

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

HELLA KHALGUI-OUNAIES

Unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs quasi-homogènes

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 15, n° 4 (1988), p. 567-582

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1988_4_15_4_567_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs quasi-homogènes

HELLA KHALGUI-OUNAIES

0. - Introduction

L'étude de l'unicité des problèmes de Cauchy linéaires a fait l'objet de plusieurs travaux, dont une bonne partie est citée par Zuily [7].

Ainsi Hörmander [2, Chap. 8] a montré que moyennant une condition de pseudo-convexité, qui correspond au signe de certaines dérivées secondes de l'équation de l'hypersurface S calculées aux zéros réels et complexes du symbole principal de l'opérateur \mathbf{P} , on a unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs de type principal.

Lerner-Robbiano [6] se sont intéressés à l'unicité compacte des solutions du problème de Cauchy d'opérateurs différentiels \mathbf{P} , en faisant intervenir uniquement le symbole principal de \mathbf{P} et certaines propriétés de faible pseudo-convexité de l'hypersurface.

Ce problème a été traité de façon plus fine par Hörmander [3].

Etant donné un opérateur \mathbf{P} et une hypersurface S orientée. On dira que \mathbf{P} possède l'unicité de Cauchy compacte par rapport à

$$S = \{(y, x); \varphi(y, x) = \varphi(y_0, x_0)\},$$
$$d_x \varphi(y_0, x_0) \neq 0 \text{ en } (y_0, x_0),$$

s'il existe un voisinage V de (y_0, x_0) tel que, pour tout voisinage W de (y_0, x_0) inclus dans V et pour tout $u \in C^\infty(W)$ vérifiant

$$\mathbf{P}u = 0 \text{ sur } W,$$
$$\text{supp } u \subset \{(y, x); \varphi(y, x) \leq \varphi(y_0, x_0)\},$$
$$\{\text{supp } u\} \cap S \subset W \text{ (compact inclus dans } W),$$

on ait

$$u \equiv 0.$$

Pervenuto alla Redazione il 25 Luglio 1987 e in forma definitiva il 25 Luglio 1988.

Dans ce travail, on s'intéresse plus particulièrement aux opérateurs du type Schrödinger:

$$(0.1) \quad \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x, y) D_x^\alpha + C(x, y) D_y, \text{ avec } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Lascar-Zuily montrent que ces opérateurs admettent l'unicité locale au voisinage d'un point (y_0, x_0) relativement à une hypersurface S non caractéristique si S vérifie une condition de pseudo-convexité quasi-homogène par rapport aux bicaractéristiques de \mathbf{P} issues de (y_0, x_0) .

Dans ce papier on définit la faible pseudo-convexité quasi-homogène, puis on montre des résultats d'unicité compacte pour des opérateurs du type (0.1) relativement à des hypersurfaces vérifiant des conditions de faible pseudo-convexité quasi-homogène [cf. Theo. 2.1].

Des contre-exemples soulignant l'optimalité des résultats ont été obtenus par Lascar-Zuily [5]. Des résultats voisins ont été montrés par Isakov [4] et Alinhac [1]. Les méthodes utilisées sont celles de Hörmander [3].

1. - Notion de pseudo-convexité

Dans ce paragraphe nous précisons les notations pour définir la faible pseudo-convexité quasi-homogène.

1.1. - Notations et définitions

Soit $X \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n$; soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $m = (m_1, \dots, m_n)$ des multi-indices tels que $0 < m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_{q-1} < m_q = \dots = m_n$; on notera

$$|\alpha : m| = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{m_i} \text{ et } D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} \text{ où } D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

(1.1) Soit $\mathbf{P}(x, D) = \sum_{|\alpha: m| \leq 1} a_\alpha(x) D^\alpha$ un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients a_α réels, on désigne par $\mathbf{p}(x, \xi) = \sum_{|\alpha: m| \leq 1} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ son symbole totale.

DÉFINITION 1.1. La m -partie principale de \mathbf{P} est définie par

$$\mathbf{P}_0(x, D) = \sum_{|\alpha: m|=1} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

DÉFINITION 1.2. Si f et g sont deux fonctions régulières définies sur

$\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$, le crochet de Poisson quasi-homogène de f, g est défini par

$$\{f, g\}_0 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial \xi_j}.$$

Soit φ une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , on note

$$\nabla_q \varphi = (0, \dots, 0, \varphi_{x_1}, \dots, \varphi_{x_n}), \text{ où } \varphi_{x_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}.$$

Π désignera la projection canonique

$$\begin{aligned} T^* \Omega &\longrightarrow \Omega \\ (x, \xi) &\longrightarrow x \end{aligned}$$

où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n .

DÉFINITION 1.3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n, x_0 \in \Omega$. Soit $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ tel que $\nabla_q \varphi(x_0) \neq 0$. L'hypersurface

$$S = \{\varphi(x) = \varphi(x_0)\}$$

est dite faiblement pseudo-convexe par rapport aux bicaractéristiques de \mathbf{P} (défini en (1.1)) en x_0 si

- i) elle est non caractéristique,
- ii) pour tout $z_0 \in T^* \Omega \setminus \{0\}$ tel que $\Pi(z_0) = x_0$, si $\mathbf{p}_0(z_0) = \{\mathbf{p}, \varphi\}_0(z_0) = 0$, alors

$$\{\mathbf{p}, \{\mathbf{p}, \varphi\}_0\}_0(z_0) \geq 0.$$

1.2. - Exemples

Dans les coordonnées $(y, x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ supposons que:

$$\mathbf{P} = D_t^2 + \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(y, x, t) D_x^\alpha + C(y, x, t) D_y,$$

avec $z_0 = (y_0, x_0, t_0)$ et $S = \{(y, x, t) : t = 0\}$. Dans ce cas nous avons $m = (1, 2, \dots, 2)$,

$$\mathbf{P}_0(y, x, t, D_y, D_x, D_t) = D_t^2 + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(y, x, t) D_x^\alpha + C(y, x, t) D_y,$$

le symbole associé étant

$$\mathbf{p}_0(z, \eta, \xi, \tau) = \tau^2 + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(z) \xi^\alpha + C(z) \eta,$$

où $z = (y, x, t)$.

Il est évident que

$$\{\mathbf{p}_0, \varphi\}_0(z_0) = 2\tau,$$

$$\{\mathbf{p}_0, \{\mathbf{p}_0, \varphi\}_0\}_0(z_0) = -2 \left(\sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial a_\alpha}{\partial t}(z_0) \xi^\alpha - \frac{\partial C}{\partial t}(z_0) \eta \right);$$

donc la faible pseudo-convexité s'exprime par

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(z_0) \xi^\alpha + C(z_0) = 0 \text{ implique } - \sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial a_\alpha}{\partial t}(z_0) \xi^\alpha - \frac{\partial C}{\partial t}(z_0) \eta \geq 0.$$

2. - Enoncé du résultat

THÉORÈME 2.1. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^{n+1} , $(y_0, x_0) \in \Omega$ et \mathbf{P} un opérateur différentiel de la forme

$$\mathbf{P} = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(y, x) D_x^\alpha + C(y, x) D_y.$$

On suppose que:

(H.1) $a_\alpha, |\alpha| = 2$, et C sont dans $C^\infty(\Omega)$ et $a_\alpha, |\alpha| < 2$, sont bornés;

(H.2) $C(y_0, x_0) \neq 0$;

(H.3) soit $\mathbf{p}(y, x, \xi) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(y, x) \xi^\alpha$, alors pour tout $\xi \neq 0$, $d_\xi \mathbf{p}(y_0, x_0, \xi) \neq 0$.

(H.4) Soit $S = \{\Psi(y, x) = \Psi(y_0, x_0)\}$ une hypersurface faiblement pseudo-convexe par rapport aux bicaractéristiques de \mathbf{P} i.e: pour tout $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, si

$$\mathbf{p}_0(y, x, \eta, \xi) = \{\mathbf{p}_0, \Psi\}_0(y, x, \eta, \xi) = (\Psi(y, x) - \Psi(y_0, x_0)) = 0,$$

alors

$$\{\mathbf{p}_0, \{\mathbf{p}_0, \Psi\}_0\}_0(y, x, \eta, \xi) \geq 0,$$

où \mathbf{p}_0 est le m -symbole principal de \mathbf{P} , $m = (1, 2, \dots, 2)$. Alors, sous les hypothèses (H.1), (H.2), (H.3) et (H.4), \mathbf{P} admet l'unicité compacte par rapport à S .

EXEMPLES 2.2. Les opérateurs suivant satisfont les hypothèses du théorème avec $S = \{t = 0\}$, $(y_0, x_0) = (0, 0) \in \mathbb{R}^4$:

$$1) \mathbf{P} = D_t^2 - tx_1^2 D_{x_1}^2 + D_{x_2} D_{x_1} - (1 + \beta t^2) D_y$$

$$2) \mathbf{P} = D_t^2 - D_{x_1} D_{x_2} - t(x_1^2 + x_2^2)(D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2) - D_y.$$

3. - Preuve du théorème

Puisque $(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial x_n})(y_0, x_0) \neq (0, \dots, 0)$, on peut supposer sans perte de généralité $\frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \neq 0$, ainsi dans les coordonnées $(X, Y, T) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, où $X_1 = x_1 - (x_0)_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1} - (x_0)_{n-1}, T = \Psi(x) - \Psi(x_0), Y = y$. Le problème se ramène au voisinage de l'origine et par rapport à une hypersurface définie par $\{T = 0\}$.

Posons

$$z = f(Y, X, T), \quad t = T, \quad y' = Y,$$

où f est une fonction de \mathbb{R}^{n+1} vers \mathbb{R}^{n-1} en explicitant l'opérateur \mathbf{P} dans ces nouvelles variables, il est facile de voir qu'avec un bon choix de la fonction f , \mathbf{P} peut s'écrire sous la forme suivante:

$$(3.1) \quad D_t^2 - a(y', z, t, D_z) - C(y', z, t)D_{y'}$$

avec

- i) $a(y', z, t, \xi)$ forme quadratique,
- ii) $C(0, 0, 0) \neq 0$ et $S = \{t = 0\}$.

Le crochet de Poisson étant invariant par changement de coordonnées, fixant les variables quasi-homogènes [4], la condition de faible pseudo-convexité demeure vraie dans les coordonnées (y', z, t) et s'exprime par:

$$(3.2) \quad \frac{\partial a}{\partial t}(y', z, 0, \xi) + \frac{\partial C}{\partial t}(y', z, 0)\eta \geq 0, \text{ dés que } \\ a(y', z, 0, \xi) + C(y', z, 0)\eta = 0, \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Dans la suite nous écrivons (y, x, t) au lieu de (y', z, t) .

3.1. - 1^{ere} étape

Dans un premier temps, nous supposons que la faible pseudo-convexité n'est pas seulement vérifiée sur l'hypersurface mais dans

$$\{(x, y, t) : t \leq 0\} \cap \{\text{un voisinage de l'origine}\}.$$

Soit $X = \{(y, x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } -\frac{1}{2} < t < 0 \text{ et } |x| + |y| < 1\}$.

On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout (y, x, t) dans εX on a $\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial t}\eta \geq 0$ dés que $a(y, x, t, \xi) + C(y, x, t)\eta = 0$.

Par hypothèse $C(0, 0, 0) \neq 0$, donc il existe W voisinage de l'origine tel que pour tout (y, x, t) dans W on a $C(y, x, t) \neq 0$ et, par suite, en posant

$$g(y, x, t, \xi) = -\frac{a(y, x, t, \xi)}{C(y, x, t)},$$

on obtient

$$(3.3) \quad a(y, x, t, \xi) + C(y, x, t)g(y, x, t, \xi) = 0, \quad (y, x, t) \in W.$$

Soit $\varepsilon_1 > 0$ tel que $\varepsilon_1 X \subset W \cap \varepsilon X$; ainsi pour tout élément de $\varepsilon_1 X$, (3.3) est vérifiée, d'où la faible pseudo-convexité entraîne

$$\forall (y, x, t) \in \varepsilon_1 X, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$$

on a

$$(3.4) \quad a'_t(y, x, t, \xi) - \frac{C'_t(y, x, t)}{C(y, x, t)} a(y, x, t, \xi) \geq 0$$

(ε_1 sera noté dans la suite par abus ε).

\mathbf{P} étant de type principal, d'après (H.3) on a

$$(3.5) \quad \frac{\partial a}{\partial \xi}(0, 0, 0, \xi) \neq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}.$$

Nous allons d'abord montrer l'inégalité de Carleman suivante:

PROPOSITION 3.1. Soit $\varphi = t + \frac{t^2}{2}$ la fonction définie dans X . Alors il existe $\sigma_0 > 0, \varepsilon > 0, c > 0$, tel que pour tout $\sigma \geq \sigma_0$ et pour tout u dans $C^\infty(X)$ on a:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n-1} \int \int \int e^{2\sigma\varphi} |D_x u|^2 dy dx dt + \sigma \int \int \int e^{2\sigma\varphi} |D_t u|^2 dy dx dt \\ & + \sigma^3 \int \int \int e^{2\sigma\varphi} |u|^2 dy dx dt \\ & \leq C \int \int \int e^{2\sigma\varphi} |\mathbf{p}_0(\varepsilon^2 y, \varepsilon x, \varepsilon t, D_y, D_x, D_t) u|^2 dy dx dt. \end{aligned}$$

PREUVE. En posant $V = e^{\sigma\varphi} u$ on remarque que l'inégalité (3.6) découle de l'inégalité suivante:

$$(3.7) \quad \sigma^3 \|V\|^2 + \sigma \|D_t V\|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \|D_j V\|^2 \leq C^{te} \|\mathbf{P}_\sigma V\|^2,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme dans $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ et

$$\mathbf{P}_\sigma = (D_t + i\sigma\varphi')^2 - a(\varepsilon^2 y, \varepsilon x, \varepsilon t, D_x) - C(\varepsilon^2 y, \varepsilon x, \varepsilon t) D_y.$$

Posons

$$\begin{aligned} T &= D_t + i\sigma\varphi', \\ A &= a(\varepsilon^2 y, \varepsilon x, \varepsilon t, D_x), \\ R &= C(\varepsilon^2 y, \varepsilon x, \varepsilon t) D_y, \end{aligned}$$

on a

$$(3.8) \quad \|\mathbf{P}_\sigma V\|^2 = \|\mathbf{P}_\sigma^* V\|^2 + \langle [\mathbf{P}_\sigma^*, \mathbf{P}_\sigma] V, V \rangle;$$

calculons le crochet $[\mathbf{P}_\sigma^*, \mathbf{P}_\sigma]$,

$$(3.9) \quad \begin{aligned} [\mathbf{P}_\sigma^*, \mathbf{P}_\sigma] &= [T^{*2} - A^* - R^*, T^2 - A - R] \\ &= [T^{*2}, T^2] + ([T^2, A^*] - [T^{*2}, A]) + ([T^2, R^*] - [T^{*2}, R]) \\ &\quad + [A^*, A] + [R^*, R] + ([A^*, R] - [A, R^*]). \end{aligned}$$

Posons (1) = $[T^{*2}, T^2]$, (2) = $([T^2, A^*] - [T^{*2}, A])$, (3) = $([T^2, R^*] - [T^{*2}, R])$,
 (4) = $[A^*, A]$, (5) = $[R^*, R]$, (6) = $([A^*, R] - [A, R^*])$.

(1). On a

$$(3.10) \quad [T^*, T] = 2\sigma$$

d'où

$$[T^{*2}, T^2] = 4\sigma(T^*T + TT^*).$$

(2). On a

$$(3.11) \quad \begin{aligned} T^{*2} - T^2 &= (T^* - T)(T^* + T) - [T^*, T] \\ &= -4i\sigma\varphi' D_t - 2\sigma, \end{aligned}$$

d'où $T^{*2} = T^2 - 4i\sigma\varphi' D_t - 2\sigma$; on en déduit

$$(3.12) \quad (2) = [T^2, A^* - A] + [4i\sigma\varphi' D_t, A] + [2\sigma, A],$$

$[2\sigma, A] = 0$, or

$$[T^2, A^* - A] = T[T, A^* - A] + [T, A^* - A]T$$

et

$$(3.13) \quad [T, A^* - A] = [D_t, A^* - A]$$

est un opérateur différentiel en D_x d'ordre un à coefficients $O(\varepsilon^2)$

$$(3.14) \quad [4i\sigma\varphi' D_t, A] = 4\sigma\varphi' \varepsilon \frac{\partial A}{\partial t}.$$

(3). De l'identité (3.11) on tire que

$$(3) = T[T, R^* - R] + [T, R^* - R]T + [4i\sigma\varphi' D_t, R]$$

or

$$(3.15) \quad [T, R^* - R]$$

est un opérateur différentiel d'ordre zéro à coefficients $O(\varepsilon^2)$ et

$$(3.16) \quad [4i\sigma\varphi'D_t, R] = 4\sigma\varphi'\varepsilon\frac{\partial R}{\partial t}.$$

$$(3.17) \quad (4) = [A^* - A, A]$$

est un opérateur d'ordre deux en D_x à coefficients $O(\varepsilon^2)$.

$$(3.18) \quad (5) = [R^* - R, R]$$

est un opérateur d'ordre zéro à coefficients $O(\varepsilon^2)$.

$$(3.19) \quad (6) = [A^* - A, R] + [A, R - R^*]$$

et $[A^* - A, R]$ est un opérateur du premier ordre en D_x, D_y à coefficients $O(\varepsilon^2)$;

$[A, R^* - R]$ est un opérateur du premier ordre en D_x à coefficients $O(\varepsilon^2)$.

Des expressions (3.8) à (3.19) on déduit

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{P}_\sigma V\|^2 &= \|\mathbf{P}_\sigma^* V\|^2 + 4\sigma(\|TV\|^2 + \|T^*V\|^2) + \langle [T, A^* - A]V, T^*V \rangle \\ &+ \langle TV, [A - A^*, T^*]V \rangle + 4\sigma\varepsilon \langle \varphi' \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial t} \right) V, V \rangle \\ &+ \langle [T, R^* - R]V, T^*V \rangle + \langle TV, [R - R^*, T^*]V \rangle \\ &+ \langle [A^* - A, A]V, V \rangle + \langle [R^* - R, R]V, V \rangle \\ &+ \langle [A^* - A, R]V, V \rangle + \langle [A, R - R^*]V, V \rangle. \end{aligned}$$

DÉFINITION 3.2. Pour toute fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ on notera

$$\|u\|_{0,s,0} = \int \int \int (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}(y, \xi, t) dy d\xi dt,$$

où ξ est la variable duale de x dans \mathbb{R}^{n-1} .

De l'expression (3.13) on déduit

$$(3.21) \quad \begin{aligned} |\langle [T, A^* - A]V, T^*V \rangle| &\leq C^{te} \varepsilon^2 \|V\|_{0,1,0} \|T^*V\| \\ &\leq C^{te} (\varepsilon \|V\|_{0,1,0}^2 + \varepsilon^3 \|T^*V\|^2) \end{aligned}$$

et

$$(3.22) \quad \begin{aligned} | \langle TV, [A - A^*, T^*]V \rangle &\leq C^{te} \varepsilon^2 \|TV\| \|V\|_{0.1.0} \\ &\leq C^{te} (\varepsilon^3 \|TV\|^2 + \varepsilon \|V\|_{0.1.0}^2). \end{aligned}$$

De l'identité (3.15) on tire

$$(3.23) \quad \begin{aligned} | \langle [T, R^* - R]V, T^*V \rangle | &\leq C^{te} \varepsilon^2 \|V\| \|T^*V\| \\ &\leq C^{te} (\varepsilon \|V\|^2 + \varepsilon^3 \|T^*V\|^2) \end{aligned}$$

et

$$(3.24) \quad \begin{aligned} | \langle TV, [R - R^*, T^*]V \rangle | &\leq C^{te} \varepsilon^2 \|V\| \|TV\| \\ &\leq C^{te} (\varepsilon \|V\|^2 + \varepsilon^3 \|T^*V\|^2). \end{aligned}$$

De l'égalité (3.17) on obtient

$$(3.15) \quad | \langle [A^* - A, A]V, V \rangle | \leq C^{te} \varepsilon^2 \|V\|_{(0,1.0)}^2.$$

De (3.18) on déduit

$$(3.26) \quad | \langle [R^* - R, R]V, V \rangle | \leq C^{te} \varepsilon^2 \|V\|^2.$$

De (3.19) on tire

$$(3.27) \quad | \langle [A, R - R^*]V, V \rangle | \leq C^{te} \varepsilon^2 \|V\|_{0.1.0}^2.$$

$[A^* - A, R]$ étant un opérateur du premier ordre en D_x et D_y à coefficients $O(\varepsilon^2)$ il nous faut estimer une expression du type $\langle \alpha D_y V, V \rangle$ où α est une fonction C^∞ au voisinage de $(0, 0, 0)$.

On a

$$(3.28) \quad -2CDy = P_\sigma + P_\sigma^* - T^2 - T^{*2} + 2a + R_2$$

où R_2 est la somme d'un opérateur en D_x d'ordre un à coefficients $O(\varepsilon)$ et un opérateur d'ordre zéro à coefficients $O(\varepsilon^2)$. Comme $C(0, 0, 0) \neq 0$ on peut écrire

$$(3.29) \quad \begin{aligned} \langle \alpha D_y V, V \rangle &= \langle -\frac{\alpha}{2C} P_\sigma V, V \rangle - \langle \frac{\alpha}{2C} P_\sigma^* V, V \rangle \\ &\quad + \langle \frac{\alpha}{2C} (T^2 + T^{*2}) V, V \rangle \\ &\quad - \langle \frac{\alpha}{C} a V, V \rangle - \langle \frac{R_2 \alpha}{2c} V, V \rangle. \end{aligned}$$

On a

$$(3.30) \quad T^2 + T^{*2} = 2(D_t^2 - \sigma^2 \varphi'^2),$$

d'où

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\alpha}{C} (T^2 + T^{*2}) V, V \right\rangle = \left\langle \frac{\alpha}{C} D_t^2 V, V \right\rangle - \sigma^2 \left\langle \frac{\alpha}{C} \varphi'^2 V, V \right\rangle, \\ & \left\langle \frac{\alpha}{C} D_t^2 V, V \right\rangle = \left\langle D_t V, \varepsilon D_t \left(\frac{\alpha}{C} \right) V \right\rangle + \left\langle D_t V, \frac{\alpha}{C} D_t V \right\rangle, \end{aligned}$$

d'où

$$(3.31) \quad \left\langle \frac{\alpha}{C} D_t^2 V, V \right\rangle \leq C^{te} (\|D_t V\|^2 + \varepsilon^2 \|V\|^2).$$

Des expressions (3.28) à (3.31) on tire

$$(3.32) \quad \left| \left\langle \alpha D_y V, V \right\rangle \right| \leq C^{te} (\|P_\sigma V\| + \|P_\sigma^* V\|) \|V\| \\ + \sigma \|V\|^2 + \|V\|_{0,1,0}^2 + \|D_t V\|^2.$$

Ainsi (3.19) et (3.32) impliquent

$$(3.33) \quad \left\langle [A^* - A, R] V, V \right\rangle \leq C^{te} [\varepsilon^3 \|P_\sigma V\|^2 + \varepsilon^3 \|P_\sigma^* V\|^2 + \varepsilon \sigma \|V\|^2 \\ + \varepsilon \|V\|_{0,1,0}^2 + \varepsilon^2 \|D_t V\|^2].$$

Ainsi des identités (3.20) à (3.33) on déduit

$$(3.34) \quad \|P_\sigma^* V\|^2 + 4\sigma (\|TV\|^2 + \|T^* V\|^2) \\ + 4\varepsilon \operatorname{Re} \left\langle \sigma \varphi' \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial t} \right) V, V \right\rangle \\ \leq C^{te} (\|P_\sigma V\|^2 + \varepsilon \|V\|_{0,1,0}^2 + \varepsilon \sigma^2 \|V\|^2 + \varepsilon^2 \|D_t V\|^2),$$

or $T + T^* = 2D_t$ d'où

$$(3.35) \quad \|D_t V\|^2 \leq C^{te} (\|TV\|^2 + \|T^* V\|^2)$$

et $T - T^* = 2i\sigma\varphi'$, $\varphi' \geq \frac{1}{2}$, d'où

$$(3.36) \quad \sigma^2 \|V\|^2 \leq C^{te} (\|TV\|^2 + \|T^* V\|^2).$$

On en déduit

$$(3.37) \quad \|P_\sigma^* V\|^2 + 4\sigma (\|TV\|^2 + \|T^* V\|^2) \\ + 4\varepsilon \operatorname{Re} \left\langle \sigma \varphi' \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial t} \right) V, V \right\rangle \\ \leq C^{te} (\|P_\sigma V\|^2 + \varepsilon \|V\|_{0,1,0}^2).$$

Regardons maintenant $\langle \sigma \varphi' \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial t} \right) V, V \rangle$,

$$(3.38) \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial t} D_y.$$

Ainsi de (3.36), (3.37), (3.38) on en déduit

$$(3.40) \quad \begin{aligned} & \|P_\sigma^* v\|^2 + 4\sigma(\|Tv\|^2 + \|T^*v\|^2) \\ & + 4\sigma \varepsilon \operatorname{Re} \langle \varphi' \left(\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial t} D_y \right) v, v \rangle \\ & \leq C t \varepsilon (\|P_\sigma v\|^2 + \varepsilon \|v\|_{0,1,0}^2). \end{aligned}$$

D'après l'expression (3.28) on a

$$(3.41) \quad \begin{aligned} \langle \varphi' C'_t D_y V, V \rangle &= -\frac{1}{2} \langle \varphi' P_\sigma V, \frac{C'_t}{C} V \rangle - \frac{1}{2} \langle \varphi' P_\sigma^* V, \frac{C'_t}{C} V \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \langle (T^2 + T^{*2})V, \frac{\varphi' C'_t}{C} V \rangle - \langle \frac{C'_t}{\varphi' C} a V, V \rangle - \langle \frac{R_2}{2C\varphi' - C'_t} V, V \rangle. \end{aligned}$$

On en déduit

$$(3.42) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} \langle \varphi' \left(\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial t} D_y \right) V, V \rangle &= \operatorname{Re} \langle \varphi' \left(\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{C'_t}{C} a \right) V, V \rangle \\ &- \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \langle \varphi' P_\sigma V, \frac{C'_t}{C} V \rangle - \frac{1}{2} \langle \varphi' P_\sigma^* V, \frac{C'_t}{C} V \rangle \right] \\ &+ \frac{1}{2} \langle (T^2 + T^{*2})V, \frac{\varphi' C'_t}{C} V \rangle - \langle \frac{R_2}{2C\varphi' C'_t} V, V \rangle, \end{aligned}$$

d'où des inégalités (3.30), (3.31), (3.35), (3.36) et (3.42) on conclut que

$$(3.43) \quad \begin{aligned} & \|P_\sigma^* V\|^2 + 4\sigma(\|TV\|^2 + \|T^*V\|^2) \\ & + 4\sigma \varepsilon \operatorname{Re} \langle \varphi' \left(\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{C'_t}{C} a \right) V, V \rangle \\ & \leq C t \varepsilon (\|P_\sigma V\|^2 + \varepsilon \|V\|_{0,1,0}^2). \end{aligned}$$

Le symbole de l'opérateur différentiel $\tilde{A} = \varphi' \left(\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{C'_t}{C} a \right)$ est du second ordre en ξ et dépend uniformément des paramètres (y, t) ; il vérifie

$$\begin{aligned} & \forall (y, x, t) \in X, \forall \xi \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}, \\ & \varphi' \left(\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{C'_t}{C} a \right) (\varepsilon y, \varepsilon x, \varepsilon t, \xi) \geq 0 \end{aligned}$$

d'après (3.4).

D'où d'après l'inégalité de Gårding précisée

$$\operatorname{Re} \langle \tilde{A}V, V \rangle_x + C_1 \|V\|_x^2 \geq 0,$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ et $\|\cdot\|_x$ désigne la norme dans $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Or la constante C_1 ne dépend que des semi-normes de \tilde{A} , on en déduit

$$(3.44) \quad \operatorname{Re} \langle \tilde{A}V, V \rangle \geq -C^{te} \|V\|_{0, \frac{1}{2}, 0}^2.$$

Les expressions (3.43) et (3.44) impliquent

$$(3.45) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{P}_\sigma^* V\|^2 + 4\sigma(\|TV\|^2 + \|T^*V\|^2) \\ \leq C^{te}(\|\mathbf{P}_\sigma V\|^2 + \varepsilon\|V\|_{0,1,0}^2 + \sigma\varepsilon\|V\|_{0, \frac{1}{2}, 0}^2), \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \sigma\varepsilon\|V\|_{0, \frac{1}{2}, 0}^2 &\leq \sigma\varepsilon\|V\|_{0,1,0}\|V\| \\ &\leq \varepsilon\|V\|_{0,1,0}^2 + \sigma^2\varepsilon\|V\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi (3.45) devient

$$(3.46) \quad \|\mathbf{P}_\sigma^* V\|^2 + 4\sigma(\|TV\|^2 + \|T^*V\|^2) \leq C^{te}(\|\mathbf{P}_\sigma V\|^2 + \varepsilon\|V\|_{0,1,0}^2 + \sigma^2\varepsilon\|V\|^2).$$

Estimons $\|V\|_{0,1,0}$; pour cela posons $Q = -x_j a^{(j)}(\varepsilon^2 y, \varepsilon x, \varepsilon t, D_x)$ et calculons

$$(3.47) \quad \frac{1}{i} [(\mathbf{P}_\sigma V, Q^* V) - (QV, \mathbf{P}_\sigma^* V)] = \langle [Q, \mathbf{P}_\sigma]V, V \rangle$$

or

$$[Q, T^2] = T[Q, T] + [Q, T]T$$

et $[Q, T]$ est un opérateur différentiel en D_x d'ordre un d'où

$$|\langle [Q, T^2]V, V \rangle| \leq \varepsilon(\|TV\| + \|T^*V\|)\|V\|_{0,1,0}.$$

$\frac{[Q, -R]}{i}$ est un opérateur différentiel du premier ordre en D_x, D_y à coefficients $O(\varepsilon)$.

D'où en raisonnant comme pour (3.33) on obtient

$$(3.48) \quad \begin{aligned} \langle \frac{[Q, -R]}{i} V, V \rangle \leq C[\varepsilon^2 \|\mathbf{P}_\sigma V\|^2 + \varepsilon^2 \|\mathbf{P}_\sigma^* V\|^2 \\ + \sigma\|V\|^2 + \varepsilon\|V\|_{0,1,0}^2 + \varepsilon\|D_t V\|^2], \end{aligned}$$

$$(3.49) \quad \frac{[Q, -A]}{i} = a^{(j)^2} (\varepsilon^2 y, \varepsilon x, \varepsilon t, \xi) - x_j \{ a^{(j)^2} (\varepsilon^2 y, \varepsilon x, \varepsilon t, \xi), a(\varepsilon^2 y, \varepsilon x, \varepsilon t, \xi) \};$$

le second terme est une forme quadratique en ξ à coefficients $O(\varepsilon)$; le premier terme vérifie $|\xi|^2 \leq C_2 \sum_j a^{(j)^2} (\varepsilon^2 y, \varepsilon x, \varepsilon t, \xi)$, car $d_\xi a \neq 0$; d'où des expressions (3.47), (3.48) et (3.49) on conclut

$$(3.50) \quad \|V\|_{0,1,0}^2 \leq C^{te} [\|P_\sigma V\|^2 + \|P_\sigma^* V\|^2 + \|TV\|^2 + \|T^* V\|^2 + \sigma \|V\|^2 + \varepsilon \|D_t V\|^2].$$

En utilisant (3.35) et (3.36) en déduit

$$\|V\|_{0,1,0}^2 \leq C^{te} [\|P_\sigma V\|^2 + \|P_\sigma^* V\|^2 + \|TV\|^2 + \|T^* V\|^2]$$

et par suite (3.46) devient

$$(3.51) \quad \|P_\sigma^* V\|^2 + 4\sigma (\|TV\|^2 + \|T^* V\|^2) \leq C^{te} \|P_\sigma V\|^2$$

et les expressions (3.35), (3.36) et (3.51) donnent

$$(3.52) \quad \sum_j \|D_j V\|^2 + \sigma \|D_t V\|^2 + \sigma^3 \|V\|^2 \leq C^{te} \|P_\sigma V\|^2.$$

3.2. - 2^{eme} étape

Nous allons montrer que les résultats obtenus dans la précédente étape demeurent vrais si on suppose que la faible pseudo-convexité quasi-homogène est vérifiée seulement sur l'hypersurface.

Pour cela on va démontrer le lemme suivant; dans la suite nous noterons $B = a(y, x, t, \xi) + C(y, x, t)\eta$.

LEMME: Soit P un opérateur différentiel satisfaisant (3.1) et (3.2). Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$(3.45) \quad \frac{\partial B}{\partial t}(y, x, t, \eta, \xi) \geq 0 \text{ si } (y, x, t) \in \varepsilon \bar{X}, t = 0 \text{ et } B(y, x, t, \eta, \xi) = 0, \tau = 0.$$

Posons $\Phi(y, x, t) = t(1 - A(|x|^2 + |y|^2))$; si A est suffisamment grand, il existe alors $\delta > 0$ tel que:

$$H_{p_c}^2 \Phi(y, x, t, \eta, \xi, \tau) \geq 0 \text{ quand } (y, x, t) \in \delta X, \Phi(y, x, t) \leq 0$$

$$\text{et } p_0(y, x, t, \eta, \xi, \tau) = H_{p_0} \Phi(y, x, t, \eta, \xi, \tau) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Posons $\Psi(y, x) = 1 - A(|x|^2 + |y|^2)$,

$$\begin{aligned} \{p_0, \Phi\} &= \{\tau^2 - B, t\Psi\} = 2\tau\Psi - t\{B, \Psi\}, \\ \{p_0, \{p_0, \Phi\}\} &= \{\tau^2 - B, 2\tau\Psi - t\{B, \Psi\}\} \\ &= -2\tau\{B, \psi\} + 2\Psi B'_t - 2\tau\{B, \Psi\} + t\{B, \{B, \Psi\}\} - 2\tau t\{B'_t, \Psi\} \\ &= 2\Psi B'_t - 4\tau\{B, \Psi\} + t\{B, \{B, \Psi\}\} - 2\tau t\{B'_t, \Psi\}. \end{aligned}$$

On a $\frac{\partial B}{\partial \xi}(0, 0, 0, \xi, \eta) \neq 0$ de même $\frac{\partial B}{\partial \eta}(0, 0, 0, \xi, \eta) \neq 0$.

D'où t et B sont des variables indépendantes. Ainsi on peut écrire la formule de Taylor de B'_t au voisinage de $t = 0$ et $B = 0$; or $B = 0$ implique $\eta = -\frac{a(y, x, t, \xi)}{C(y, x, t)}$. Faisons le développement avec $|\xi| = 1$.

D'où

$$\begin{aligned} B'_t(y, x, t, \eta, \xi) &= B'_t(y, x, 0, \frac{-a(y, x, 0, \xi)}{C(y, x, 0)}, \xi) \\ &\quad + t f_1 + B f_2 + O(t^2, B^2); \end{aligned}$$

par hypothèse on a $B'_t(y, x, 0, \eta, \xi) \geq 0$ car $B = 0, t = 0$, d'où

$$B'_t(y, x, t, \eta, \xi) \geq t f_1 + B f_2 + O(t^2, B^2) \geq -C_0(|t| + |B|),$$

ceci pour $|\xi| = 1$.

Multiplications par $|\xi|^2$ on obtient

$$(3.46) \quad B'_t(y, x, t, \eta, \xi) \geq -C_0(|t||\xi|^2 + |B|).$$

Essayons de majorer $|B|$. Par hypothèse on a $p_0 = 0$ d'où $\tau^2 = B(y, x, t, \eta, \xi)$ et

$$(3.47) \quad \{p_0, \Phi\} = 0 \implies \tau = \frac{t}{2\Psi}\{B, \Psi\} = -\frac{At}{\Psi} \sum_{j=1}^{n-1} B^{(j)} x_j,$$

où $B^{(j)} = \frac{\partial B}{\partial \xi_j} = a^{(j)}$.

On en déduit $B(y, x, t, \eta, \xi) \leq (C_1 A t |\xi| |x|)^2$, $(y, x, t) \in \varepsilon X$; en choisissant ε assez petit de sorte que

$$(C_1 A)^2 |t| |x|^2 < 1,$$

on obtient

$$B(y, x, t, \eta, \xi) < |t| |\xi|^2;$$

d'où en reprenant (3.46) on déduit que

$$(3.48) \quad B'_t(y, x, t, \eta, \xi) \geq C_2 t |\xi|^2.$$

De (3.47) on tire

$$(3.49) \quad 4\tau\{B, \Psi\} = \frac{2t}{\Psi}\{B, \Psi\}^2 \leq 0.$$

Par hypothèse d'où

$$(3.50) \quad \{p, \{p, \Phi\}\} \geq 2C_0t|\xi|^2 + t\{B, \{B, \Psi\}\} - 2rt\{B'_t, \Psi\};$$

or

$$\begin{aligned} \{B, \{B, \Psi\}\} &= -\{B, 2A \sum_{j=1}^{n-1} a^{(j)} x_j\} \\ &= -2A \left(\sum_{j=1}^{n-1} (a^{(j)})^2 + \sum_{j=1}^{n-1} x_j \{a, a^{(j)}\} \right) - 2A \sum_{j=1}^{n-1} x_j \{C, a^{(j)}\}; \end{aligned}$$

en choisissant δ très petit et $(y, x, t) \in \delta X$ et en tenant compte de (3.2) on obtient

$$(3.51) \quad \{B, \{B, \Psi\}\} \leq -2AC_2|\xi|^2.$$

Il nous reste à estimer $\tau\{B'_t, \Psi\}$. On a (car $\{C'_t\eta, \Psi\} = 0$)

$$\begin{aligned} \tau\{B'_t, \Psi\} &= \tau\{a'_t + C'_t\eta, \Psi\} \\ &= \tau\{a'_t, \Psi\} + \{C'_t\eta, \Psi\} \\ &= \tau\{a'_t, \Psi\} = -2 \sum_{j=1}^{n-1} \tau A a'_t{}^{(j)} x_j; \end{aligned}$$

de l'expression (3.47) on tire

$$-\tau\{B'_t, \Psi\} = -\frac{2A^2t}{\Psi} \sum_{j,k=1}^{n-1} a_t^{(j)} a^{(k)} x_j x_k,$$

forme quadratique, d'où

$$-\tau\{B'_t, \Psi\} \leq 2A C_3\{\xi\}^2.$$

À partir des identités (3.50), (3.51) et (3.52) on conclut

$$\begin{aligned} \{p, \{p, \Phi\}\} &\geq 2C_0t|\xi|^2 - 2tAC_2|\xi|^2 + 2tAC_3|\xi|^2 \\ &\geq 2t|\xi|^2(C_0 - AC_2 + AC_3) \\ &\geq 2t|\xi|^2(C_0 - A(C_2 - C_3)); \end{aligned}$$

comme $C_2 \leq C_3$, on peut choisir A de manière que $C_0 - A(C_2 - C_3) \geq 0$, d'où $\{\mathbf{p}, \{\mathbf{p}, \Phi\}\} \geq 0$.

Ensuite par un changement de variables respectant les structures quasi-homogènes on peut se ramener aux variables (y', x', t') tel que l'opérateur s'écrive

$$\mathbf{p}(x', y', t', D_{y'}, D_{x'}, D_{t'}) = D_{t'}^2 + \sum_{|\alpha| \leq 2} \tilde{a}_\alpha(y', x', t') D_{x'}^\alpha + \tilde{C}(y', x', t') D_{y'}$$

avec $S = \{t' = 0\}$ et la propriété de faible pseudo-convexité vérifiée: $\{(x', y', t'); t' \leq 0\} \cap \{\text{un voisinage de l'origine}\}$.

Pour revenir à la fonction u qui vérifie les hypothèses du théorème 2.1 dans un voisinage de 0 et tel que $\mathbf{P}u \equiv 0$ dans W , posons

$$u_\varepsilon(y, x, t) = u(\varepsilon^2 y, \varepsilon x, \varepsilon t);$$

alors on a

$$\mathbf{P}_0(\varepsilon^2 y, \varepsilon x, \varepsilon t) u_\varepsilon + \sum_{|\alpha| < 2} a_\alpha(\varepsilon^2 y, \varepsilon x, \varepsilon t) D^\alpha u_\varepsilon = 0$$

dans W_ε et $u_\varepsilon \equiv 0$ pour $t \geq 0$.

Choisissons une fonction χ dans $C_0^\infty(W)$ tel que $\chi \equiv 1$ dans un voisinage de l'origine et appliquons l'inégalité (3.6) à $V_\varepsilon = \chi u_\varepsilon$ en remarquant qu'il existe $c > 0$ tel que $\varphi(t) < -c$ dans $\text{supp } V_\varepsilon \cap (\text{supp } d\chi)$; en prenant ε assez petit et en faisant tendre σ vers $+\infty$ on déduit que $V_\varepsilon \equiv 0$ quand $\varphi > -\varepsilon c$ et par suite $u(x) = 0$ dans un voisinage de l'origine et pour $x \in \{\varepsilon \bar{X} \cap \text{supp } u : t \leq 0\}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. ALINHAC, *Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs du second ordre à symboles réels*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, **34** (2) (1984), 89-109.
- [2] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer Verlag, Berlin 1963.
- [3] L. HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential operators*, Vol. IV, Springer Verlag, Berlin 1985.
- [4] V.M. ISAKOV, *On the uniqueness of the solution of the Cauchy problem*, Soviet Math. Dokl **22**, (3) (1980).
- [5] LASCAR - ZUILY, *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs à caractéristiques doubles*, Duke mathematical journal, **49** (1) (1982).
- [6] LERNER - ROBBIANO, *Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs de type principal*, Journal d'analyse mathématique, **44** (1985), 32-66.
- [7] C. ZUILY, *Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem*, Progress in mathematics, **33**, Birkhauser, Boston 1983.