

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

THIERRY BOUCHE

**Sur les inégalités de Morse holomorphes lorsque la courbure
du fibré en droites est dégénérée**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 18,
n° 4 (1991), p. 501-523

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1991_4_18_4_501_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Sur les inégalités de Morse holomorphes lorsque la courbure du fibré en droites est dégénérée

THIERRY BOUCHE

0. - Introduction

Soit X une variété compacte complexe de dimension n . Si E est un fibré en droites holomorphe hermitien au-dessus de X , G un fibré vectoriel holomorphe de rang g quelconque au-dessus de X et si l'on note $c(E)$ sa courbure et $X(\leq q)$ l'ensemble des points où la forme réelle $ic(E)$ est non dégénérée et admet au plus q valeurs propres négatives (q entier compris entre 0 et n), on a pour tout q les inégalités de Morse holomorphes de Demailly ([De1], théorème 0.1):

$$(0) \quad \sum_{\nu=0}^q (-1)^{q-\nu} \dim H^\nu(X, E^k \otimes G) \leq g \frac{k^n}{n!} \int_{X(\leq q)} \left(\frac{i}{2\pi} c(E) \right)^n + o(k^n).$$

On peut remarquer que, si la courbure de E est dégénérée en tout point de X , l'intégrale de courbure qui figure dans (0) est toujours nulle, si bien que les inégalités (0) perdent leur précision. Par ailleurs, la formule d'Hirzebruch–Riemann–Roch donne comme expression de la caractéristique d'Euler–Poincaré $\chi(X, E^k \otimes G)$ un polynôme en k de degré inférieur à $n - 1$. On est donc tenté d'obtenir une majoration des sommes alternées des dimensions cohomologiques qui soit de l'ordre de k^{n-1} au plus. Cela n'est cependant pas simple du fait que la géométrie et la métrique de la variété X interviennent dans le terme négligeable de (0), ainsi que des dérivées de la courbure de E , et la courbure de G . Pour surmonter cette difficulté, on est conduit à contrôler les termes parasites par une suite non majorée: on considère un second fibré linéaire F sur X , et nous cherchons à établir des inégalités de type (0) pour la cohomologie des fibrés $E^k \otimes F^\ell \otimes G$ où ℓ croît moins vite que k .

Une seconde difficulté intervient du fait que les ensembles $X(\leq q)$ peuvent être très irréguliers. Nous sommes parvenus à démontrer des inégalités de Morse holomorphes pour deux fibrés E et F en supposant qu'il existe un feuilletage Y de X dont le fibré tangent est contenu dans la fibration noyau de $ic(E)$. Cette hypothèse est l'analogie dans notre situation de celle de Bott [Bo] étudiant des

inégalités de Morse classiques (portant sur les nombres de Betti d'une variété \mathcal{C}^∞) lorsque la fonction de Morse est dégénérée (i.e. admet des points critiques non isolés): il suppose que l'ensemble des points critiques d'indice q forme une sous-variété.

Sous cette dernière hypothèse, nous obtenons le Corollaire 0.2 qui répond partiellement au problème initialement posé pour le seul fibré E .

Nous précisons donc nos hypothèses avant de donner l'énoncé de nos résultats: E et F sont deux fibrés en droites hermitiens au-dessus de X , et G un fibré vectoriel holomorphe quelconque de rang g au-dessus de X . Soit $D_1 = D'_1 + D''_1$ (resp. D_2) la connexion de Chern de E (resp. F) et $c(E) = D_1^2 = D'_1 D''_1 + D''_1 D'_1$ sa forme de courbure. Alors $ic(E)$ est une $(1, 1)$ -forme réelle de rang maximum r sur X . Nous supposons que la fibration noyau de $ic(E)$ est bien feuilletée, c'est-à-dire qu'il existe un feuilletage Y de X , de codimension r , dont le fibré tangent en tout point x de X est inclus dans le noyau $\ker ic(E)_x$ de la forme $ic(E)$ en x . Ceci serait automatiquement vérifié si le rang du noyau de la courbure était constant, car la forme $ic(E)$ est fermée. Etant donné un scindage $TX = TY \oplus NY$, on peut définir sur X une $(1, 1)$ -forme γ réelle, égale à la somme directe de la forme induite par $ic(E)$ sur NY , et de la restriction à TY de $ic(F)$. Pour tout $q = 0, 1, \dots, n$, on définit $X(q)$, l'ouvert des points de X où la forme γ est d'indice q , c'est-à-dire où elle comporte exactement q valeurs propres < 0 , et $n - q > 0$. On définit également $X(\leq q) = \bigcup_{\nu \leq q} X(\nu)$.

Nous démontrons les inégalités suivantes qui portent sur les groupes de d'' -cohomologie à valeurs dans les puissances tensorielles élevées de E et F :

THÉOREME 0.1. *Soit E , un fibré en droites holomorphe tel que rang $ic(E) \leq r$ sur X et dont la fibration noyau est bien feuilletée, on a pour tout $q = 0, 1, \dots, n$ lorsque k et ℓ tendent vers l'infini, ℓ étant dominé par k (i.e. $k/\ell \rightarrow +\infty$):*

1) *Inégalités de Morse asymptotiques:*

$$\dim H^q(X, E^k \otimes F^\ell \otimes G) \leq g \frac{k^r}{r!} \frac{\ell^{n-r}}{(n-r)!} \int_{X(q)} (-1)^q \left(\frac{i}{2\pi} c(E) \right)^r \wedge \left(\frac{i}{2\pi} c(F) \right)^{n-r} + o(k^r \ell^{n-r}).$$

2) *Inégalités de Morse fortes:*

$$\sum_{\nu=0}^q (-1)^{q-\nu} \dim H^\nu(X, E^k \otimes F^\ell \otimes G) \leq g \frac{k^r}{r!} \frac{\ell^{n-r}}{(n-r)!} \int_{X(\leq q)} \left(\frac{i}{2\pi} c(E) \right)^r \wedge \left(\frac{i}{2\pi} c(F) \right)^{n-r} + o(k^r \ell^{n-r}).$$

Nous démontrerons dans notre quatrième paragraphe qu'on peut déduire du Théorème 0.1 les estimations suivantes:

COROLLAIRE 0.2. *Si E est un fibré en droites holomorphe dont la fibration noyau de la courbure est bien feuilletée de codimension r , et G est un fibré vectoriel holomorphe quelconque sur X , il existe une constante C telle qu'on ait pour tout $q = 0, 1, \dots, n$, lorsque k tend vers $+\infty$:*

$$\dim H^q(X, E^k \otimes G) \leq Ck^r.$$

En particulier, la dimension de Kodaira d'un tel fibré est inférieure à r .

Pour la démonstration de ces inégalités, notre approche est inspirée de l'article [De1]. Par la théorie de Hodge, les groupes de cohomologie que nous désirons estimer sont représentés par des espaces de formes harmoniques. Si nous munissons X d'une métrique $\omega_{k,\ell}$ qui est proportionnelle à ℓ le long des feuilles de Y , et à k dans la direction orthogonale, le laplacien antiholomorphe $\Delta''_{k,\ell}$ associé va se comporter asymptotiquement comme un opérateur de type Schrödinger avec champ magnétique γ (selon la terminologie employée dans [De1]) ou, si l'on préfère, comme la somme du laplacien brut associé à une connexion hermitienne de courbure γ et d'un opérateur de degré 0. Ceci est vérifié en adaptant à notre situation une formule de type Weitzenböck, déduite de l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano non kählérienne [De2].

Pour obtenir les estimations finales, on étudie la cohomologie du complexe de Dolbeault restreint aux premiers espaces propres de $\Delta''_{k,\ell}$, dont on vérifie qu'elle est isomorphe à la cohomologie de Dolbeault. Il suffit ensuite d'estimer de façon précise la dimension de ces espaces propres.

Ceci est obtenu au Paragraphe 3 en étudiant un problème de répartition spectrale pour l'opérateur "tangent" à $\Delta''_{k,\ell}$. On se ramène localement au cas où la forme γ est constante, ainsi que la métrique $\omega_{k,\ell}$. On retrouve des estimations globales en appliquant le principe du minimax à un pavage de la variété X . Le pavage est constitué par des parallélépipèdes orthogonaux (pour $\omega_{k,\ell}$) dont la projection sur TY est un cube de côté $\ell^{-1/3}$ et la projection sur NY (fibré normal au feuilletage par rapport à la métrique $\omega_{k,\ell}$) un cube de côté $k^{-1/2}\ell^{1/6}$. On peut alors appliquer le théorème de répartition spectrale pour un tel opérateur donné dans [De1].

La principale nouveauté de notre démonstration est l'utilisation de la métrique $\omega_{k,\ell}$: les articles [Bi] ou [De1] utilisent une normalisation de Δ'' par un facteur $1/k$, ce qui interdit d'obtenir un résultat plus précis. L'utilisation de la métrique $\omega_{k,\ell}$ permet en fait de normaliser les termes de courbure qui interviennent dans le laplacien $\Delta''_{k,\ell}$ car, pour cette métrique la forme $ic(E^k) + ic(F^\ell)$ est de norme bornée sur X , uniformément par rapport à k et ℓ .

Ce travail doit beaucoup aux discussions que j'ai eues avec Jean-Pierre Demailly lorsqu'il dirigeait mes recherches, je l'en remercie. Je remercie également le referee dont les remarques m'ont permis de clarifier et d'alléger la rédaction des démonstrations.

I. - Complexe de Witten (d'après Demailly)

Nous adaptons, dans ce paragraphe, la construction qui permet de ramener le Théorème 0.1 à un théorème de répartition spectrale pour un opérateur particulier (ne dépendant en fait que de γ), que nous démontrerons aux deux paragraphes suivants.

Soit ω_0 une métrique hermitienne C^∞ sur X . En tout point x , l'orthogonal de $T_x Y$ par rapport à la métrique ω_0 définit un fibré vectoriel C^∞ de rang complexe $n - r$ que nous noterons NY . Choisissons η (resp. ζ), une métrique hermitienne de classe C^∞ sur NY (resp. TY). Nous pouvons alors définir une métrique hermitienne $\omega_{k,\ell}$ sur X par la formule: $\omega_{k,\ell} = k\eta + \ell\zeta$. (Notons, cela sera important pour la suite, que les fibrés TY et NY sont orthogonaux par rapport aux métriques $\omega_{k,\ell}$ indépendamment de k et ℓ). Il est également utile de noter que la métrique ω_0 définit un isomorphisme canonique entre $(TY)^0$ et N^*Y dans T^*X .

Pour tout $p, q = 0, 1, \dots, n$, et si $\Omega \subset X$ est un ouvert, soit $C_{p,q}^\infty(\Omega, E^k \otimes F^\ell \otimes G)$ l'espace des sections de classe C^∞ du fibré $\Lambda^{p,q}T^*X \otimes G(k, \ell)|_\Omega$ où $G(k, \ell) = E^k \otimes F^\ell \otimes G$. Nous noterons $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,\ell}$ et $|\cdot|_{k,\ell}$ le produit scalaire et la norme sur chaque fibre de $\Lambda^{p,q}T^*X \otimes G(k, \ell)$ calculés à l'aide de la métrique induite par celles de E, F, G sur $G(k, \ell)$ et par $\omega_{k,\ell}$ sur $\Lambda^{p,q}T^*X$. Soit enfin $L_{p,q}^2(\Omega, G(k, \ell))$ le complété de $C_{p,q}^\infty(\Omega, G(k, \ell))$ pour la norme $\|\cdot\|_{\Omega,k,\ell}^2 = \int_\Omega |\cdot|_{k,\ell}^2 d\sigma_{k,\ell}$ où $d\sigma_{k,\ell} = \frac{\omega_{k,\ell}^n}{n!}$ est l'élément de volume canonique. (Notons que le volume de X tend vers l'infini, on a: $\text{Vol}_{k,\ell}(X) = O(k^r \ell^{n-r})$).

Soit $D''_{k,\ell}$ la connexion canonique sur $G(k, \ell)$, $\delta''_{k,\ell}$ son adjoint formel dans la métrique $\|\cdot\|_{k,\ell} = \|\cdot\|_{X,k,\ell}$ et $\Delta''_{k,\ell}$ le laplacien antiholomorphe associé: $\Delta''_{k,\ell} = D''_{k,\ell} \delta''_{k,\ell} + \delta''_{k,\ell} D''_{k,\ell}$. L'espace $\mathcal{H}_{k,\ell}(\lambda)$ est la somme directe des espaces propres de $\Delta''_{k,\ell}$ sur $C_{0,q}^\infty(X, G(k, \ell))$ attachés aux valeurs propres $\leq \lambda$. C'est un espace vectoriel de dimension finie $h_{k,\ell}^q(\lambda)$ car $\Delta''_{k,\ell}$ est un opérateur elliptique. En outre, par la théorie de Hodge, nous avons l'égalité:

$$h_{k,\ell}^q(0) = \dim H^q(X, G(k, \ell)).$$

Comme $D''_{k,\ell}$ commute avec $\Delta''_{k,\ell}$, les sous-espaces propres de $\Delta''_{k,\ell}$ sont stables par $D''_{k,\ell}$, de sorte que la suite

$$\dots \longrightarrow \mathcal{H}_{k,\ell}^q(\lambda) \xrightarrow{D''_{k,\ell}} \mathcal{H}_{k,\ell}^{q+1}(\lambda) \longrightarrow \dots$$

forme un sous-complexe du complexe de Dolbeault analogue au complexe introduit par Witten [Wi] en cohomologie de de Rham.

LEMME 1.1. *Le complexe de Witten a même cohomologie que le complexe de Dolbeault. De plus, on a les inégalités suivantes: Pour tout $q = 0, 1, \dots, n$ et tout $\lambda \geq 0$,*

$$1) \quad h_{k,\ell}^q(0) \leq h_{k,\ell}^q(\lambda)$$

$$2) \quad \sum_{\nu=0}^q (-1)^{q-\nu} h_{k,\ell}^\nu(0) \leq \sum_{\nu=0}^q (-1)^{q-\nu} h_{k,\ell}^\nu(\lambda)$$

Démonstration. Un élément u de $\mathcal{H}_{k,\ell}^q(\lambda)$ se décompose en somme orthogonale selon les espaces propres de $\Delta_{k,\ell}''$ respectifs aux valeurs propres $\lambda_i \leq \lambda$ de la façon suivante: $u = \sum_{\lambda_i} u_{\lambda_i}$, (la somme est finie). La condition $D_{k,\ell}'' u = 0$ équivaut aux conditions $D_{k,\ell}'' u_{\lambda_i} = 0$ car les espaces propres sont stables par $D_{k,\ell}''$. Mais alors $u_{\lambda_i} = D_{k,\ell}'' \left(\frac{1}{\lambda_i} \delta_{k,\ell}'' u_{\lambda_i} \right)$ pour chaque $\lambda_i > 0$, si bien que la cohomologie du complexe de Witten est représentée par les formes harmoniques, ce qui démontre la première affirmation.

Les inégalités classiques 1, 2, 3 résultent des formules:

$$h_{k,\ell}^q(\lambda) = z^q + b^{q+1}, \quad h_{k,\ell}^q(0) = z^q - b^q$$

où $b^q = \dim D_{k,\ell}'' \mathcal{H}_{k,\ell}^q(\lambda)$ et $z^q = \dim(\ker D_{k,\ell}'' \cap \mathcal{H}_{k,\ell}^q(\lambda))$. □

Nous allons donc déterminer les dimensions $h_{k,\ell}^q(\lambda)$ pour obtenir les inégalités de Morse du Théorème 0.1. L'intérêt de cette approche réside dans le fait que les éléments de $\mathcal{H}_{k,\ell}^q(\lambda)$ sont moins rigides que ceux de $\mathcal{H}_{k,\ell}^q(0)$. On peut en effet retrouver des estimations globales sur $\mathcal{H}_{k,\ell}^q(\lambda)$ à partir d'une localisation grâce au principe du minimax, tandis que le principe du prolongement analytique interdit toute étude de l'espace des sections harmoniques à partir de celles vérifiant un problème de Dirichlet.

Nous allons maintenant ramener l'étude de $\Delta_{k,\ell}''$ à celle de la forme quadratique Q_X que nous définissons dans un instant. On notera $[A, B] = AB - (-1)^{\deg A \deg B} BA$ l'anticommutateur de deux éléments d'une algèbre graduée.

LEMME 1.2 (identité de Bochner-Kodaira-Nakano hermitienne [De2]). *Soit $L_{k,\ell}$, l'opérateur de multiplication extérieure par $\omega_{k,\ell}$, $\Lambda_{k,\ell}$, son adjoint dans la métrique $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,\ell}$ et $\tau_{k,\ell} = [\Lambda_{k,\ell}, d' \omega_{k,\ell}]$. Définissons $D'_{\tau_{k,\ell}} = D'_{k,\ell} + \tau_{k,\ell}$ et $\delta'_{\tau_{k,\ell}} = (D'_{\tau_{k,\ell}})^*$, ainsi que $\Delta'_{\tau_{k,\ell}} = [D'_{\tau_{k,\ell}}, \delta'_{\tau_{k,\ell}}]$ et $T_{\omega_{k,\ell}} = [\Lambda_{k,\ell}, [\Lambda_{k,\ell}, i d' d'' \omega_{k,\ell}]] - [d' \omega_{k,\ell}, (d' \omega_{k,\ell})^*]$. Alors on a:*

$$\Delta_{k,\ell}'' = \Delta'_{\tau_{k,\ell}} + [ic(G(k, \ell)), \Lambda_{k,\ell}] + T_{\omega_{k,\ell}}.$$

Note 1.3. La métrique $\omega_{k,\ell}$ étant désormais choisie sur X , nous omettrons les indices k et ℓ lorsqu'ils ne seront pas essentiels.

En intégrant l'identité du Lemme 1.2, nous obtenons: si $u \in C_{p,q}^\infty(X, G(k, \ell))$

$$(1.4) \quad \int_X \langle \Delta'' u, u \rangle d\sigma_{k,\ell} = \int_X (\langle \Delta' u, u \rangle + \langle [ic(G(k, \ell)), \Lambda] u, u \rangle + \langle T \omega u, u \rangle) d\sigma_{k,\ell}$$

d'où:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} &\text{si } u \in \mathcal{C}_{0,q}^\infty(X, G(k, \ell)), \\ &\|D''_{k,\ell}u\|^2 = \|D'_\tau u\|^2 + \langle ([ic(G(k, \ell)), \Lambda] + T_\omega)u, u \rangle \end{aligned}$$

$$(1.5') \quad \begin{aligned} &\text{si } u \in \mathcal{C}_{n,q}^\infty(X, G(k, \ell)), \\ &\|\delta''_{k,\ell}u\|^2 = \|\delta'_\tau u\|^2 + \langle ([ic(G(k, \ell)), \Lambda] + T_\omega)u, u \rangle. \end{aligned}$$

On peut considérer une $(0, q)$ -forme à valeurs dans $G(k, \ell)$ comme une (n, q) -forme à valeurs dans $\tilde{G}(k, \ell) = \Lambda^n TX \otimes G(k, \ell)$. Notons \tilde{u} l'image de u dans $\mathcal{C}_{n,q}^\infty(X, \tilde{G}(k, \ell))$, le morphisme $u \mapsto \tilde{u}$ est une isométrie.

Si u est une $(0, q)$ -forme à valeur dans $G(k, \ell)$, nous déduisons de (1.5'):

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \int_X \langle \Delta''_{k,\ell}u, u \rangle d\sigma &= \int_X \langle \tilde{\Delta}''_{k,\ell}\tilde{u}, \tilde{u} \rangle d\sigma = \|\delta'_\tau \tilde{u}\|^2 \\ &+ \int_X \langle [ic(\tilde{G}(k, \ell)), \Lambda] + T_\omega \tilde{u}, \tilde{u} \rangle d\sigma. \end{aligned}$$

Nous allons construire à l'aide des opérateurs déterminés par les structures holomorphes données sur X , et les fibrés E, F et G , une connexion hermitienne sur le fibré de classe \mathcal{C}^∞ (non holomorphe en général) $\Lambda^{0,q}T^*X \otimes G(k, \ell)$. La variété X sera donc désormais munie de sa structure riemannienne sous-jacente.

Une connexion ∇ sur un fibré hermitien H de classe \mathcal{C}^∞ au-dessus d'une variété riemannienne M est un opérateur différentiel d'ordre 1 sur l'espace des p -formes à valeurs dans H tel que, si $f \in \mathcal{C}_m^\infty(X, \mathbb{C})$ et $u \in \mathcal{C}_p^\infty(X, H)$, on ait:

$$\nabla(f \wedge u) = df \wedge u + (-1)^m f \wedge \nabla u.$$

Soit $(u|v) : \mathcal{C}_p^\infty(X, H) \times \mathcal{C}_m^\infty(X, H) \rightarrow \mathcal{C}_{p+m}^\infty(X, \mathbb{C})$ l'accouplement sesquilinéaire canonique des formes sur H , on dit que la connexion ∇ est *hermitienne* si, pour deux formes u, v on a: $d(u|v) = (\nabla u|v) + (-1)^{\deg u} (u|\nabla v)$. L'opérateur $B = i\nabla^2$ est alors le produit extérieur par une 2-forme à valeurs dans les endomorphismes hermitiens de H (c'est une 2-forme réelle si H est de rang 1). Classiquement, $c(\nabla) = \nabla^2$ est la courbure de cette connexion. Dans la suite, c'est B que nous appellerons la courbure de cette connexion. Dans un ouvert de trivialisations de H , toute connexion s'écrit $\nabla = d + iA \wedge \cdot$ où A est la forme de la connexion ∇ . A dépend de la trivialisations choisie.

Demailly [De1] démontre à l'aide du Lemme 1.2 que l'on peut construire une connexion hermitienne $\nabla_{k,\ell}$ sur le fibré $\Lambda^{0,q}T^*X \otimes G(k, \ell)$ qui vérifie:

$$|D'_{\tau_{k,\ell}}u| = |\nabla'_{k,\ell}u + S'u| \quad \text{et} \quad |\tilde{\delta}'_{\tau_{k,\ell}}\tilde{u}| = |\nabla''_{k,\ell}u + S''u|$$

$$\text{où } |S'| = |\tau| \text{ et } |S''| = |\tau^*|.$$

Nous définissons la $(1, 1)$ -forme réelle $\gamma_{k,\ell}$ par

$$\gamma_{k,\ell} = ic(E^k)|_{NY} \oplus ic(F^\ell)|_{TY}.$$

Cette forme admet par rapport à la métrique $\omega_{k,\ell}$ les mêmes valeurs propres que la forme γ définie dans l'introduction par rapport à $\omega_{1,1}$. On a :

$$ic(G(k, \ell)) = k ic(E) \otimes id_G + \ell ic(F) \otimes id_G + ic(G)$$

et

$$ic(\tilde{G}(k, \ell)) = ic(G(k, \ell)) + ic(\Lambda^n TX) \otimes id_G.$$

On identifiera dans ce qui suit une forme différentielle et le morphisme d'algèbre graduée qu'elle définit par multiplication extérieure. Nous pouvons alors définir l'endomorphisme $V_{k,\ell}$ de $\Lambda^{0,q} T^* X \otimes G(k, \ell)$ par :

$$V_{k,\ell}u = -[\gamma, \Lambda]u - [\gamma, \Lambda]\tilde{u},$$

appelons désormais $\Xi_{k,\ell}$, la 2-forme :

$$\Xi_{k,\ell} = ic(G(k, \ell)) - \gamma, \quad (\text{resp. } \tilde{\Xi}_{k,\ell} = ic(\tilde{G}(k, \ell)) - \gamma),$$

et définissons l'endomorphisme

$$\Theta_{k,\ell}u = [\Xi, \Lambda]u + [\tilde{\Xi}, \Lambda]\tilde{u} + T_\omega u + T_\omega \tilde{u}.$$

En sommant les égalités (1.5) et (1.6) nous obtenons donc :

$$(1.7) \quad 2 \int_X \langle \Delta''_{k,\ell} u, u \rangle d\sigma = \int_X (|\nabla u + Su|^2 - \langle Vu, u \rangle) d\sigma + \langle \Theta u, u \rangle.$$

Posons $Q_X(u) = \int_X (|\nabla_{k,\ell} u|^2 - \langle V_{k,\ell} u, u \rangle) d\sigma$. La proposition suivante montre que la distribution des petites valeurs propres de l'opérateur $\Delta''_{k,\ell}$ est asymptotiquement égale à celle de la forme quadratique Q_X .

PROPOSITION 1.8. *Il existe $\varepsilon_{k,\ell}$ une suite tendant vers 0 lorsque ℓ et k/ℓ tendent vers $+\infty$ telle que l'on ait l'encadrement :*

$$(1 - \varepsilon_{k,\ell})Q_X(u) - \varepsilon_{k,\ell} \|u\|_{k,\ell}^2 \leq 2 \langle \Delta''_{k,\ell} u, u \rangle_{k,\ell} \leq (1 + \varepsilon_{k,\ell})Q_X(u) + \varepsilon_{k,\ell} \|u\|_{k,\ell}^2.$$

Cela résulte du

LEMME 1.9. *Lorsque ℓ et k/ℓ tendent vers $+\infty$, on a :*

- a) $|S|_{k,\ell} \rightarrow 0$
- b) $|\Theta|_{k,\ell} \rightarrow 0.$

Démonstration du Lemme 1.9. En un point x^0 de X , choisissons un système de coordonnées locales centrées en x^0 (x_1, \dots, x_{2n}) adapté au feuilletage Y : i.e. la feuille de Y passant par x^0 est représentée dans un voisinage suffisamment petit par l'espace affine $\{x_1 = x_1^0, \dots, x_{2r} = x_{2r}^0\}$. TY est alors le sous-espace de TX engendré par les $\partial/\partial x_j$, pour $j = 2r + 1, \dots, 2n$ et NY son orthogonal. Ce système de coordonnées est choisi de sorte que les $(\partial/\partial x_j)_{1 \leq j \leq 2r}$ (resp. $(\partial/\partial x_j)_{2r+1 \leq j \leq 2n}$) forment un système orthonormal pour la métrique définie par η sur $N_{x^0}Y$ (resp. ζ sur $T_{x^0}Y$) qui diagonalise $ic(E)_{x^0|NY}$ (resp. $ic(F)_{x^0|TY}$). Il est important de noter que les $\partial/\partial x_j$ engendrent TY au voisinage de x^0 pour $j = 2r + 1, \dots, 2n$, si bien que les dx_j engendrent N^*Y (canoniquement isomorphe à l'orthogonal de TY) pour $j = 1, \dots, 2r$.

a) On a

$$|S|_{k,\ell} = |\tau^*|_{k,\ell} + |\tau|_{k,\ell} = 2|\tau|_{k,\ell}$$

et

$$|\tau|_{k,\ell} = |[\Lambda, d'\omega]|_{k,\ell}$$

$$\leq 2\sqrt{n} |d'\omega|_{k,\ell}$$

car

$$|\Lambda|_{k,\ell} = |\omega|_{k,\ell} = \sqrt{n}.$$

Maintenant, écrivons: $d'\omega = kd'\eta + \ell d'\zeta$ avec $\eta = \sum_{1 \leq i, j \leq 2r} c_{ij} dx_i \wedge dx_j$ car η est une 2-forme dont le noyau contient TY . On a donc $d'\eta = \sum d_{ijm} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_m$ avec i et j contenus dans $\{1, \dots, 2r\}$ et m quelconque. Ceci car Y est un feuilletage de X (si bien que l'on peut choisir un repère constitué de 1-formes fermées de $(TY)^0 \simeq N^*Y$).

Par construction, nous avons:

$$\begin{cases} |dx_j|_{k,\ell} = \frac{1}{\sqrt{k}} & \text{si } j = 1, \dots, 2r \\ |dx_j|_{k,\ell} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ell}}\right) & \text{si } j = 2r + 1, \dots, 2n. \end{cases}$$

Par conséquent, il vient $|d'\eta|_{k,\ell} \leq Ck^{-1}\ell^{-1/2}$ et $|d'\zeta|_{k,\ell} \leq C\ell^{-3/2}$, soit:

$$|d'\omega|_{k,\ell} \leq C \left(\frac{k}{k} \times \frac{1}{\sqrt{\ell}} + \frac{\ell}{\ell} \times \frac{1}{\sqrt{\ell}} \right) \leq \frac{C}{\sqrt{\ell}}.$$

b) On aura de même que $d'd''\eta$ contient au moins deux composantes dans T^*Y , soit:

$$|d'd''\omega|_{k,\ell} \leq \frac{C}{\ell}$$

d'où $|T_\omega|_{k,\ell} \leq C_1/\ell$ où C_1 est une constante uniforme sur X .

On aura également $\Xi = \ell ic(F)|_{NY} + ic(G)$, donc

$$|\Xi|_{k,\ell} \leq C_2 \left(\frac{\ell}{\sqrt{\ell}\sqrt{k}} + \frac{1}{\ell} \right) = C_2 \left(\sqrt{\frac{\ell}{k}} + \frac{1}{\ell} \right).$$

où C_2 est aussi une constante uniforme sur X . □

Démonstration de la Proposition 1.8. Appliquons l'encadrement

$$(1 - \alpha)(|a|^2 - \alpha^{-1}|b|^2) \leq |a + b|^2 \leq (1 + \alpha)(|a|^2 + \alpha^{-1}|b|^2)$$

à $a = D_{k,\ell}u$, $b = Su$ et $\alpha_\ell = C/\sqrt{\ell}$ et $\varepsilon_{k,\ell} = \max\left(\alpha_\ell, C_2\sqrt{\frac{\ell}{k}}\right)$ et encadrons $\langle\langle \Xi u, u \rangle\rangle$ par $\pm\varepsilon_{k,\ell}\|u\|^2$. □

II. - Spectre de la forme quadratique Q_X (cas constant)

Au Paragraphe I, nous avons montré (Proposition 1.8) que le spectre du laplacien $\Delta''_{k,\ell}$ par rapport à la métrique $\omega_{k,\ell}$ est voisin de celui de l'opérateur $\nabla^*_{k,\ell}\nabla_{k,\ell} - V_{k,\ell}$ lorsque k et ℓ sont grands. Nous sommes donc conduits à étudier le spectre d'un tel opérateur sur une variété riemannienne. Nous allons établir une formule asymptotique de Weyl pour cet opérateur. Le cas que nous envisageons désormais étant uniquement riemannien, nous formulerons ces résultats dans ce cadre plus général, et légèrement différent de celui considéré jusque ici.

Soit M une variété riemannienne de dimension réelle n , munie d'un feuilletage L de codimension $2r$, et de deux fibrés vectoriels de rang 1, E et F , chacun d'entre eux possédant une métrique hermitienne et une connexion hermitienne ∇_E (resp. ∇_F). Nous supposons en outre que la forme de courbure $B_E = ic(\nabla_E)$ est une 2-forme réelle dont la fibration des noyaux contient le fibré tangent à L . Une métrique riemannienne étant choisie sur M , elle détermine un fibré vectoriel de rang $2r$ et de classe C^∞ NL , orthogonal à TL en tout point de M . Munissons les fibrés NL et TL de métriques riemanniennes g_1 et g_2 , et M de la métrique $g_{k,\ell} = kg_1 + \ell g_2$. Soit $d\sigma_{k,\ell}$ la densité de volume riemannien de $(M, g_{k,\ell})$. Nous désignerons par $|u|_{k,\ell}$ la norme ponctuelle d'une q -forme u à valeurs dans $E^k \otimes F^\ell$ calculée à l'aide de la métrique $g_{k,\ell}$ sur M et des métriques de E et F . Si Ω est un ouvert de M , on note $L^2_{k,\ell}(\Omega)$ l'espace L^2 des sections de $E^k \otimes F^\ell$ muni de la norme $\|u\|^2_{\Omega,k,\ell} = \int_{\Omega} |u|^2_{k,\ell} d\sigma_{k,\ell}$. Comme précédemment, nous omettrons souvent les indices k, ℓ dans ces formules, ainsi que pour les produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,\ell}$ et $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{k,\ell}$ associés.

$\nabla_{k,\ell}$ étant la connexion induite par ∇_E et ∇_F sur $E^k \otimes F^\ell$, et V une fonction réelle continue sur M , on considère la forme quadratique

$$Q_{\Omega,k,\ell}(u) = \int_{\Omega} (|\nabla_{k,\ell}u|^2_{k,\ell} - V|u|^2_{k,\ell}) d\sigma_{k,\ell}$$

pour les fonctions u sur un ouvert relativement compact Ω de M , avec condition de Dirichlet au bord. Le domaine de $Q_{\Omega,k,\ell}$ est donc l'espace de Sobolev $W^1_0(\Omega, E^k \otimes F^\ell)$ des sections de $E^k \otimes F^\ell$ dont les dérivées d'ordre 1 sont dans

$L_{k,\ell}^2(\Omega)$, et adhérentes aux sections C^∞ à support compact dans Ω . On se propose d'étudier le spectre de $Q_{\Omega,k,\ell}$ lorsque ℓ et k/ℓ tendent vers $+\infty$.

Soit $B_{k,\ell}$ la courbure de la connexion $\nabla_{k,\ell}$. Nous avons $B_{k,\ell} = kB_E + \ell B_F$ et soit $\Gamma_{k,\ell} = kB_{E|NL} \oplus \ell B_{F|TL}$ où $B_{F|TL}$ est la restriction de la 2-forme B_F au sous-fibré TL de TX .

Soient $\Gamma_1 \geq \Gamma_2 \dots \geq \Gamma_s > 0 = \Gamma_{s+1} = \dots = \Gamma_n$ les valeurs propres de $\Gamma_{k,\ell}$ par rapport à la métrique $g_{k,\ell}$ (indépendantes de k et ℓ).

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, nous donnons maintenant deux définitions:

DÉFINITION 2.1. $N_{\Omega,k,\ell}(\lambda)$ désigne le nombre de valeurs propres $\leq \lambda$ de la forme quadratique $Q_{\Omega,k,\ell}$.

DÉFINITION 2.2. On associe à la 2-forme $\Gamma_{k,\ell}$ la fonction:

$$\nu_\Gamma(\lambda) = \frac{2^{s-n} \pi^{-n/2}}{\binom{n}{2-s}!} \Gamma_1 \dots \Gamma_s \sum_{(p_1, \dots, p_s) \in \mathbb{N}^s} (\lambda - \sum (2p_j + 1) B_j)_+^{\frac{n}{2}-s}$$

avec la convention $\lambda_+^0 = 0$ si $\lambda \leq 0$, $\lambda_+^0 = 1$ si $\lambda > 0$, et où la notation $\delta!$ est utilisée pour éviter toute confusion avec Γ si $\delta \in \mathbb{R}$.

Pour tout point x de M , la fonction $\nu_\Gamma(\lambda)$ est croissante et continue à gauche sur \mathbb{R}_+ , continue si $s(x) < n/2$.

Au paragraphe suivant, nous calculerons un équivalent de la fonction $N_\Omega(\lambda)$ à l'aide de $\nu_\Gamma(\lambda)$. Pour cela, nous nous ramènerons en pavant l'ouvert Ω par des parallélépipèdes suffisamment petits, au cas où le $\Gamma_{k,\ell}$ est constante, et où V est nul.

Plaçons-nous donc dans la situation suivante: $M = \mathbb{R}^n$,

$$L \simeq \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \dots = x_{2r} = 0\}, \quad g_1 = \sum_{j=1}^{2r} dx_j^2, \quad g_2 = \sum_{j=2r+1}^n dx_j^2,$$

Ω est le cube de côté R dans la métrique $g_{k,\ell}^0 = kg_1 + \ell g_2$.

$$\Omega = P_{k,\ell}(R) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; |x_j| < \frac{R}{2\sqrt{k}} \text{ si } j = 1, \dots, 2r \right. \\ \left. \text{et } |x_j| < \frac{R}{2\sqrt{\ell}} \text{ si } j = 2r + 1, \dots, n \right\}.$$

Pour simplifier encore, nous supposons que le noyau de B_F contient NL , donc que $\Gamma_{k,\ell} = B_{k,\ell} = k \sum_{j=1}^r B_j dx_j \wedge dx_{j+r} + \ell \sum_{j \geq r+1} B_j dx_{2j-1} \wedge dx_{2j}$ avec la convention que $B_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} = 0$. On peut alors choisir une trivialisations de E (resp. F) dans laquelle la forme A_E de la connexion ∇_E (resp. A_F de ∇_F) soit $A_E = \sum_{j=1}^r B_j x_j dx_{j+r}$ (resp. $A_F = \sum_{j=r+1}^{\lfloor n/2 \rfloor} B_j x_{2j-1} dx_{2j}$). Posons $A_{k,\ell} = kA_E + \ell A_F$, la

connexion de $E^k \otimes F^\ell$ s'écrit donc sur $P_{k,\ell}(R)$: si $u \in C^\infty(P_{k,\ell}(R), E^k \otimes F^\ell)$,

$$\nabla_{k,\ell} u = du + iA_{k,\ell} \wedge u,$$

tandis que la forme quadratique associée admet pour expression:

$$\begin{aligned} Q_{P_{k,\ell}(R),k,\ell} = Q_{R,k,\ell}(u) &= \int_{P_{k,\ell}(R)} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^r \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_{j+r}} + ik B_j x_j u \right|^2 \right) \\ (2.3) \quad &+ \int_{P_{k,\ell}(R)} \frac{1}{\ell} \sum_{j=r+1}^{[n/2]+1} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_{2j-1}} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_{2j}} + i\ell B_j x_{2j} u \right|^2 \right) \end{aligned}$$

si $d\mu$ est la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^n , on a $d\sigma_{k,\ell} = k^r \ell^{n-r} d\mu$ et les facteurs $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{\ell}$ qui apparaissent dans l'expression de $Q_{R,k,\ell}$ proviennent du fait que $|dx_j|_{k,\ell}^2$ vaut soit $\frac{1}{k}$, soit $\frac{1}{\ell}$ selon que dx_j est dans NL ou TL . Par conséquent, l'intérêt de la métrique $g_{k,\ell}^0$ adaptée à la courbure de la connexion $\nabla_{k,\ell}$ est de "normaliser" la forme quadratique Q_R sur $P_{k,\ell}(R)$. En effet, effectuons dans l'intégrale (2.3) le changement de variables suivant.

Munissons \mathbb{R}^n des coordonnées (X_1, \dots, X_n) où

$$(2.4) \quad \begin{cases} X_j = \sqrt{k} x_j, & 1 \leq j \leq 2r, \\ X_j = \sqrt{\ell} x_j, & 2r+1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Il vient

$$\begin{aligned} Q_R(u) &= k^r \ell^{n/2-r} \int_{P(R)} \sum_{j=1}^r \left(\left| \frac{\partial u}{\partial X_j} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial X_{j+r}} + iB_j X_j u \right|^2 \right) \\ &+ \sum_{j=r+1}^{[n/2]+1} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial X_{2j-1}} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial X_{2j}} + iB_j X_{2j} u \right|^2 \right) d\mu \end{aligned}$$

et $\|u\|_{k,\ell}^2 = k^r \ell^{n/2-r} \int_{P(R)} |u|^2 d\mu$ où $P(R) = \left\{ (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n : |X_j| < \frac{R}{2} \right\}$.

Observons que, comme $B_{k,\ell} = \Gamma_{k,\ell}$, il existe une permutation σ des indices j qui applique B_j sur $\Gamma_{\sigma(j)}$, nous pouvons par conséquent appliquer directement le théorème de répartition spectrale de Demailly pour cette forme quadratique.

THÉORÈME 2.5 ([De1], p. 197). *Soit R , un réel > 0 , $N_R(\lambda)$ le nombre de valeurs propres $\leq \lambda$ de la forme quadratique*

$$Q_R = \int_{P(R)} \left(\sum_{j=1}^s \left| \frac{\partial u}{\partial X_j} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial X_{j+s}} + i\Gamma_j X_j u \right|^2 + \sum_{j>2s} \left| \frac{\partial u}{\partial X_j} \right|^2 \right) d\mu$$

pour le problème de Dirichlet au bord de $P(R)$, par rapport à la métrique standard sur $P(R)$.

Alors, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-n} N_R(\lambda) = \nu_\Gamma(\lambda) \quad \text{et la majoration} \quad N_R(\lambda) \leq (R\sqrt{\lambda} + 1)^n.$$

En multipliant Q_R et la métrique $\| \cdot \|_{k,\ell}^2$ par le facteur $k^{-r} \ell^{r-\frac{n}{2}}$, on a immédiatement

COROLLAIRE 2.6. Avec les notations des Définitions 2.1 et 2.2, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-n} N_{R,k,\ell}(\lambda) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{Vol}_{k,\ell}(P_{k,\ell}(R))} N_{P_{k,\ell}(R),k,\ell}(\lambda) = \nu_\Gamma(\lambda).$$

III. - Spectre de la forme quadratique Q_X (cas général)

L'objet de ce paragraphe est de démontrer une version globale du Corollaire 2.6 lorsque $B_{k,\ell}$ et V sont quelconques sur Ω . Nous associons à $\nu_\Gamma(\lambda)$ la fonction $\bar{\nu}_\Gamma(\lambda)$ continue à droite en λ : $\bar{\nu}_\Gamma(\lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \nu_B(\lambda + \varepsilon)$.

THÉORÈME 3.1. Soit Ω un ouvert relativement compact dans M . Lorsque ℓ et k/ℓ tendent vers $+\infty$, on a l'encadrement asymptotique

$$\begin{aligned} k^{-r} \ell^{r-\frac{n}{2}} \int_{\Omega} \nu_\Gamma(V + \lambda) d\sigma_{k,\ell} &\leq \liminf_{k,\ell} k^{-r} \ell^{r-\frac{n}{2}} N_{\Omega,k,\ell}(\lambda) \\ &\leq \limsup_{k,\ell} k^{-r} \ell^{r-\frac{n}{2}} N_{\Omega,k,\ell}(\lambda) \leq k^{-r} \ell^{r-\frac{n}{2}} \int_{\bar{\Omega}} \bar{\nu}_\Gamma(V + \lambda) d\sigma_{k,\ell}. \end{aligned}$$

Nous allons démontrer le Théorème 3.1 en nous ramenant au Corollaire 2.6 en pavant l'ouvert Ω par des parallépipèdes suffisamment petits pour qu'on puisse approcher Q_X par sa valeur gelée en un point. Lorsque k et ℓ tendent vers $+\infty$, la croissance de $B_{k,\ell}$ est plus forte dans la direction orthogonale aux feuilles de L , donc la longueur du côté sera nécessairement plus petite (de l'ordre de $k^{-1/2} \ell^{1/6}$) que dans la direction des feuilles, où elle sera de l'ordre de $\ell^{-1/3}$. Le gain en précision par rapport au résultat de [De1] provient du fait que l'on peut utiliser des pavés de côté très voisins de $k^{-1/2}$, qui est l'ordre critique pour la précision des estimations (une croissance du côté des pavés de cet ordre ne permet plus d'obtenir des estimations précises (cf. l'introduction de [De1] ou le Corollaire 0.2)).

Le lemme suivant montre que les quantités intervenant dans les inégalités du Théorème 3.1 sont finies.

LEMME 3.2.

- a) $\nu_\Gamma(\lambda) \leq \bar{\nu}_\Gamma(\lambda) \leq \lambda_+^{n/2}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
- b) $\nu_\Gamma(V)$ (resp. $\bar{\nu}_\Gamma(V)$) est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) sur M .
- c) En tout point x de M où $s(x) < \frac{n}{2}$, on a $\nu_\Gamma(V)(x) = \bar{\nu}_\Gamma(V)(x)$ et $\nu_\Gamma(V)$ ainsi que $\bar{\nu}_\Gamma(V)$ est continue.
- d) Si n est impair $\nu_\Gamma(V) = \bar{\nu}_\Gamma(V)$ est continue sur M .

$\Gamma_{k,\ell}$ est une 2-forme sur M dont les valeurs propres par rapport à la métrique $g_{k,\ell} = kg_1 + \ell g_2$ sont, soit les valeurs propres de $B_{E|NL}$ par rapport à g_1 , soit celles de $B_{F|TL}$ par rapport à g_2 . La preuve du Lemme 3.2 est donc identique à celle du Lemme 2.5 de [De1]. La preuve du lemme suivant est également identique à celle de la Proposition 2.6 de [De1].

LEMME 3.3 (Principe de localisation pour $Q_{\Omega,k,\ell}$).

- a) Si $\Omega_1, \dots, \Omega_N \subset \Omega$ sont des ouverts deux à deux disjoints, on a

$$N_{\Omega,k,\ell}(\lambda) \geq \sum_{j=1}^N N_{\Omega_j,k,\ell}(\lambda).$$

- b) Si $(\Omega'_j)_{1 \leq j \leq N}$ est un recouvrement ouvert de Ω , et $\psi = (\psi_j)_{1 \leq j \leq N}$ un système de fonctions numériques $\psi_j \in C^\infty(M)$ à support compact dans Ω'_j et telles que $\sum_{j=1}^N \psi_j^2 \equiv 1$ sur $\bar{\Omega}$. Posons

$$C_{k,\ell}(\psi) = \sup_{\Omega} \sum_{j=1}^N |d\psi_j|_{k,\ell}^2.$$

Alors on a

$$N_{\Omega,k,\ell}(\lambda) \leq \sum_{j=1}^N N_{\Omega'_j,k,\ell}(\lambda + C_{k,\ell}(\psi)).$$

Soit $(W_j)_{1 \leq j \leq N}$ un recouvrement ouvert de Ω par des ouverts de carte de la variété M qui trivialisent le feuilletage L . Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver des ouverts $\Omega_j \subset \Omega'_j$ relativement compacts dans W_j tels que:

$$(3.4) \quad \Omega = \bigcup \Omega_j \text{ (disjointe)} \quad \text{et} \quad \text{Vol}(\Omega) = \sum \text{Vol}(\Omega_j)$$

$$(3.5) \quad \bar{\Omega} \subset \bigcup \Omega'_j \quad \text{et} \quad \text{Vol}(\bar{\Omega}) \leq \sum \text{Vol}(\bar{\Omega}'_j) + \varepsilon.$$

D'après le Lemme 3.3, il suffit de démontrer le Théorème 3.1 pour des ouverts Ω_j et Ω'_j . On peut donc supposer que Ω est un ouvert relativement

compact de \mathbb{R}^n sur lequel E et F sont triviaux. On peut supposer en outre qu'il existe des coordonnées (x_1, \dots, x_n) sur Ω telles que la feuille L_{x^0} soit donnée par l'espace affine $\{x_1 = x_1^0, \dots, x_{2r} = x_{2r}^0\}$ et telles que $(dx_j, 1 \leq j \leq 2r)$ forme un repère de N^*L . Nous démontrons tout d'abord le Théorème 3.1 pour un parallélépipède.

PROPOSITION 3.6. *Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $P_{k,\ell}$, une suite de pavés ouverts cubiques dans la métrique $g_{k,\ell}^0$ définie au §2, de côté $r_{k,\ell}$ contenant a , et dont les faces sont parallèles ou orthogonales à L . Supposons:*

- (i) $\lim_{k,\ell \rightarrow +\infty} r_{k,\ell} \rightarrow +\infty$;
- (ii) $\lim_{k,\ell \rightarrow +\infty} \ell^{-1/4} r_{k,\ell} = 0$;
- (iii) $\lim_{k,\ell \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{\ell}{k}} r_{k,\ell} \right) = 0$.

On a alors

$$\liminf_{k,\ell} \frac{1}{\text{Vol}_{k,\ell}(P_{k,\ell})} N_{P_{k,\ell}}(\lambda) \geq \nu_{\Gamma(a)}(V(a) + \lambda)$$

$$\limsup_{k,\ell} \frac{1}{\text{Vol}_{k,\ell}(P_{k,\ell})} N_{P_{k,\ell}}(\lambda) \leq \bar{\nu}_{\Gamma(a)}(V(a) + \lambda)$$

en outre, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$ tel que $P_{k_0,\ell_0} \subset K$ on a pour tout $P_{k,\ell} \subset K$:

$$N_{P_{k,\ell}}(\lambda) \leq C_K \left(1 + r_{k,\ell} \sqrt{\lambda_+ + \max_K V_+} \right)^n$$

où la constante C_K ne dépend que de K .

NOTE 3.7. Dans la métrique standard de \mathbb{R}^n , les ouverts $P_{k,\ell}$ sont des parallélépipèdes dont les faces sont parallèles aux axes de coordonnées, de longueurs de côté $r_{k,\ell}/\sqrt{k}$ le long de L^\perp , et $r_{k,\ell}/\sqrt{\ell}$ le long de L . On a alors les renseignements suivants sur l'ordre de grandeur de ces côtés:

- 1) $k^{1/2} \frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{k}} \rightarrow +\infty$ et $k^{1/4} \frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{k}} = \left(\frac{k}{\ell} \right)^{-1/4} \ell^{-1/4} r_{k,\ell} \rightarrow 0$
- 2) $\ell^{1/2} \frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}} \rightarrow +\infty$ et $\ell^{1/4} \frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}} = \ell^{-1/4} r_{k,\ell} \rightarrow 0$.

Nous montrons maintenant que la forme quadratique $Q_{P_{k,\ell}}$ est très voisine de la forme dont les paramètres $\Gamma(a)$ et $V(a)$ sont constants. Dans ce qui suit a est élément d'un compact K fixé de \mathbb{R}^n , et les $C_i, i = 1, 2, \dots$ seront des constantes indépendantes de k, ℓ et a .

LEMME 3.8. *On peut choisir une suite $\tilde{A}_{k,\ell}$ de formes des connexions $\nabla_{k,\ell}^a$ de courbure constante $\Gamma_{k,\ell}(a)$ sur chaque $P_{k,\ell}$ telle que l'on ait pour tout*

$x \in P_{k,\ell}$

$$|\tilde{A}_{k,\ell}(x) - A_{k,\ell}(x)|_{k,\ell} \leq C_1 \left(\frac{r_{k,\ell}^2}{\sqrt{\ell}} + r_{k,\ell} \sqrt{\frac{\ell}{k}} \right).$$

Démonstration. Ecrivons $\Gamma_{k,\ell} = kB_E + \ell B_{F|TL} = kB_E + \ell(B_F + (B_{F|TL} - B_F))$. Soit A_E (resp. A_F) une forme telle que $dA_E = B_E$ (resp. $dA_F = B_F$). Soit donc $A_{k,\ell} = kA_E + \ell A_F$ une forme de la connexion $\nabla_{k,\ell}$ pour une trivialisation de $E^k \otimes F^\ell$ sur Ω . Notons $x' = (x_1, \dots, x_{2r})$ les coordonnées transverses à L et $x'' = (x_{2r+1}, \dots, x_n)$ les coordonnées sur les feuilles de L . Le fait que B_E soit une forme fermée dont le noyau contient TL implique que B_E ne dépend pas des variables x'' .

Par conséquent, la régularité C^∞ de B_E implique:

$$|B_E(x) - B_E(a)|_{1,1} = |B_E(x', a'') - B_E(a', a'')|_{1,1} \leq C_2 \frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{k}}$$

car a' et x' appartiennent au cube de côté $r_{k,\ell}/\sqrt{k}$ d'après la note 3.7.

D'autre part, le pavé $P_{k,\ell}$ est contenu dans un cube de côté $r_{k,\ell}/\sqrt{\ell}$, donc:

$$|B_F(x) - B_F(a)|_{1,1} \leq C_3 \frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}.$$

Si A'_E (resp. A'_F) est la forme dont la différentielle vaut $B_E(x) - B_E(a)$ (resp. $B_F(x) - B_F(a)$) calculée par la formule d'homotopie classique qui permet d'exprimer une forme fermée comme un cobord dans un ouvert étoilé de \mathbb{R}^n , on a:

$$|A'_E(x)|_{1,1} \leq C_4 \left(\frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{k}} \right) \times \frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}$$

$$|A'_F(x)|_{1,1} \leq C_5 \left(\frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}} \right)^2.$$

Comme le noyau de B_E contient TL , la forme A'_E est à valeurs dans l'orthogonal N^*L de T^*L . Le même type d'argument que ceux utilisés dans la démonstration de la Proposition 1.8 donne alors:

$$|A'_E(x)|_{k,\ell} \leq C_6 \frac{r_{k,\ell}^2}{k\sqrt{\ell}} \quad \text{et} \quad |A'_F(x)|_{k,\ell} \leq C_7 \frac{r_{k,\ell}^2}{\ell\sqrt{\ell}}.$$

On en déduit l'estimation:

$$|kA'_E + \ell A'_F|_{k,\ell} \leq C_8 \frac{r_{k,\ell}^2}{\sqrt{\ell}}.$$

Maintenant, $B_L = B_F(a) - B_{F|TL}(a)$ est une forme constante dont l'expression en coordonnées ne contient que des termes $dx_j \wedge dx_m$ où $j \in$

$\{1, \dots, 2r\}$ et m est quelconque. La forme A'_L telle que $dA'_L = B_L$ calculée de la même façon que précédemment vérifie immédiatement

$$\ell|A'_L(x)|_{k,\ell} \leq C_9 r_{k,\ell} \sqrt{\ell/k}.$$

La forme $\tilde{A}_{k,\ell} = k(A_E - A'_E) + \ell(A_F - A'_F - A'_L)$ vérifie l'énoncé du Lemme 3.8. \square

Soit (y_1, \dots, y_n) un système de coordonnées linéaires en (x_1, \dots, x_n) choisi de façon à ce que (y_1, \dots, y_{2r}) soient des coordonnées transverses à L et tel que $(\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_n)$ soit une base orthogonale au point a pour la métrique $g_{k,\ell}$, qui diagonalise $\Gamma_{k,\ell}(a)$. C'est-à-dire qu'on a

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{k,\ell} &= g_{k,\ell}(a) = k \sum_{j=1}^{2r} dy_j^2 + \ell \sum_{j=2r+1}^n dy_j^2 \\ \Gamma_{k,\ell}(a) &= k \sum_{j=1}^r \Gamma_j(a) dy_j \wedge dy_{j+r} + \ell \sum_{j=r+1}^{[n/2]} \Gamma_j(a) dy_{2j-1} \wedge dy_{2j}. \end{aligned}$$

Notons $\tilde{\nabla}_{k,\ell} = d + i\tilde{A}_{k,\ell} \wedge \cdot$ la connexion de courbure $\Gamma_{k,\ell}(a)$, et $\tilde{V} = V(a)$. On peut alors définir pour $u \in W_0^1(P_{k,\ell}, \mathbb{C})$ la forme quadratique "gelée en a ":

$$\tilde{Q}_{k,\ell}(u) = \int_{P_{k,\ell}} |\tilde{\nabla}_{k,\ell} u|_{\tilde{k},\ell}^2 - \tilde{V}|u|_{\tilde{k},\ell}^2 d\sigma_{\tilde{k},\ell}$$

où les indices \tilde{k}, ℓ signifient que les produits scalaires considérés ainsi que l'élément de volume $d\sigma_{\tilde{k},\ell}$ sont ceux induits par $\tilde{g}_{k,\ell}$.

LEMME 3.9. *Il existe une suite $\varepsilon_{k,\ell}$ tendant vers 0 telle que l'on ait:*

$$(1 - \varepsilon_{k,\ell}) \|u\|_{\tilde{k},\ell}^2 \leq \|u\|_{k,\ell}^2 \leq (1 + \varepsilon_{k,\ell}) \|u\|_{\tilde{k},\ell}^2$$

$$(1 - \varepsilon_{k,\ell}) \tilde{Q}_{k,\ell}(u) - \varepsilon_{k,\ell} \|u\|_{\tilde{k},\ell}^2 \leq Q_{k,\ell}(u) \leq (1 + \varepsilon_{k,\ell}) \tilde{Q}_{k,\ell}(u) + \varepsilon_{k,\ell} \|u\|_{\tilde{k},\ell}^2$$

pour tout $u \in W_0^1(P_{k,\ell}, \mathbb{C})$.

Démonstration. Sur $P_{k,\ell}$, on a les encadrements,

$$\begin{aligned} \left(1 - C_{10} \frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}\right) \tilde{\eta} \leq \eta \leq \left(1 + C_{10} \frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}\right) \tilde{\eta} \quad \text{et} \\ \left(1 - C_{10} \frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}\right) \tilde{\zeta} \leq \zeta \leq \left(1 + C_{10} \frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}\right) \tilde{\zeta} \end{aligned}$$

d'où le premier encadrement.

En posant $A'_{k,\ell} = kA'_E + \ell A'_F + \ell A'_L$, on en déduit

$$\begin{aligned} Q_{k,\ell}(u) &= \int_{P_{k,\ell}} (|\tilde{\nabla}_{k,\ell} u - iA'_{k,\ell} \wedge u|_{k,\ell}^2 - V|u|_{k,\ell}^2) d\sigma_{k,\ell} \\ &\leq \left(1 + C_{11} \frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}\right) \int_{P_{k,\ell}} |\tilde{\nabla}_{k,\ell} u - iA'_{k,\ell} \wedge u|_{k,\ell}^2 \\ &\quad - \tilde{V}|u|_{k,\ell}^2 d\sigma_{k,\ell} + \delta_{k,\ell} \|u\|_{k,\ell}^2 \end{aligned}$$

où $\delta_{k,\ell} = \sup_{P_{k,\ell}} |V - V(a)| + C_{10} \frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}$ est une quantité qui tend vers 0. Appliquons maintenant l'inégalité $(a+b)^2 \leq (1+\alpha)(a^2 + \alpha^{-1}b^2)$ au terme $|\tilde{\nabla}_{k,\ell} u - iA'_{k,\ell} \wedge u|_{k,\ell}^2$ avec $\alpha_{k,\ell} = C_1 \left(\frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}} + r_{k,\ell} \sqrt{\ell/k}\right)$: on obtient la seconde majoration, car cette suite tend vers 0 par hypothèse. La minoration s'obtient de même grâce à l'inégalité $(1-\alpha)(a^2 - \alpha^{-1}b^2) \leq (a+b)^2$ □

Nous sommes ramenés sur les pavés $P_{k,\ell}$ au cas où $\Gamma_{k,\ell}$, V , et la métrique sont constants. On peut en outre supposer que V est nul en faisant la translation $\lambda \rightarrow \lambda + V(a)$.

A priori, les pavés $P_{k,\ell}$ ne sont pas des parallélépipèdes dont les faces sont parallèles aux axes des coordonnées (y_1, \dots, y_n) , si bien que nous ne pouvons pas appliquer directement la Proposition 2.6 pour achever la démonstration de la Proposition 3.6. Cependant, du fait que les coordonnées (y_1, \dots, y_{2r}) diagonalisent $B_E(a)|_{NL}$ dans la métrique $\eta(a)$, le passage des coordonnées (x_1, \dots, x_n) aux coordonnées (y_1, \dots, y_n) laisse stable la sous-variété L_a . On peut donc choisir les coordonnées y de façon à ce que y'' soit un système de coordonnées sur L et (dy_1, \dots, dy_{2r}) soit un repère de N^*L sur Ω .

Ecrivons $y' = Ax'$ et $y'' = Bx' + Cx''$. On a

$$\begin{aligned} x \in P_{k,\ell} &\Leftrightarrow |x - x^0|_{k,\ell} \leq r_{k,\ell} \Rightarrow |y' - y'_0| \leq \|A\| \frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \\ |y'' - y''_0| &\leq \|C\| \frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}} (1 + O(\sqrt{\ell/k})). \end{aligned}$$

On peut donc encadrer le pavé $P_{k,\ell}$ par deux cubes de côté $O(r_{k,\ell})$ pour la métrique $\tilde{g}_{k,\ell}$, et dont les faces sont parallèles aux axes des coordonnées y .

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$, nous allons paver chaque parallélépipède $P_{k,\ell}$ à l'aide de pavés $P_{k,\ell,\alpha}$ (resp. $P'_{k,\ell,\alpha}$), $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, semblables à celui de la Proposition 2.6. Ce sont des cubes de côté $\varepsilon r_{k,\ell}$ (resp. $\varepsilon(1+\varepsilon)r_{k,\ell}$) dans la métrique $\tilde{g}_{k,\ell}$, dont les faces sont parallèles aux axes des coordonnées (y_1, \dots, y_n) , et dont le centre a pour coordonnées $\varepsilon r_{k,\ell} \left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{k}}, \dots, \frac{\alpha_{2r}}{\sqrt{k}}, \frac{\alpha_{2r+1}}{\sqrt{\ell}}, \dots, \frac{\alpha_n}{\sqrt{\ell}}\right)$ (dans le repère $(\partial/\partial y_i, i = 1, \dots, n)$).

Etant entendu que nous ne considérons les $P_{k,\ell,\alpha}$ (resp. $P'_{k,\ell,\alpha}$) que s'ils sont contenus dans $P_{k,\ell}$ (resp. s'ils rencontrent $P_{k,\ell}$), on a :

$$P_{k,\ell} \supset \bigcup P_{k,\ell,\alpha} \text{ et } \frac{\sum_{\alpha} \text{Vol}(P_{k,\ell,\alpha})}{\text{Vol}(P_{k,\ell})} \geq 1 - C_{12}\varepsilon$$

$$P_{k,\ell} \subset \bigcup P'_{k,\ell,\alpha} \text{ et } \frac{\sum_{\alpha} \text{Vol}(P'_{k,\ell,\alpha})}{\text{Vol}(P_{k,\ell})} \leq 1 + C_{12}\varepsilon$$

où C_{12} est une constante uniforme par rapport à k et ℓ .

Le nombre des pavés $P_{k,\ell,\alpha}$ ou $P'_{k,\ell,\alpha}$ considérés est majoré par $C_{13}\varepsilon^{-n}$ et, comme les cubes $P'_{k,\ell,\alpha}$ se recouvrent deux à deux sur une longueur $\frac{\varepsilon^2 r_{k,\ell}}{\sqrt{k}}$ le long des axes y_1, \dots, y_r et $\frac{\varepsilon^2 r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}$ le long des axes y_{2r+1}, \dots, y_n lorsqu'ils sont contigus, on peut trouver une partition de l'unité $\sum \psi_{k,\ell,\alpha}^2 = 1$ sur $\bar{P}_{k,\ell,\alpha}$ avec $\text{supp } \psi_{k,\ell,\alpha} \subset P'_{k,\ell,\alpha}$ et $\sup_{\bar{P}_{k,\ell,\alpha}} \sum_{\alpha} |d\psi_{k,\ell,\alpha}|^2 \leq C\varepsilon^{-n-4} r_{k,\ell}^{-2}$.

En effet, si $d\psi_{k,\ell,\alpha} = \sum \psi_j(y) dy_j$, il est possible de construire les $\psi_{k,\ell,\alpha}$ de sorte que :

$$|dy_j|_{k,\ell}^2 = \frac{1}{k} \text{ et } |\psi_j|^2 \leq C_{14} \left(\frac{\varepsilon^2 r_{k,\ell}}{\sqrt{k}} \right)^{-2} \text{ si } 1 \leq j \leq 2r$$

$$|dy_j|_{k,\ell}^2 = \frac{1}{\ell} \text{ et } |\psi_j|^2 \leq C_{14} \left(\frac{\varepsilon^2 r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}} \right)^{-2} \text{ si } 2r+1 \leq j \leq n.$$

L'hypothèse $\lim_{k/\ell, \ell \rightarrow +\infty} r_{k,\ell} = +\infty$ permet d'appliquer le Lemme 3.3 b) si bien que l'on peut maintenant déduire la Proposition 3.6 de la Proposition 2.6 appliquée sur chaque pavé $P_{k,\ell,\alpha}$ et $P'_{k,\ell,\alpha}$ dont le côté $\varepsilon r_{k,\ell}$ (resp. $\varepsilon(1+\varepsilon)r_{k,\ell}$) tend vers $+\infty$.

La majoration uniforme de la Proposition 3.6 provient, quant à elle, de la majoration du Théorème 2.5 et du fait que toutes les constantes rencontrées sont uniformes sur K . □

On déduit maintenant le Théorème 3.1 de la Proposition 3.6 grâce au Principe de localisation 3.3 en pavant l'ouvert Ω par des pavés qui sont des cubes dans la métrique $g_{k,\ell}^0 = k \sum_{j=1}^{2r} dx_j^2 + \ell \sum_{j=2r+1}^n dx_j^2$ de côté $r_{k,\ell} = \min(\ell^{1/6}, (\frac{k}{\ell})^{1/4})$.

Soient, pour $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, $\Pi_{k,\ell,\alpha}$ (resp. $\Pi'_{k,\ell,\alpha}$) les cubes de côté $r_{k,\ell}$ (resp. $r'_{k,\ell} = r_{k,\ell}(1 + r_{k,\ell}^{-\frac{1}{2}}) = r_{k,\ell} + r_{k,\ell}^{\frac{1}{2}}$) et de centre commun x_{α} , avec $x'_{\alpha} = \frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{k}} \alpha'$ et $x''_{\alpha} = \frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}} \alpha''$ où $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2r})$, $\alpha'' = (\alpha_{2r+1}, \dots, \alpha_n)$ conformément à la convention déjà énoncée.

Soit $I_{k,\ell}$ (resp. $I'_{k,\ell}$) l'ensemble des indices $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ tels que $\Pi_{k,\ell,\alpha} \subset \Omega$ (resp. $\Pi'_{k,\ell,\alpha} \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$). Il existe une partition de l'unité $\sum_{\alpha \in I'_{k,\ell}} \psi_{k,\ell,\alpha}^2 \equiv 1$ sur $\bar{\Omega}$, avec $\text{supp } \psi_{k,\ell,\alpha} \subset \Pi'_{k,\ell,\alpha}$ et

$$|\text{d}\psi_{k,\ell}|_{k,\ell}^2 = \sup_{\Omega} \sum_{\alpha \in I'_{k,\ell}} |\text{d}\psi_{k,\ell,\alpha}|_{k,\ell}^2 \leq C_{15} r_{k,\ell}^{-1} \longrightarrow 0.$$

Posons

$$\Omega_{k,\ell} = \bigcup_{\alpha \in I_{k,\ell}} \Pi_{k,\ell,\alpha}$$

et

$$\Omega'_{k,\ell} = \bigcup_{\alpha \in I'_{k,\ell}} \Pi'_{k,\ell,\alpha}$$

On définit pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ les fonctions définies sur \mathbb{R}^n par

$$f_{k,\ell} = \sum_{\alpha \in I_{k,\ell}} N_{\Pi_{k,\ell,\alpha},k,\ell}(\lambda) \frac{1}{\text{Vol}_{k,\ell}(\Pi_{k,\ell,\alpha})} \mathbf{1}_{\Pi_{k,\ell,\alpha}}$$

$$f'_{k,\ell} = \sum_{\alpha \in I'_{k,\ell}} N_{\Pi'_{k,\ell,\alpha},k,\ell}(\lambda + |\text{d}\psi_{k,\ell}|_{k,\ell}^2) \frac{1}{\text{Vol}_{k,\ell}(\Pi'_{k,\ell,\alpha})} \mathbf{1}_{\Pi_{k,\ell,\alpha}}.$$

Le Lemme 3.3 implique l'encadrement:

$$(3.10) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_{k,\ell} \text{d}\sigma_{k,\ell} \leq N_{\Omega,k,\ell}(\lambda) \leq \int_{\mathbb{R}^n} f'_{k,\ell} \text{d}\sigma_{k,\ell}.$$

Si $x \in \Omega$ est un point n'appartenant pas à l'ensemble négligeable $Z = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}^n, k,\ell \in \mathbb{N}} \partial \Pi_{k,\ell,\alpha}$, il existe une suite unique d'indices $\alpha_{k,\ell}$ tels que $x \in \Pi_{k,\ell,\alpha_{k,\ell}}$.

La Proposition 3.6 appliquée à la suite de cubes $P_{k,\ell} = \Pi_{k,\ell,\alpha_{k,\ell}}$, $P'_{k,\ell} = \Pi'_{k,\ell,\alpha_{k,\ell}}$ où $\text{Vol}_{k,\ell}(P_{k,\ell}) \sim \text{Vol}_{k,\ell}(P'_{k,\ell})$ montre que les suites ponctuelles

$$(3.11) \quad f_{k,\ell}(x) = \frac{N_{P_{k,\ell},k,\ell}(\lambda)}{\text{Vol}_{k,\ell}(P_{k,\ell})} \text{ et } f'_{k,\ell}(x) = \frac{N_{P'_{k,\ell},k,\ell}(\lambda + |\text{d}\psi_{k,\ell}|_{k,\ell}^2)}{\text{Vol}_{k,\ell}(P'_{k,\ell})}$$

sont telles que

$$(3.12) \quad \liminf_{k,\ell} f_{k,\ell}(x) \geq \nu_{\Gamma}(V(x) + \lambda) \mathbf{1}_{\Omega}(x)$$

et

$$\limsup_{k,\ell} f'_{k,\ell}(x) \leq \bar{\nu}_{\Gamma}(V(x) + \lambda) \mathbf{1}_{\bar{\Omega}}(x).$$

Ceci car $r'_{k,\ell} \sim r_{k,\ell}$ vérifie les hypothèses de la Proposition 3.6 dès que $\ell = o(k)$. Le Théorème 3.1 découle alors du théorème de la convergence dominée appliqué aux inégalités (3.10)–(3.12) grâce à la majoration donnée par la Proposition 3.6:

$$f_{k,\ell} \leq f'_{k,\ell} \leq C_{\bar{\Omega}}(1 + \sqrt{\lambda_+ + C_{14}})^n \quad \square$$

La fonction $\lambda \rightarrow \int_{\Omega} \nu_{\Gamma}(\lambda + V) d\sigma$ est croissante. Elle admet donc un ensemble au plus dénombrable de discontinuités. Soit \mathcal{D} l'ensemble de ces discontinuités. Si $\partial\Omega$ est de mesure nulle, on a donc:

COROLLAIRE 3.13. Si $\ell \rightarrow +\infty$, $\ell/k \rightarrow +\infty$, alors

$$\lim_{\ell, k \rightarrow +\infty} \frac{1}{N_{\Omega, k, \ell}(\lambda)} \int_{\Omega} \nu_{\Gamma}(V + \lambda) d\sigma_{k, \ell} = 1 \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}.$$

IV. - Démonstration du Théorème 0.1 et du Corollaire 0.2

Nous nous replaçons dans la situation du Paragraphe I, et nous allons maintenant tirer les conséquences de la Proposition 1.8 et du Théorème 3.1: nous avons l'équivalent suivant:

PROPOSITION 4.1. Soient V_j , $j = 1, \dots, N$ les valeurs propres de l'endomorphisme de $\Lambda^{0,q}T^*X \otimes G(k, \ell)$ défini par $V_{k, \ell}$ dans la métrique $\omega_{k, \ell}$. Soit $\gamma_{k, \ell}$ la courbure de la connexion $\nabla_{k, \ell}$, alors, si $\delta_{k, \ell}^q(\lambda)$ désigne le nombre de valeurs propres $\leq \lambda$ de la forme quadratique $Q_X(u) = \int_X (|\nabla_{k, \ell} u|^2 - \langle V_{k, \ell} u, u \rangle) d\sigma_{k, \ell}$, on a

$$\begin{aligned} k^{-r} \ell^{r-n} \sum_{j=1}^N \int_X \nu_{\gamma}(V_j + \lambda) d\sigma_{k, \ell} &\leq \liminf_{k, \ell} k^{-r} \ell^{r-n} \delta_{k, \ell}^s(\lambda) \\ &\leq \limsup_{k, \ell} k^{-r} \ell^{r-n} \delta_{k, \ell}^q(\lambda) \leq k^{-r} \ell^{r-n} \sum_{j=1}^N \int_X \bar{\nu}_{\gamma}(V_j + \lambda) d\sigma_{k, \ell}. \end{aligned}$$

En effet, si $\{u_j, j = 1, \dots, N\}$ est la famille des coordonnées de u dans une base de sections propres de $\Lambda^{0,q}T^*X \otimes G(k, \ell)$ pour $V_{k, \ell}$, on a:

$$Q_X(u) = \sum_{j=1}^N \int_X (|\nabla_{k, \ell} u_j|^2 - V_j |y_j|^2) d\sigma = \sum_{j=1}^N Q_{X, j}(u)$$

si bien que Q_X est somme directe de N formes quadratiques du type considéré au Paragraphe 3. La Proposition 4.1 provient alors du fait que le spectre de

Q_X est la réunion disjointe de chacun des spectres des $Q_{X,j}$, auxquelles on peut appliquer le Théorème 3.1 car les termes de courbures associés sont $\gamma_{k,\ell} + ic_{\nabla}(\Lambda^{0,q}T^*X \otimes G)$ où le deuxième terme (la courbure de $\Lambda^{0,q}T^*X \otimes G$ pour la connexion ∇) tend vers 0 en norme dans la métrique $\omega_{k,\ell}$.

Soit $x \in X$, nous pouvons prendre des coordonnées locales (z_j) sur X au voisinage de x telles que, au point x , on ait:

$$\omega_{k,\ell} = k \frac{i}{2} \sum_{j=1}^r dz_j \wedge d\bar{z}_j + \ell \frac{i}{2} \sum_{j=r+1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j$$

et

$$\gamma_{k,\ell} = k \frac{i}{2} \sum_{j=1}^r \alpha_j dz_j \wedge d\bar{z}_j + \ell \frac{i}{2} \sum_{j=r+1}^n \alpha_j dz_j \wedge d\bar{z}_j.$$

Les valeurs propres de la forme $\gamma_{k,\ell}$ sont donc indépendantes de k et ℓ , et égales à celles de la forme γ définie dans l'introduction.

Soit $f_e, e = 1, \dots, g$, une base de G . Au voisinage de x , une (p, q) -forme à valeurs dans $G(k, \ell)$ s'écrit:

$$u = \sum_{\substack{|I|=p, |J|=q \\ 1 \leq e \leq g}} u_{I,J,e} dz_I \wedge d\bar{z}_J \otimes f_e.$$

Soit $\alpha_J = \sum_{j \in J} \alpha_j$ et $\bar{\alpha}_J = (\alpha_{CJ} - \alpha_J)$. Un calcul direct donne:

$$\langle [\gamma, \Lambda]u, u \rangle = 2^{p+q} \sum_{I,J,e} \left(\alpha_I + \alpha_J - \sum_{j=1}^n \alpha_j \right) |u_{I,J,e}|^2$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont les r valeurs propres non nulles de $ic(E)_x$ donc $\left(\frac{i}{2\pi}c(E)\right)^r = \frac{r!}{(2\pi)^r} \alpha_1 \dots \alpha_r dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_r \wedge d\bar{z}_r$ et $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$ sont les valeurs propres de $ic(F)|_{NY}$, si bien que

$$\begin{aligned} \left(\frac{i}{2\pi}c(E)\right)^r \wedge \left(\frac{i}{2\pi}c(F)\right)^{n-r} &= \left(\frac{i}{2\pi}c(E)\right)^r \wedge \left(\frac{i}{2\pi}c(F)|_{TY}\right)^{n-r} \\ &= r!(n-r)! \bar{\nu}_\gamma(\bar{\alpha}'_J) \frac{d\sigma_{k,\ell}}{k^r \ell^{n-r}} \end{aligned}$$

Démonstration du Corollaire 0.2. Supposons qu'il existe un feuilletage Y de X , de codimension $r \leq n - 1$, tel que $c(E)|_{TY} = 0$ (le cas $r = n$ est sans intérêt puisque nous n'obtenons pas dans ce cas la précision du théorème initial de Demailly [De1]).

Soit $F = \mathbb{C}$ muni d'une métrique constante, donc $c(F) \equiv 0$. Notons $[\alpha]$ la partie entière du réel positif α , et raisonnons par l'absurde.

Soit $\ell_k = \left\lceil \left(\frac{\dim H^q(X, E^k \otimes G)}{k^r} \right)^{1/n-r} \right\rceil$. Si cette quantité n'était pas bornée, il existerait une sous-suite notée encore ℓ_k tendant vers $+\infty$. On aurait alors

$$\left(\frac{\ell_k}{k} \right)^{n-r} \leq \frac{\dim H^q(X, E^k \otimes G)}{k^n} = o(1) \quad \text{car } c(E)^n = 0$$

d'après le Théorème 0.1, avec $r = n$ et $F = \mathbb{C}$ (théorème de Demailly). On peut donc appliquer le Théorème 0.1 a) aux fibrés E et F , d'où:

$$1 \leq \lim_{k, \ell_k \rightarrow +\infty} \frac{\dim H^q(X, E^k \otimes F^{\ell_k} \otimes G)}{k^r \ell_k^{n-r}} = 0. \quad \square$$

Pour finir, nous désirons donner une application simple du Théorème 0.1.

THÉORÈME 4.4. *Si E est un fibré en droites holomorphe dont la fibration noyau de la courbure est bien feuilletée de codimension r ; si F est un fibré dont la dimension de Kodaira est supérieure à $r + 1$, il existe une infinité de puissances tensorielles du faisceau quotient Q de E par F qui admettent des sections non triviales.*

Démonstration. Rappelons que la dimension de Kodaira du fibré F peut être définie par $\kappa(F) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} (\text{Log } \dim H^0(X, F^k) / \text{Log } k)$. La suite exacte

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

induit en prenant une puissance tensorielle de la première flèche une suite exacte

$$0 \longrightarrow E^k \longrightarrow F^k \longrightarrow Q^k \longrightarrow 0.$$

Le Théorème 4.4 est une conséquence immédiate du Corollaire 0.2 et de la suite exacte longue de cohomologie associée.

Note sur épreuves. Les estimations de la troisième partie conduisent à un équivalent pour le noyau de la chaleur associé à la forme $Q_{k,\ell}$ sous les hypothèses du Théorème 0.1. Nous développons ceci dans un article achevé récemment (la méthode est celle de [Bo1], la principale différence résidant dans l'utilisation d'une majoration uniforme du noyau de la chaleur riemannien à la place d'un simple équivalent pour t voisin de 0). On obtient de cette façon une constante effective sinon optimale pour le Corollaire 0.2 (cf. [Bo2]).

BIBLIOGRAPHIE

- [Bi] J.-M. BISMUT, *Demailly's asymptotic inequalities: a heat equation proof*, J. Funct. Anal. **72** (1987), 263–278.
- [Bo] R. BOTT, *Nondegenerate critical manifolds*, Ann. of Math. **60** (1954) 248–251.
- [Bo1] TH. BOUCHE, *Convergence de la métrique de Fubini-Study d'un fibré linéaire positif*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) (1) **40** (1990), 117–130.
- [Bo2] TH. BOUCHE, *Noyau de la chaleur et inégalités de Morse holomorphes pour un fibré en droites à courbure dégénérée*, à paraître au Bull. Sci. Math.
- [De1] J.-P. DEMAILLY, *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d^c -cohomologie*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **35** (1985), 189–229.
- [De2] J.-P. DEMAILLY, *Sur l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano en géométrie hermitienne*, Séminaire P. Lelong, P. Dolbeault, H. Skoda (Analyse), 1983/84, Lecture Notes in Math. Springer **1295** (1987), 48–58.
- [Wi] E. WITTEN, *Supersymmetry and Morse Theory*, J. Differential Geom. **17** (1982), 661–692.

Institut Fourier
Université de Grenoble I
B.P. 74
38402 St. Martin D'Hères Cedex
France