ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MICHEL HICKEL

Quelques résultats de division dans $A^{\infty}(\Omega)$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 15, nº 1 (1988), p. 35-63

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1988_4_15_1_35_0>

Quelques resultats de division dans $A^\infty(\Omega)$

MICHEL HICKEL

Introduction

Le travail qui suit a pour but d'apporter des éléments de réponse aux problèmes suivants:

Soient Ω un ouvert pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$, Ω à bord lisse C^∞ (ou bien Ω est un produit de tels ouverts i.e. $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_m$ avec Ω_i pseudo-convexe à bord lisse C^∞ de ^{p_i}, $\sum_{i=1}^{m} p_i = n$) et des fonctions $u_1, \cdots, u_h$ holomorphes dans un voisinage V de $\overline{\Omega}$ quand peut-on affirmer que:

1) L'idéal $u_1 A^\infty(\Omega) + \cdots + u_h A^\infty(\Omega)$ est fermé dans l'anneau $A^\infty(\Omega)$, où $A^\infty(\Omega)$ est l'anneau des fonctions holomorphes dans Ω et C^∞ jusqu'au bord de Ω.
2) Soit $X = \{z \in V \ tq \ u_1(z) = \cdots = u_h(z) = 0\}$. Soit $F \in A^\infty(\Omega)$ nulle sur $X \cap \overline{\Omega}$ alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $F^m \in u_1 A^\infty(\Omega) + \cdots + u_h A^\infty(\Omega)$.

Contrairement aux situations envisagées dans [1] [4] et [10] (th 2.4 p. 146) on autorise ici X à avoir des singularités (en particulier au voisinage de $\partial\Omega$).

Depuis A. Nagel, R. Gay et A. Sebbar ([21] [22] [14]) on sait que pour répondre par l'affirmative à 1) il suffit essentiellement de savoir que l'idéal $u_1 C^\infty(\overline{\Omega}) + \cdots + u_h C^\infty(\overline{\Omega})$ est fermé dans $C^\infty(\overline{\Omega})$, où $C^\infty(\overline{\Omega})$ est l'anneau des fonctions C^∞ au sens de Whitney sur $\overline{\Omega}$.

On est donc conduit à étudier le problème suivant:

3) "Sous quelles conditions" l'idéal $u_1 C^\infty(\overline{\Omega}) + \cdots + u_h C^\infty(\overline{\Omega})$ est-il fermé dans l'anneau $C^\infty(\overline{\Omega})$ munit de sa topologie usuelle d'espace de Fréchet.

Lorsque $\partial\Omega$ est analytique 3) a toujours une réponse positive. Dans le cas général le problème 3) a été étudié par E. Amar d'une part et E. Bierstone et P.D. Milman d'autre part ([3] [8] [9]).

Pervenuto alla Redazione il 23 Marzo 1987.

Ces auteurs construisent une filtration localement finie de X par des ensembles analytiques $X = X_0 \underset{+}{\supset} X_1 \underset{+}{\supset} X_2 \cdots$ telle que si $\forall i$ X_i et $\overline{\Omega}$ sont régulièrement situés alors 3) a une réponse positive.

Nous allons proposer, lorsque X est au voisinage de $X \cap \partial\Omega$ une intersection complète locale localement irréductible, une condition d'une nature différente et qui se veut "proche de la seule condition X et $\overline{\Omega}$ sont régulièrement situés".

Précisément soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \ \rho(z) < 0\}$ un ouvert à bord lisse; dire que X et $\overline{\Omega}$ sont régulièrement situés équivaut à:

$$\text{(R.S)} \quad \forall K \text{ compact}, \ \exists c, \ \alpha > 0 \text{ tels que } \forall z \in K \cap \overline{X \backslash \overline{\Omega}} \ \rho(z) \geq c \ d(z, X \cap \overline{\Omega})^{\alpha}$$

i.e. avec les notations de [25] ρ vérifie $\mathcal{L}(X \cap \overline{\Omega}, \ \overline{X \backslash \overline{\Omega}})$.

Ecrivons maintenant X comme l'image par un morphisme analytique propre d'une variété lisse i.e. soit (Σ, Π) avec Σ variété analytique lisse et $\Pi : \Sigma \longrightarrow V$ Π analytique propre et $\Pi(\Sigma) = X$ (par commodité nous appelerons un tel couple une paramétrisation de X). Nous dirons que (F.R.S.) est vérifiée si:

$$\text{(F.R.S.)} \qquad \rho \circ \Pi \quad \text{vérifie} \quad \mathcal{L}(\Pi^{-1}(X \cap \overline{\Omega}), \ \Pi^{-1}(\overline{X \backslash \overline{\Omega}}))$$

ou ce qui est équivalent $\rho \circ \Pi$ vérifie

$$\mathcal{L}(\Pi^{-1}(X \cap \partial\Omega), \ \Pi^{-1}(\overline{X \backslash \overline{\Omega}}))$$

(Les notations sont rappelées au §0 et la définition précise est donnée au §1 def 2).

Obtient alors le résultat suivant:

THÉORÈME 1: *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ à bord lisse et $\mathcal{I}$ le sousfaisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_v$ engendré par les u_i. Supposons que $\mathcal{I}_x$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{v,x}$ pour tout x dans un vosinage de $X \cap \partial\Omega$ et que $\forall x \in X \cap \partial\Omega$ $\mathcal{I}_x$ peut être engendré par p éléments de $\mathcal{O}_{v,x}$ où $p =$* $\operatorname{codim}_x X$. *Alors si pour une paramétrisation (Σ, Π) de X* (F.R.S.) *est vérifiée, l'idéal $u_1 C^\infty(\overline{\Omega}) + \cdots + u_h C^\infty(\overline{\Omega})$ est fermé dans $C^\infty(\overline{\Omega})$.*

Ce résultat permet de construire facilement des exemples simples où les conditions suffisantes proposées dans [3] [8] [9] sont en défaut et où l'on peut néanmoins conclure à la fermeture de l'idéal (cf. §1).

Le fait que pour une paramétrisation (Σ, Π) de X (F.R.S.) soit vérifiée entraine toujours que X et $\overline{\Omega}$ sont régulièrement situés, nous ignorons en général quel est le lien exact entre ces deux conditions cependant pour des ensembles analytiques admettant de "bonnes paramétrisations" ces deux conditions sont équivalentes (cf. lemme 4 §1). On en déduit:

COROLLAIRE 1.1: *Soient Ω un ouvert à bord lisse de $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{I}$ le sous-faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_v$ engendré par les u_i. Supposons que*:

i) $\forall x$ *dans un voisinage de* $X \cap \partial\Omega$ I_x *est un idéal premier de* $\mathcal{O}_{v,x}$.

ii) $\forall x \in X \cap \partial\Omega$ I_x *peut être engendré par* p *éléments de* $\mathcal{O}_{v,x}$ *avec* $p = \operatorname{codim}_x X$.

iii) $\forall x \in X \cap \partial\Omega$ *la normalisation* $\hat{X}_x$ *du germe* X_x *est une variété lisse.*

Alors les suivantes sont équivalentes

1) X *et* $\overline{\Omega}$ *sont régulièrement situés.*

2) *L'idéal* $u_1 C^\infty(\overline{\Omega}) + \cdots + u_h C^\infty(\overline{\Omega})$ *est fermé dans* $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Les conditions i) ii) iii) de ce corollaire bien que restrictives autorisent néanmoins X à posséder des singularités au voisinage de $\partial\Omega$ (cf. §1 remarques 9.3); il en résulte que le genre de conditions envisagées dans [3] [8] [9] n' est pas toujours optimal.

Les techniques de [1] [14] [21] [22] permettent alors d'obtenir des résultats similaires dans $A^\infty(\Omega)$.

THÉORÈME 2: *Soit* Ω *un ouvert pseudo-convexe de* $\mathbb{C}^n$ *à bord lisse* C^∞. *Supposons que* I_x *soit un idéal premier de* $\mathcal{O}_{v,x}$ *pour tout* x *dans un voisinage de* $X \cap \partial\Omega$ *et que* $\forall x \in X \cap \partial\Omega$ I_x *puisse être engendré par* p *éléments de* $\mathcal{O}_{v,x}$ *avec* $p = \operatorname{codim}_x X$.

Alors si pour une paramétrisation (Σ, Π) *de* X (F.R.S.) *est vérifiée l'idéal* $u_1 A^\infty(\Omega) + \cdots + u_h A^\infty(\Omega)$ *est fermé dans* $A^\infty(\Omega)$.

On en déduit dans $A^\infty(\Omega)$ un résultat semblable au corollaire 1.1.

On peut ensuite retrouver les résultats de J.M. Ortega [23] [23 bis] et de Jacobzack [17] sur le problème de Gleason dans $A^\infty(\Omega)$.

THÉORÈME 3: *Soit* Ω *un ouvert pseudo-convexe de* $\mathbb{C}^n$ (Ω *borné ou non*) *ou bien produit de tels ouverts. Alors*:

i) *L'idéal* $\sum_{1 \le i \le n} (z_i - w_i)\ A^\infty(\Omega \times \Omega)$ *est toujours fermé dans* $A^\infty(\Omega \times \Omega)$

ii) $\forall f \in A^\infty(\Omega)$ *il existe* $g_i \in A^\infty(\Omega \times \Omega)$ $1 \le i \le n$ *tels que*

$$f(z) - f(w) = \sum_{1 \le i \le n} (z_i - w_i)\ g_i\ (z, w)$$

Ce résultat est une conséquence facile du travail fait dans [23] et du fait que dans ce cas X et $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ sont toujours régulièrement situés.

En ce qui concerne le problème n° 2 nous apportons la réponse partielle suivante:

THÉORÈME 4: *Soient* Ω *un ouvert pseudo-convexe borné de* $\mathbb{C}^n$ *à bord lisse;* $u_1, \cdots, u_h$ *des fonctions holomorphes dans un voisinage* V *de* $\overline{\Omega}$, $X = \{z \in V$ *tel que* $u_1(z) = \cdots = u_h(z) = 0\}$.

Supposons que X *soit au voisinage de* $X \cap \partial\Omega$ *une intersection complète locale localement irréductible et que* $\forall x \in X \cap \partial\Omega$ *la normalisation* $\hat{X}_x$ *du* *germe X_x soit une variété lisse. Alors si $\overline{X \cap \Omega} = X \cap \overline{\Omega}$ et X et $\overline{\Omega}$ sont régulièrement situés pour toute $F \in A^\infty(\Omega)$ nulle $X \cap \overline{\Omega}$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $F^m \in \sum_{1 \leq i \leq h} u_i A^\infty(\Omega)$.*

Enfin, dans un dernier temps, on cherchera à prouver l'existence "d'opérateurs linéaires continus de division". On répondra lorsque Ω est pseudo-convexe borné dont le bord possède la propriété (P) de D. Catlin [11].

Précisément:

THÉORÈME 5: *Soit Ω un ouvert pseudo-convexe borné à bord lisse dont le bord satisfait la propriété (P) de* [11] *ou bien Ω produit de tels ouverts et soient $u_1, \cdots, u_h$ holomorphes dans un voisinage V de $\overline{\Omega}$.*

Alors si l'idéal $u_1 A^\infty(\Omega) + \cdots + u_h A^\infty(\Omega)$ est fermé dans $A^\infty(\Omega)$ il existe un opérateur linéaire continu de division i.e. il existe L linéaire continu: $L \sum_{1 \leq i \leq h} u_i A^\infty(\Omega) \longrightarrow A^\infty(\Omega)^h$

$$f \longrightarrow L(f) = (L_i(f))_{1 \leq i \leq h}$$

tel que $f = \sum_{1 \leq i \leq h} L_i(f) u_i$.

COROLLAIRE 5.1: *Soit Ω un ouvert pseudo-convexe borné à bord lisse C^∞ dont le bord satisfait (P) (ou bien produit de tels ouverts).*

Il existe alors un opérateur linéaire continu L

$$A^\infty(\Omega) \longrightarrow A^\infty(\Omega \times \Omega)^n$$
$$f \longrightarrow L(f) = (L_i(f))_{1 \leq i \leq n} \text{ tel que}$$

$$f(z) - f(w) = \sum_{1 \leq i \leq n} (z_i - w_i)\ L_i(f)(z, w).$$

Signalons que tous les ouverts psuedo-convexes de type fini au sens de [12] ont la priorité (P) d'après [11].

Notre étude est organisée comme suit: le paragraphe 0 précise les notations et énonce un résultat de fonctions composées différentiables de E. Bierstone et P.D. Milman qui est l'outil essentiel du §1.

Le §1 étude la division dans $C^\infty(\overline{\Omega})$, on y démontre le Théorème 1 ainsi que quelques "variantes" de ce résultat. Les outils utilisés sont les résultats classiques sur les idéaux de fonctions différentiables tels qu'ils sont exposés dans le livre de J.C. Tourgeron [25] ainsi qu'un théorème de fonctions-composées différentiables de [6]. Le §2 donne la preuve des Théorèmes 2 et 3 à l'aide des résultats de [14] [21] [22] [23]. Le §3 démontre le Théorème 4. Le §4 démontre le Théorème 5 et son corollaire à l'aide des résultats de [11] et des Théorèmes de Vogt-Wagner sur les sous-espaces et les quotients de S (S espace des suites à décroissance rapide).

0. - Notations et énoncé d'un résultat de E. Bierstone et P.D. Milman

Notations: Nous noterons par

- $\mathcal{O}_v$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur un ouvert V de $\mathbb{C}^n$.
- $\mathcal{A}^{\infty}_{\overline{\Omega}}$ le faisceau de base $\overline{\Omega}$ des germes de fonctions holomorphes dans Ω et C^{∞} jusqu'au bord de Ω.
- $\mathcal{E}_{\overline{\Omega}}$ et $\mathcal{E}^{p,q}_{\overline{\Omega}}$ respectivement les faisceaux des fonctions C^{∞} jusqu'au bord de Ω et des (p, q) formes différentielles à coefficients C^{∞} jusqu'au bord de Ω.
- $\Gamma(A, \mathcal{F})$ l'espace des sections sur un ensemble A d'un faisceau $\mathcal{F}$, la fibre en un point x du faisceau $\mathcal{F}$ sera notée $\mathcal{F}_x$.
- Si f est une fonction C^{∞} nous noterons par $T_x f$ sa série de Taylor au point x et par $V(f)$ l'ensemble de ses zéros.

Nous rappelons maintenant deux définitions.

DÉFINITION 1: *Soient A, B deux fermés d'un ouvert U de $\mathbb{R}^k$: on dit que A et B sont régulièrement situés en un point $p \in A \cap B$ si l'une des deux conditions suivantes équivalentes est réalisée:*

*) $\exists V_p$ *voisinage de p et des constantes $c, \alpha > 0$ tels que*

$$\forall z \in V_p \;\; d(z, A) + d(z, B) \geq c d(z, A \cap B)^{\alpha}$$

**) $\exists V_p$ *voisinage de p et des constantes $c, \alpha > 0$ tels que*

$$\forall z \in V_p \cap A \;\; d(z, B) \geq c d(z, A \cap B)^{\alpha}$$

Si A et B sont régulièrement situés en tout point on dit que A et B sont régulièrement situés.

DÉFINITION 2: *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, et soit A, B deux fermés de U on dit que f vérifie $\mathcal{L}(B, A)$ si la condition suivante est satisfaite:*

$$\forall \; K \text{ compact } \subset A, \;\; \exists \; c, \alpha > 0 \text{ tels que}$$
$$\forall \; z \in K \quad |f(z)| \geq c \; d(z, B)^{\alpha}$$

Notre étude est basée sur le résultat suivant de E. Bierstone et P.D. Milman.

THÉORÈME (THÉORÈME 0.2 de [6]): *Soient M et N deux variétés analytiques réelles. Soit $\Psi : M \longrightarrow N$ un morphisme réel analytique propre. Si $\Psi(M)$ est Nash sous-analytique, alors l'algèbre $\Psi^* C^{\infty}(N)$ est une sous algèbre fermée de $C^{\infty}(M)$. Ainsi si $f \in C^{\infty}(M)$ et $f \in (\Psi(C^{\infty}(N))\hat{}$ alors il existe $F \in C^{\infty}(N)$ telle que $f = F \circ \Psi$; $(\Psi(C^{\infty}(N)))\hat{}$ désignant comme d'habitude* *les éléments* $f \in C^\infty(M)$ *tq* $\forall\ y \in \Psi(M)$ *il existe* $F_y \in C^\infty(N)$ *tq* $f - F_y \circ \Psi$ *soit plat sur* $\Psi^{-1}(y)$.

Nous utiliserons ce résultat lorsque $\Psi(M)$ sera un ensemble analytique.

1. - Sur les idéaux de $C^\infty(\overline{\Omega})$ engéndrés par des fonctions analytiques au voisinage de $\overline{\Omega}$

Soit A un fermé d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ (ou $\mathbb{C}^n$), on désignera par $C^\infty(A)$ ou $\mathcal{E}(A)$ l'anneau des fonctions C^∞ au sens de Whitney sur A muni de sa topologie usuelle d'espace de Fréchet (topologie quotient de $C^\infty(U)$ par l'idéal des fonctions plates sur A). Soit maintenant Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ (ou $\mathbb{C}^n$) nous ferons la définition suivante.

DÉFINITION 1: *Soit* $\mathcal{O}_x^{\mathbb{R}}$ *l'anneau des germes de fonctions analytiques réelles au voisinage de* x (Resp $\mathcal{O}_x$ *anneau des germes de fonctions holomorphes au voisinage de* x). *Soit alors* I *un idéal de* $\mathcal{O}_x^{\mathbb{R}}$ (Resp $\mathcal{O}_x$) *nous dirons que* $I\mathcal{E}_{\overline{\Omega},x}$ *est fermé dans* $\mathcal{E}_{\overline{\Omega},x}$ *si la condition suivante est satisfaite*:

Soit $\mathcal{I}$ *un sous-faisceau d'idéaux de type fini de* $\mathcal{O}_v^{\mathbb{R}}$, (Resp $\mathcal{O}_v$), *tel que* $\mathcal{I}_x = I$, *il existe un voisinage ouvert* V_x *de* x *tel que* $\Gamma(\overline{\Omega} \cap V_x,\ \mathcal{I}\mathcal{E}_{\overline{\Omega}})$ *soit un idéal fermé de* $\mathcal{E}(\overline{\Omega} \cap V_x)$.

En fait si $\Gamma(\overline{\Omega} \cap V_x,\ \mathcal{I}\mathcal{E}_{\overline{\Omega}})$ *est fermé alors pour tout ouvert* $W c V_x$ $\Gamma(\overline{\Omega} \cap W,\ \mathcal{I}\mathcal{E}_{\overline{\Omega}})$ *est fermé comme on peut le constater en utilisant le lemme* 6.1 p. 113 *de* [25].

Ainsi étant donné un ouvert Ω et $\alpha_1, \cdots, \alpha_h$ des fonctions analytiques réelles dans un voisinage V de $\overline{\Omega}$ et $\mathcal{I}$ le sous-faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_V^{\mathbb{R}}$ engendré par les α_i.

On a compte tenu de la définition 1 et du théorème de division de Malgrange.

$\alpha_1 c^\infty(\overline{\Omega}) + \cdots + \alpha_h c^\infty(\overline{\Omega})$ fermé dans $C^\infty(\overline{\Omega}) \iff \forall x \in \partial\Omega\ \mathcal{I}_x\mathcal{E}_{\overline{\Omega},x}$ est fermé dans $\mathcal{E}_{\overline{\Omega},x}$ Rappelons maintenant un lemme:

LEMME 1: *Soit* $\mathcal{O}_x^{\mathbb{R}}$ *l'anneau des germes de fonctions analytiques réelles au voisinage de* x (Resp $\mathcal{O}_x$). *Alors* $\mathcal{E}_{\overline{\Omega},x}$ *est un* $\mathcal{O}_x^{\mathbb{R}}$ *module fidélement plat.* (Resp $\mathcal{E}_{\overline{\Omega},x}$ *est* $\mathcal{O}_x$ *fidélement plat*).

PREUVE: ce résultat est prouvé dans [22] pour $\mathcal{O}_x$, c'est en fait une conséquence facile de la proposition 2.3, p. 93 de [25] et du théorème de division de Malgrange.

Voici maintenant un lemme qui permet de faire quelques réductions.

LEMME 2:

1) *Soient* $P_1, \cdots, P_m$ *des idéaux de* $\mathcal{O}_x^{\mathbb{R}}$ (Resp $\mathcal{O}_x$) *tels que si* $i \neq j$, *il existe* $f_i \in P_i$ *non diviseur de zéro dans* $\mathcal{O}/P_j$ *alors les suivantes sont équivalentes*:

i) $(\bigcap_{1\le i\le m} P_j)\,\mathcal{E}_{\overline{\Omega},x}$ *est fermé dans* $\mathcal{E}_{\overline{\Omega},x}$

ii) $\forall 1\le i\le m$ $P_i\mathcal{E}_{\overline{\Omega},x}$ *est fermé dans* $\mathcal{E}_{\overline{\Omega},x}$

2) *Soit I un idéal de $\mathcal{O}_x$* (Resp $\mathcal{O}_x^{\mathbb{R}}$) *et soit* $I=\bigcap_{1\le i\le m} q_i$ *une décomposition primaire réduite de I, $P_i=\sqrt{q_i}$ alors si $I\mathcal{E}_{\overline{\Omega}.x}$ est fermé alors $\forall 1\le i\le m$ $P_i\mathcal{E}_{\overline{\Omega},x}$ est fermé dans $\mathcal{E}_{\overline{\Omega},x}$.*

PREUVE

2) Les P_i sont les premiers associés à $\mathcal{O}_x/I$, il existe donc $a_i\in\mathcal{O}_x$ tel que si δ_{a_i} désigne la multiplication par a_i on ait une suite exacte $0\longrightarrow P_i\longrightarrow\mathcal{O}_x\xrightarrow{\delta_{a_i}}\mathcal{O}_x/I$, si $\mathcal{P}_i$ et $\mathcal{I}$ représentent P_i et I on a donc par cohérence une suite exacte dans un voisinage W de x:

$$0\longrightarrow\mathcal{P}_i\longrightarrow\mathcal{O}\xrightarrow{\delta_{a_i}}\mathcal{O}/\mathcal{I}$$

et appliquant le foncteur $\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{E}_{\overline{\Omega}}$ qui est exact on obtient la suite exacte $0\longrightarrow\mathcal{P}_i\mathcal{E}_{\overline{\Omega}}\longrightarrow\mathcal{E}_{\overline{\Omega}}\xrightarrow{\delta_{a_i}}\mathcal{E}_{\overline{\Omega}}/\mathcal{I}\mathcal{E}_{\overline{\Omega}}$ ainsi pour tout voisinage V_x de x $V_x\subset W$ on a une suite exacte

$$0\longrightarrow\Gamma(V_x\cap\overline{\Omega},\mathcal{P}_i\mathcal{E}_{\overline{\Omega}})\longrightarrow\mathcal{E}_{\overline{\Omega}}\,(V_x\cap\overline{\Omega})\longrightarrow\frac{\mathcal{E}_{\overline{\Omega}}\,(V_x\cap\overline{\Omega})}{\Gamma\,(V_x\cap\overline{\Omega},\mathcal{I}\mathcal{E}_{\overline{\Omega}})}$$

mais $I\mathcal{E}_{\overline{\Omega}.x}$ est fermé implique que pour V_x suffisamment petit $\frac{\mathcal{E}_{\overline{\Omega}}\,(V_x\cap\overline{\Omega})}{\Gamma\,(V_x\cap\overline{\Omega},\mathcal{I}\mathcal{E}_{\overline{\Omega}})}$ est un espace topologique séparé donc $\delta_{a_i}^{-1}(0)=\Gamma(V_x\cap\overline{\Omega},\mathcal{P}_i\mathcal{E}_{\overline{\Omega}})$ est un idéal fermé de $\mathcal{E}_{\overline{\Omega}}(\overline{\Omega}\cap V_x)$, ce qui prouve 2).

1) ii)$\Rightarrow$ i) on a facilement par le lemme 1

$$\bigcap_{1\le i\le m}(P_i\mathcal{E}_{\overline{\Omega},x})=(\bigcap_{1\le i\le m} P_i)\mathcal{E}_{\overline{\Omega}.x}$$

ii)$\Rightarrow$i) en résulte. i)$\Rightarrow$ii) Soit $i_1\in\{1,\cdots,m\}$ fixé, par hypothèse il existe $f\in\bigcap_{1\ne i_1} P_j$ f non diviseur de zéro dans $\mathcal{O}_x/P_{i_1}$ ainsi si les $\mathcal{P}_i$ représentent les P_i il suit par platitude que pour tout voisinage V_x de x suffisamment petit f n'est pas diviseur de zéro dans $\frac{\mathcal{E}_{\overline{\Omega}}\,(\overline{\Omega}\cap V_x)}{\Gamma\,(\overline{\Omega}\cap V_x,\mathcal{P}_{i_1}\mathcal{E}_{\overline{\Omega}})}$.

Mais si $(\bigcap_{1\le i\le m} P_i)\mathcal{E}_{\overline{\Omega},x}$ est fermé il suit que pour tout voisinage de x V_x petit, on a $f\ \overline{\Gamma(\overline{\Omega}\cap V_x,\mathcal{P}_{i_1}\mathcal{E}_{\overline{\Omega}})}\subset\Gamma(\overline{\Omega}\cap V_x,\ (\bigcap_{1\le i\le m}\mathcal{P}_i)\mathcal{E}_{\overline{\Omega}})$ et donc $f\ \overline{\Gamma(\overline{\Omega}\cap V_x,\mathcal{P}_{i_1}\mathcal{E}_{\overline{\Omega}})}\subset\Gamma(\overline{\Omega}\cap V_x,\mathcal{P}_{i_1}\mathcal{E}_{\overline{\Omega}})$ et donc $\overline{\Gamma(\overline{\Omega}\cap V_x,\mathcal{P}_{i_1}\mathcal{E}_{\overline{\Omega}})}\subset\Gamma(\overline{\Omega}\cap V_x,\mathcal{P}_{i_1}\mathcal{E}_{\overline{\Omega}})$ c.q.f.d.

Le 1) du lemme 2 ramène l'étude des idéaux réduits à celle des idéaux premiers, le 2) a pour conséquence.

PROPOSITION 1: *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$* (Resp $\mathbb{C}^n$) *et soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_h$ des fonctions analytiques réelles dans un voisinage V de $\overline{\Omega}$* (Resp *holomorphes dans un voisinage V de $\overline{\Omega}$*) *et $\mathcal{I}$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_v^{\mathbb{R}}$ engendré par les α_i* (Resp *le sous-faisceau de $\mathcal{O}_v$*). *Alors si $\alpha_1 c^\infty(\overline{\Omega}) + \cdots + \alpha_h c^\infty(\overline{\Omega})$ est fermé la condition suivante est réalisée*:

$\forall\ x \in \partial\Omega$, soient $(P_i)_{1\leq i\leq m}$ les premiers associés à $\mathcal{I}_x$ et $(X_i)_{1\leq i\leq m}$ des sous-ensemble analytiques dont les germes en x induisent les $V(P_i)$ alors X_i et $\overline{\Omega}$ sont régulièrement situés en x.

PREUVE: Il est connu que si $(a_i)_{1\leq i\leq h}$ sont des fonctions (analytiques) dans un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ la fermeture de l'idéal $\sum_{1\leq i\leq h} a_i\ C^\infty(\overline{\Omega}\cap U)$ implique que $X = \{z \in U\ tq\ a_i(z) = 0\}$ et $\overline{\Omega}\cap U$ sont régulièrement situés.

(La preuve est analogue à celle de 3)⇒1) dans la proposition 4.3, p. 102 de [25]). La proposition 1 résulte de ce fait, et du 2) du lemme 2.

EXEMPLE 1: On se place dans $\mathbb{R}^3$ (variables x, y, z) et on considère $\Omega = \{(x, y, z) - y + e^{-\frac{1}{z^4}} \leq 0\}$ et soit l'idéal de $C^\infty(\overline{\Omega})$ engendré par (x^2, xy). Une décomposition primaire réduite (à l'origine) est $(x^2, xy) = (x)\cap(x^2, y)$ ainsi le premiers associés à (x^2, xy) sont (x) et (x, y), or $X = \{x = 0\}$ et $\overline{\Omega}$ sont régulièrement situés et $Y = \{x = y = 0\}$ et $\overline{\Omega}$ sont non régulièrement situés, donc par la proposition 1 $x^2C^\infty(\overline{\Omega}) + xyC^\infty(\overline{\Omega})$ n'est pas fermé. En effet soit $f(x, y, z) = xe^{-\frac{1}{z}2}$ par le théorème spectral de Whitney $f \in \overline{(x^2, xy)C^\infty(\overline{\Omega})}$, cependant $f \notin (x^2, xy)\ C^\infty(\overline{\Omega})$ car sinon $e^{-\frac{1}{z}2} \in (x, y)\ C^\infty(\overline{\Omega})$ or $\dfrac{e^{-\frac{1}{z}2}}{|x| + |y|}$ n'est même pas borné au voisinage de l'origine sur la courbe $(x = 0\ y = e^{-\frac{1}{z}4}) \subset \partial\Omega$.

REMARQUE 1: Curieusement, cette condition nécessaire pour la "division" ne semble pas apparaitre directement dans les conditions suffisantes proposées par E. Bierstone et P.D. Milman dans [8] ou [9].

Nous tentons maintenant de donner une condition suffisante pour la division.

Pour la commodité de l'exposé nous utiliserons la terminologie suivante:

TERMINOLOGIE: Soit X un sous-ensemble analytique réel d'un ouvert V de $\mathbb{R}^p$; on appellera paramétrisation de X, un morphisme analytique propre Π d'une variété Σ analytique réelle $\Pi : \Sigma \to V$ tel que $\Pi(\Sigma) = X$.

Bien entendu tout ensemble analytique admet une paramétrisation comme le montre les résultats de désingularisation de Hironaka [16].

DÉFINITION 2: *Soient Ω un ouvert à bord lisse de $\mathbb{R}^p$ (i.e. $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^p\ tq\ \rho(x) < 0\}$ où $\rho \in c^\infty(\mathbb{R}^p)$ $d\rho \neq 0$ sur $\partial\Omega$), X un sous-ensemble analytique réel d'un voisinage V de $\overline{\Omega}$, et soit (Σ, Π) une paramétrisation de X nous dirons que* (F.R.S.) *est vérifiée si*:

Pour tout $y \in \Sigma$ et toute carte (U, φ) de Σ en y la condition suivante est *satisfaite*:

$$\rho \circ \Pi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ vérifie } \mathcal{L}(V(\rho \circ \Pi \circ \varphi^{-1}), B)$$
$$\text{où } B = \{x \in \varphi(U) \text{ tel que } \rho \circ \Pi \circ \varphi^{-1}(x) \geq 0\}$$
$$\text{i.e. } B = \varphi(\Pi^{-1}\ (\overline{X \backslash \overline{\Omega}}) \cap U)$$
$$\text{i.e. } \rho \circ \pi \text{ vérifie } \mathcal{L}(\pi^{-1}(X \cap \partial\Omega), \pi^{-1}(\overline{X/\overline{\Omega}}))$$

REMARQUE 2:

i) Lorsque X est au départ une variété lisse dire que (F.R.S.) est vérifiée avec la paramétrisation cononique $X \xrightarrow{i} V$ i injection cononique ne signifie rien d'autre que X et $\overline{\Omega}$ régulièrement situés.

ii) On peut vérifier que si pour une paramétrisation (Σ, Π) de X (F.R.S.) est vérifiée alors X et $\overline{\Omega}$ sont régulièrement situés. Nous ignorons quels sont les ensembles analytiques pour lesquels on peut trouver une paramétrisation (Σ, Π) telle que:

X et $\overline{\Omega}$ régulièrement situés $\Longleftrightarrow$ (F.R.S.) est vérifiée (avec (Σ, Π) comme paramétrisation).

Nous donnerons cependant une classe d'ensembles analytiques simples pour lesquels il existe de telles paramétrisations.

PROPOSITION 2: *Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_h$ des fonctions analytiques réelles dans un voisinage V de $\overline{\Omega}$ et $X = \{x \in V$ tel que $\alpha_1(x) = \cdots = \alpha_h(x) = 0\}$.*

On suppose en outre que X est cohérent en tout point de $X \cap \partial\Omega$ et que $\alpha_1, \cdots, \alpha_h$ engendrent dans un voisinage de $X \cap \partial\Omega$ le faisceau des fonctions analytiques réelles nulles sur X. Alors si pour une paramétrisation (Σ, Π) de X (F.R.S.) *est vérifiée alors $\alpha_1 C^\infty(\overline{\Omega}) + \cdots + \alpha_h C^\infty(\overline{\Omega})$ est fermé dans $C^\infty(\overline{\Omega})$.*

PREUVE: Soit (Σ, Π) $\Pi : \Sigma \longrightarrow V$ une paramétrisation de X telle que (F.R.S.) soit vérifiée. Soit $F \in \alpha_1 C^\infty(\overline{\Omega}) + \cdots + \alpha_h C^\infty(\overline{\Omega})$ et $\tilde{F}$ une extension C^∞ quelconque de F dans V. Soit alors $p \in X \cap \overline{\Omega}$; par le théorème spectral de Whitney on a $\tilde{F} = \sum_{i=1}^{h} a_i \alpha_i + R_p$ avec a_i, $R_p \in C^\infty(V)$ et R_p plate en p par suite $\tilde{F} \circ \Pi = R_p \circ \Pi$ est plate sur $\Pi^{-1}(p)$ ceci pour tout $p \in X \cap \overline{\Omega}$ donc $\tilde{F} \circ \Pi$ est plate sur $\Pi^{-1}(X \cap \overline{\Omega})$. Soit maintenant $m \in \mathbb{N}^*$ et soit la fonction $g_m \in C^\infty(\Sigma \backslash V(\rho \circ \Pi))$ $g_m = \dfrac{\tilde{F} \circ \Pi}{(\rho \circ \Pi)^m}$, comme $\tilde{F} \circ \Pi$ est plate sur $\Pi^{-1}(X \cap \overline{\Omega})$ il est facile de voir utilisant le lemme d'Hesténes ([25]) et les inégalités fournies par (F.R.S.) que g_m se prolonge en une fonction C^∞ sur Σ plate sur $\Pi^{-1}(X \cap \overline{\Omega})$ que l'on notera encore g_m. Maintenant $g_m \in (\Pi(C^\infty(\Sigma)))\hat{}$, le Théorème de E. Bierstone et P.D. Milman cité plus haut permet donc d'affirmer qu'il existe $G_m \in C^\infty(V)$ telle que $g_m = G_m \circ \Pi$, ainsi pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on a une égalité:

$$\text{(1)} \qquad \tilde{F} \circ \Pi = G_m \circ \Pi\ (\rho \circ \Pi)^m \text{ avec } G_m \in C^\infty(V)$$

mais $\Pi(\Sigma) = X$, par suite $\tilde{F} - G_m \ \rho^m$ est C^∞ dans V nulle sur X, comme X est analytique réel cohérent dans un voisinage W de $\partial\Omega$ un théorème de B. Malgrange affirme que dans un voisinage W de $\partial\Omega$ on a $\tilde{F}_{/w} = \sum_{1 \leq i \leq h} a_i^m \alpha_i + G_m \rho^m$ avec $a_i^m \in C^\infty(W)$, comme par le théorème de division de Malgrange classique on a $\tilde{F}_{/\Omega} = \sum_{1 \leq i \leq h} b_i^m \alpha_i$ avec $b_i^m \in C^\infty(\Omega)$ on obtient par partition de l'unité:

$$\tilde{F} = \sum_{1 \leq i \leq m} c_i^m \alpha_i + G_m \rho^m \text{ avec } c_i^m,\ G_m \in C^\infty(V') \tag{2}$$

où V' est un voisinage ouvert de $\overline{\Omega}$.

Ainsi pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on sait écrire $\tilde{F} = \sum_{1 \leq i \leq m} c_i^m \alpha_i + R_m$ avec c_i^m, $R_m \in C^\infty(V')$ et R_m m.plate sur $\partial\Omega$, la proposition 2.8, p. 96 de [25] permet alors d'écrire

$$\tilde{F} = \sum_{1 \leq i \leq h} a_i \alpha_i + R \text{ avec } a_i,\ R \in C^\infty(V') \tag{3}$$

et R plate sur $\partial\Omega$. Soit maintenant la fonction R' définit par

$$R' = R \text{ sur } \overline{\Omega} \qquad R' = 0 \qquad \text{sur } V \backslash \overline{\Omega}$$

comme R est plate sur $\partial\Omega$, le lemme d'Hesténes dit que $R' \in C^\infty(V')$, mais maintenant pour $x \in X$ $T_x R' \in (T_x \alpha_i)_{1 \leq i \leq h}$, en effet pour $x \in V' \backslash \overline{\Omega}$ c'est immédiat et pour $x \in X \cap \overline{\Omega}$ ceci est donné par (3), ainsi le le théorème de division de Malgrange classique donne $R' = \sum_{1 \leq i \leq h} c_i \alpha_i$ avec $c_i \in C^\infty(V')$ et par suite restreignant l'égalité (3) à $\overline{\Omega}$ on on obtient $F = \sum_{1 \leq i \leq h} b_i \alpha_i$ avec $b_i \in C^\infty(\overline{\Omega})$ c.q.f.d.

EXEMPLE: Placcons-nous dans $\mathbb{R}^3$ (variables (t, x, y)) et soit la fonction $\Psi(t, x, y) = y^3 - x^5$ alors $X = \{(t, x, y) \text{ tels que } \Psi(t, x, y) = 0\}$ est un ensemble analytique réel cohérent et $\Psi(t, x, y)$ engendre l'idéal des fonctions analytiques réelles nulles sur X. Soit alors la pramétrisation Π

$$\Pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \longrightarrow (u, v^3, v^5) \ \Pi(\mathbb{R}^2) = X$$

on a $\|\Pi(u, v) - \Pi(u', v')\| \geq c|v - u'| + |v - v'|^3$ (1)

Si $\Omega = \{\rho < 0\}$ est un ouvert à bord lisse de $\mathbb{R}^3$, utilisant (1) on peut vérifier (cf. lemme 4) que:

X et $\overline{\Omega}$ régulièrement situés $\Longleftrightarrow$ (F.R.S.) est vérifiée (avec Π comme paramétrisation).

Ainsi la proposition précédente permet de dire que si X et $\overline{\Omega}$ sont régulièrement situés alors $\Psi C^{\infty}(\overline{\Omega})$ est fermé dans $C^{\infty}(\overline{\Omega})$, comme X et $\overline{\Omega}$ régulièrement situé est une condition nécessaire pour que $\Psi C^{\infty}(\overline{\Omega})$ soit fermé. On obtient:

$$X \text{ et } \overline{\Omega} \text{ régulièrement situés } \Longleftrightarrow \Psi C^{\infty}(\overline{\Omega}) \text{ est fermé}$$

Ainsi prenons l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ $\Omega = \{(t,x,y) \in \mathbb{R}^3 \ tq \ \ -x + e^{-\frac{1}{t}2} < 0\}$

Alors X et $\overline{\Omega}$ sont réguliérement situés donc $\Psi C^{\infty}(\overline{\Omega})$ est fermé. Cependant sing (X) et $\overline{\Omega}$ sont non régulièrement situés, on ne peut donc conclure ici à l'aide des résultats de [3] [8] au [26]. (cet exemple est l'exemple non résolu de [9] section 7, exemple 5).

REMARQUE 3:

i) La proposition 2 admet la formulation locale suivante: Soit $p \in X \cap \partial\Omega$ si X est cohérent en p et si $\alpha_1, \cdots, \alpha_h$ engendrent en p le faisceau des germes de fonctions réelles analytique nulles sur X. Alors s'il existe un voisinage V_p de p et une paramétrisation (Σ, Π) de $X \cap V_p$ telle que (F.R.S.) soit vérifiée alors l'idéal

$$\alpha_1 \mathcal{E}_{\overline{\Omega}.p} + \cdots + \alpha_h \mathcal{E}_{\overline{\Omega}.p} \text{ est fermé dans } \mathcal{E}_{\overline{\Omega}.p}$$

ii) Sous les hypothèses de la remarque précédente supposons que l'on puisse trouver un voisinage ouvert V_p de p et une paramétrisation (Σ, Π) de $X \cap V_p$ telle que (F.R.S.) soit vérifiée et

$$\Pi^{-1}(X \cap \overline{\Omega} \cap V_p) = \overline{\Pi^{-1}(X \cap \Omega \cap V_p)} \text{ alors:}$$

$$\alpha_1 \mathcal{E}_{\overline{\Omega}.p} + \cdots + \alpha_h \mathcal{E}_{\overline{\Omega}.p} \text{ est l'idéal des éléments de } \mathcal{E}_{\overline{\Omega}.p} \text{ nuls sur } X \cap \overline{\Omega}.$$

En effet soit $F \in \mathcal{E}_{\overline{\Omega}.p}$ nulle sur $X \cap \overline{\Omega}$, comme X est cohérent en p on obtient un voisinage V'_p de p tel que

$$F_{/V'_p} \cap \Omega \in \alpha_1 C^{\infty}(V'_p \cap \Omega) + \cdots + \alpha_h C^{\infty}(V'_p \cap \Omega)$$

et quitte à multiplier cette égalité par une fonction C^{∞} à support compact dans V'_p et égale à 1 au voisinage de p on peut supposer que $V'_p = V_p$, ainsi si $\tilde{F}$ est une extension de F dans V_p on a $\tilde{F} \circ \Pi$ est plate sur $\Pi^{-1}(X \cap \Omega \cap V_p)$, donc plate sur $\overline{\Pi^{-1}(X \cap \Omega \cap V_p)} = \Pi^{-1}(X \cap \overline{\Omega} \cap V_p)$. On conclue alors exactement comme dans la preuve de la proposition 2.

Considérons maintenant $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ et X un sous-ensemble analytique complexe dans un voisinage V de $\overline{\Omega}$; identifiant $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$ on peut considérer X comme un sous ensemble-analytique réel de V. On a alors

LEMME 3: *Supposons que le germe X_x de X en x soit irréductible et soient $u_1, \cdots, u_h$ des fonctions holomorphes au voisinage de x qui engendrent* *en x l'idéal des germes de fonctions holomorphes nulles sur X. Alors l'idéal $I^{\mathbb{R}}(X_x)$ des germes de fonctions analytiques réelles nulles sur X_x est engendré par les parties réelles et imaginaires des u_i $1 \leq i \leq h$.*

PREUVE: Il revient au même de montrer que si $I^{\mathbb{C}}(X_x)$ est l'idéal des germes de fonctions analytiques réelles à valeurs complexes nulles sur X_x alors $I^{\mathbb{C}}(X_x)$ est engendré par $u_1, \cdots, u_h, \overline{u}_1, \cdots, \overline{u}_h$. Considérons X_x comme sous-ensemble analytique réel de $\mathbb{R}^{2n}$ et soit $\tilde{X}_x$ son complexifié dans $\mathbb{C}^{2n}$ et $I_{\mathbb{C}}(\tilde{X}_x)$ l'idéal des germes de fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}^{2n}$ nulles sur $\tilde{X}_x$ on sait [20] que

$$I_{\mathbb{C}}(\tilde{X}_x) = I^{\mathbb{R}}(X_x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}. \tag{1}$$

Maintenant l'anneau des germes de fonctions réelles analytiques à valeurs complexes de $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$ s'identifie à l'anneau des germes de fonctions holomorphes de $\mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}$ et via cette identification grâce à (1) $I_{\mathbb{C}}(\tilde{X}_x)$ s'identifie à $I^{\mathbb{C}}(X_x)$.

Soit maintenant φ l'isomorphisme de $\mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$

$$\varphi : \mathbb{C}^{2n} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^{2n}$$

$$(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) \longrightarrow (z_1, \cdots, z_n, S_1, \cdots, S_n)$$

$$\text{avec } z_i = x_i + iy_i \quad S_i = x_i - iy_i \quad \text{on a alors}$$

$$\varphi(\tilde{X}_x) = X_x \times \overline{X}_x = \{(z, S) \in \mathbb{C}^{2n} \ tq \ z \in X_x \text{ et } \overline{S} \in X_x\}$$

L'idéal des fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}^n$ nulles sur X_x étant engendré par $u_1, \cdots, u_h$ on en déduit que l'idéal des germes de fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}^n$ nulles sur $\overline{X}_x$ est engendré par $v_1, \cdots, v_h$

$$\text{où } v_i(S) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \overline{a}^i_\alpha S^\alpha \text{ si } u_i(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a^i_\alpha z^\alpha$$

(on suppose $x = 0$). Le produit de deux espaces analytiques réduits étant encore réduit on en déduit que l'idéal des germes de fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}^{2n}$ nulles sur $X_x \times \overline{X}_x$ est engendré par

$$u_1(z), \cdots, u_h(z), \ v_1(S), \cdots, V_h(S)$$

retournant à $\tilde{X}_x$ par l'isomorphisme φ. On obtient que $I_{\mathbb{C}}(\tilde{X}_x)$ est engendré par

$$\Big(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a^i_\alpha (x + iy)^\alpha, \ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \overline{a}^i_\alpha \ (x - iy)^\alpha \Big)_{1 \leq i \leq h} \text{ et donc via}$$

l'identification de $I_{\mathbb{C}}(\tilde{X}_x)$ et $I^{\mathbb{C}}(X_x)$ on obtient que $I^{\mathbb{C}}(X_x)$ est engendré par les u_i, $\overline{u}_i$ $1 \leq i \leq h$ c.q.f.d.

REMARQUE 4: Si X_x n'est pas irréductible, soit I l'idéal des germes fonctions holomorphes nulles sur X_x, $I = \bigcap_{1\leq i\leq r} P_i$ où les P_i sont les premiers minimaux contenant I on a:

$$I^{\mathbb{C}}(X_x) = \bigcap_{1\leq i\leq r} (P_i + \overline{P}_i) \text{ et est donc en général différent de } I + \overline{I}.$$

PROPOSITION 3: *Soient $u_1, \cdots, u_h$ des fonctions holomorphes dans un voisinage V de $\overline{\Omega}$, $X = \{z \in V$ tel que $u_1(z) = \cdots = u_h(z) = 0\}$; $\mathcal{I}$ le sousfaisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_v$ engendré par les u_i. On suppose que $\mathcal{I}_x$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{v,x}$ pour tout x dans un voisinage de $X \cap \partial\Omega$. Alors si pour une paramétrisation (Σ, Π) de X* (F.R.S.) *est vérifiée alors l'idéal $u_1 C^{\infty}(\overline{\Omega}) + \cdots + u_h C^{\infty}(\overline{\Omega}) + \overline{u}_1 C^{\infty}(\overline{\Omega}) + \cdots + \overline{u}_h C^{\infty}(\overline{\Omega})$ est fermé dans $C^{\infty}(\overline{\Omega})$.*

PREUVE: L'hypothèse faite sur $\mathcal{I}$ implique que X est cohérent comme ensemble analytique réel en tout point de $X \cap \partial\Omega$, la proposition 3 résulte alors de la proposition 2 et du lemme 3.

REMARQUE 5:
i) on a une formulation locale analogue à celle de la remarque 3 i)
ii) sous les hypothèse analogues à celles de la remarque 3ii) on obtient que: $u_1 \mathcal{E}_{\overline{\Omega},p} + \cdots + u_h \mathcal{E}_{\overline{\Omega},p} + \overline{u}_1 \mathcal{E}_{\overline{\Omega},p} + \cdots + \overline{u}_h \mathcal{E}_{\overline{\omega},p}$ est l'idéal des germes de $\mathcal{E}_{\overline{\Omega},p}$ nuls sur $X \cap \overline{\Omega}$.

Nous rappelons maintenant une définition.

DÉFINITION 3: *Soit X un ensemble analytique complexe, $x \in X$. On dit que X est une intersection complète locale en x, si l'idéal des germes de fonctions holomorphes nulles sur X_x peut être engendré par p éléments de $\mathcal{O}_x$ avec $p =$ codim X_x.*

THÉORÈME 1. *Soient Ω un ouvert à bord lisse de $\mathbb{C}^n$, $u_1, \cdots, u_h$ des fonctions holomorphes dans un voisinage V de $\overline{\Omega}$,*

$$X = \{z \in V \ tq \ u_1(z) = \cdots = u_h(z) = 0\}$$

et $\mathcal{I}$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_v$ engendré par les u_i. Supposons que $\mathcal{I}_x$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{v,x}$ pour tout x dans un voisinage de $X \cap \partial\Omega$, et que X est en tout point de $X \cap \partial\Omega$ une intersection complète locale. Alors si pour une paramétrisation (Σ, Π) de X (F.R.S.) *est vérifiée alors l'idéal $u_1 C^{\infty}(\overline{\Omega}) + \cdots + u_h C^{\infty}(\overline{\Omega})$ est fermé dans $C^{\infty}(\overline{\Omega})$.*

PREUVE: Soit $F \in \overline{u_1 C^{\infty}(\overline{\Omega}) + \cdots u_h C^{\infty}(\overline{\Omega})}$ pour conclure que $F \in u_1 C^{\infty}(\overline{\Omega}) + \cdots + u_h C^{\infty}(\overline{\Omega})$ il suffit de savoir établir pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ une égalité du type:

$$(*)_r \qquad F = \sum_{1\leq i\leq h} a_{i,r} u_i + \sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_h) \\ \sum_{j=1}^h i_j = r}} b^r_{(i_1,\cdots,i_h)} \overline{u}_1^{i_1} \cdots \overline{u}_h^{i_h}$$

où les $a_{i,r}$ et les $b^r_{(i_1,\cdots,i_h)}$ sont dans $C^\infty(\overline{\Omega})$.

En effet si une telle égalité est prouvée pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, soit $\tilde{F}$ une extension C^∞ quelconque de F à V on aura alors:

$$\tilde{F} = \Sigma\ \tilde{a}_{i,r} u_i + R_r \text{ avec } \tilde{a}_{i,r},\ R_r \in C^\infty(V)$$

et R_r r plate sur $X \cap \overline{\Omega}$, une technique classique développée dans [25] (prop. 2.8, p. 96) permet alors d'écrire

$$\tilde{F} = \sum_{1\leq i\leq h} \tilde{a}_i u_i + R \text{ avec } R \text{ plate sur } X \cap \overline{\Omega}.$$

Soit alors G le jet sur $\overline{\Omega} \cup X$: $G =$ le jet de R sur $\overline{\Omega}$, $G = 0$ sur X; comme R est plate sur $X \cap \overline{\Omega}$ et X et $\overline{\Omega}$ sont régulièrement situés (car (F.R.S.) est vérifiée) G est C^∞ sur $\overline{\Omega} \cup X$ notant g une extension à V de G on a $g = \sum_{1\leq i\leq h} b_i u_i$ par le théorème de division de Malgrange clssique. Comme $g = R$ sur $\overline{\Omega}$ on obtient donc

$$F = \sum_{1\leq i\leq h} (\tilde{a}_i + b_i)_{/\overline{\Omega}}\ u_i \text{ c.q.f.d.}$$

Prouvons donc $(*)_r$ par récurrence sur r. Pour $r = 1$ la proposition 3 donne le résultat.

Supposons donc avoir établi $(*)_r$ pour un $r \geq 1$ et établissons $(*)_{r+1}$, il suffit évidemment par partition de l'unité de le faire au voisinage de tout point $z \in X \cap \overline{\Omega}$. Au voisinage d'un point $z \in X \cap \Omega$ c'est immédiat; Prenons donc $z_0 \in X \cap \partial\Omega$ et soient $\varphi_1, \cdots, \varphi_p$ des fonctions holomorphes dans un voisinage V_{z_0} de z_0 engendrant $\mathcal{I}$ sur V_{z_0} $p =$ codim X on a donc, par hypothèse de récurrence, sur $\overline{\Omega} \cap V_{z_0}$ une égalité:

$$F = \sum_{1\leq i\leq p} a_{i,r}\ \varphi_i + \sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_p) \\ \sum_{j=1}^p i_j = r}} b^r_{(i_1,\cdots,i_p)}\ \overline{\varphi}_1^{i_1} \cdots \overline{\varphi}_p^{i_p}$$

Soit $z \in X \cap \overline{\Omega} \cap V_{z_0}$ fixé, par le théorème spectral de Whitney

$$T_z F = \sum_{1 \leq i \leq p} \alpha_i \; T_z \; \varphi_i \text{ où les } \alpha_i \text{ sont des séries formelles.}$$

On a donc

$$0 = \sum_{1 \leq i \leq p} (T_z a_{i,r} - \alpha_i) T_z \varphi_i + \sum_{\substack{(i_1, \cdots, i_p) \\ \sum_{j=1}^{p} i_j = r}} T_z \; b^r_{(i_1, \cdots, i_p)} \; T_z \; \overline{\varphi}_1^{i_1} \cdots T_z \overline{\varphi}_p^{i_p}$$

Par le théorème d'approximation de Artin, on peut trouver pour tout $\nu \in \mathbb{N}$ des fonctions analytiques réelles $c_1^r, \cdots, c_p^r$ et $S^r_{(i_1, \cdots, i_p)}$ telles que dans un voisinage W_z de z on ait

$$0 = \sum_{1 \leq i \leq p} c_i^r \varphi_i + \sum_{\substack{(i_1, \cdots, i_p) \\ \sum_{j=1}^{p} i_j = r}} S^r_{(i_1, \cdots, i_p)} \overline{\varphi}_1^{i_1} \cdots \overline{\varphi}_p^{i_p} \tag{2}$$

et telles que la série formelle de $S^r_{i_1, \cdots, i_p}$ en z (Resp celle de c_i^r en z) interpolle à l'ordre ν T_z $b^r_{(i_1, \cdots, i_p)}$ (Resp $T_z a_{i,r} - \alpha_i$).

Soit alors $z' \in \operatorname{Reg}(X) \cap W_z$ on peut alors considérer au voisinage de z' les φ_i comme des coordonnées locales (car $p = \operatorname{codim} X$); fixant alors un indice $(J_1, \cdots, J_p)$ et appliquant à (2) l'opérateur différentiel

$$D = \frac{\partial^{j_1 + \cdots + j_p}}{\partial \overline{\varphi}_1^{J_1} \cdots \partial \overline{\varphi}_p^{J_p}}$$

On obtient $S^r_{(J_1, \cdots, J_p)}$ est nul au voisinage de z' dans X par suite $S^r_{(J_1, \cdots, J_p)}$ est nul sur $\operatorname{Reg}(X) \cap W_z$ donc sur $X \cap W_z$ et donc par le lemme 3

$$S^r_{(J_1, \cdots, J_p)} = \sum_{i=1}^{p} a'_i \varphi_i + \sum_{i=1}^{p} a''_i \overline{\varphi}_i \text{ et donc}$$

Tz $b^r_{(J_1, \cdots, J_p)} \in (T_z \varphi_i, T_z \overline{\varphi}_i)_{1 \leq i \leq p} + m_z^{\nu}$ où m_z est le maximal de l'anneau des séries formelles en z, comme ceci peut être fait pour tout $\nu \in \mathbb{N}$ le théorème d'intersection de Krull donne

$$T_z b^r_{(J_1, \cdots, J_p)} \in (T_z \varphi_i, T_z \overline{\varphi}_i) \text{ donc}$$

$$b^r_{(J_1, \cdots, J_p)} \in \overline{\sum_{1 \leq i \leq p} \varphi_i C^{\infty}(\overline{\Omega} \cap V_{z_0}) + \sum_{1 \leq i \leq p} \overline{\varphi}_i C^{\infty}(\overline{\Omega} \cap V_{z_0})}$$

et donc grace à la proposition 3 on a

$$b^r_{(J_1,\cdots,J_p)} \in \sum_{1\le i\le p} \varphi_i C^\infty(\overline{\Omega}\cap V_{z_0}) + \sum_{1\le i\le p} \overline{\varphi}_i C^\infty(\overline{\Omega}\cap V_{z_0})$$

injectant cette égalité dans $(*)_r$ on obtient $(*)_{r+1}$ et donc le Théorème 1.

REMARQUE 6: Placcons-nous dans les hypothèses des remarques 3ii) et 5ii) et soit $F \in \mathcal{A}^\infty_{\overline{\Omega},z}$ nul sur $X\cap\overline{\Omega}$ d'après la remarque 5ii)

$$F \in \sum_{1\le i\le h} u_i\ \mathcal{E}_{\overline{\Omega},z} + \sum_{1\le i\le h} \overline{u}_i\ \mathcal{E}_{\overline{\Omega},z}$$

ainsi dans un voisinage de z on a $\forall x \in V_z\cap\overline{\Omega}$ $T_xF \in (T_xu_i, T_x\overline{u}_i)$ mais T_xF est formellement holomorphe donc $T_xF \in (T_xu_i)_{1\le i\le h}\forall x \in V_z\cap\overline{\Omega}$ ainsi si l'on suppose de plus que I_z est intersection complète le Théorème 1 nous dit $F \in \sum_{1\le i\le p} u_i\mathcal{E}_{\overline{\Omega},z}$.

REMARQUE 7: Soit $I+\overline{I}$ le sous-faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}^{\mathbb{R}}_v$ engendré par les u_i et les $\overline{u}_i$. On peut remplacer dans le Théorème 1 l'hypothèse I_x premier pour tout x dans un voisinage de $X\cap\partial\Omega$ et X intersection complète locale $\forall x_0 \in X\cap\partial\Omega$ par l'hypothèse un petit peu plus générale suivante:
$\forall x$ dans un voisinage de $X\cap\partial\Omega$, I_x est un idéal premier de $\mathcal{O}_{v,x}$ et $\forall x\in X\cap\partial\Omega$ $\forall\alpha\ge 0$ $(I_x+\overline{I}_x)^\alpha$ est $(I_x+\overline{I}_x)$ primaire.

La preuve est sensiblement la même que celle du Théorème 1, il s'agit de prouver par récurrence des égalités du type $(*)_r$ voici comment l'on peut passer de $(*)_r$ à $(*)_{r+1}$. On a une égalité

$$F = \sum_{i=1}^h a_{i,r}\ u_i + \sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_h)\\ \sum_{j=1}^h i_j = r}} b^r_{(i_1,\cdots,i_h)}\overline{u}_1^{i_1}\cdots\overline{u}_h^{i_h}$$

Posons

$$R_r = \sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_h)\\ \sum_{j=1}^h i_j = r}} b^r_{(i_1,\cdots,i_h)}\overline{u}_1^{i_1}\cdots\overline{u}_h^{i_h}$$

Soit $z_0 \in X\cap\partial\Omega$, d'après [25] p. 33-36 on peut quitte à rénuméroter les u_i, trouver δ holomorphe au voisinage de z_0, $\delta\notin I_{z_0}, \delta\in J_p(u_1,\cdots,u_p)$ et $\delta I_{z_0}\subset(u_1,\cdots,u_p)\mathcal{O}_{v,z_0}$ $p=\operatorname{codim}_{z_0}X$. Pour conclure à $(*)_{r+1}$ il suffit de voir que $R_r \in (I_{z_0} + \overline{I}_{z_0})^{r+1}\mathcal{E}_{\overline{\Omega},z_0}$ or grace au lemme 1 et à l'hypothèse $(I_{z_0} + \overline{I}_{z_0})^{r+1}$ est $(I_{z_0} + \overline{I}_{z_0})$ primaire ceci équivaut à prouver que:

$$|\delta|^{2r} R_r \in (I_{z_0} + \overline{I}_{z_0})^{r+1}\mathcal{E}_{\overline{\Omega}.z_0} \text{ (car } \delta \notin I_{z_0} + \overline{I}_{z_0})$$

or

$$|\delta|^{2r} R_r = \sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_p) \\ \sum_{i=1}^{p} i_j = r}} c^r_{(i_1,\cdots,i_p)}\, \overline{u}_1^{i_1}\cdots\overline{u}_p^{i_p}$$

Utilisant le Théorème d'approximation de Artin d'une manière semblable à celle utilisée dans la preuve du Théorème 1, on montre que dans un voisinage v_{z_0} de z_0 on a

$$\forall z \in X \cap V_{z_0} \cap \overline{\Omega}\ T_z\ c^r_{(i_1,\cdots,i_p)} \in (T_z u_i, T_z\overline{u}_i)_{1\leq i\leq h}$$

On conclue alors grace à la proposition 3 à:

$$c^r_{(i_1,\cdots,i_p)} \in \sum_{1\leq i\leq h} u_i\mathcal{E}_{\overline{\Omega},z_0} + \sum_{1\leq i\leq h} \overline{u}_i\mathcal{E}_{\overline{\Omega}.z_0}$$

et donc à $(*)_{r+1}$.

Nous essayons maintenant d'établir un lien entre la condition X et $\overline{\Omega}$ sont régulièrement situés et le fait que pour paramétrisation (Σ,Π) de X (F.R.S.) soit vérifiée. On a le résultat élémentaire suivant:

LEMME 4: *Soit X un sous-ensemble analytique réel d'un ouvert V de $\mathbb{R}^p$* (Resp *un sous-ensemble analytique complexe d'un ouvert V de $\mathbb{C}^n$*).

Supposons qu'il existe un ouvert U connexe de $\mathbb{R}^d$ et une application analytique propre:

$$\Pi : U \longrightarrow V \text{ vérifiant:}$$

1) $\Pi(U) = X$
2) *$\forall K$ compact $\subset X$, $\forall K'$ compact $\subset U$, il existe des constantes c, $\alpha > 0$ telles que*

$$\forall x \in K,\ \forall y \in K'\ \ |\Pi(y) - x| \geq c\,d(y, \Pi^{-1}(x))^\alpha$$

Alors pour ouvert Ω à bord lisse, $\overline{\Omega} \subset V$ on a:
X et $\overline{\Omega}$ régulièrement situés $\Longleftrightarrow$ (F.R.S.) *est vérifiée* (*avec* (Π, U) *comme paramétrisation*).

PREUVE: Le fait que pour une paramétrisation (F.R.S.) soit vérifiée implique toujours que X et $\overline{\Omega}$ sont régulièrement situés. Réciproquement, soit $\Omega = \{\rho < 0\}$ un ouvert à bord lisse $\overline{\Omega} \subset V$ et supposons que X et $\overline{\Omega}$ sont régulièrement situés; il s'agit de voir que $\forall y_0 \in \overline{\Pi^{-1}(X\backslash\overline{\Omega})}$ $\exists U_{y_0}$ voisinage relativement compact de y_0 et des constantes $c', \alpha' > 0$ telles que:

$$\forall z \in U_{y_0} \cap \Pi^{-1}(X\backslash\overline{\Omega}) \qquad \rho \circ \Pi(z) \geq c' d(z, V(\rho \circ \Pi))^{\alpha'}$$

or par hypothèse X et $\overline{\Omega}$ sont régulièrement situés il existe donc des constantes c_1, $\alpha_1 > 0$ tels que dans un voisinage W de $\Pi(U_{y_0})$ on ait

$$\forall x \in W \cap X\backslash\overline{\Omega}\ d(x, \overline{\Omega}) \geq c_1 d(x, X \cap \overline{\Omega})^{\alpha_1} \text{ or } d(x, \overline{\Omega}) \simeq \rho(x) \text{ donc}$$

$\forall z \in U_{y_0} \cap \Pi^{-1}(X\backslash\overline{\Omega})$ $\rho \circ \Pi(z) \geq c_1 d(\Pi(z),\ X \cap \overline{\Omega})^{\alpha_1}$ soit alors $x \in X \cap \overline{\Omega}$ tel que $d(\Pi(z), X \cap \overline{\Omega}) = |\Pi(z) - x|$ on obtient alors compte-tenu de l'hypothèse 2)

$$\rho \circ \Pi(z) \geq c_1'\ d(z, \Pi^{-1}(x))^{\alpha_1'} \geq c_1'\ d(z, \Pi^{-1}(x \cap \overline{\Omega}))^{\alpha_1'}$$

or comme $\rho \circ \Pi(z) > 0$ $d(z, \Pi^{-1}(X \cap \overline{\Omega})) = d(z, V(\rho \circ \Pi))$

et donc $\rho \circ \Pi(z) \geq c_1'\ d(z, V(\rho \circ \Pi))^{\alpha_1'}$ c.q.f.d.

EXEMPLES: Placcons nous dans $\mathbb{R}^4$ (variables (s, t, x, y)) et soit

$$\Psi(s, t, x, y) \doteq y^3 - tx^2 \text{ et } X = \{\Psi(s, t, x, y) = 0\}$$

Ψ engendre l'idéal des fonctions réelles analytiques nulles sur X.

Soit

$$\Pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$(s, u, v) \longrightarrow (s, u^3, v^3, uv^2)$$

Π est propre $\Pi(\mathbb{R}^3) = X$ et Π vérifie les conditions du lemme 4; ainsi les propositions 1 et 2 donnent $\forall\Omega$ ouvert à bord lisse c $\mathbb{R}^4$:

$$\Psi C^\infty(\overline{\Omega}) \text{ fermé dans } C^\infty(\overline{\Omega}) \Longleftrightarrow X \text{ et } \overline{\Omega} \text{ sont régulièrement situés}$$

Dans [9] E. Bierstone et P.D. Milman proposent une série d'exemples (section 7) où leurs conditions suffisantes ne sont pas satisfaites et où on peut néanmoins conclure à la fermeture de l'idéal. Signalons que pour tous ces exemples la fermeture de l'idéal est équivalente à X et $\overline{\Omega}$ sont régulierement situés ceci grâce à la proposition 2 et au lemme 4.

REMARQUE 8: Soient $X_{i_{1\leq i\leq h}}$ des ensembles analytiques $X_i \subset \mathbb{R}^{P_i}$ admettant des paramétrisations satisfaisant les conditions du lemme 4 alors $X_1 \times \cdots \times X_h \subset \mathbb{R}^{P_1 + \cdots + P_h}$ admet une paramétrisation satisfaisant les conditions du lemme 4.

COROLLAIRE 1.1. *Soient Ω un ouvert à bord lisse de $\mathbb{C}^n; U_1, \cdots, U_h$ des fonctions holomorphes dans un voisinage V de $\overline{\Omega}; X = \{z \in V \text{ tq } U_1 = \cdots U_h = 0\}$ et $\mathcal{I}$ le sous-faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_v$ engendré par les U_i; Supposons que*:

i) *$\forall$ x dans un voisinage de $X \cap \partial\Omega$ $\mathcal{I}_x$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{v.x}$.*

ii) *$\forall$ $x_0 \in X \cap \partial\Omega$ X est une intersection compléte locale en x_0.*

iii) *$\forall$ $x_0 \in X \cap \partial\Omega$ la normalisation $\hat{X}_x$ du germe X_x est une variété lisse.*

Alors les affirmations suivantes sont équivalentes:

1) *X et $\overline{\Omega}$ sont reguliérement situés*

2) *$U_1 C^{\infty}(\overline{\Omega}) + \cdots + U_h C^{\infty}(\overline{\Omega})$ est fermé dans $C^{\infty}(\overline{\Omega})$.*

PREUVE:

2) $\Rightarrow$ 1) résulte de la proposition 1.

1) $\Rightarrow$ 2) En vertu du théorème 1 (version locale) il suffit de voir que $\forall$ $x_0 \in X \cap \partial\Omega$ il éxiste un voisinage V_{x_0} et une parametrisation (Σ, Π) de $X \cap V_{x_0}$ telle que (F.R.S.) soit vérifiée. Prenons donc $x_0 \in X \cap \partial\Omega$, grâce à i) on peut trouver un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que $\forall$ $x \in V_{x_0}$ le germe X_x soit irréductible. Maintenant quitte à reistreindre V_{x_0}, l'hypothèse iii) nous donne un morphisme $\Pi : U \longrightarrow V_{x_0}$ $\Pi(U) = X \cap V_{x_0}$ U ouvert connexe de $\mathbb{C}^d$ $d = \dim_{x_0} X$ et où Π est le composé du morphisme de normalisation et de l'injection canonique de $X \cap V_{x_0}$ dans V_{x_0}; ainsi comme $\forall$ $x \in X \cap V_{x_0}$ le germe X_x est irréductible on a $\forall$ $x \in X \cap V_{x_0}$ $\mathrm{card}\Pi^{-1}(x) = 1$ (cf. [13] p. 114). Soient $\Pi_1, \cdots, \Pi_d$ les composantes de Π et soit $f(t,t')$ la fonction analytique réelle $f(t,t') = \Sigma\ |\Pi_i(t) - \Pi_i(t')|^2$.

Par le thèorème de Lojasiewicz, il éxiste $c, \alpha > 0$ tels que:

$$\sum_{i=1}^{n} |\Pi_i(t) - \Pi_i(t')|^2 \geq c\ d((t,t'), V(f))^{\alpha} \tag{1}$$

Mais $V(f) = \{(u,u') \in U \times U'\ tq\ u = u'\}$ donc $d((t,t'); V(f)) \simeq \|t - t'\|$ ainsi (1) peut se lire, $\forall$ $t \in U, \forall$ $x \in X \cap V_{x_0}$:

$$\|\Pi(t) - x\|^2 \geq c d(t, \Pi^{-1}(x))^{\alpha}$$

Par suite (U, Π) vérifie les conditions du lemme 4, et donc X et $\overline{\Omega}$ régulierement situés entraine que (F.R.S.) est vérifiée avec (U, Π) comme paramétrisation et par suite 1) $\Rightarrow$ 2).

REMARQUES 9:

1) Le corollaire 1.1 contient évidemment le cas où X est sans singularité au voisinage de $\partial\Omega$ et $\mathcal{I}$ est l'idéal des fonctions holomorphes nulles sur X. Dans ce cas le résultat est immédiat et valable sans hypothèse de régularité sur la frontiére de $\partial\Omega$.

2) Les hypothèses i) ii) iii) du corollaire 1.1 autorisent bien entendu X à avoir des singularités au voisinage de $\partial\Omega$;

Ainsi dans $\mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \cdots \times \mathbb{C}^2$ considérons un ensemble analytique X $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ avec $X_i \subset \mathbb{C}^2$ de dimension 1 (localement irréductible) et $\mathcal{I}$ le faisceau des fonctions holomorphes nulles X; Les hypothèses i) ii) iii) du corollaire 1.1 sont satisfaites on peut donc affirmer que pour tout ouvert Ω à bord lisse de $\mathbb{C}^{2n}$:

$\Gamma(\overline{\Omega}, I\mathcal{E}_{\overline{\Omega}})$ fermé dans $C^\infty(\overline{\Omega}) \Longleftrightarrow X$ et $\overline{\Omega}$ sont regulierement situés.

Cependant si chacun des X_i à une singularité à l'origine on a dim Sing$(X) = n-1$ et dim Sing(Sing$(X)) = n-2$ etc. ... on peut alors avoir Sing(X) et $\overline{\Omega}$ non régulierement, ainsi les résultas de [3] [8] où [9] ne sont pas applicables dans cette situation.

3) Dans le corollaire 1.1 on peut remplacer l'hypothèse iii) par: iii)′ $\forall\ x_0 \in X \cap \partial\Omega$ il éxiste un voisinage V_{x_0} et une paramétrisation (U, Π) de $X \cap V_{x_0}$ satisfaisant les conditions du lemme 4.

Ainsi dans $\mathbb{C}^4$ (variables (z_1, z_2, z_3, z_4)) soit l'hypersurface normale définie par $U(z_1, z_2, z_3, z_4) = z_1^2 - z_2 z_3$, elle admet pour paramétrisation

$$\Pi : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^4$$

$$(u, v, z_4) \longrightarrow (uv, u^2, v^2, z_4)$$

et Π satisfait les conditions du lemme 4 donc:

$$U\ C^\infty(\overline{\Omega}) \text{ fermé } \Longleftrightarrow X \text{ et } \overline{\Omega} \text{ sont régulierement situés}$$

Cependant Sing$(X) = \{Z \in \mathbb{C}^4$ tel que $z_1 = z_2 = z_3 = 0\}$ on peut ainsi à nouveau mettre en défaut les conditions suffisantes de [3] [8] [9].

4) Dans le corollaire 1.1 supprimons l'hypothèse ii) et conservons i) et iii) ou bien i) et iii)′ alors:

$$\sum_{i=1}^{h} U_i C^\infty(\overline{\Omega}) + \sum_{i=1}^{h} \overline{U}_i C^\infty(\overline{\Omega}) \text{ fermé } \Longleftrightarrow X \text{ et } \overline{\Omega} \text{ sont régulierement situés}$$

Plaçcons nous par exemple dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}$ (les $n+1$ premières variables sont notées $X_{(i,j)}$ $0 \leq i, j \leq n$ $i+j = n$ la dernière Y). Soit I le sous faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+2}}$ engendré par les polynômes

$$X(i_1, j_1)\ X(i_2, j_2) - X(i_3, j_3)\ X(i_4, j_4)$$

$$(i_1, j_1) + (i_2, j_2) = (i_3, j_3) + (i_4, j_4)$$

et $X = V(I)$, X est normale de dimension 3 Sing$(X) = \{0\} \times \mathbb{C}$ et la parametrisation

$$\Pi : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}$$

$$(Z, W, Y) \longrightarrow (Z^n, Z^{n-1}W, \cdots, ZW^{n-1}, W^n, Y)$$

satisfait les conditions du lemme 4, donc pour tout ouvert Ω à bord lisse de $\mathbb{C}^{n+2}$:

$$\Gamma(\overline{\Omega}, (I + \overline{I}\mathcal{E}_{\overline{\Omega}})) \text{ fermé } \Longleftrightarrow X \text{ et } \overline{\Omega} \text{ sont régulierement situés.}$$

Là encore les conditions de [3] [8] où [9] ne sont pas optimales.

2. - Un Théorème d'idéal fermé dans $A^\infty(\Omega)$

Dans ce début de paragraphe Ω sera un ouvert pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$ à bord lisse C^∞ ou bien Ω sera un produit de tels ouverts i.e. $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_m$ avec Ω_i pseudo-convexe à bord lisse C^∞ de $\mathbb{C}^{p_i}$ $\sum_{i=1}^{m} p_i = n$, les ouverts intervenants ici sont bornés ou non bornés. Nous commencons par quelques rappels et remarques sur la cohomologie des $\mathcal{A}^\infty_{\overline{\Omega}}$ modules.

i) Si Ω est pseudo-convexe à bord lisse C^∞ borné ou non borné $H^q(\overline{\Omega}, \mathcal{A}^\infty_{\overline{\Omega}}) = 0 \quad \forall q \geq 1$.

Ceci résulte de Théorème de Kohn [18] dans le cas borné et des résultats de Gay-Sebbar [14] dans le cas non borné.

ii) Si $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_m$ avec Ω_i pseudo-convexe à bord lisse de $\mathbb{C}^{p_i}$ on a alors:

$\alpha)$ $$C^\infty(\overline{\Omega}_1 \times \cdots \times \overline{\Omega}_m) = C^\infty(\overline{\Omega}_1)\hat{\otimes}C^\infty(\overline{\Omega}_2)\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}C^\infty(\overline{\Omega}_m)$$

$\beta)$ $$C^\infty_{(p,q)}(\overline{\Omega}_1 \times \cdots \times \overline{\Omega}_m) = C^\infty_{(p,q)}(\overline{\Omega}_1)\hat{\otimes}C^\infty_{(p,q)}(\overline{\Omega}_2)\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}C^\infty_{(p,q)}(\overline{\Omega}_m)$$

$\gamma)$ $$A^\infty(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_m) = A^\infty(\Omega_1)\hat{\otimes}A^\infty(\Omega_2)\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}A^\infty(\Omega_m)$$

$\delta)$ $$H^q(\overline{\Omega}_1 \times \cdots \times \overline{\Omega}_m, \mathcal{A}^\infty_{\overline{\Omega}}) = 0 \quad \forall\ q \geq 1$$

$\alpha)\beta)\gamma)\delta)$ sont prouvées par J.M. Ortega dans [23] lorsque les ouverts Ω_i sont bornés, dans sa preuve de $\alpha)$ et $\beta)$ le fait que les ouverts soient bornés n'intervient pas, dans sa preuve de $\gamma)$ et $\delta)$ le fait que les ouverts soient bornés n'intervient que par l'utilisation du Théorème de Kohn, comme ce résultat vaut aussi pour les ouverts non bornés [14], $\gamma)$ et $\delta)$ sont encore valables dans ce cas.

iii) Pour tout $z \in \partial\Omega$ (ou $z \in \Omega$) la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^\infty_{\overline{\Omega},z} \longrightarrow \mathcal{E}_{\overline{\Omega},z} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}^{(0,1)}_{\overline{\Omega},z} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}^{(0,n)}_{\overline{\Omega},z} \longrightarrow 0$$

est exacte (Ω à bord lisse pc ou produit de tels ouverts). En effet ceci découle de i) ou ii)$\delta)$ et de l'existence des "voisinages admissibles arbitrairement fins" de E. Amar [1].

iv) - $\mathcal{E}_{\overline{\Omega},z}$ est un $\mathcal{O}_z$ module fidélement plat.
- $\mathcal{A}^\infty_{\overline{\Omega},z}$ est un $\mathcal{O}_z$ module fidélement plat.

En effet $\mathcal{E}_{\overline{\Omega,z}}$ est toujours $\mathcal{O}_z$ fidèlement plat ([25] ou [22]) ceci joint à l'exactitude de la suite iii) entraine que $\mathcal{A}^\infty_{\overline{\Omega},z}$ est $\mathcal{O}_z$ fidélement plat.

v) Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}$.module cohérent définit dans un voisinage de $\overline{\Omega}$, et admettant au voisinage de $\overline{\Omega}$ une résolution de longueur au moins $2n+1$ par les $\mathcal{O}$.modules libres ie une suite exacte au voisinage de $\overline{\Omega}$.

$$\mathcal{O}^{P_{2n+1}} \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{O}^{P_{2n}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{O}^{P_2} \xrightarrow{\varphi_{2n}} \mathcal{O}^{P_1} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

alors $H^q(\overline{\Omega}, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{\Omega}}) = 0 \quad \forall q \geq 1$.

En effet soit une telle résolution appliquant le foncteur $\otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{\Omega}}$ qui est exacte par iv) on a une suite exacte

$$\mathcal{A}^{\infty}_{\overline{\Omega}}{}^{P_{2n+1}} \xrightarrow{\varphi_1 \otimes I} \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{\Omega}}{}^{P_{2n}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{\Omega}}{}^{P_2} \longrightarrow \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{\Omega}}{}^{P_1} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{\Omega}} \longrightarrow 0$$

Comme $H^q(\overline{\Omega}, \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{\Omega}}{}^{P_i}) = 0 \quad \forall q \geq 1$ d'après i) ii) δ), on en déduit: $H^q(\overline{\Omega}, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{\Omega}}) = H^{2n+q}(\overline{\Omega}, \text{ Ker } \varphi_1 \otimes 1) \quad q \geq 1$.

Maintenant tout fermé de $\mathbb{C}^n$ est de dimension cohomologique $\leq 2n$ ce qui donne le résultat.

vi) Soient $u_1, \cdots, u_h$ des fonctions holomorphes dans un voisinage V de $\overline{\Omega}$. $\mathcal{I}$ le sous-faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_v$ engendré par les ui, $\mathcal{R}$ le ss. $\mathcal{O}_v$ module de $\mathcal{O}_v^h$ des relations entre les u_i, alors si $\overline{\Omega}$ est borné alors

$$H^q(\overline{\Omega}, \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{\Omega}}) = H^q(\overline{\Omega}, \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{\Omega}}) = 0 \quad \forall q \geq 1$$

En effet d'après v) il suffit de trouver des résolutions libres de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{R}$ de longueur au moins $2n+1$ au voisinage de $\overline{\Omega}$, or ceci est aisément fait comme le remarque Gay-Sebbar [14], en se placcant dans l'enveloppe d'holomorphie $\tilde{V}$ de V et en considérant $\overline{\Omega}$ *comme un compact de la variété de Stein* $\tilde{V}$ (cf. [14] preuve de la prop. 5.1).

vii) Soient toujours $u_1, \cdots, u_h$, $\mathcal{I}$ et $\mathcal{R}$ comme en vi)

. Alors si $\overline{\Omega}$ est borné ou si $\mathcal{I}$ et $\mathcal{R}$ admettent au voisinage de $\overline{\Omega}$ des résolutions de longueur au moins $(2n+1)$ par des $\mathcal{O}$ modules libres alors:

$$(*) \qquad u_1 C^{\infty}(\overline{\Omega}) + \cdots + u_h C^{\infty}(\overline{\Omega}) \cap A^{\infty}(\Omega) = u_1 A^{\infty}(\Omega) + \cdots + u_h A^{\infty}(\Omega)$$

Ce résultat est démontré dans Gay-Sebbar ([14] prop. 5.1 et 5.2) lorsque Ω est borné à bord lisse, leur preuve n'utilise que le fait que

$$H^q(\overline{\Omega}, \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{\Omega}}) = H^q(\overline{\Omega}, \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{\Omega}}) = 0 \quad \forall q \geq 1$$

et les pptés iii) et iv), les remarques v) et vi) permettent donc d'affirmer que $(*)$ est encore valable lorsque Ω est un produit d'ouverts bornés à bord lisse pseudo-convexes ou si $\mathcal{I}$ et $\mathcal{R}$ ont des résolutions libres de longueur $2n+1$ au moins au voisinage de $\overline{\Omega}$.

On peut à présent énoncer un résultat de fermeture dans $A^{\infty}(\Omega)$.

THÉORÈME 2: *Soit Ω un ouvert pseudo-convexe borné de $\mathbb{C}^n$ à bord lisse C^∞, $U_1, \cdots, U_h$ des fonctions holomorphes dans un voisinage V de $\overline{\Omega}$ et $\mathcal{I}$ le sous faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_v$ engendré par les U_i.*

Supposons que:

i) $\forall$ *x dans un voisinage de $X \cap \partial\Omega$ $\mathcal{I}_x$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{v.x}$.*

ii) $\forall$ *$x_0 \in X \cap \partial\Omega$ $\mathcal{I}_{x_0}$ peut être engendré par p éléments de $\mathcal{O}_{v.x}$ avec $p = \operatorname{codim}_{x_0} X$.*

iii) $\forall$ *$x_0 \in X \cap \partial\Omega$, $\exists$ un voisinage V_{x_0} de x_0 et une paramétrisation (Σ, Π) de $X \cap V_{x_0}$ tels que (F.R.S.) soit vérifiée.*

Alors l'idéal $U_1 A^\infty(\Omega) + \cdots + U_h A^\infty(\Omega)$ est fermé dans $A^\infty(\Omega)$.

PREUVE: Elle résulte immédiatement du Théorème 1 et de la remarque vii) car

$$\overline{u_1 A^\infty(\Omega) + \cdots + u_h A^\infty(\Omega)} \subset \overline{u_1 C^\infty(\overline{\Omega}) + \cdots + u_h C^\infty(\overline{\Omega})} \cap A^\infty(\Omega)$$

et par le Théorème 1 et vii)

$$\overline{u_1 C^\infty(\overline{\Omega}) + \cdots + u_h C^\infty(\overline{\Omega})} \cap A^\infty(\Omega) = u_1 A^\infty(\Omega) + \cdots + u_h A^\infty(\Omega)$$

COROLLAIRE 2.1: *Soient Ω un ouvert pseudo-convexe borné à bord lisse $C^\infty, U_1, \cdots, U_h, \mathcal{I}$ et X comme dans ce qui precède. Supposons que:*

i) $\forall$ *x dans un voisinage de $X \cap \partial\Omega$ $\mathcal{I}_x$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{v.x}$.*

ii) $\forall$ *$x_0 \in X \cap \partial\Omega$ $\mathcal{I}_x$ peut être engendré par p éléments de $\mathcal{O}_{v.x}$ avec $p = \operatorname{codim}_{x_0} x$.*

iii) $\forall$ *$x_0 \in X \cap \partial\Omega$ la normalisation $\hat{X}_{x_0}$ du germe X_{x_0} est une variété lisse.*

Alors X et $\overline{\Omega}$ régulierement situés entraine que l'idéal $U_1 A^\infty(\Omega) + \cdots + U_h A^\infty(\Omega)$ est fermé dans $A^\infty(\Omega)$.

REMARQUE 1:

i) le Théorème 2 et son corollaire valent aussi lorsque Ω est psuedo-convexe à bord lisse non borné en utilisant [14]

ii) On a un résultat analogue au corollaire 2.1 si l'on remplace iii) par iii)$'$ (remarque 9 3) du §1)

iii) l'hypothèse X et $\overline{\Omega}$ régulièrement situés semble être l'hypothèse "minimale" pour obtenir un théorème d'idéal fermé dans $A^\infty(\Omega)$ du moins lorsqu'on suppose de plus que dans le Théorème 2 X est sans singularité au voisinage de $\partial\Omega$ (cf. [2], [5], [15]).

Nous allons à présent voir que le problème de Gleason pour $A^\infty(\Omega)$ étudié par J.M. Ortega et Jacobzack a toujours une réponse positive.

THÉORÈME 3: *Soit Ω un ouvert pseudo-convexe à bord lisse C^∞, ou bien produit d'ouverts à bord lisse pseudo-convexe (Ω borné ou non borné) alors*

i) *l'idéal* $(z_1-w_1)A^\infty(\Omega\times\Omega)+\cdots+(z_n-w_n)A^\infty(\Omega\times\Omega)$ *est toujours fermé dans* $A^\infty(\Omega\times\Omega)$.

ii) *pour tout* $f\in A^\infty(\Omega)$*; il existe* $g_1,\cdots,g_n\in A^\infty(\Omega\times\Omega)$ *tels que* $f(z)-f(w)=\sum_{1\le i\le n}(z_i-w_i)g_i(z,w)$.

PREUVE: Soient $\mathcal{I}$ le sous faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{2n}$ engendré par les $(z_i-w_i)1\le i\le n$, $\mathcal{R}$ le $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{2n}$ modules des relations entre les (z_i-w_i).
On dispose ici d'une suite exacte dans $\mathbb{C}^{2n}$

$$0\longrightarrow\mathcal{O}^{\binom{n}{n}}\longrightarrow\mathcal{O}^{\binom{n}{n-1}}\longrightarrow\cdots\mathcal{O}^{\binom{n}{2}}\xrightarrow{\varphi_2}\mathcal{O}^{\binom{n}{1}}\xrightarrow{\varphi_1}\mathcal{I}\longrightarrow 0$$

Suite exacte qui n'est autre que le "complexe de Koszul [24]" vu en tant que suite exacte de faisceau ($\mathcal{R}=\operatorname{Ker}\varphi_1$). Par suite $\mathcal{I}$ et $\mathcal{R}$ ont de manière évidente des résolutions libres de longueur aussi grande que l'on veut donc d'après la remarque vii) on a donc

$$\sum_{1\le i\le n}(z_i-\xi_i)C^\infty(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})\cap A^\infty(\Omega\times\Omega)=\sum_{1\le i\le n}(z_i-\xi_i)A^\infty(\Omega\times\Omega)$$

Par suite pour obtenir i) et ii) il suffit de voir que $\sum_{1\le i\le n}(z_i-\xi_i)C^\infty(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$ est toujours fermé. En effet si ceci est réalisé i) est immédiat et ii) sera obtenu en constatant que pour

$$f\in A^\infty(\Omega)\;\; f(z)-f(\xi)\in\overline{\sum_{1\le i\le n}(z_i-\xi_i)C^\infty(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})}$$

ce qui est immédiat par le Théorème spectral de Whitney. En vertu de remarque 9, 1) du §1 pour conclure à la fermeture de l'idéal $\sum_{1\le i\le n}(z_i-\xi_i)C^\infty(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$ il suffit de constater que X et $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ sont régulierement situés $X=\{(z,\xi)\in\mathbb{C}^{2n}$ tel que $z=\xi\}$, or la réguliére situation de X et $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ est immédiate en effet si $(z,z)\in X$

$$d((z,z),\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})\simeq d((z,z),X\cap\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}).$$

REMARQUE 2: Le Théorème 3 a été obtenu pour les ouverts strictement pseudo convexes bornés par Jacobzack [17], et pour les pseudo convexes bornés à frontière réelle analytique et pour "les ouverts bornés pour lesquels le problème de Gleason dans $A^\infty(\Omega)$" a une solution locale par J.M. Ortega [23].

3. - Un nullstellensatz pour certains idéaux de $A^\infty(\Omega)$

Dans cette section, Ω sera un ouvert pseudo-convexe borné à bord lisse C^∞. Soient alors $U_1,\cdots,U_h$ des fonctions holomorphes dans un voisinage V de $\overline{\Omega}$.

THÉORÈME 4: *Soit Ω un ouvert pseudo-convexe borné à bord lisse C^∞, $u_1, \cdots, u_h$ des fonctions holomorphes dans un voisinage V de $\overline{\Omega}$, $X = \{z \in V$* tel que $u_1(z) = \cdots = u_h(z) = 0\}$.

On suppose de plus que X est au voisinage de $X \cap \partial\Omega$ une intersection complète locale localement irréductible et que $\forall\ x_0 \in X \cap \partial\Omega$ la normalisation $\hat{X}_x$ du germe X_x est une variété lisse. Alors si $\overline{X \cap \Omega} = X \cap \overline{\Omega}$ et si X et $\overline{\Omega}$ sont régulièrement situés alors pour toute $F \in A^\infty(\Omega)$ nulle sur $X \cap \overline{\Omega}$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tq $F^m \in u_1A^\infty(\Omega) + \cdots + u_hA^\infty(\Omega)$.

PREUVE: Nous allons d'abord constater que le problème est un problème local.

Soit $\mathcal{I}$ le sous-faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_v$ engendré par les u_i, $\mathcal{R}$ le $\mathcal{O}_v$ module des relations entre les u_i; on a par vi) du §2) $H^1(\overline{\Omega}, \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^\infty_{\overline{\Omega}}) = 0$ et donc $\Gamma(\overline{\Omega}, \mathcal{I}\mathcal{A}^\infty_{\overline{\Omega}}) = u_1A^\infty(\Omega) + \cdots + u_hA^\infty(\Omega)$. Autrement dit $F \in A^\infty(\Omega)$ est dans $u_1A^\infty(\Omega) + \cdots + u_hA^\infty(\Omega)$ si et seulement si $\forall\ z \in \overline{\Omega}$ le germe F_z de F en z appartient à $\Sigma u_i \mathcal{A}^\infty_{\overline{\Omega}.z}$. Par suite pour prouver le théorème il suffit de voir que:

$\forall\ F \in A^\infty(\Omega)$ nulle sur $X \cap \overline{\Omega}$, $\forall z \in \overline{\Omega}$ $\exists$ un entier n_z tel que:

$$F_z^{n_z} \in \sum_{1\le i\le h} u_i \mathcal{A}^\infty_{\overline{\Omega},z}.$$

Pour un point $z \in \Omega$ c'est immédiat par le nullstellensatz classique.

Soit $z_0 \in X \cap \partial\Omega$ et désignons par $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ des fonctions holomorphes dans un voisinage W_{z_0} de z_0 et qui engendrent dans W_{z_0} le faisceau des germes de fonctions holomorphes nulles sur X. Par le nullstellensatz classique il existe un entier n_{z_0} tel que

$$\Big(\sum_{1\le i\le p} \alpha_i \mathcal{O}_{z_0}\Big)^{n_{z_0}} \subset \sum_{1\le i\le h} u_i \mathcal{O}_{z_0}$$

et donc

$$\Big(\sum_{1\le i\le p} \alpha_i \mathcal{A}^\infty_{\overline{\Omega},z_0}\Big)^{n_{z_0}} \subset \sum_{1\le i\le h} u_i \mathcal{A}^\infty_{\overline{\Omega},z_0}$$

Par suite le théorème sera démontré si l'on prouve que le germe F_{z_0} de F en z_0 est dans l'idéal $\sum_{1\le i\le p} \alpha_i\ \mathcal{A}^\infty_{\overline{\Omega},z_0}$. Or par hypothèse il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}^{n-p}$ et un morphisme $\Pi : U \longrightarrow X \cap W_{z_0}$ qui réalise la normalisation. Comme $X \cap W_{z_0}$ est localement irréductible en tout point Π est un homéomorphisme et donc $\overline{X \cap \Omega} = X \cap \overline{\Omega}$ entraine que $\overline{\Pi^{-1}(X \cap \Omega \cap W_{z_0})} = \Pi^{-1}(X \cap \overline{\Omega} \cap W_{z_0})$ d'autre part X et $\overline{\Omega}$ régulierement situés entraine ici que (F.R.S.) est vérifiée avec (U, Π) comme paramétrisation.

On est donc dans les conditions d'application des remarques 3 ii) et 5 ii) et 6) du §1) par suite $F_{z_0} \in (\Sigma\alpha_i \mathcal{E}_{\overline{\Omega},z_0}) \cap \mathcal{A}^\infty_{\overline{\Omega},z_0}$; Mais d'aprés l'existence des voisinages admissibles arbitrairement fins de E. Amar et vii) du §2) $(\Sigma\ \alpha_i \mathcal{E}_{\overline{\Omega}, z_0}) \cap \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{\Omega}, z_0} = \Sigma\ \alpha_i \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{\Omega}, z_0}$ et donc le germe F_{z_0} est dans $\Sigma\ \alpha_i \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{\Omega}, z_0}$ c.q.f.d.

REMARQUE 1:

i) Les hypothèses $\overline{X \cap \Omega} = X \cap \overline{\Omega}$ et X et $\overline{\Omega}$ R.S. semblent être minimales pour obtenir le Théorème 4. Leur nécessité est connue lorsque X est une variété dans certains cas (cf. [2] [5] [14]).

ii) Dans le théorème 4 on peut remplacer l'hypothèse $\forall\ x_0 \in X \cap \partial\Omega$ la normalisation $\hat{X}_{x_0}$ du germe X_{x_0} est une variété lisse par l'éxistence d'une paramétrisation satisfaisant les conditions du lemme 4 §1). (cf. remarque 9 3) du §1).

iii) Lorsque X est sans singularité au voisinage de $\partial\Omega$ le théorème 4 retrouve les résultats de [1] et [4].

4. - Opérateurs linéaires continus de division

Nous rappelons d'abord une définition

DÉFINITION 1 (D. Catlin [11]): *Soit D un ouvert pseudo-convexe borné à bord lisse C^{∞}, on dit que ∂D satisfait la propriété (P), si $\forall\ M > 0$ il existe λ fonction plurisousharmonique*

$$\lambda \in C^{\infty}(\overline{D}) \ 0 \leq \lambda \leq 1 \ tq \ \forall z \in \partial D$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_j \partial \overline{z}_i}(z)\ \overline{t}_i t_j \geq M|t|^2$$

il résulte du travail fait dans [11] *que l'on a*

THÉORÈME (Catlin [11]): *Soit D un ouvert pseudo-convexe borné à bord lisse tq ∂D satisfasse (P) alors le projecteur de Bergman P définit un opérateur linéaire continu de $C^{\infty}(\overline{D}) \to A^{\infty}(D)$.*

D'après [11] tout ouvert D pseudo-convexe borné à bord lisse de type fini au sens de [12] possède la propriété (P).

Utilisant les résultats de Vogt et Wagner [25] sur les sous-espaces et les quotiens de S (où S désigne d'espace des suites à décroissance rapide); nous allons prouver:

THÉORÈME 5: *Soit D un ouvert pseudo-convexe borné à bord lisse de $\mathbb{C}^n$ tel que ∂D possède la propriété (P) ou bien D est un produit d'ouverts du type précédent. (i.e. $D = D_1 \times \cdots \times D_m$ avec D_i pseudo-convexe borné à bord lisse de $\mathbb{C}^{p_i} \partial D_i$ possédant la propriété (P)). Soient alors $u_1, \cdots, u_h$ des fonctions holomorphes dans un voisinage V de $\overline{\Omega}$. Alors* *dès que l'idéal* $u_1 A^{\infty}(D) + \cdots + u_h A^{\infty}(D)$ *est fermé dans* $A^{\infty}(D)$ *il existe un opérateur linéaire continu de division* L *i.e. une application linéaire continue* $L : u_1 A^{\infty}(D) + \cdots + u_h A^{\infty}(D) \to A^{\infty}(D)^h$

$$h \longrightarrow L(h) = (L_i(h))_{1 \le i \le h}$$

tel que $h = \sum_{1 \le i \le h} L_i(h)\ u_i$ *dans* $A^{\infty}(D)$.

On obtient comme corollaire immédiat.

COROLLAIRE 5.1: *Soient* D *un ouvert pseudo-convexe borné à bord lisse dont le bord possède la propriété* (P) *(ou bien produit de tels ouverts) il existe alors un opérateur linéaire continu*

$$\begin{aligned} &L : A^{\infty}(D) \to A^{\infty}(D \times D)^n \\ &f \longrightarrow L(f) = (L_i(f))_{1 \le i \le n} \ \textit{tel que} \\ &f(z) - f(w) = \sum_{1 \le i \le n} L_i(f)(z,w)\ (z_i - w_i) \end{aligned}$$

Notre preuve est basée sur la caractérisation des sous-espaces et des quotient de S ainsi que leur propriétés; Nous utiliserons en particulier sans les énoncer les éléments suivants de [26]: définition 1.1 et 1.2 p. 167, les Théorèmes 1.3 et 1.4 p. 168, le lemme 1.6 p. 168, le Théorème 7.1 p. 180 ainsi que la proposition 8.2 p. 183 et la proposition 8.4 p. 185.

PREUVE DU THÉORÈME 5: Soit $\mathcal{R}$ le $\mathcal{O}_v$ module des relations entre les u_i, en se placcant dans l'enveloppe d'holomorphie $\tilde{D}$ de D on peut trouver une suite exacte au voisinage de $\overline{D}$.

$$\mathcal{O}^{P_{2n+3}} \longrightarrow \mathcal{O}^{P_{2n+2}} \longrightarrow \cdots \mathcal{O}^{P_2} \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{O}^{P_1} \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{I} \longrightarrow 0$$

avec $P_1 = h$ Ker $\varphi_1 = \mathcal{R}$ Ker $\varphi_2 = \mathcal{R}_2$ ainsi

$$(*) \qquad \forall\ q \ge 1\ H^q(\overline{D}, \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{D}}) = H^q(\overline{D}, \mathcal{R}_2 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{D}}) = 0$$

D'autre part les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{i} \mathcal{O}^h \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{I} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{R}_2 \xrightarrow{i} \mathcal{O}^{P_2} \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{R} \longrightarrow 0$$

tensorisées par $\otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{D}}$ et tenant compte de $(*)$ fournissent les suites exactes:

a) $\quad 0 \longrightarrow \Gamma(\overline{D}, \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{D}}) \longrightarrow A^{\infty}(D)^h \xrightarrow{\varphi_1} \Gamma(\overline{D}, \mathcal{I} \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{D}}) \longrightarrow 0$

b) $\quad 0 \longrightarrow \Gamma(\overline{D}, \mathcal{R}_2 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{D}}) \longrightarrow A^{\infty}(D)^{P_2} \longrightarrow \Gamma(\overline{D}, \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{D}}) \longrightarrow 0$

en particulier $\Gamma(\overline{D}, I\mathcal{A}^{\infty}_{\overline{D}}) = \sum_{1\leq i\leq h} u_i A^{\infty}(D)$.

Prouver le Théorème 5 c'est trouver un inverse à droite linéaire continu de φ_1, comme la suite a) est une suite exacte de Fréchet nucléaire ceci sera fait, en vertu du Théorème 7.1 de [26], si l'on prouve que $\Gamma(\overline{D}, \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{D}})$ possède la propriété (Ω) et que $\sum_{1\leq i\leq h} u_i A^{\infty}(D)$ possède la propriété $(D.N)$. Or $\sum_{1\leq i\leq h} u_i A^{\infty}(D)$ est un sous-espace fermé de $A^{\infty}(D)$ et grace à l'exactitude de b) et par le Théorème de l'application ouverte $\Gamma(\overline{D}, \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{D}})$ apparait comme un quotient de $A^{\infty}(D)$, par suite en vertu du lemme 1.6 p. 168 de [25] pour obtenir le Théorème 5 il suffit de voir que $A^{\infty}(D)$ possède à la fois la propriété (Ω) et la propriété $(D.N)$. Maintenant $D = D_1 \times \cdots \times D_m$ avec D_i pseudo-convexe borné à bord lisse C^{∞} dont le bord possède la propriété (P), soit P_i le projecteur de Bergman de $C^{\infty}(\overline{D}_i) \xrightarrow{P_i} A^{\infty}(D_i)$ P_i est continu d'après [11]. On en déduit une application linéaire continue

$$C^{\infty}(\overline{D}_1)\hat{\otimes}C^{\infty}(\overline{D}_2)\cdots\hat{\otimes}C^{\infty}(\overline{D}_m) \longrightarrow A^{\infty}(D_1)\hat{\otimes}A^{\infty}(D_2)\cdots\hat{\otimes}A^{\infty}(D_m)$$

et $P_1\hat{\otimes}P_2\cdots\hat{\otimes}P_m$ est évidemment surjective; on a donc tenant compte des identifications ii) du §2 une application linéaire continue surjective L : $C^{\infty}(\overline{D}) \longrightarrow A^{\infty}(D)$ ainsi par le Théorème de l'application ouverte $A^{\infty}(D)$ apparait comme un quotient de $C^{\infty}(\overline{D})$, d'autre part $A^{\infty}(D)$ est de manière naturelle un sous-espace fermé de $C^{\infty}(\overline{D})$, à nouveau le lemme 1.6 p. 168 de [26] nous dit que pour conclure il suffit de savoir que $C^{\infty}(\overline{D})$ possède à la fois la propriété (Ω) et la propriété $(D.N)$. Or $C^{\infty}(\overline{D})$ a toujours la propriété (Ω) ([26] prop. 8.2 p. 183), le Théorème d'extension de Seeley et la prop. 8.4 de [26] montrent que $C^{\infty}(\overline{D})$ a la propriété $(D.N)$ ($\overline{D}$ variété à coin).

REMARQUE: Le Théorème 5 dans le cas où l'on suppose que D est un seul ouvert à bord lisse dont le bord possède la propriété (P) a été obtenu simultanément dans [9].

Le théorème 5 est valable sous n'importe quelle hypothèse sur le bord des ouverts Ω_i garantissant que $P_i : C^{\infty}(\overline{\Omega}_i) \longrightarrow A^{\infty}(\Omega_i)$ est continue.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. AMAR, *Cohomologie complexe et applications*, J. London Math. Soc. (2) **29**, (1984), p. 127-140.

[2] E. AMAR, *Non division dans $A^{\infty}(\Omega)$*, Math. Z. Band **188**, 1985, p. 493-511.

[3] E. AMAR, *Division, avec singularités, dans $A^{\infty}(\Omega)$*, prépublication, Université Bordeaux I n° 8602.

[4] P. DE BARTOLOMEIS - G. TOMASSINI, *Finetely generated ideals in $A^{\infty}(\overline{D})$*, Adv. in Math. (46) 1982, p. 162-170.

[5] P. De Bartolomeis, *Holomorphic generators of some ideals in* $C^{\infty}(\overline{D})$, preprint.

[6] E. Bierstone - P.D. Milman, *Composite differentiable functions*, Ann. of Math. **116**, (1982), p. 541-558.

[7] E. Bierstone - P.D. Milman, *Relations among analytic functions*, preprint.

[8] E. Bierstone - Lettres à E. Amar (juin, juillet 1984).

[9] E. Bierstone - P.D. Milman, *Ideals of holomorphic functions with* C^{∞} *boundary values on pseudo convex domain*, preprint (1986).

[10] J. Bruna - J.M. Ortega, *Closed finetely generated ideals in algebras of holomorphic functions and smooth to the boundary in strictly pseudo-convex domains*, Math. Ann. **268**, p. 137-157, (1984).

[11] Catlin (D), *Global regularity of the* $\overline{\partial}$. *Neumann problem*, Proced. sympt. pures Math. vol 41, (1984), p. 39-49.

[12] J. D'Angelo, *Real hypersurfaces, orders of contact and applications*, Ann. of Math. (2) **115**, (1982), p. 615-637.

[13] G. Fischer, *Complex analytic geometry*, Springer Lecture Notes in Math. n° 538.

[14] R. Gay - A. Sebbar, *Division et extension dans l'algèbre* $A^{\infty}(\Omega)$ *d'un ouvert pseudo-convexe à bord lisse de* $\mathbb{C}^n$, Math. Z. Band **189**, 1985, p. 421-447.

[15] M. Hickel, *Sur un problème de division dans l'algèbre* $A^{\infty}(\Omega)$ *d'un ouvert faiblement pseudo-convexe de* $\mathbb{C}^2$, prépublication.

[16] H. Hironaka, *Sub analytic sets. Number theory, Algebraic geometry and commutative algebra*, p. 453-493, Kinokuniya Tokyo 1973.

[17] P. Jakōbczazk, *On Fornaess imbedding Theorem*, preprint.

[18] J.J. Kohn, *Global regularity of* $\overline{\partial}$ *on weakly pseudo-convex manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **181**, p. 273-292 (1973).

[19] B. Malgrange, *Ideals of differentiable functions*, Oxford university press, 1966.

[20] B. Malgrange, *Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques*, Bull. Soc. Math. France, **91**, 1963, p. 113-127.

[21] A. Nagel, *Flatness criteria for modules of holomorphic functions on* $\mathcal{O}_n$, Duke Math. J., vol. 40 (1973), p. 433-448.

[22] A. Nagel, *On algebras of holomorphic functions with* C^{∞} *boundary values*, Duke Math. J., vol. 41, (1974), p. 527-535.

[23] J.M. Ortega, *Sur une extension du problème de Gleason dans les domaines pseudo-convexes*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, **34-4**, (1984), p. 67-74.

[23bis] J.M. Ortega, *On Gleason's decomposition for* $A^{\infty}(\Omega)$, preprint Université autonome de Barcelone.

[24] J.P. Serre, *Algèbre locale et multiplicités*, Springer Lectures Notes n° 11, 1965.

[25] J.C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, Ergeb. Math. Band **71**, Springer 1972.

[26] D. Vogt, *Subspaces and quotient spaces of* S. *In functional analysis surveys and recent results*, North-Holland Math. Stud. n° **27** (1977), p. 167-187.

Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
351, cours de la Libération
33405 Talence, France