + q),$$

d'où nous déduisons immédiatement, via (B 8), les valeurs donnés par (6) des poids distingués associés à $\mu_0 = \Delta_-^{2p}$. La formule de Weitzenböck conforme universelle (B 11), pour $\mu = (\Delta_-^{2p}, 0)$, s'écrit donc

$$(9) \quad -\text{trace} \left(D^{(\Delta_-^{2p} \otimes \tau)} \circ (p \cdot P_1^{(D,p)} - (p+1) \cdot P_2^{(D,p)}) \right) = \mathcal{R}^{(p)},$$

où $\mathcal{R}^{(p)} = \mathcal{R}^\mu$ est défini par (B 12). La seule contribution non-nulle a priori de la courbure R^D de D dans $\mathcal{R}^{(p)}$ est donnée par sa partie scalaire $\tilde{\text{Scal}}^D$, qui est égale à $1/12 \cdot \text{Scal}^D \cdot I$, et les composantes W_- et $\tilde{\rho}_-^D$, qui sont nulles l'une et l'autre puisque c et D sont autoduales. Le terme $\mathcal{R}^{(p)}$ se réduit donc, à un facteur scalaire près, égal à $-1/12 \cdot \text{Scal}^D$, à l'opérateur de Casimir $C^{\Delta_-^{2p}}$ de Δ_-^{2p} qui est lui-même scalaire puisque Δ_-^{2p} est irréductible, égal à $2p(p+1) \cdot I$ par (8). On a donc

$$(10) \quad \mathcal{R}^{(p)} = -\frac{1}{6} p(p+1) \text{Scal}^D \cdot I \Big|_{S_0^p(A^-M)}.$$

La formule (8), combinée avec (5), implique alors, par élimination de l'opérateur de Dirac, la formule de Weitzenböck (7). \square

COROLLAIRE. *Si une section a de $S_0^p(A^-M)$ est solution de l'opérateur de Penrose $P_1^{(D,p)}$ relatif à une structure de Weyl autoduale D , elle satisfait la relation*

$$(11) \quad -\text{trace} \left(D^{(\Delta_-^{2p} \otimes \tau)} \circ D^{\Delta_-^{2p}} \right) a - \frac{p}{6} \text{Scal}^D \cdot a = 0.$$

Dans la suite du paragraphe, nous supposons que M est compacte. En particulier, toute structure de Weyl autoduale est fermée et, pour tout entier p positif, l'ensemble des classes d'équivalence des structures holomorphes réelles sur Θ^p s'identifie naturellement, au vu de la Proposition 2 et du §II.5, à l'ensemble des classes d'équivalence des structures de Weyl fermées, i.e. au groupe $H^1(M, \mathbf{R})$.

Fixons une métrique g (globale) dans la classe conforme. Chaque élément ω de $H^1(M, \mathbf{R})$ détermine de façon unique, via la théorie de Hodge, une *structure de Weyl distinguée* D —donc aussi une structure holomorphe réelle et naturelle ∇ sur Θ^p —définie par

$$(12) \quad D = D_0 + \tilde{\theta},$$

où D_0 notera, dans ce paragraphe, la connexion de Levi-Civita de g , notée habituellement D^g , et où θ est le représentant g -harmonique de ω .

PROPOSITION 9 (Théorème d'annulation relatif à ω). *Soient (M, c) une variété conforme satisfaisant les hypothèses du Théorème 2, ω un élément fixé de $H^1(M, \mathbf{R})$, g une métrique riemannienne globale dans la classe conforme déterminée par c , D la structure de Weyl distinguée déterminée par g et ω .*

i) *Si la courbure scalaire Scal_g de g est partout négative, l'opérateur de Penrose $P_1^{(D,p)}$ d'ordre p et de poids 0 associé à la structure de Weyl D n'a pas de solution non-triviale.*

ii) *Si Scal_g est nulle, et si ω est distinct de l'origine, $P_1^{(D,p)}$ n'a pas de solution non-triviale.*

DEMONSTRATION. L'utilisation directe de la formule (11) se heurte à deux difficultés: l'une est que Scal^D , que l'on peut identifier au scalaire ordinaire (de poids zéro) Scal_g^D au moyen de g , est différent de Scal_g , l'autre est que le terme principal $-\text{trace} \left(D^{(\Delta^{2p} \otimes \tau)} \circ D^{\Delta^{2p}} \right)$, que l'on peut également réaliser comme la trace métrique $-\text{trace}_g \left(D^{(\Delta^{2p} \otimes \tau)} \circ D^{\Delta^{2p}} \right)$, est différente du laplacien brut $(D^{\Delta^{2p}})^* \circ D^{\Delta^{2p}}$, où $(D^{\Delta^{2p}})^*$ note l'adjoint formel de $D^{\Delta^{2p}}$ relativement à g , si ω est distinct de l'origine. Ces deux difficultés sont levées par les deux Lemmes suivants.

LEMME 9. *La courbure scalaire Scal_g^D de D se déduit de Scal_g par*

$$(13) \quad \text{Scal}_g^D = \text{Scal}_g - 6 |\theta|_g^2.$$

En particulier, Scal_g^D est partout inférieur ou égal à Scal_g , inférieur sur un ouvert non-vide de M si ω est distinct de l'origine.

DEMONSTRATION. (13) est une conséquence immédiate de I(27 b), avec $D_2 = D$ et $D_1 = D_0$, puisque θ est g -cofermée. Le Lemme vaut en dimension quelconque n , en remplaçant 6 par $(n-1)(n-2)$ dans le second membre de (13). \square

LEMME 10. *On a*

$$(14) \quad -\text{trace}_g(D^{\Delta^{2p}} \circ D^{\Delta^{2p}}) = (D^{\Delta^{2p}})^* \circ D^{\Delta^{2p}} - 2(D_0^{\Delta^{2p}})_{\theta^*}.$$

DEMONSTRATION. Le Lemme résulte du calcul général suivant, valable en dimension n quelconque. Soient D_0 la connexion de Levi-Civita de g , D une structure de Weyl liée à D_0 par (12)—où θ est une 1-forme quelconque—, μ_0 une représentation irréductible de $SO(n)$ —ici, $\mu_0 = \Delta_-^{2p}$ —, $\mu = (\mu_0, w)$ la représentation associée à μ_0 , de poids w ,—ici, $w = 0$. La métrique g identifie les fibrés vectoriels $E^{\mu_0} = Q^{g_0} M \times V/\mu_0$ et $E^\mu = QM \times V/\mu$, et la connexion D_0^μ est identifiée à $D_0^{\mu_0}$ puisque D_0 est g -métrique.

On a donc

$$(15) \quad -\text{trace}_g \circ D_0^{\mu \otimes \tau} = (D_0^\mu)^*.$$

Par I (11), appliqué à la représentation $\mu \otimes \tau$, on a (cf. aussi (B 5),

$$D^{\mu \otimes \tau} = D_0^{\mu \otimes \tau} + d(\mu \otimes \tau)(\tilde{\theta}).$$

Pour tout élément décomposé $\xi \otimes \alpha$ de $E^\mu \otimes T^*M$, on a, compte-tenu de ce que la représentation tautologique τ est de poids -1 ,

$$(16) \quad -\text{trace}_g \circ d(\mu \otimes \tau)(\tilde{\theta})(\xi \otimes \alpha) = -d\mu_0(\theta \wedge \alpha)\xi - (n - 2 + w)g(\theta, \alpha)\xi,$$

tandis que

$$(17) \quad (d\mu(\tilde{\theta}))^*(\xi \otimes \alpha) = -d\mu_0(\theta \wedge \alpha)\xi + w g(\theta, \alpha)\xi.$$

Les relations (16) et (17) impliquent

$$(18) \quad -\text{trace}_g \circ d(\mu \otimes \tau)(\tilde{\theta})(\xi \otimes \alpha) = (d\mu(\tilde{\theta}))^*(\xi \otimes \alpha) - (n - 2 + 2w)g(\theta, \alpha)\xi,$$

qui, combiné à (15), et appliqué à D^μ , implique

$$(19) \quad -\text{trace}_g(D^{\mu \otimes \tau} \circ D^\mu) = (D^\mu)^* \circ D^\mu - (n - 2 + 2w)(D^\mu)_{\theta^*}.$$

La relation I (9), qui définit $\tilde{\theta}$, appliquée au cas où le vecteur X est le dual riemannien θ^* de θ , implique

$$d\mu(\tilde{\theta})_{\theta^*} = w \cdot |\theta|_g^2.$$

Finalement, on a, pour w quelconque,

$$(20) \quad -\text{trace}_g(D^{\mu \otimes \tau} \circ D^\mu) = (D^\mu)^* \circ D^\mu - (n - 2 + 2w)(D^\mu)_{\theta^*} - w \cdot (n - 2 + 2w)|\theta|_g^2.$$

La relation (14) correspond au cas particulier où w est égal à 0, n est égal à 4 et $\mu_0 = \Delta_-^{2p}$. \square

En vertu des Lemmes 9 et 10, la formule de Weitzenböck (11), à laquelle satisfait toute solution a de l'opérateur de Penrose $P_1^{(D,p)}$, s'écrit encore (en supprimant la référence explicite à Δ_-^{2p})

$$(21) \quad D^* \circ D a - \frac{p}{6} \cdot \text{Scal}_g \cdot a + 2p \cdot |\theta|_g^2 \cdot a - 2(D_0)_{\theta^*} a = 0.$$

Après produit scalaire avec a lui-même et intégration sur M , relativement à la forme-volume v_g déterminée par g , (21) implique

$$(22) \quad \int_M \langle D a, D a \rangle \cdot v_g - \frac{p}{6} \int_M \text{Scal}_g \cdot |a|^2 \cdot v_g + 2p \int_M |a|^2 \cdot |\theta|_g^2 \cdot v_g = 0,$$

le quatrième terme $-2 \int_M \langle (D_0)_{\theta^*} a, a \rangle \cdot v_g$ étant nul puisque D_0 est une connexion g -métrique et la 1-forme θ est g -cofermée. La Proposition 9 se déduit immédiatement de (22). \square

III.4. - Deux démonstrations du théorème d'annulation

Les parties a) et b) du Théorème 2 sont une conséquence immédiate des Propositions 8 et 9. L'argument pour la partie c) est le suivant.

Il résulte simplement de la démonstration de la Proposition 6 que les structures holomorphes naturelles et réelles du fibré produit $ZM \times \mathbf{C}$, exprimées au moyen de la connexion de Chern associée—relativement à la structure hermitienne triviale—s'écrivent

$$(23) \quad \nabla = d + J\theta \otimes i,$$

où d est la connexion triviale sur $ZM \times \mathbf{C}$, i.e. la dérivée ordinaire, et θ est une 1-forme fermée sur M (compacte). Une section ∇ -holomorphe F sur ZM est constante sur chaque fibre $Z_x M$ et détermine une fonction complexe f sur M qui vérifie la condition

$$(24) \quad df - f \cdot \theta = 0.$$

La relation (24) implique clairement que f est identiquement nulle ou bien n'a pas de zéro sur M . Dans ce dernier cas, la 1-forme θ est exacte et la structure holomorphe déterminée par ∇ est équivalente à la structure holomorphe triviale.

Les parties a) et b) du Théorème 2 admettent également la démonstration directe suivante, qui évite le recours à la correspondance de Penrose et qui substitue aux techniques de Weitzenböck développées dans le paragraphe précédent la théorie du *degré* de Θ relativement aux métriques hermitiennes standard qui s'introduisent naturellement sur ZM .

Fixons, comme dans le paragraphe précédent, une métrique riemannienne g dans la classe conforme et un élément ω de $H^1(M, \mathbf{R})$ que l'on peut considérer

comme une contrainte topologique (le cas “classique” $\omega = 0$ correspond à une situation “libre” d’un point de vue topologique). La donnée conjointe de g et ω détermine une structure de Weyl D dans la classe d’équivalence déterminée par ω , définie par (12) où θ est le représentant g -harmonique de ω . Puisque θ est à la fois fermée et g -cofermée, le couple (D, g) est *distingué* et la métrique hermitienne g^D déterminée sur ZM par (D, g) est *standard*, cf. Appendice A, Proposition 11 c). Considérons la *trace* $\text{tr}_{g^D} \gamma^D$, relative à g^D , de la forme de Chern γ^D de déterminée par D (cf. II.3), qui est, par définition, le produit scalaire de γ^D et de la forme de Kähler Ω_g^D de la structure hermitienne (g^D, J) de ZM .

Elle est, en tout point J de $Z_x M$, la somme de la trace de la partie verticale $\gamma^{(x)}$ de γ^D , égale à $1/4\pi$, cf. Remarque 6, et de la trace de sa partie horizontale, égale, d’après II (30), à la trace, normalisée par g , du tenseur de Ricci normalisé h^D de D , soit donc, d’après I (25), à $1/6 \text{Scal}_g^D$, égale encore, par le Lemme 9, à $1/6 \text{Scal}_g - |\theta|_g^2$.

On a donc

$$(25) \quad \text{tr}_{g^D} \gamma^D = 1/4 \pi + 1/6 \text{Scal}_g - |\theta|_g^2,$$

et aussi, par intégration sur ZM ,

$$(26) \quad \int_{ZM} \text{tr}_{g^D} \gamma^D \cdot v_{g^D} = 8\pi \cdot \text{Vol}_g(M) \left\{ 1/4\pi + 1/\text{Vol}_g(M) \cdot \int_M (1/6 \text{Scal}_g - |\theta|_g^2) \cdot v_g \right\},$$

où v_{g^D} et v_g notent respectivement les formes-volumes de (ZM, g^D) et (M, g) et $\text{Vol}_g(M)$ le volume total de M (le volume de chaque fibre $Z_x M$ est égal à 8π , cf. Remarque 6). L’intégrale qui figure dans le membre de gauche de (26) est, par définition, le *degré* de Θ *relatif à la métrique (standard) g^D* , noté $\text{deg}_{g^D}(\Theta)$, qui est aussi égal au volume algébrique, relatif à la métrique (standard) g^D , du diviseur de toute section méromorphe non-triviale de Θ , pour la structure holomorphe induite par D . Comme le volume d’un diviseur effectif est positif—et puisque on a clairement $\text{deg}_{g^D}(\Theta^p) = p \cdot \text{deg}_{g^D}(\Theta)$ —, il en résulte l’implication (pour tout entier positif p)

$$(27) \quad \text{deg}_{g^D}(\Theta) < 0 \Rightarrow \Theta^p \text{ ne possède pas de section holomorphe non-identiquement nulle pour la structure holomorphe déterminée par } D.$$

Cf. [GA1] 1.14 et référence incluse. Pour tous ces faits, il est essentiel que g^D soit une métrique hermitienne standard.

Avec les hypothèses de Théorème 2 a) et b), le terme $1/\text{Vol}_g(M) \cdot \int_M (1/6 \text{Scal}_g - |\theta|_g^2) \cdot v_g$ qui figure au second membre de (26), est négatif, et peut être rendu inférieur à tout nombre donné, en particulier $-1/4\pi$, en substituant à g une métrique homothétique $t \cdot g$, où t est un nombre réel positif assez petit.

Cette substitution, qui ne modifie pas la connexion de Levi-Civita D^g , ayant été faite implicitement, le degré de Θ relativement à la métrique standard g^D est négatif, et le Théorème a) et b) découle immédiatement de (27). \square

REMARQUE 16. L'argument développé précédemment montre, de façon plus générale, la généralisation suivante du Théorème 2.

PROPOSITION 10. *Soit (M, c) une variété conforme compacte de dimension 4, orientée et autoduale. Soit ω un élément de $H^1(M, \mathbf{R})$, considéré comme l'espace des classes d'isomorphisme réelles de structures holomorphes du fibré tangent vertical Θ de l'espace des twisteurs ZM (ou d'une des puissances tensorielles positives Θ^p de Θ). S'il existe une métrique riemannienne g dans la classe conforme c telle que on ait l'inégalité*

$$(28) \quad \int_M \text{Scal}^g \cdot v_g < 6 \int_M |\theta|^2 \cdot v_g,$$

où θ est le représentant g -harmonique de ω , le fibré Θ et ses puissances tensorielles positives n'admettent aucune section holomorphe non-triviale relativement à aucune structure holomorphe dont la partie réelle appartient à ω .

La Proposition 10 exprime le fait que les puissances tensorielles positives de Θ n'admettent pas de sections holomorphes non-triviales dès lors que la partie réelle de la structure holomorphe considérée est "loin" de l'origine dans $H^1(M, \mathbf{R})$, la borne étant déterminée par le nombre de Yamabe de la structure conforme.

NOTE. La partie a) du Théorème 2 peut se déduire, sans recourir à la Proposition 11 c), du fait, directement observable sur (25), que si Scal_g est partout négative sur M , la trace de γ^D relative à g^D peut être elle-même rendue partout négative sur ZM en substituant, au besoin, à g une métrique homothétique. Ceci implique, sans hypothèse sur g^D , l'absence de sections holomorphes non-triviales de Θ et de ses puissances tensorielles positives, cf. [K-W].

REMARQUE 17. Le Théorème 2 a) et c), combiné avec [VI], a comme conséquence le résultat suivant.

COROLLAIRE. *Soit (M, c) une variété conforme de dimension 4 compacte, orientée et autoduale. Si c contient une métrique (globale) à courbure scalaire négative, l'espace des twisteurs ZM de (M, c) , muni de sa structure complexe canonique, ne possède, en dehors du fibré holomorphe trivial, aucun fibré*

vectoriel holomorphe de rang 1 admettant une section holomorphe globale non-triviale. En particulier, la dimension algébrique de ZM est zéro.

DEMONSTRATION. Lorsqu'on suppose que le premier nombre de Betti b_1 de M est nul, ce résultat est dû à M. Ville [VI] Th. 1. Dans le cas général, la démonstration est calquée, compte-tenu des parties a) et c) du Théorème 2, sur celle de [VI] Th. 1. Soit F un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur ZM , $\sigma^*\overline{F}$ le fibré holomorphe induit par la structure réelle σ , cf. Note de la Définition 6. Le produit tensoriel (complexe) $F \otimes \sigma^*\overline{F}$ est isomorphe, en tant que fibré vectoriel complexe de rang 1, à une puissance tensorielle positive ou nulle Θ^p de Θ , [VI] Lemme 2. Si ζ est une section holomorphe non-identiquement nulle de F , $\tilde{\zeta}$, définie par II (18)—en substituant F à Θ —, est une section holomorphe non-identiquement nulle de $\sigma^*\overline{F}$, et $\zeta \otimes \tilde{\zeta}$ est une section holomorphe (non-identiquement nulle) de $F \otimes \sigma^*\overline{F} = \theta^p$ relativement à une structure holomorphe (réelle) de θ^p , $p \geq 0$.

Il résulte alors du Théorème 2 a) et c) que $F \otimes \sigma^*\overline{F}$ est isomorphe, comme fibré vectoriel holomorphe, au fibré produit $ZM \times \mathbf{C}$. En particulier, la section holomorphe $\zeta \otimes \tilde{\zeta}$ n'a pas de zéro sur ZM , non plus, par conséquent, que ζ .

Ceci montre que F lui-même est isomorphe, comme fibré holomorphe, au fibré produit $ZM \times \mathbf{C}$. \square

REMARQUE 18. Le groupe conforme spinoriel $\text{CSpin}(4) = \text{Spin}(4) \times \mathbf{R}^+$ est réalisé comme le sous-groupe de $\mathbf{H}^* \times \mathbf{H}^*$ constitué des couples (q_1, q_2) tels que $|q_1| \cdot |q_2| = 1$, où \mathbf{H}^* note le groupe multiplicatif des quaternion non-nuls et $|\cdot|$ la norme dans \mathbf{H} . La projection naturelle ρ de $\text{CSpin}(4)$ sur $CO^+(4)$ est donnée par I (46), pour (q_1, q_2) dans $\text{CSpin}(4) \subset \mathbf{H}^* \times \mathbf{H}^*$. Si M est spinorielle (i.e. la deuxième classe de Stiefel-Whitney de M est nulle), le $CO^+(4)$ -fibré principal QM peut être revêtu, de façon ρ -équivariante, par un $\text{CSpin}(4)$ -fibré principal $\tilde{Q}M$ qui détermine la structure spinorielle choisie sur M . Chacune d'elles détermine une racine carrée $\Theta^{1/2}$ de Θ , via le fibré vectoriel complexe (de rang 2) Σ^-M des (demi-)spineurs négatifs de poids zéro sur M , associé, via $\tilde{Q}M$, à la représentation $(\Delta_-, 0)$ de $\text{CSpin}(4)$. L'espace des twisteurs ZM s'identifie alors—quelle que soit la structure spinorielle choisie—au fibré en droites projectives complexes associé à Σ^-M , et la restriction de $\Theta^{1/2}$ à chaque fibre est, par définition, le fibré tautologique dual de $Z_xM = P(\Sigma_x^-M)$, cf. [A-H-S].

Appendice A. - Géométrie de l'espace des twisteurs

A1. - Crochets de champs de vecteurs et théorème d'intégrabilité

Dans cet Appendice (M, c) est une variété conforme orientée de dimension paire $n = 2m$, $m > 1$, et D est une structure de Weyl (quelconque) sur (M, c) . Les notations utilisées sont celles du texte, en particulier I.3-4 et II.1.

Nous rappelons les définitions suivantes (cf. II.(6), (20), (55)).

a) si a est une section (locale) de AM , le *champ distingué vertical* \tilde{a} sur l'espace des twisteurs est défini, en $J \in Z_x M$, par

$$(1) \quad \tilde{a}(J) = \Pi^J(a(x))$$

= la composante J -antilinéaire de l'endomorphisme
 $a(x)$ (via l'identification canonique $T_J^V ZM = \theta_J \subset A_x M$);

b) si X est un champ de vecteur (local) sur M , le *champ distingué horizontal* \tilde{X} sur ZM est défini par

$$(2) \quad \tilde{X}(J) = \text{le vecteur de l'espace } D\text{-horizontal } H_J^D \subset T_J ZM$$

dont la projection dans $T_x M$ est $X(x)$.

Nous nous proposons d'évaluer les crochets mutuels des champs de vecteurs distingués, verticaux et horizontaux, et de leurs images par la structure presque-complexe canonique J de ZM , en utilisant la description suivante du crochet.

Si U et V sont deux champs de vecteurs sur ZM , la valeur de leur crochet en J est donnée par

$$(3) \quad [U, V](J) = - \left. \frac{d}{dt} \left((\Phi_t^U \cdot V)(J) \right) \right|_{t=0},$$

où Φ_t^U , $-\varepsilon < t < \varepsilon$ (ε réel positif), est le flot (local) de U au voisinage de J , et $\Phi_t^U \cdot V$ note l'image directe du champ de vecteur V par le difféomorphisme local Φ_t^U , cf. par exemple [K-N] Ch. I.1. Plus généralement, Φ_t^U peut être remplacé, dans (3), par n'importe quel *flot instantané* (local), i.e. une courbe de difféomorphismes locaux vérifiant

$$(4) \quad \left. \frac{d}{dt} \left((\Phi_t^U)(J') \right) \right|_{t=0} = U(J')$$

pour tout J' proche de J .

Le flot instantané du champ distingué vertical \tilde{a} et le flot de $J\tilde{a}$ sont donnés respectivement par

$$(5) \quad \Phi_t^{\tilde{a}}(J) = \left(\cos \left(\frac{t}{2} a \right) - \sin \left(\frac{t}{2} a \right) \circ J \right) \circ J \circ \left(\cos \left(\frac{t}{2} a \right) - \sin \left(\frac{t}{2} a \right) \right)^{-1}$$

$$(6) \quad \Phi_t^{J\tilde{a}}(J) = \exp \left(-\frac{t}{2} a \right) \circ J \circ \exp \left(\frac{t}{2} a \right),$$

où, pour tout a dans $A_x M$, $\exp(a)$ note l'exponentielle, dans $SO(T_x M)$, de a , tandis que $\cos(a)$ et $\sin(a)$ sont les parties réelle et imaginaire pure respectivement de l'exponentielle, dans $SO(T_x M \otimes \mathbb{C})$, de ia .

Le flot $\Phi_t^{\tilde{X}}$ du champ distingué horizontal \tilde{X} se déduit du flot Φ_t^X de X sur M par

$$(7) \quad \Phi_t^{\tilde{X}}(J) = \text{le transporté parallèle de } J \text{ en } \Phi_t^X(x) \text{ le long} \\ \text{de la courbe } s \rightarrow \Phi_s^X(x).$$

Nous construisons un *flot instantané* $\Phi_t^{J\tilde{X}}$ de $J\tilde{X}$ de la manière suivante. Pour J dans $Z_x M$, nous définissons une section locale $J^{D,x}$ de ZM par

$$(8) \quad J^{D,x}(x') = \text{le transporté parallèle de } J \text{ le long de la} \\ \text{géodésique (relative à } D) \text{ joignant } x \text{ à } x'.$$

Si $\Phi_t^{J^{D,x}X}$ note le flot du champ de vecteur (local) $J^{D,x}X$, le flot instantané $\Phi_t^{J\tilde{X}}$ est défini par

$$(9) \quad \Phi_t^{J\tilde{X}}(J) = \text{le transporté parallèle de } J \text{ en } \Phi_t^{J^{D,x}X}(x) \text{ le} \\ \text{long de la courbe } s \rightarrow \Phi_s^{J^{D,x}X}(x).$$

Nous obtenons alors, via (3), le tableau suivant.

Crochets de champs verticaux

$$(10) \quad [\tilde{a}, \tilde{b}] = -\frac{1}{2} J[\tilde{a}, \tilde{b}], \quad [J\tilde{a}\tilde{b}] = \frac{1}{2} [\tilde{a}, \tilde{b}], \quad [J\tilde{a} J\tilde{b}] = \frac{1}{2} J[\tilde{a}, \tilde{b}].$$

Crochets mixtes

$$(11) \quad [\tilde{X}, \tilde{a}] = D_{\tilde{X}}\tilde{a}, \quad [X, Ja] = J D_{\tilde{X}}a$$

$$(12) \quad [J\tilde{X}, \tilde{a}](J) = ((D_{\tilde{X}}a)(J), -\tilde{a}(J)(X)), \quad [J\tilde{X}, J\tilde{a}](J) = J[J\tilde{X}, \tilde{a}](J).$$

Crochets de champs horizontaux

$$(13) \quad [\tilde{X}, \tilde{Y}](J) = ([R^D(X \wedge Y), J](x), [X, Y](x)),$$

$$(14) \quad [\tilde{X}, J\tilde{Y}](J) = ([R^D(X \wedge JY), J](x), (J \circ D_X Y - D_{JY} X)(x)),$$

$$(15) \quad [J\tilde{X}, J\tilde{Y}](J) = ([R^D(JX \wedge JY), J](x), J \circ (D_{JX} Y - D_{JY} X)(x)).$$

NOTE. Les crochets dans les seconds membres de (10) sont les commutateurs dans AM . Les vecteurs de $T_J ZM$ dans les seconds membres de (12)-(15) sont exprimés par leurs parties principales (relative à D) dans Θ_J et leurs projections dans $T_x M$, cf. I (35). Les projections dans $T_x M$ de $[\tilde{X}, J\tilde{Y}](J)$

et $[J\tilde{X}, J\tilde{Y}](J)$ sont encore égales à $[X, J^{D,x}Y](x)$ et $[J^{D,x}X, J^{D,x}Y](x)$ respectivement.

A titre d'application, nous pouvons calculer la *torsion complexe* (ou *tenseur de Nijenhuis*) \mathcal{N} de J , défini par

$$(16) \quad 4\mathcal{N}(U, V) = [U, V] + J[JU, V] + J[U, JV] - [JU, JV],$$

$$U, V \in T_J ZM, \quad J \in ZM.$$

Il résulte immédiatement des formules précédentes le Lemme suivant (cf. [DV] Lemme 2.5).

LEMME 11. *Pour U et V dans $T_J ZM$, de projections respectives X et Y dans $T_x M$, on a*

$$(17) \quad \mathcal{N}(U, V) = [R^{D,J}, J] (\Pi^J(X \wedge Y)),$$

où $R^{D,J}$ note l'endomorphisme (de poids -2) de Θ_J induit, par projection orthogonale, par la courbure R^D de D .

De (17) résulte clairement que la structure presque-complexe J sur ZM est intégrable (i.e. \mathcal{N} est nul) si et seulement si la courbure R^D de toute structure de Weyl D satisfait la condition:

$$(I) \quad \text{en tout point } x \text{ de } M,$$

$$R^{D,J} \text{ est } J\text{-linéaire pour tout } J \text{ dans } Z_x M.$$

On vérifie aisément que la composante de Ricci $\tilde{\text{Ric}}^D$ de R^D , telle qu'elle explicitée en I (17), satisfait la condition (I). Il en va de même de la composante $\tilde{\rho}^D$ de R^D explicitée en I (14). En outre, pour $n = 4$, le demi-tenseur de Weyl W_+ , qui agit trivialement sur Θ_J pour tout J dans $Z_x M$, satisfait trivialement de ce fait la condition (I).

Par un simple argument d'irréductibilité (Lemme de Schur), on en déduit immédiatement le résultat bien connu évoqué en 1.4:

a) ($n = 4$) J est intégrable si et seulement si le demi-tenseur de Weyl W_- de c est nul.

b) ($n > 4$) J est intégrable si et seulement si le tenseur de Weyl W de c est nul.

Dans ce cas, (ZM, J) est une variété complexe, de dimension (complexe) $\tilde{m} = m(m+1)/2$ (Théorème de Newlander-Nirenberg).

A2. - Métriques hermitiennes standard sur l'espace des twisteurs

DEFINITION 8. Un couple (D, g) , constitué d'une structure de Weyl D sur (M, c) et d'une métrique g dans la classe conforme c , est *distingué* si la 1-forme

θ qui mesure la différence $D - D^g = \tilde{\theta}$, cf. I (8), où D^g est la connexion de Levi-Civita de g , est cofermée: $\delta_g \theta = 0$ (où δ_g est l'adjoint métrique de la différentielle extérieure d).

Pour toute métrique g dans c , le couple (D^g, g) est clairement distingué. Plus généralement, on a le résultat suivant, cf. [GA1] §I.20.

Pour toute structure de Weyl D sur une variété conforme compacte (M, c) , de dimension supérieure à 2, il existe une métrique g dans c , unique à homothétie près, telle que le couple (D, g) est distingué.

Tout couple (D, g) —distingué ou non—détermine une métrique riemannienne g^D sur l'espace des twisteurs ZM via la décomposition I (35) du fibré tangent de ZM .

La métrique g^D est définie comme suit au point J de $Z_x M$:

a) la restriction de g^D au sous-espace vertical $T_J^V ZM$ coïncide avec sa structure euclidienne naturelle, cf. I.4,

b) la restriction de g^D au sous-espace horizontal H_J^D , identifié à $T_x M$ via π_* , coïncide avec g ,

c) les espaces $T_J^V ZM$ et H_J^D sont g^D -orthogonaux.

La projection π de ZM sur M devient ainsi une *submersion riemannienne* de (ZM, g^D) sur (M, g) .

Puisque D , considérée comme une connexion (non-linéaire) de la fibration π , préserve la métrique naturelle des fibres, *les fibres $Z_x M$ de π sont totalement géodésiques dans (ZM, g^D)* , cf. Théorème de Vilms [BE] Th. 9.59 et référence incluse.

La métrique riemannienne g^D est clairement compatible avec la structure presque-complexe J et détermine de ce fait une structure presque-hermitienne sur ZM , hermitienne lorsque J est intégrable.

Nous noterons Ω_g^D la *forme de Kähler* de (ZM, J, g^D) , définie par

$$(18) \quad \Omega_g^D(U, V) = g^D(JU, V), \quad U, V \in T_J ZM,$$

et t_g^D la *1-forme de torsion* (ou *forme de Lee*), cf. [GA1] 1.10, définie en J par

$$(19) \quad t_g^D(U) = - \sum_{A=1}^{\tilde{m}} d\Omega_g^D(E_A, JE_A, U), \quad U \in T_J ZM,$$

où $\{E_1, JE_1, \dots, E_{\tilde{m}}, JE_{\tilde{m}}\}$ est une base g^D -orthonormée J -adaptée de $T_J ZM$.

La structure presque-hermitienne (g^D, J) sur ZM est dite *symplectique* si Ω_g^D est fermée, *cosymplectique* si t_g^D est nulle (i.e. Ω_g^D est g^D -cofermée, ou $(\Omega_g^D)^{\tilde{m}-1}$ est fermée), respectivement *kählérienne* et *semi-kählérienne* si J est intégrable.

Lorsque J est intégrable, la structure hermitienne (g^D, J) est dite *standard* si t_g^D est g^D -cofermée (i.e. $(\Omega_g^D)^{\tilde{m}-1}$ est $d d^c$ -fermée), cf. [GA1] 1.14.

On a la

PROPOSITION 11.

a) La structure presque-hermitienne (g^D, J) est symplectique si et seulement si elle est kählérienne, si et seulement si

- a₁) ($n = 4$) c est autoduale, D est la connexion de Levi-Civita de g et g est une métrique d'Einstein de courbure scalaire égale à 6;
 a₂) ($n > 4$) c est plate, D est la connexion de Levi-Civita de g et g est une métrique à courbure sectionnelle constante, égale à $1/2$.

b) La structure presque-hermitienne (g^D, J) est cosymplectique si et seulement si elle est semi-kählérienne, si et seulement si J est intégrable et D est la connexion de Levi-Civita de g .

c) Lorsque J est intégrable et D est autoduale ($n = 4$) ou fermée ($n > 4$), la structure hermitienne (g^D, J) est standard si et seulement si le couple (D, g) est distingué.

La proposition 11 se déduit simplement du Lemme suivant et ses Corollaires.

LEMME 12. La différentielle extérieure de Ω_g^D est déterminée, en $J \in Z_x M$, par

$$(20) \quad d\Omega_g^D(a, b, c) = 0, \quad d\Omega_g^D(a, b, \tilde{X}) = 0,$$

$$(21) \quad d\Omega_g^D(a, \tilde{X}, \tilde{Y}) = g(aX, Y) - 2 \langle R^D(X \wedge Y), a \rangle,$$

$$(22) \quad d\Omega_g^D(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = -2\theta(X) \cdot g(JY, Z) - 2\theta(Y) \cdot (JZ, X) - 2\theta(Z) \cdot g(JX, Y),$$

où a, b appartiennent à l'espace vertical $T_J^V ZM$ et $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ sont des éléments de l'espace horizontal H_J^D , de projection respective X, Y, Z dans $T_x M$.

DEMONSTRATION. Conséquence facile du précédent tableau des crochets de champs de vecteurs distingués verticaux et horizontaux (10)–(15) et de la formule générale

$$(23) \quad d\Omega_g^D(U, V, W) = U \cdot \Omega_g^D(V, W) + V \cdot \Omega_g^D(W, U) + W \cdot \Omega_g^D(U, V) \\ - \Omega_g^D([U, V], W) - \Omega_g^D([V, W], U) - \Omega_g^D([W, U], V).$$

La relation (22) résulte immédiatement de l'expression de la dérivée covariante Dg de la métrique g

$$(24) \quad Dg = -2\theta \otimes g,$$

où θ est la 1-forme associée au couple (D, g) , déterminée par $D - D^g = \tilde{\theta}$, III.(12). \square

COROLLAIRE 1. La 1-forme de torsion t_g^D de (g^D, J) est déterminée, au point $J \in Z_x M$, par

$$(25) \quad t_g^D(\tilde{X}) = 2(m - 1) \cdot \theta(X),$$

$$(26) \quad t_g^D(a) = 2 \langle R^D(J), a \rangle,$$

où, dans le second membre de (23), J est considéré comme un élément de $\Lambda^2 T_x M$ au moyen de g (i.e. la forme de Kähler de la structure hermitienne ponctuelle (g, J)).

COROLLAIRE 2. Si J est intégrable et si la structure de Weyl D est autoduale ($n = 4$) ou fermée ($n > 4$), on a

$$(27) \quad t_g^D = 2(m-1) \pi^* \theta,$$

et

$$(28) \quad \tilde{\delta} t_g^D = 2(m-1) \pi^* \delta \theta = 2(m-1) \delta \theta \circ \pi,$$

où l'on a noté $\tilde{\delta}$ et δ la codifférentielle sur (ZM, g^D) et (M, g) respectivement.

DEMONSTRATION. Les formules (25) et (26) dérivent directement de (19) et (20) compte-tenu de la définition (19) de t_g^D . Il résulte immédiatement de I (25) que l'image de J par l'opérateur de Ricci Ric^D de D est égale à

$$(29) \quad \text{Ric}^D(J) = h^D \circ J + J \circ h^D,$$

où le tenseur de Ricci normalisé h^D est ici considéré comme un endomorphisme (symétrique) de TM au moyen de g . En particulier, $\text{Ric}^D(J)$ est J -linéaire pour toute structure de Weyl D .

La contribution de $\text{Ric}^D(J)$ dans le second membre de (26) est donc nulle puisque a est J -antilinéaire. Il en va de même des contributions de $W_+(J)$ et $\tilde{\rho}_+^D(J)$ dans le cas $n = 4$. Cf. I (19).

Il en résulte que la composante verticale de la 1-forme de torsion, définie par (26), est nulle si et seulement si J est intégrable et D est autoduale ($n = 4$) ou fermée ($n > 4$). Ceci implique (27) et donc (28) puisque π est une submersion riemannienne à fibres totalement géodésique. \square

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 11.

a) Ω_g^D est fermée si et seulement si, par (22), θ est nulle, i.e. D coïncide avec D^g , et, par (21), la courbure R^D de D , qui est donc égale à R^g , est réduite à sa partie scalaire, égale à $1/2.I$, augmentée, dans le cas $n = 4$, du demi-tenseur de Weyl positif W_+ qui donne une contribution nulle dans le second membre de (21).

b) t_g^D est nulle si et seulement si, par (25), θ est nulle, i.e. D coïncide avec D^g , et, par (26), $R^D(J)$ est J -linéaire pour tout J , qui équivaut, lorsque D est fermée, à l'intégrabilité de J , cf. démonstration du Corollaire 2.

c) Conséquence immédiate de (28). \square

NOTE. Lorsque la métrique g^D sur ZM est construite à l'aide de la seule métrique g , i.e. à l'aide du couple (D^g, g) , le Lemme 12, où le second membre

de (22) est nul, appartient au “folklore twistoriel”, de même que les parties a) et b) de la Proposition 11, cf. en particulier [F-K], et, pour la partie b), [MI] (où *semi-kählérien* = *balanced*). Cf. aussi [MU].

La partie c) de la Proposition 11 intervient de façon centrale dans la démonstration des parties a) et b) du Théorème 2 et la Proposition 10, cf. III.4.

REMARQUE 19. La relation (24) *caractérise* les connexions conforme. Chaque connexion (linéaire) conforme de TM détermine ainsi une *famille* $\{\theta_g\}$ de 1-formes réelles sur M , indexée par les métriques de la classe conforme c , vérifiant la relation

$$(30) \quad \theta\phi^{-2}g = \theta_g + \phi^{-1} \cdot d\phi$$

pour toute fonction positive ϕ sur M . Inversement, une famille de 1-formes réelles, indexée par la classe conforme, vérifiant (30), détermine une unique structure de Weyl (au sens de la Définition 1) en posant $D = D^g + \tilde{\theta}_g$, où g et une métrique *quelconque* dans c . C’est sous cette forme qu’apparaît la structure de Weyl canoniquement attachée à toute structure hermitienne sur une variété complexe, via la 1-forme de Lee, ou 1-forme de torsion, cf. [VA], [GA1].

Appendice B. - Formules de Weitzenböck et opérateurs invariants conformes

Dans cet Appendice, nous montrons que les formules de Weitzenböck naturelles de la géométrie riemannienne ou conforme, sous la forme qui nous est utile dans le paragraphe III, sont directement déduites des poids conformes distingués qui interviennent dans la théorie des opérateurs différentiels naturels d’ordre 1 invariants conformes.

Nous rappelons brièvement les faits relatifs à cette théorie à partir de [FE] et de [HI1] (où la convention de signe sur les poids est opposée à la notre).

Les notations sont celles du texte, en particulier de I.1.

Nous noterons τ la représentation tautologique de $SO(n)$ sur l’espace \mathbf{R}^n , identifié à son dual $(\mathbf{R}^n)^*$, et, aussi, la représentation naturelle, de poids -1 , de $CO^+(n)$ sur $(\mathbf{R}^n)^*$. Les fibrés vectoriels associés, via Q^gM ou QM sont l’un et l’autre canoniquement identifiés à T^*M .

Considérons une représentation linéaire orthogonale (réelle) *irréductible* $\mu_0 : SO(n) \rightarrow \text{Aut}V$ de $SO(n)$ — n quelconque—et la décomposition en facteurs irréductibles (unique) du produit tensoriel $\mu_0 \otimes \tau$

$$(1) \quad \mu_0 \otimes \tau = \sum_{k=1}^N \mu_k,$$

correspondant à la décomposition orthogonale $V \otimes (\mathbf{R}^n)^* = \sum_{k=1}^N W_k$.

Chaque indice $k, k = 1, \dots, N$, détermine un opérateur différentiel naturel d'ordre 1 $P_k^{\mu_0}$ agissant, pour toute variété riemannienne orientée de dimension $n(M, g)$, sur les sections du fibré vectoriel $E^{\mu_0} = Q^g M \times V/\mu_0$, défini par

$$(2) \quad P_k^{\mu_0} = \Pi_k \circ D^{g, \mu_0},$$

où D^{g, μ_0} est la connexion induite sur E^{μ_0} par la connexion de Levi-Civita D^g de (M, g) , et où Π_k note, à la fois, la projection de $V \otimes (\mathbf{R}^n)^*$ sur W_k et la projection orthogonale induite du produit tensoriel $E^{\mu_0} \otimes T^*M$ sur le sous-fibré $E^{\mu_k} = Q^g M \times W_k/\mu_k$.

De même, pour chaque poids (réel) w , chaque indice $k = 1, \dots, N$ détermine sur toute variété conforme (orientée) (M, c) de dimension n , une famille, paramétrée par les structures de Weyl sur (M, c) , d'opérateurs différentiels d'ordre 1 agissant sur les sections du fibré vectoriel $E^\mu = QM \times V/\mu$ —où $\mu = (\mu_0, w)$ note la représentation de $CO^+(n)$ déterminée par μ_0 et le poids w —, définis, pour toute structure de Weyl D , par

$$(3) \quad P_k^{D, \mu} = \Pi_k \circ D^\mu,$$

où D^μ est la connexion induite par la structure de Weyl D sur E^μ , et où Π_k note la projection orthogonale de $E^\mu \otimes T^*M$ sur le sous-fibré $E^{(\mu_k, w^{-1})}$ de $E^\mu \otimes T^*M$.

Nous dirons que $P_k^{\mu_0}$ "est" invariant conforme relativement au poids w , ou que w "rend" $P_k^{\mu_0}$ invariant conforme, si les opérateurs définis par (3) ne dépendent pas de la structure de Weyl D , i.e. si (3) détermine un opérateur unique dépendant de la seule structure conforme c (pour μ_0 et k fixés).

Il résulte immédiatement de I (11) (appliqué à la représentation $\mu = (\mu_0, w)$ de $CO^+(n)$) et I (8), que, pour tout couple D_1 et D_2 de structures de Weyl liées par I (9), on a

$$(4) \quad (D_2^\mu - D_1^\mu)\xi = -B^{\mu_0}(\xi \otimes \theta) + w \cdot \xi \otimes \theta, \quad \xi \in E^\mu,$$

où B^{μ_0} note, à la fois, l'endomorphisme (symétrique) de $V \otimes (\mathbf{R}^n)^* = V \otimes \mathbf{R}^n$, défini, sur l'élément décomposé $v \otimes \alpha$, par

$$(5) \quad B^{\mu_0}(v \otimes \alpha) = - \sum_{i=1}^n d\mu_0(\alpha \wedge e_i)v \otimes e_i^*,$$

où $\{e_i\}, i = 1, \dots, n$, est une base orthonormée de \mathbf{R}^n et $\{e_i^*\}$ la base duale—, qui est clairement $\mu \otimes \tau$ -équivariante pour tout poids w , et l'endomorphisme de $E^\mu \otimes T^*M$ qu'il induit.

On vérifie aisément que l'endomorphisme algébrique B^{μ_0} est encore égal à

$$(6) \quad B^{\mu_0} = \frac{1}{2} \left(C^{\mu_0 \otimes \tau} - C^{\mu_0} \otimes I_{|(\mathbf{R}^n)^*} - I_{|V} \otimes C^\tau \right),$$

où, de façon générale, pour toute représentation linéaire ν de $SO(n)$, C^ν note l'opérateur de Casimir (normalisé) de ν , défini par

$$(7) \quad C^\nu = - \sum_{i < j} d\nu(e_i^* \wedge e_j) \circ d\nu(e_i^* \wedge e_j).$$

Quand ν est irréductible, C^ν est scalaire, égal à $c(\nu) \cdot I$, où $c(\nu)$, le nombre de Casimir de ν , est nul si ν est la représentation triviale sur \mathbf{R} , un nombre réel positif dans le cas contraire. L'opérateur de Casimir a été normalisé de telle sorte que $c(\tau)$ est égal à $(n-1)$.

Puisque μ_0 est irréductible, l'endomorphisme algébrique B^{μ_0} est égal, à l'addition près d'un scalaire, à $\frac{1}{2} C^{\mu_0 \otimes \tau} = \sum_k c(\mu_k) \cdot I|_{W_k}$. Ses espaces propres sont donc les sous-espaces W_k (ou somme directe de W_k si les $c(\mu_k)$ sont égaux), correspondant à la valeur propre

$$(8) \quad w_k(\mu_0) = \frac{1}{2} (c(\mu_k) - c(\mu_0) - (n-1)).$$

De (4), il résulte clairement que les opérateurs par (3) sont indépendants de la structure de Weyl D si et seulement si le poids w de μ est égal à $w_k(\mu_0)$. Ainsi, pour $k = 1, \dots, N$, il existe un et un seul poids conforme distingué relativement auquel $P_k^{\mu_0}$ est invariant conforme, égal à la valeur propre $w_k(\mu_0)$ de B^{μ_0} correspondant à l'espace propre W_k .

Ce rappel étant fait, les poids conformes distingués attachés à une représentation irréductible μ_0 de $SO(n)$ interviennent dans l'établissement des formules de Weitzenböck comme suit.

PROPOSITION 12. *Soit μ_0 une représentation (réelle, orthogonale) irréductible du groupe spécial orthogonal d'ordre n $SO(n)$.*

a) (Formule de Weitzenböck universelle riemannienne relative à μ_0). *Sur toute variété riemannienne orientée (M, g) de dimension n , on a*

$$(9) \quad -\text{trace}_g \left(D^{g, \mu_0 \otimes \tau} \circ \sum_{k=1}^N w_k(\mu_0) P_k^{\mu_0} \right) = \mathcal{R}^{\mu_0}$$

où \mathcal{R}^{μ_0} est un endomorphisme de E^{μ_0} , dépendant linéairement de la courbure riemannienne R^g , défini, au point x , par

$$(10) \quad \mathcal{R}^{\mu_0} = \sum_{i < j} d\mu_0(e_i \wedge e_j) \circ d\mu_0(R^g(e_i \wedge e_j)),$$

où $\{e_i\}$ est une base g -orthonormée de $T_x M$.

b) (Formule de Weitzenböck universelle conforme relative à μ_0). *Pour tout poids w , on a, sur toute variété conforme orientée (M, c) de dimension n et*

pour toute structure de Weyl D sur (M, c) ,

$$(11) \quad -\text{trace} \left(D^{\mu \otimes \tau} \circ \sum_{k=1}^N w_k(\mu_0) P_k^\mu \right) = \mathcal{R}^\mu,$$

où μ est la représentation (μ_0, w) de $CO^+(n)$, et \mathcal{R}^μ est un endomorphisme de poids -2 de E^μ , dépendant linéairement de la courbure R^D de D , défini en x par

$$(12) \quad \mathcal{R}^\mu = \sum_{i < j} d\mu_0(e_i^* \wedge e_j) \circ d\mu (R^D(e_i \wedge e_j)),$$

où $\{e_i\}$ est une base c -orthonormée quelconque de $T_x M$ et $\{e_i^*\}$ la base duale (algébrique) de $T_x^* M$.

OBSERVATION PRELIMINAIRE. Dans (9), les opérateurs $P_k^{\mu_0}$, $k = 1, \dots, N$, sont considérés, via l'inclusion canonique de chaque E^{μ_0} dans $E^{\mu_0} \otimes T^* M$, comme des opérateurs à valeurs dans le même fibré $E^{\mu_0} \otimes T^* M$, et, de même, les opérateurs P_k^μ dans (11) sont considérés prenant leurs valeurs dans le même fibré vectoriel $E^\mu \otimes T^* M$. En tant que tels, ils satisfont la relation tautologique

$$(13) \quad \sum_{k=1}^N P_k^{\mu_0} = D^{g, \mu_0} \quad \sum_{k=1}^N P_k^\mu = D^\mu.$$

La trace (métrique ou conforme) qui apparaît aux premiers membres de (9) et (11) s'entend comme suit. Les opérateurs composés $D^{g, \mu_0 \otimes \tau} \circ \sum w_k(\mu_0) P_k^{\mu_0}$ et $D^{\mu \otimes \tau} \circ \sum w_k(\mu_0) P_k^\mu$ sont à valeurs dans $E^{\mu_0} \otimes T^* M \otimes T^* M$ et $E^\mu \otimes T^* M \otimes T^* M$ respectivement et la trace contracte les deux derniers facteurs.

DEMONSTRATION.

a) Puisque les poids distingués $w_k(\mu_0)$ sont les valeurs propres de l'opérateur algébrique B^{μ_0} , le membre de gauche de (9) est encore égal à

$$-\text{trace}_g(D^{g, \mu_0 \otimes \tau} \circ B^{\mu_0} \circ D^{g, \mu_0}).$$

Par naturalité, on a

$$(14) \quad D^{g, \mu_0 \otimes \tau} \circ B^{\mu_0} = B^{\mu_0} \circ D^{g, \mu_0 \otimes \tau}.$$

Le membre de gauche de (9) s'écrit donc $-(\text{trace}_g \circ B^{\mu_0}) \circ (D^{g, \mu_0 \otimes \tau} \circ D^{g, \mu_0})$, où l'homomorphisme (algébrique) $-(\text{trace}_g \circ B^{\mu_0})$ de $V \otimes (\mathbf{R}^n)^* \otimes (\mathbf{R}^n)^*$ dans V est défini, sur chaque élément décomposé $v \otimes \alpha \otimes \beta$, par, cf. (5),

$$(15) \quad -(\text{trace}_g \circ B^{\mu_0})(v \otimes \alpha \otimes \beta) = d\mu_0(\alpha \wedge \beta)v.$$

En particulier, le symbole principal $-(\text{trace}_g \circ B^{\mu_0})$ n'agit de façon non-triviale que sur la partie antisymétrique de $D^{g, \mu_0 \otimes \tau} \circ D^{g, \mu_0}$, i.e. sur la courbure de D^{g, μ_0} , égale, d'après I(28), à $d\mu_0(R^g)$. Ceci montre que le second membre de (9) est d'ordre zéro. L'expression (10) de \mathcal{R}^{μ_0} se déduit aisément de (15) (compte-tenu de la convention I(12)).

b) Même démonstration. Le fait que B^{μ_0} soit μ -équivariant pour tout poids w implique que la relation de commutation (14) vaut encore lorsque D^g est remplacé par n'importe quelle structure de Weyl (et, plus généralement, n'importe quelle connexion conforme, symétrique ou non, sur TM). Le reste de la démonstration est inchangée, compte-tenu de ce que la courbure de D^μ est égale à $d\mu(R^D)$ par I(28). \square

REMARQUE 20. Dans le cas riemannien, on a

$$(16) \quad -\text{trace}_g(D^{g, \mu_0 \otimes \tau} \circ D^{g, \mu_0}) = (D^{g, \mu_0})^* \circ D^{g, \mu_0}$$

où $(D^{g, \mu_0})^*$ est l'adjoint formel de D^{g, μ_0} relativement à g .

Par ailleurs, chaque opérateur $P_k^{\mu_0}$ est normalisé de telle sorte que

$$(17) \quad (P_k^{\mu_0})^* = (D^{g, \mu_0})^*|_{E^{\mu_k}},$$

où $(P_k^{\mu_0})^*$ est l'adjoint formel de $P_k^{\mu_0}$, vu comme opérateur de E^{μ_0} dans E^{μ_k} , ce dernier étant lui-même considéré comme un sous-fibré de $E^{\mu_0} \otimes T^*M$.

La formule de Weitzenböck riemannienne (9) peut donc encore s'écrire sous la forme

$$(18) \quad \sum_{k=1}^N w_k(\mu_0)(P_k^{\mu_0})^* \circ P_k^{\mu_0} = \mathcal{R}^{\mu_0}$$

où, rappelons-le, chacun des coefficients $w_k(\mu_0)$ est le poids conforme distingué de la sous-représentation μ_k de $\mu_0 \otimes \tau$, et où \mathcal{R}^{μ_0} est l'endomorphisme (symétrique) de E^{μ_0} défini par (10) ou, plus généralement, par

$$(19) \quad \mathcal{R}^{\mu_0} = \sum_{\kappa=1}^{n(n-1)/2} d\mu_0(a_\kappa) \circ d\mu_0(R^g(a_\kappa)),$$

où $\{a_\kappa\}$, $\kappa = 1, \dots, n(n-1)/2 = \dim so(n)$, est une base orthonormée quelconque de l'algèbre de Lie $so(n)$ pour le produit scalaire $\langle a, b \rangle = -1/2 \text{ trace}(a \circ b)$.

Introduisons les deux opérateurs naturels

$$(20) \quad Q_+^{\mu_0} = \sum_{w_\ell(\mu_0) > 0} P_\ell^{\mu_0} \quad Q_-^{\mu_0} = \sum_{w_\ell(\mu_0) < 0} P_\ell^{\mu_0},$$

dont les noyaux respectifs sont les intersections des noyaux des $P_\ell^{\mu_0}$ dont le poids conforme distingué est positif (pour $Q_+^{\mu_0}$) ou négatif (pour $Q_-^{\mu_0}$).

Si μ_0 est telle que les poids conformes distingués $w_k(\mu_0)$ sont tous différents de zéro, i.e. si B^{μ_0} est un automorphisme de $V \otimes \mathbf{R}^n$, on a

$$(21) \quad Q_+^{\mu_0} + Q_-^{\mu_0} = D^{g, \mu_0},$$

qui est alors une ré-écriture de la relation tautologique (13). Dans tous les cas, si N^{μ_0} note, à la fois, le noyau de B^{μ_0} dans $V \otimes \mathbf{R}^n$ et les sous-fibré induit de $E^{\mu_0 \otimes T^*M}$, le noyau de la somme $Q_+^{\mu_0} + Q_-^{\mu_0}$ est constitué des sections de E^{μ_0} dont la dérivée covariante appartient à N^{μ_0} .

Un opérateur différentiel naturel d'ordre 1 P , opérant sur les sections de E^{μ_0} à valeurs dans $E^{\mu_0} \otimes T^*M$, est elliptique si son symbole principal (algébrique) $\sigma_\alpha^P(v)$ (où v est un élément de V et α un élément de \mathbf{R}^n), qui est égal à la projection de $v \otimes \alpha$ dans le sous-espace $SO(n)$ -invariant de $V \otimes \mathbf{R}^n$ déterminant P , est injectif pour tout α non-nul. De façon équivalente, P est elliptique si le laplacien associé $P^* \circ P$ est elliptique au sens usuel.

Dans la suite, nous supposons que la représentation irréductible μ_0 est distincte de la représentation triviale de $SO(n)$ sur \mathbf{R} .

LEMME 12. Les opérateurs naturels $Q_+^{\mu_0}$, $Q_-^{\mu_0}$ et $Q_+^{\mu_0} + Q_-^{\mu_0}$ sont elliptiques.

DEMONSTRATION. Il résulte immédiatement de la définition (5) de B^{μ_0} que l'on a

$$(22) \quad \langle B^{\mu_0}(v \otimes \alpha), v \otimes \alpha \rangle = 0,$$

pour tout élément décomposé $v \otimes \alpha$ puisque $d\mu_0(\alpha \wedge e_i)$ est antisymétrique.

En particulier, la trace de B^{μ_0} est nulle. Par ailleurs, le noyau N^{μ_0} de B^{μ_0} ne contient aucun élément décomposé non-nul. En effet, $v \otimes \alpha$ appartient à N^{μ_0} si et seulement si $d\mu_0(\alpha \wedge u)v$ est nul pour tout u dans \mathbf{R}^n , et ceci implique clairement, puisque μ_0 est irréductible (distincte de la représentation triviale), que v est nul si α ne l'est pas.

(On pourra utiliser le fait que, si α est unitaire, $u_1 \wedge u_2$ est égal au crochet $[\alpha \wedge u_1, \alpha \wedge u_2]$ pour tous u_1, u_2 orthogonaux à α). Il en résulte que $Q_+^{\mu_0} + Q_-^{\mu_0}$ est elliptique.

Il en va de même de $Q_+^{\mu_0}$ (et par un argument similaire $Q_-^{\mu_0}$), car, si $v \otimes \alpha$ appartient au sous-espace de $V \otimes \mathbf{R}^n$ où B^{μ_0} est semi-négatif, il appartient au noyau N^{μ_0} à cause de (22). \square

La formule de Weitzenböck (18) implique alors immédiatement le théorème d'annulation général suivant.

PROPOSITION 13. Soient μ_0 une représentation orthogonale irréductible de $SO(n)$ —distincte de la représentation triviale—, (M, g) une variété riemannienne orientée compacte de dimension n (supérieure à 1). Soient E^{μ_0} le fibré vectoriel (réel) sur (M, g) déterminé par μ_0 , $w_k(\mu_0)$, $k = 1, \dots, N(\mu_0)$, les poids conformes distingués déterminés par μ_0 , $P_k^{\mu_0}$ les opérateurs différentiels d'ordre 1 correspondants, opérant sur les sections de E^{μ_0} à valeurs dans $E^{\mu_0} \otimes T^*M$, $Q_\pm^{\mu_0}$

les opérateurs elliptiques définis par (20), \mathcal{R}^{μ_0} l'endomorphisme de E^{μ_0} défini par (19).

a) Si \mathcal{R}^{μ_0} est positif (resp. négatif) en tout point de M , le noyau de $Q_+^{\mu_0}$ (resp. de $Q_-^{\mu_0}$) est réduit à zéro.

b) Si \mathcal{R}^{μ_0} est semi-positif (resp. semi-négatif), le noyau de $Q_+^{\mu_0}$ (resp. de $Q_-^{\mu_0}$) coïncide avec l'espace des sections de E^{μ_0} dont la dérivée covariante appartient au sous-fibré N^{μ_0} de $E^{\mu_0} \otimes T^*M$, avec l'espace des sections D^{g, μ_0} -parallèles de E^{μ_0} si tous les poids conformes distingués $w_k(\mu_0)$ sont distincts de zéro.

NOTE 1. On observera que seuls importent, dans la Proposition 13, le signe des poids conformes distingués $w_k(\mu_0)$ et l'espace propre associé, et non la forme exacte de la formule de Weitzenböck qu'il n'est pas nécessaire de calculer dès lors qu'on dispose des informations précédentes (si on ne s'intéresse qu'au théorème d'annulation correspondant). Les représentations μ_0 telles que B^{μ_0} possède un noyau non-réduit à zéro forment un ensemble "rare" dans l'ensemble des représentations irréductibles $SO(n)$, mais non-vide.

Pour $n = 4$, on vérifie aisément, à l'aide des formules (8) et III (8), que les représentations irréductibles de $SO(4)$ possédant cette propriété sont exactement les représentations (réelles) $\Delta_+^p \otimes \Delta_-^q$ telles que $|p - q| = 2$, $p, q > 1$. De pareilles situations se produisent en toutes dimensions, comme on peut s'en convaincre à partir des formules explicites données en [FE].

Je remercie Y. Benoist de m'avoir aidé à me persuader de l'existence de ces représentations "pathologiques".

Les formules de Weitzenböck usuellement considérées en géométrie riemannienne correspondent à des poids dominants "petits" qui échappent à cette "pathologie".

NOTE 2. Il résulte immédiatement de la formulation (19) de \mathcal{R}^{μ_0} (en choisissant une base $\{a_\kappa\}$ d'éléments propres de R^g), que si la courbure riemannienne R^g , considérée comme un endomorphisme de $\Lambda^2 T^*M$, est positive (resp. négative), l'endomorphisme \mathcal{R}^{μ_0} est négatif (resp. positif) pour tout μ_0 (non-triviale).

Cf. [G-M], et aussi [PR], pour une application géométrique intéressante de ce fait dans le cas où μ_0 est l'une des représentations naturelles de $SO(n)$ sur $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$. La relation (19), lorsque μ_0 est l'une de ces représentations, figure explicitement dans [PR] sous le nom de *formule de Chern*, dénomination que l'on peut conserver dans le cas général.

EXEMPLE 1. A titre d'illustration—particulièrement simple—, considérons le cas où μ_0 est la représentation tautologique elle-même τ . L'endomorphisme (algébrique) B^τ de $V \otimes \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ (identifié à l'espace $M(n)$ des matrices carrées d'ordre n), est égal, par (5), à

$$(23) \quad B^\tau(a) = a - \text{trace } a \cdot I, \quad a \in M(n),$$

où I note la matrice identité, et a^* la matrice transposée. Les valeurs propres de B^r sont clairement $w_1(\tau) = 1$, $w_2(\tau) = -1$, $w_3(\tau) = 1 - n$, dont les espaces propres correspondants sont respectivement les sous-espaces $W_1 = \{a|a^* = a \text{ et trace } a = 0\}$, $W_2 = \{a|a^* = -a\}$ et $W_3 = \mathbf{R} \cdot I$, de $M(n)$.

Sur toute variété riemannienne (orientée) (M, g) , le fibré E^r est canoniquement isomorphe au fibré tangent TM ou au fibré cotangent T^*M . Le noyau de $Q_+^r = P_1^r$ est constitué des champs de vecteurs X sur (M, g) dont la dérivée covariante DX est (algébriquement) orthogonale à W_1 , i.e. des champs de Killing-conformes (i.e. la dérivée de Lie $L_X g$ de la métrique g dans la direction de X est proportionnelle à g), tandis que le noyau de $Q_-^r = P_2^r + P_3^r$, est constitué des 1-formes α dont la dérivée covariante $D\alpha$ appartient à W_1 , i.e. des 1-formes harmoniques. Par ailleurs, $\mathcal{R}^r = \sum_{i < j} (e_i \wedge e_j) \circ R^g(e_i \wedge e_j)$ est clairement égal à $-\text{Ric}^g$.

La Proposition 13, appliquée au cas $\mu_0 = \tau$, est le

THEOREME DE BOCHNER. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte.*

a) *Si le tenseur de Ricci Ric^g de g est positif (resp. semi-positif), une 1-forme g -harmonique sur (M, g) est identiquement nulle (resp. D^g -parallèle).*

b) *Si Ric^g est négatif (resp. semi-négatif), un champ de Killing-conforme sur (M, g) est identiquement nul (resp. D^g -parallèle).*

Pour un aperçu général des formules de Weitzenböck, nous renvoyons le lecteur à [BO2] et aux références incluses.

NOTE 3. Dans le cas où, comme pour τ , μ_0 est aussi une représentation du groupe orthogonal $O(n)$ tout entier, la théorie précédente s'applique sans modifications aux variétés riemanniennes orientées ou non (ce que nous avons fait implicitement dans l'énoncé ci-dessus).

Il est aisé également de construire une théorie analogue dans le cas où $\tilde{\mu}_0$ est une représentation de $\text{Spin}(n)$, à partir de la connexion induite sur le $\text{Spin}(n)$ -fibré spinoriel $\tilde{Q}^g M$ déterminant la structure spinorielle choisie sur (M, g) par la connexion de Levi-Civita, cf. Remarque 18.

NOTE 4. Il est bien connu dans les cas "non pathologiques" que l'hypothèse de la partie a) de la Proposition 13 peut être affaiblie en celle-ci: \mathcal{R}^{μ_0} est partout semi-positif (resp. partout semi-négatif), positif (resp. négatif) en au moins un point—donc un ouvert non-vide—de M , puisqu'une section D^{g, μ_0} -parallèle nulle en un point est identiquement nulle.

Ce renforcement de la Proposition 13 a) reste vrai dans tous les cas puisque $Q_+^{\mu_0} + Q_-^{\mu_0}$ est elliptique (Lemme 12).

BIBLIOGRAPHIE

- [A-H-S] M.F. ATIYAH - N.J. HITCHIN - I.M. SINGER, *Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 1978, p. 425–461.
- [BE] A.L. BESSE, *Einstein manifolds*, Springer Verlag, 1987, Die Ergebnisse der Mathematik 10.
- [BB] L. BERARD BERGERY, *La courbure scalaire des variétés riemanniennes*, Séminaire Bourbaki, juin 1980, Vol. 1979/1980, Exp. 556.
- [BO1] J.P. BOURGUIGNON, *Yang-Mills theory: the differential geometric side*, in *Differential Geometry* (Proceedings, Lyngby 1985, V.L. HANSEN (Ed.), Lecture Notes in Math. **1263**, Springer Verlag.
- [BO2] J.P. BOURGUIGNON, *The “magic” of Weitzenböck formulas in Variational Methods. Progress in non-linear differential equations and their applications 4*, Birkhäuser, 1990.
- [BY] C.P. BOYER, *A note on hyperhermitian four-manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **102**, N. 1, Jan. 1988.
- [DV] M. DUBOIS-VIOLETTE, *Structures complexes au-dessus des variétés, applications*, Séminaire de Mathématiques de l'ENS, 1981.
- [FE] H.D. FEGAN, *Conformally invariant first order operator*, Q. Jl. Math. **27**, 1976, p. 371–378.
- [F-K] T. FRIEDRICH - H. KURKE, *Compact four-dimensional self-dual Einstein manifolds with positive scalar curvature*, Math. Nachr. **106**, 1982, p. 271–299.
- [FO] G.B. FOLLAND, *Weyl manifolds*, J. Differential Geom. **4**, 1970, p. 145–153.
- [GA1] P. GAUDUCHON, *La 1-forme de torsion d'une variété hermitienne compacte*, Math. Ann. **267**, 1984, p. 495–518.
- [GA2] P. GAUDUCHON, *Connexion canonique et géométrie conforme*, Preprint.
- [G-M] S. GALLOT - D. MEYER, *Opérateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne*, J. Math. Pures Appl. **54**, 1975, p. 259–284.
- [HI1] N.J. HITCHIN, *Linear fields equations on self-dual spaces*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, **370**, 1980, p. 173–191.
- [HI2] N.J. HITCHIN, *Kählerian twistor spaces*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, **43**, 1981, p. 133–150.
- [HI3] N.J. HITCHIN, *Complex manifolds and Einstein equations*, in *Twistor Geometry and Non-linear Systems* (Proceedings Primorsko, 1980), ed. by H.D. DOEBNER and T.D. PALEV, Lecture Notes in Math. **970**, Springer Verlag.
- [K-N] S. KOBAYASHI - K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1, 1963. Interscience Publishers.
- [K-W] S. KOBAYASHI - H.H. WU, *On holomorphic sections on certain hermitian vector bundles*, Math. Ann. **189**, 1970, p. 1–4.
- [MI] M.-L. MICHELSON, *On the existence of special metrics in complex geometry*, Acta Math. **143**, 1983, p. 261–295.
- [MU] O. MUSHKAROV, *Structures presque-complexes sur des espaces twistoriels et leurs types*, C.R. Acad. Sci. Paris, **305**, I, 1987, p. 307–309.

- [PL] A. POLOMBO, *Condition d'Einstein et courbure négative en dimension 4*, C.R. Acad. Sci. Paris, **307**, I, 1988, p. 667–670.
- [PO] Y.S. POON, *Compact self-dual manifolds with positive scalar curvature*, J. Differential Geom. **24**, 1986, p. 97–132.
- [PR] W.A. POOR, *A holonomy proof of the positive curvature operator theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **79**, 1980, p. 454–456.
- [P-S] H. PEDERSEN-A. SWANN, *Riemannian submersions, four-manifolds and Einstein-Weyl geometry*, Preprint 1991.
- [P-T] H. PEDERSEN-K.P. TOD, *Three-dimensional Einstein-Weyl Geometry*, à paraître dans Adv. Math.
- [SA1] S. SALAMON, *Topics in four-dimensional riemannian geometry*, Geometry Seminar “Luigi Bianchi”, 1983, Lecture Notes in Math. **1022**, Springer Verlag.
- [SA2] S. SALAMON, *Riemannian Geometry and Holonomy groups*, 1989. Pitman Res. Notes Math. Ser., **201**, Longman Scientific & Technical.
- [S-T] I.M. SINGER-J.A. THORPE, *The curvature of 4-dimensional Einstein spaces*, in Global Analysis. Papers in honour of Kunihiko Kodaira, ed. by D.C. SPENCER and S.I. IYANAGA, 1969, Princeton Math. Ser. **29**.
- [TA] G. TALLINI, *Metriche locali dotate di una connessione globale su una varietà differenziabile*, Period. Mat. **46**, 1968, p. 340–358.
- [TO] K.P. TOD, *Compact 3-dimensional Einstein-Weyl structures*, A paraître dans J. London Math. Soc.
- [VA] I. VAISMAN, *On locally conformal almost Kähler manifolds*, Israel J. Math. **24**, 1976, p. 338–351.
- [VI] M. VILLE, *Twistor examples of algebraic dimension zero threefolds*, Invent. Math., **10**, 1991, p. 537–546.
- [WE] H. WEYL, *Space-Times-Matter*, Dover Publications (version anglaise de Raum-Zeit-Materie, Teubner, 1921).

CNRS UA 766
53 rue de Lyon
75012 Paris
France