Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

François Rouvière

Sur la transformation d'Abel des groupes de Lie semisimples de rang un

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 10, nº 2 (1983), p. 263-290

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1983_4_10_2_263_0>

Sur la transformation d'Abel des groupes de Lie semisimples de rang un.

FRANÇOIS ROUVIÈRE

Résumé. – *A partir d'une formule explicite d'inversion de la transformation d'Abel pour les groupes de Lie semisimples de rang un, obtenue directement par réduction à* $SU(2,1)$, *on donne une présentation élémentaire de l'analyse harmonique sphérique sur ces groupes: théorèmes de Paley-Wiener pour les fonctions* C^∞ *à support compact et pour les fonctions de Schwartz de type* L^p, *théorème de support, détermination des fonctions sphériques et de la mesure de Plancherel. Une formule d'inversion analogue est valable pour tous les groupes semisimples complexes.*

Summary. – *An explicit inversion formula of the Abel transform for rank one semisimple Lie groups is proved by* $SU(2,1)$ *reduction. This provides an elementary exposition for the spherical harmonic analysis on these groups: Paley-Wiener theorems for* C^∞ *functions with compact support and for Schwartz functions of* L^p *type, computation of spherical functions and Plancherel measure. A similar inversion formula holds for all complex semisimple Lie groups.*

0. – Introduction.

Soient G un groupe de Lie semisimple réel, connexe et de centre fini, et $G = KAN$ une décomposition d'Iwasawa. Dans l'analyse harmonique « sphérique » correspondante, i.e. celle des fonctions f sur G invariantes à gauche et à droite par K, on sait l'importance du rôle joué par la transformation d'Abel:

$$\mathcal{A}f(a) = e^{\varrho(\log a)}\int_N f(an)\,dn\,, \qquad a \in A\,.$$

Le but de cet article est de revenir sur ce rôle dans le cas où G est de rang réel un ($\dim A = 1$). On donne d'abord une formule d'inversion ex-

Pervenuto alla Redazione il 17 Settembre 1982.

plicite de $\mathcal{A}$ (théorème 1), obtenue par réduction à $SU(2,1)$; $\mathcal{A}^{-1}$ est un opérateur intégro-différentiel sur A, qui se réduit à un opérateur différentiel lorsque toutes les sous-algèbres de Cartan sont conjuguées dans l'algèbre de Lie de G. A partir de ce seul résultat, les principaux théorèmes de l'analyse harmonique sphérique de G peuvent être démontrés élémentairement, i.e. par de l'analyse facile sur $\boldsymbol{R}$. Le théorème 2 relie les supports de f et $\mathcal{A}f$; c'est la recherche d'une démonstration directe de ce résultat qui a motivé le présent article. La transformation sphérique des fonctions C^∞ à support compact sur G bi-invariantes par K peut être définie soit en composant les transformations d'Abel et de Fourier sur A, soit à partir des fonctions sphériques φ_λ. Le premier point de vue fournit aussitôt le théorème de Paley-Wiener pour la transformée sphérique (théorème 3). Le deuxième permet, en combinant l'inversion d'Abel et l'inversion de Fourier, d'expliciter les φ_λ au moyen des fonctions hypergéométriques et de démontrer le théorème de Plancherel en calculant la mesure (fonction $|c(\lambda)|^{-2}$ de Harish-Chandra): voir théorème 4. L'explicitation de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^{-1}$ facilite l'étude de leur extension à d'autres espaces de fonctions ou distributions; on caractérise ici les transformées sphériques des fonctions $f \in I^p(G)$ (espace de Schwartz de fonctions K–bi-invariantes de type L^p): voir théorème 5. Les méthodes de démonstration de ces théorèmes doivent se généraliser aux groupes de rang quelconque, dès lors qu'on dispose d'une formule d'inversion de la transformation d'Abel.

Enfin, une formule analogue pour $\mathcal{A}^{-1}$ est valable aussi pour G semi-simple complexe, sans restriction de rang; elle est démontrée ici en admettant l'expression des φ_λ dans ce cas (théorème 6), mais il serait sûrement instructif d'en obtenir une démonstration directe.

Bien entendu, les théorèmes d'analyse harmonique 2 à 5 ci-dessus sont connus depuis longtemps. Nous espérons seulement en avoir rendu plus élémentaires les démonstrations, surtout pour le théorème 5; dans cet esprit, on s'est efforcé de démontrer entièrement tous les résultats utiles, avec le minimum de références à la littérature et, à cette occasion, d'expliciter toutes les constantes. Les théorèmes 2 et 3 sont dus à Helgason [3], le théorème 4 à Harish-Chandra [1], le théorème 5 à Helgason [4] (pour $p = 1$) et Trombi (cf. Trombi-Varadarajan [1]). Les théorèmes 1 et 6 d'inversion de $\mathcal{A}$ n'ont pas été publiés à ma connaissance, sauf pour $G = SO_0(1, n)$ (cf. Takahashi [1], qui donne des résultats très complets pour ce cas); S. Helgason a obtenu indépendamment une démonstration du théorème 1 (communication personnelle).

Les notations sont définies au paragraphe 1. Au paragraphe 2 on calcule la partie radiale de an par réduction à $SU(2,1)$. Au paragraphe 3 on remplace $\mathcal{A}$ par un opérateur intégral F sur $\boldsymbol{R}$, puis E sur $[1, +\infty[$ par le changement $f(t) = \varphi(\operatorname{ch} t)$. Les opérateurs E, F, et $\mathcal{A}$ sont inversés au paragraphe 4. Le paragraphe 5 donne les premières applications à l'analyse harmonique sphérique, le paragraphe 6 aux espaces $I^p(G)$. Le paragraphe 7, indépendant des autres, donne la formule d'inversion de $\mathcal{A}$ pour G complexe.

1. – Notations.

(*a*) *Notations générales.* On note $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls, entiers relatifs, réels, et complexes respectivement.

Pour chaque espace de fonctions sur $\boldsymbol{R}$ à valeurs complexes, l'indice $+$ signifiera le sous-espace des fonctions paires: C^∞_+ par exemple, ou $\mathcal{D}_+$ (fonctions C^∞ à support compact, paires). On notera C^∞_1 l'espace des fonctions C^∞ sur $[1, +\infty[$ (indéfiniment dérivables à droite en 1), et D la dérivation $D\varphi(u) = -\varphi'(u)$, pour $\varphi \in C^\infty_1$, $u \geqslant 1$.

Si G est un groupe de Lie réel, on note e, $\mathfrak{g}$, exp, Ad, ad, l'élément neutre, l'algèbre de Lie, l'application exponentielle, la représentation adjointe de G, et de $\mathfrak{g}$ respectivement. L'algèbre enveloppante complexifiée $U(\mathfrak{g})$ sera identifiée à l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche sur G, à coefficients complexes.

(*b*) *Notations semisimples.* Dans la suite G sera toujours un groupe de Lie semisimple réel, connexe non compact et de centre fini. Soient B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, θ une involution de Cartan, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan correspondante; notons $(X, Y) = -B(X, \theta Y)$ pour X, $Y \in \mathfrak{g}$, d'où la norme $|X| = (X, X)^{1/2}$. Soient $\mathfrak{a}$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}$, de dual (réel) $\mathfrak{a}^*$; pour $\alpha, \beta \in \mathfrak{a}^*$, on définit $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ par $\alpha(H) = (H_\alpha, H)$ pour tout $H \in \mathfrak{a}$, puis $(\alpha, \beta) = (H_\alpha, H_\beta)$ et $|\alpha| = (\alpha, \alpha)^{1/2}$. Soient Σ le système de racines (restreintes) associé au couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, Σ^+ le sous-ensemble des racines positives défini par le choix d'une chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$, et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ la décomposition d'Iwasawa correspondante; $\mathfrak{n}$ est somme directe des

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \,|\, [H, X] = \alpha(H)X \text{ pour tout } H \in \mathfrak{a}\}\,,$$

pour $\alpha \in \Sigma^+$. Soit $m_\alpha = \dim \mathfrak{g}_\alpha$ la multiplicité de $\alpha \in \mathfrak{a}^*$; α est donc racine si et seulement si $m_\alpha > 0$; on pose

$$\varrho = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha\,.$$

Soient $G = KAN$ la décomposition d'Iwasawa correspondante pour le groupe, θ l'involution de G définie par celle de $\mathfrak{g}$, et W le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Pour $x \in G$, on note $H(x)$ l'unique élément de $\mathfrak{a}$ tel que $x \in K \cdot \exp H(x) \cdot N$. En revanche, dans la décomposition de Cartan $G = KAK$, il y a seulement unicité modulo W de la A-composante d'un élément de G.

On note $C^\infty(G\|K)$, resp. $\mathfrak{D}(G\|K)$, l'espace des fonctions à valeurs complexes, C^∞, resp. C^∞ à support compact, sur G qui sont invariantes à droite et à gauche par K; et $C^\infty_W(A)$, resp. $\mathfrak{D}_W(A)$, l'espace des fonctions C^∞, resp. C^∞ à support compact, sur A qui sont W-invariantes. log désigne l'inverse de exp: $\mathfrak{a} \to A$; cependant il sera souvent commode d'identifier $\mathfrak{a}$ et A, en omettant d'écrire exp ou log dans ce cas. Enfin on note $f \mapsto f_A$ la restriction à A d'une fonction sur G; pour $f \in C^\infty(G\|K)$, on a $f_A \in C^\infty_W(A)$.

(c) *Transformation d'Abel.* Précisons d'abord la normalisation des mesures invariantes dH, da, dk, dn, dx utilisées sur $\mathfrak{a}$, A, K, N, G respectivement. dH est la mesure de Lebesgue associée à la structure euclidienne $(\ ,\ )$ sur $\mathfrak{a}$, da lui correspond par exp: $d(\exp H) = dH$, dk est normalisée par $\int_K dk = 1$, dn par la condition classique

$$\int_N e^{-2\varrho(H(\theta n))}\,dn = 1\,, \tag{1}$$

et dx par

$$\int_G f(x)\,dx = \int_{K\times A\times N} f(kan)\,e^{2\varrho(\log a)}\,dk\,da\,dn\,.$$

La *transformation d'Abel* $\mathcal{A}$ est définie par

$$\mathcal{A}f(a) = e^{\varrho(\log a)}\int_N f(an)\,dn\,,$$

pour $f \in \mathfrak{D}(G\|K)$, $a \in A$. En composant avec la transformation de Fourier ^ de $\mathfrak{a}$, on obtient la *transformée sphérique*

$$\tilde{f}(\lambda) = (\mathcal{A}f\circ\exp)^\wedge(\lambda) = \int_{\mathfrak{a}} \mathcal{A}f(\exp H)\,e^{-i\lambda(H)}\,dH\,, \qquad \lambda \in \mathfrak{a}^*\,.$$

Un excellent exposé sur $\mathcal{A}$ est donné, par exemple, dans Duistermaat et al. [1], mais nous n'en utiliserons pas les résultats. Rappelons seulement que $\mathcal{A}(f * g) = \mathcal{A}f * \mathcal{A}g$, où $f, g \in \mathfrak{D}(G\|K)$ et $*$ désigne la convolution, dans G et dans A.

(d) *Cas du rang un.* Dans les paragraphes 2 à 6 on supposera de plus que G est de rang réel un, i.e. $\dim \mathfrak{a} = 1$. L'ensemble Σ^+ a alors un ou deux éléments: α, et éventuellement 2α. Définissons $H \in \mathfrak{a}$ par $\alpha(H) = 1$; on notera simplement ϱ le nombre

$$\varrho = \varrho(H) = (m_\alpha/2) + m_{2\alpha}.$$

Toutes les démonstrations sont faites dans le cas où 2α est racine; d'après des résultats d'Araki, m_α est alors pair et $m_{2\alpha}$ impair (cf. e.g. Helgason [2], p. 530). Pour le cas (plus facile) où 2α n'est pas racine, il suffira de remplacer partout $m_{2\alpha}$ par 0; le cas où toutes les sous-algèbres de Cartan sont conjuguées dans $\mathfrak{g}$ correspond à m_α pair et $m_{2\alpha} = 0$ (ibid. p. 429).

D'autre part $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{2\alpha}$, avec $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha] \subset \mathfrak{g}_{2\alpha}$ et $[\mathfrak{g}_{2\alpha}, \mathfrak{n}] = 0$.

On a aussi:

$$|\alpha| = |H|^{-1} = (2m_\alpha + 8m_{2\alpha})^{-1/2}; \tag{2}$$

en effet $|\alpha|^2 = B(H_\alpha, H_\alpha) = \operatorname{tr}(adH_\alpha)^2$, et adH_α admet les valeurs propres $\pm\, \alpha(H_\alpha) = \pm\, |\alpha|^2$ avec multiplicité m_α et $\pm\, 2|\alpha|^2$ multiplicité $m_{2\alpha}$, d'où $|\alpha|^2 = 2m_\alpha|\alpha|^4 + 2m_{2\alpha}4|\alpha|^4$.

Au moyen de la base H et de l'exponentielle, on peut identifier $\mathfrak{a}$ et A à $\boldsymbol{R}$; alors, compte tenu des normalisations, $d(\exp tH) = |H|\, dt = |\alpha|^{-1}\, dt$, où dt est la mesure de Lebesgue usuelle de $\boldsymbol{R}$. La mesure dn sera explicitée au paragraphe 3.

Enfin le groupe W est réduit à $\{+1, -1\}$, et les fonctions W-invariantes sur A s'identifient aux fonctions paires sur $\boldsymbol{R}$: $C^\infty_W(A) = C^\infty_+$, $\mathcal{D}_W(A) = \mathcal{D}_+$. Pour $x \in G$ notons $s(x)$ le nombre $\geqslant 0$ tel que $x \in K\cdot\exp s(x)H\cdot K$ (décomposition de Cartan); alors $f(x) = f_A(s(x))$ pour $f \in C^\infty(G\|K)$.

2. – Réduction à $SU(2,1)$.

Dorénavant, et jusqu'à la fin du paragraphe 6, on suppose G de rang réel un, en adoptant les notations ci-dessus. Le lemme suivant est fondamental pour nous:

LEMME 1. (i) *Soit* $x = k\cdot\exp tH\cdot\exp(X + X')$ *un élément de* G, *avec* $k \in K$, $t \in \boldsymbol{R}$, $\alpha(H) = 1$, $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ *et* $X' \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$. *Alors* $x \in K\cdot\exp s(x)H\cdot K$, *avec* $s(x) \geqslant 0$ *et*

$$\operatorname{ch}^2 s(x) = \left(\operatorname{ch} t + \tfrac14 |\alpha|^2|X|^2 e^t\right)^2 + \tfrac12 |\alpha|^2|X'|^2 e^{2t}. \tag{3}$$

(ii) *Si* $n = \exp(X + X')$ *on a*

$$e^{2\varrho(H(\theta n))} = \left[\left(1 + \frac{|\alpha|^2}{2}|X|^2\right)^2 + 2|\alpha|^2|X'|^2\right]^{(m_\alpha/2)+m_{2\alpha}}. \tag{4}$$

DÉMONSTRATION. Le lemme s'obtient par réduction à $SU(2,1)$ (technique de Helgason-Schiffmann). La méthode étant exposée en détail dans Helgason [2], ch. IX, § 3 (ou [4], ch. III, §1), nous ne donnons ici qu'un résumé des calculs qui conduisent à (3), généralisation facile de ceux de [2]; la relation (4) est démontrée dans [2], nous n'y reviendrons pas.

Fixons X et X' non nuls. Alors la sous-algèbre $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ engendrée par les vecteurs $X, X', \theta X, \theta X'$ est isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{g}_0 = su(2,1)$ des matrices:

$$Z = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{A}} & z \\ & & z' \\ \hline \bar{z} & \bar{z}' & -\operatorname{tr} A \end{array}\right)$$

avec $z, z' \in \boldsymbol{C}$, et A matrice 2×2 antihermitienne. Pour montrer cela on définit une application $p\colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}_0$ sur les générateurs de $\mathfrak{g}^*$ par

$$p(X) = 2^{-1/2}|\alpha||X|\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad p(X') = 2^{-1/2}|\alpha||X'|\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i \\ 0 & i & -i \end{pmatrix}$$

$$p(\theta X) = \theta_0 p(X)\,, \qquad p(\theta X') = \theta_0 p(X')\,,$$

où les normes $|\,|$ sont calculées au moyen de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, et θ_0 est l'involution de Cartan $\theta_0 Z = -{}^t\bar{Z}$ de $\mathfrak{g}_0$ (^{t} désigne la transposée); en calculant dans $\mathfrak{g}$ et dans $\mathfrak{g}_0$, on vérifie que p se prolonge en un isomorphisme d'algèbres de Lie qui transforme l'élément $H = |\alpha|^{-2}|X|^{-2}[\theta X, X]$ de $\mathfrak{g}^*$ en

$$p(H) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons $X_0 = p(X)$, $X'_0 = p(X')$, $H_0 = p(H)$. Soient $G_0 = SU(2,1)$, simplement connexe et d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ (le sous-groupe compact maximal $K_0 = SU(2)$, d'algèbre $\mathfrak{k}_0$, étant simplement connexe), et G^* le sous-groupe analytique de G défini par $\mathfrak{g}^*$. L'homomorphisme $\pi\colon G_0 \to G^*$ défini par $p^{-1}\colon \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}^*$ donne G_0 comme revêtement simplement connexe de G. En appliquant π à la décomposition de Cartan (pour G_0)

$$x_0 = e^{tH_0} e^{X_0 + X'_0} = k_1 e^{s_0 H_0} k_2$$

avec $t \in \boldsymbol{R}$, $k_1, k_2 \in K_0$, $s_0 \geqslant 0$, on obtient

$$\exp tH \cdot \exp (X + X') = \pi(k_1) \cdot \exp s_0 H \cdot \pi(k_2) ,$$

dans $G^* \subset G$. Comme $\theta p^{-1} = p^{-1}\theta_0$ d'après la définition de p, on a $p^{-1}(\mathfrak{k}_0) \subset \mathfrak{k}$, d'où $\pi(K_0) \subset K$; par suite s_0 coïncide avec le nombre $s(x)$ cherché, pour $x = k \cdot \exp tH \cdot \exp (X + X')$, et s'obtiendra simplement par calculs d'exponentielles de matrices 3×3.

En observant que

$$\operatorname{tr} ({}^t\overline{x}_0 x_0) = \operatorname{tr} (e^{2s_0 H_0}) = 1 + 2 \operatorname{ch} 2s_0 ,$$

et en explicitant les exponentielles, on obtient (3) sans difficulté, d'où le lemme.

Remarques. 1) L'égalité (3) montre que $s(x) \geqslant |t|$ avec égalité seulement si $x = k \cdot \exp tH$; voir Helgason [3], p. 306 pour une démonstration géométrique de ce fait.

2) Lorsque $m_{2\alpha} = 0$, les égalités (3) et (4) restent valables, avec $X' = 0$; elles s'obtiennent alors plus simplement par réduction à $SU(1, 1)$ en considérant l'algèbre de Lie engendrée par X et θX.

3) On remarque que $s(x)$ ne dépend que des normes de X et X' (et de t); pour $m_{2\alpha} > 1$,cela s'explique par un théorème de Kostant d'après lequel Ad M agit transitivement sur les sphères unité de $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ (M le centralisateur de A dans K; cf. Wallach [1], p. 265).

3. – Les opérateurs E et F.

Avec les notations du paragraphe 1(d), la transformation d'Abel s'écrit

$$\mathcal{A}f(\exp tH) = e^{t\varrho} \int_N f_A\big(s(\exp tH \cdot n)\big)\, dn ,$$

où $f \in \mathfrak{D}(G\|K)$, et la restriction f_A de f à A est identifiée à une fonction paire sur $\boldsymbol{R}$; la convergence de l'intégrale est claire, f étant à support compact et $s(\exp tH \cdot n) \geqslant |t|$. Il est ici avantageux de considérer $\mathcal{A}$ comme opérateur intégral sur A, i.e. sur $\boldsymbol{R}$: on a $\mathcal{A}f(\exp tH) = Ff_A(t)$, où F est défini par

$$Fg(t) = e^{t\varrho} \int_N g\big(s(\exp tH \cdot n)\big)\, dn , \qquad g \in \mathfrak{D}_+ . \tag{5}$$

Explicitons la mesure dn au moyen de (1) et (4). Soit dX, resp. dX', la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}_\alpha$, resp. $\mathfrak{g}_{2\alpha}$, définie par les produits scalaires induits par $(\, , \,)$; alors $dn = C_N \, dX \, dX'$, si $n = \exp(X + X')$, où C_N est une constante positive. Comme

$$\int_{\mathfrak{g}_\alpha} \varphi(|X|) \, dX = 2\pi^{m_\alpha/2} \Gamma(m_\alpha/2)^{-1} \int_0^\infty \varphi(r) \, r^{m_\alpha - 1} \, dr \, ,$$

et de même avec $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ et $m_{2\alpha}$, le nombre C_N est déterminé, d'après (1) et (4), par

$$4C_N \int_0^\infty r^{m_\alpha - 1} \, dr \int_0^\infty [(1 + \tfrac{1}{2}|\alpha|^2 r^2)^2 + 2|\alpha|^2 r'^2]^{-\varrho} r'^{m_{2\alpha}-1} \, dr' \\ = \pi^{-(m_\alpha + m_{2\alpha})/2} \Gamma(m_\alpha/2) \Gamma(m_{2\alpha}/2) \, .$$

Les deux intégrales se ramènent à des fonctions Béta (cf. Magnus et al. [1], p. 7), au moyen des changements de variables

$$u = 2|\alpha|^2 r'^2 (1 + \tfrac{1}{2}|\alpha|^2 r^2)^{-2}$$

dans l'intégration en r', puis $v = |\alpha|^2 r^2/2$ dans celle en r. On trouve

$$(6) \qquad C_N = 2^{(m_{2\alpha} - m_\alpha)/2} (|\alpha|/\sqrt{\pi})^{m_\alpha + m_{2\alpha}} \Gamma(m_\alpha + m_{2\alpha}) \Gamma((m_\alpha + m_{2\alpha})/2)^{-1} \, ,$$

et donc, pour $f \in \mathfrak{D}_+$:

$$Ff(t) = C_N e^{t\varrho} \int_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{2\alpha}} f\big(s(\exp tH \cdot \exp(X + X'))\big) \, dX \, dX' \, .$$

L'expression (3) de s suggère le changement de fonction $f(t) = \varphi(\operatorname{ch} t)$ autorisé par le lemme suivant:

Lemme 2. – *Munissons l'espace C_+^∞ des fonctions paires C^∞ sur $\boldsymbol{R}$ de la topologie induite par $C^\infty(\boldsymbol{R})$, et l'espace C_1^∞ des fonctions C^∞ sur $[1, +\infty[$ des semi-normes $\sup_{1 \leqslant u \leqslant a} |\varphi^{(k)}(u)|$, $a \geqslant 1$, $k \in \boldsymbol{N}$. Alors l'application $\varphi \mapsto f$ définie par $f(t) = \varphi(\operatorname{ch} t)$ est un isomorphisme d'espaces de Fréchet de C_1^∞ sur C_+^∞.*

Démonstration. (Cf. Takahashi [1], p. 328; la preuve ci-dessous, plus élémentaire, ne fait pas intervenir les fonctions sphériques). Le seul point non évident est que l'application réciproque $f \mapsto \varphi$ est bien définie, et continue. D'après l'identité $\operatorname{ch} t = 2\operatorname{sh}^2(t/2) + 1$, le changement $t \mapsto 2\operatorname{sh}(t/2)$

sur la variable de f(C^∞-difféomorphisme impair de $\boldsymbol{R}$ sur $\boldsymbol{R}$), et la translation $u \mapsto u-1$ sur la variable de φ permettent de remplacer la fonction $t \mapsto \operatorname{ch} t$ par $t \mapsto t^2/2$ dans l'énoncé du lemme, et l'espace C_1^∞ par l'espace analogue défini sur $[0, +\infty[$; supposons cela fait.

Pour f donnée dans C_+^∞, l'égalité $f(t) = \varphi(t^2/2)$ définit $\varphi \in C^\infty(]0, +\infty[)$; il reste à étudier la dérivabilité de φ en 0. Or $\varphi'(t^2/2) = (t^{-1}d/dt)(\varphi(t^2/2))$ et par récurrence

$$(t^{-1}d/dt)^n = \sum_{1\leqslant p\leqslant n} a_{n,p} t^{p-2n}(d/dt)^p, \tag{7}$$

avec $t>0$, $n \geqslant 1$, $a_{n,p} \in \boldsymbol{Z}$, $a_{n,n}=1$, d'où

$$\varphi^{(n)}(t^2/2) = \sum_{1\leqslant p\leqslant n} a_{n,p} t^{p-2n} f^{(p)}(t) .$$

Le comportement des $f^{(p)}(t)$ est donné par la formule de Taylor

$$f^{(p)}(t) = \sum_{p\leqslant q\leqslant 2n} f^{(q)}(0)\frac{t^{q-p}}{(q-p)!} + t^{2n-p+1}R_{n,p}(t) ,$$

avec $2n \geqslant p$ et

$$R_{n,p}(t) = \int_0^1 \frac{(1-s)^{2n-p}}{(2n-p)!} f^{(2n+1)}(ts)\, ds ,$$

fonction C^∞ sur $\boldsymbol{R}$. En reportant et réordonnant, compte tenu de $f^{(q)}(0)=0$ pour q impair, il reste

$$\varphi^{(n)}(t^2/2) = \sum_{1\leqslant q\leqslant n} c_{n,q} t^{2(q-n)} f^{(2q)}(0) + tR_n(t) ,$$

où les $c_{n,q}$ sont de nouveaux coefficients indépendants de f, et $R_n = \sum_{1\leqslant p\leqslant n} a_{n,p}R_{n,p}$.

Si f est un polynôme pair de degré $\leqslant 2n$, R_n est donc identiquement nul, d'où

$$\varphi^{(n)}(t^2/2) = \sum_{1\leqslant q\leqslant n} c_{n,q} t^{2(q-n)} f^{(2q)}(0) .$$

Mais φ est alors un polynôme de degré $\leqslant n$, et l'examen des termes de plus haut degré de f et φ donne directement dans ce cas

$$\varphi^{(n)}(t^2/2) = 2^n n!(2n)!^{-1} f^{(2n)}(0) ,$$

d'où par identification $c_{n,n} = 2^n n!(2n)!^{-1}$ et $c_{n,q}=0$ pour $1 \leqslant q < n$.

En revenant au cas général $f \in C_+^\infty$ on voit donc que, pour $t > 0$

$$\varphi^{(n)}(t^2/2) = c_{n,n} f^{(2n)}(0) + tR_n(t)\,.$$

Par suite $\varphi^{(n)}(u)$ a une limite lorsque $u > 0$ tend vers 0, d'où $\varphi \in C^\infty([0, +\infty[)$, avec les majorations

$$\sup_{0 \leqslant u \leqslant a} |\varphi^{(n)}(u)| \leqslant c_{n,n} |f^{(2n)}(0)| + b_n \sup_{t^2/2 \leqslant a} |f^{(2n+1)}(t)|$$

($a > 0$ donné, b_n constante > 0), qui entraînent la continuité de $f \mapsto \varphi$; d'où le lemme.

COROLLAIRE. (i) *L'application $f \mapsto \varphi$ est une bijection de l'espace $\mathfrak{D}_+$ des fonctions C_+^∞ à support compact sur l'espace $\mathfrak{D}_1$ des fonctions C_1^∞ à support compact dans* $[1, +\infty[$.

(ii) *La restriction à A: $f \mapsto f_A$ est une bijection de $C^\infty(G\|K)$ sur C_+^∞, et de $\mathfrak{D}(G\|K)$ sur $\mathfrak{D}_+$.*

DÉMONSTRATION. (i) est immédiat. Pour (ii) il suffit de définir le *prolongement* p: $C_+^\infty \to C^\infty(G\|K)$ par $pg(x) = g(s(x))$, $g \in C_+^\infty$, $x \in G$; pg est C^∞ car $pg(x) = \psi(\operatorname{ch} s(x))$, où $\psi \in C_1^\infty$ correspond à g par le lemme 2, et $x \mapsto \operatorname{ch} s(x)$ est C^∞ sur G, K–bi-invariante, par le lemme 1.

Revenons à F; pour $f \in \mathfrak{D}_+$ et $\varphi(\operatorname{ch} t) = f(t)$, on a donc

$$Ff(t) = C_N e^{t\varrho} \int_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{2\alpha}} \varphi\big(\operatorname{ch} s(\exp tH \cdot \exp(X + X'))\big)\, dX\, dX'\,.$$

Les expressions (3) et (6), et les changements de variable

$$X \mapsto 2^{-1}\pi^{-1/2}|\alpha| e^{t/2} X\,, \qquad X' \mapsto (2\pi)^{-1/2}|\alpha| e^t X'$$

conduisent à

$$Ff(t) = C \int_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{2\alpha}} \varphi\Big(\big[(\operatorname{ch} t + \pi|X|^2)^2 + \pi|X'|^2\big]^{1/2}\Big)\, dX\, dX'\,,$$

avec

$$C = 2^{(m_\alpha/2) + m_{2\alpha}} \Gamma(m_\alpha + m_{2\alpha}) \Gamma((m_\alpha + m_{2\alpha})/2)^{-1}; \tag{8}$$

par suite $Ff \in \mathfrak{D}_+$.

Introduisons l'opérateur E: $\mathfrak{D}_1 \to \mathfrak{D}_1$ défini par

$$E\varphi(u) = \int_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{2\alpha}} \varphi\Big(\big[(u + \pi|X|^2)^2 + \pi|X'|^2\big]^{1/2}\Big)\, dX\, dX'\,, \tag{9}$$

avec $u \geqslant 1$; si 2α n'est pas racine, cette définition doit bien sûr être remplacée par

$$(9') \qquad E\varphi(u) = \int_{\mathfrak{g}_\alpha} \varphi(u + \pi|X|^2)\, dX\,.$$

En résumé (cf. (5) (8) (9)): $\mathcal{A}g(\exp tH) = Fg_A(t)$ pour $g \in \mathfrak{D}(G\|K)$, $Ff(t) = C\cdot E\varphi(\operatorname{ch} t)$ pour $f \in \mathfrak{D}_+$, $f(t) = \varphi(\operatorname{ch} t)$.

4. – Inversion de la transformation d'Abel.

L'opérateur $E\colon \mathfrak{D}_1 \to \mathfrak{D}_1$ se décompose en produit d'opérateurs élémentaires, ce qui permet de l'inverser. Soit $E_0\colon \mathfrak{D}_1 \to \mathfrak{D}_1$, définie par

$$E_0\varphi(u) = \int_{\boldsymbol{R}} \varphi(u + \pi x^2)\, dx\,,$$

la transformation E associée au groupe $G = SL(2, \boldsymbol{R})$ (ici $m_\alpha = 1, m_{2\alpha} = 0$). Alors

$$E_0^2\varphi(u) = \int_{\boldsymbol{R}^2} \varphi(u + \pi(x^2 + y^2))\, dx\, dy = 2\pi\int_0^\infty \varphi(u + \pi r^2) r\, dr$$

d'où, en introduisant la dérivation $D = D_u = -\,d/du\colon \mathfrak{D}_1 \to \mathfrak{D}_1$,

$$E_0^2 D\varphi(u) = -\int_0^\infty \varphi'(u + \pi r^2) 2\pi r\, dr = \varphi(u)\,,$$

c'est-à-dire

$$(10) \qquad E_0^2 D = I \quad \text{sur } \mathfrak{D}_1\,, \qquad \text{avec } E_0 D = D E_0\,.$$

La transformation E associée à $SL(2, \boldsymbol{R})$, soit E_0, est donc inversée par l'opérateur intégro-différentiel $E_0 D$; celle de $SL(2, \boldsymbol{C})$, soit E_0^2, par l'opérateur différentiel D. Généralisons cela.

Soit R l'opérateur défini par

$$R\varphi(u) = \varphi(u^{1/2})\,, \qquad u \geqslant 1\,.$$

R est un isomorphisme d'espaces de Fréchet de C_1^∞ sur lui-même, et une bijection de $\mathfrak{D}_1$ sur lui-même. E s'écrit alors comme composé de

$$\varphi \mapsto \int_{\mathfrak{g}_{2\alpha}} (R\varphi)(v + \pi|X'|^2)\, dX' = \psi(v)$$

et de

$$\psi \mapsto \int_{\mathfrak{g}_\alpha} (R^{-1}\psi)(u + \pi|X|^2)\, dX = E\varphi(u)\,,$$

d'où, en prenant dans $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ des bases orthonormales, la décomposition annoncée de E, valable sur $\mathfrak{D}_1$:

$$E = E_0^{m_\alpha} R^{-1} E_0^{m_{2\alpha}} R\,. \tag{11}$$

D'après (10) on a pour $m \in \boldsymbol{N}$: $E_0^{-m} = E_0^m D^m$, ou mieux la formule « réduite » $E_0^{-m} = E_0^\varepsilon D^{(m+\varepsilon)/2}$ avec $\varepsilon = 0$ si m est pair, $\varepsilon = 1$ sinon. La convention d'écriture

$$D^{1/2} = E_0 D (= DE_0 = E_0^{-1})\,,$$

faite en accord avec (10), permet d'écrire plus simplement $E_0^{-m} = D^{m/2}$, quelle que soit la parité de m. D'autre part $R^{-1}D_u R = (2u)^{-1}D_u$, ce qui conduit à faire la convention

$$\big((2u)^{-1}D_u\big)^{1/2} = R^{-1}D^{1/2}R = R^{-1}E_0R(2u)^{-1}D_u\,.$$

De là on déduit la formule d'inversion (non réduite)

$$E^{-1} = \big((2u)^{-1}D_u\big)^{m_{2\alpha}} R^{-1}E_0^{m_{2\alpha}} R D_u^{m_\alpha} E_0^{m_\alpha}\,, \tag{12}$$

(en particulier $E^{-1} = D^{m_\alpha}E$ si $m_{2\alpha} = 0$), et la formule réduite

$$E^{-1} = \big((2u)^{-1}D_u\big)^{m_{2\alpha}/2} D_u^{m_\alpha/2}; \tag{12$'$}$$

les formules (12) et (12$'$) sont valables sur l'espace $\mathfrak{D}_1$.

Le retour à l'opérateur F: $\mathfrak{D}_+ \to \mathfrak{D}_+$ s'effectue via le changement $f(t) = \varphi(\operatorname{ch} t)$ du lemme 2. On voit d'après (3) que E_0 correspond à $F_0: \mathfrak{D}_+ \to \mathfrak{D}_+$, et $R^{-1}E_0R$ à F_0': $\mathfrak{D}_+ \to \mathfrak{D}_+$ selon les relations

$$F_0 f(t) = E_0\varphi(\operatorname{ch} t)\,, \qquad F_0' f(t) = R^{-1}E_0R\varphi(\operatorname{ch} t)$$

$$F_0 f(t) = 2^{-1}\pi^{-1/2}|\alpha| e^{t/2} \int_{\boldsymbol{R}} f\big(s(\exp tH \cdot \exp vX_0)\big)\, dv$$

$$F_0' f(t) = (2\pi)^{-1/2}|\alpha| e^{t} \int_{\boldsymbol{R}} f\big(s(\exp tH \cdot \exp wX_0')\big)\, dw\,,$$

avec $f \in \mathfrak{D}_+$, $t \in \boldsymbol{R}$; X_0, resp. X_0', est un vecteur de norme 1 dans $\mathfrak{g}_\alpha$, resp. $\mathfrak{g}_{2\alpha}$. F_0 et F_0' sont donc indépendants du choix de X_0 et X_0', et s'interprètent comme transformations d'Abel partielles associées aux sous-groupes à un paramètre de N. La décomposition (11) de E donne

$$F = CF_0^{m_\alpha} F_0'^{m_{2\alpha}} = CF_\alpha F_{2\alpha},$$

en notant $F_\alpha = F_0^{m_\alpha}$, $F_{2\alpha} = F_0'^{m_{2\alpha}}$, c'est-à-dire

$$F_\alpha f(t) = \left(|\alpha|/2\sqrt{\pi}\right)^{m_\alpha} e^{tm_\alpha/2} \int_{\mathfrak{g}_\alpha} f(s(\exp tH \cdot \exp X))\, dX$$

$$F_{2\alpha} f(t) = \left(|\alpha|/\sqrt{2\pi}\right)^{m_{2\alpha}} e^{tm_{2\alpha}} \int_{\mathfrak{g}_{2\alpha}} f(s(\exp tH \cdot \exp X'))\, dX'$$

(transformations d'Abel partielles sur $\exp \mathfrak{g}_\alpha$ et $\exp \mathfrak{g}_{2\alpha}$; $F_{2\alpha} = I$ si $m_{2\alpha} = 0$). D'autre part D, resp. $(2u)^{-1}D$: $\mathfrak{D}_1 \to \mathfrak{D}_1$ correspond à $-(1/\operatorname{sh} t)(d/dt)$, resp. $-(1/\operatorname{sh} 2t)(d/dt)$: $\mathfrak{D}_+ \to \mathfrak{D}_+$. On fera donc les conventions:

$$\left(-\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{1/2} = -\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt} \cdot F_0$$

$$\left(-\frac{1}{\operatorname{sh} 2t}\frac{d}{dt}\right)^{1/2} = -\frac{1}{\operatorname{sh} 2t}\frac{d}{dt} \cdot F_0';$$

les opérateurs séparés par $\cdot$ commutent entre eux. Les résultats de ce paragraphe se traduisent alors par le

THÉORÈME 1 (*inversion de la transformation d'Abel*). *Soient G un groupe de Lie réel, semisimple connexe de centre fini, de rang réel un, $\mathcal{A}$: $\mathfrak{D}(G\|K) \to \mathfrak{D}_W(A) = \mathfrak{D}_+$ la transformation d'Abel associée à une décomposition d'Iwasawa de G, et $F = \mathcal{A} \circ p$: $\mathfrak{D}_+ \to \mathfrak{D}_+$ où p est le prolongement $\mathfrak{D}_+ \to \mathfrak{D}(G\|K)$.*

Alors $F = CF_\alpha F_{2\alpha} = CF_0^{m_\alpha} F_0'^{m_{2\alpha}}$ est une bijection de $\mathfrak{D}_+$ sur lui-même, $\mathcal{A}$ est bijectif, et on a $f(\exp tH) = (F^{-1}\mathcal{A}f)(t)$ avec $f \in \mathfrak{D}(G\|K)$, $t \in \mathbf{R}$, $\alpha(H) = 1$,

$$F^{-1} = C^{-1}\left(-\frac{1}{\operatorname{sh} 2t}\frac{d}{dt}\right)^{m_{2\alpha}} F_{2\alpha} \left(-\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{m_\alpha} F_\alpha \tag{13}$$

(*formule non réduite*), *ou encore*

$$F^{-1} = C^{-1}\left(-\frac{1}{\operatorname{sh} 2t}\frac{d}{dt}\right)^{m_{2\alpha}/2} \left(-\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{m_\alpha/2} \tag{13'}$$

(*formule réduite*; *cf. conventions ci-dessus sur les puissances demi-entières*).

La constante C est donnée par (8), et le prolongement p par le corollaire du lemme 2.

REMARQUES. 1) D'après les calculs précédents, toutes les dérivées écrites se prolongent continûment en $t = 0$; voir ci-dessous à la fin du paragraphe 5. 2) Au membre de droite de (13), les deux premiers opérateurs commutent entre eux, ainsi que les deux derniers. Cette formule est surtout intéressante lorsque $m_{2\alpha} = 0$; elle se réduit alors à

$$F^{-1} = C^{-2}\left(-\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{m_\alpha} F\,.$$

L'opérateur F^2 est inversé par un opérateur différentiel dans ce cas. 3) D'après (13′) F lui-même est inversé par un opérateur différentiel lorsque m_α et $m_{2\alpha}$ sont pairs. D'après les résultats rappelés au paragraphe 1(d), cela ne se produit que si $\mathfrak{g}$ n'a qu'une classe de conjugaison de sous-algèbres de Cartan.

5. – Applications.

THÉORÈME 2 (*supports*). *Sous les hypothèses du théorème* 1, *soit* $f \in \mathfrak{D}_+$. *Alors* supp f *et* supp Ff *ont même enveloppe convexe.*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 1, F et F^{-1} sont des produits d'opérateurs différentiels et de puissances de F_0 et F_0'. Comme $s(\exp tH\cdot n) \geq |t|$ d'après (3) pour tous $t \in \boldsymbol{R}$, $n \in N$, on voit que supp $f \subset [-R, R]$ équivaut à supp $Ff \subset [-R, R]$, pour tout $R > 0$, d'où la conclusion.

THÉORÈME 3 (*Paley-Wiener*). *Sous les hypothèses du théorème* 1, *les transformées sphériques* $\tilde{f}$ *des fonctions* $f \in \mathfrak{D}(G\|K)$ *telles que* supp $f_A \subset [-R, R]$ ($R > 0$) *sont les fonctions entières* g *sur* $\boldsymbol{C}$, *paires, telles que pour tout* $k \in \boldsymbol{N}$

$$\sup_{z\in\boldsymbol{C}} e^{-R|\operatorname{Im} z|}(1 + |z|)^k |g(z)| < +\infty\,.$$

Cela résulte immédiatement des théorèmes 1 et 2 et du théorème de Paley-Wiener de $\boldsymbol{R}$. Un résultat analogue pour les espaces de Schwartz sera donné plus loin (théorème 5).

La transformée sphérique s'écrit ici

$$\tilde{f}(\lambda) = (\mathcal{A}f\circ\exp)^\wedge(\lambda) = |H|\int_{\boldsymbol{R}} \mathcal{A}f(\exp tH)\, e^{-it\lambda}\, dt$$

pour $f \in \mathfrak{D}(G\|K)$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$; noter que, dans l'identification de A à $\boldsymbol{R}$, on a $d(\exp tH) = |H|\, dt$, où dt est la mesure de Lebesgue usuelle, d'après nos normalisations. La majoration

$$|\tilde{f}(\lambda)| \leqslant \int_A |\mathcal{A}f(a)|\, da \leqslant \int_{K\times A\times N} e^{-\varrho(\log a)} |f(kan)| e^{2\varrho(\log a)}\, dk\, da\, dn$$

c'est-à-dire

$$|\tilde{f}(\lambda)| \leqslant \int_G |f(x)| e^{-\varrho(H(x))}\, dx$$

montre que, pour chaque λ, l'application $f \mapsto \tilde{f}(\lambda)$ est une distribution sur G, bi-invariante par K, définie par une fonction mesurable que nous notons $\varphi_\lambda(x^{-1})$:

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_G f(x)\varphi_\lambda(x^{-1})\, dx\,, \qquad \lambda \in \boldsymbol{R}\,.$$

D'après les propriétés de $\mathcal{A}$ et $\hat{}$, on a $(f * g)^{\sim}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)\tilde{g}(\lambda)$pour $f, g \in \mathfrak{D}(G\|K)$, d'où on déduit aisément que

$$\int_K \varphi_\lambda(xky)\, dk = \varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)\,, \qquad x, y \in G\,.$$

Il en résulte que φ_λ est une *fonction sphérique* sur G; en particulier φ_λ est continue, et $\varphi_\lambda(e) = 1$ (sur tout ceci, voir Helgason [1], p. 410). De plus $\varphi_\lambda = \varphi_{-\lambda}$ puisque $\mathcal{A}f$ et $\tilde{f}$ sont paires.

Nous allons voir que le théorème 1 entraîne la formule de Plancherel sphérique de G, et permet d'expliciter directement les φ_λ, $\lambda \in \boldsymbol{R}$, et la fonction $|c(\lambda)|$ de Harish-Chandra. Soit $f \in \mathfrak{D}(G\|K)$. Par l'inversion de Fourier sur $\boldsymbol{R}$ pour les fonctions paires, on a

$$\mathcal{A}f(\exp tH) = (2\pi)^{-1}|\alpha| \int_{\boldsymbol{R}} \tilde{f}(\lambda) \cos t\lambda\, d\lambda\,, \qquad t \in \boldsymbol{R}\,,$$

où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue usuelle, d'où par le théorème 1

$$f(\exp tH) = (2\pi)^{-1}|\alpha| F^{-1}\Big(\int_{\boldsymbol{R}} \tilde{f}(\lambda) \cos t\lambda\, d\lambda\Big)\,.$$

Admettons provisoirement l'écriture

$$f(\exp tH) = (2\pi)^{-1}|\alpha| \int_{\boldsymbol{R}} \tilde{f}(\lambda) F^{-1} \cos t\lambda\, d\lambda\,, \tag{14}$$

où F^{-1} opère sur la variable t de la fonction $\cos t\lambda$. En prenant $t = 0$, puis remplaçant f par $g(x) = \int_K f(\exp t_0 H \cdot k \cdot x)\, dk$, on a $\tilde{g}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)\varphi_\lambda(\exp t_0 H)$, (calcul classique), puis

$$(14') \qquad f(\exp tH) = (2\pi)^{-1}|\alpha| \int_{\boldsymbol{R}} \tilde{f}(\lambda)\varphi_\lambda(\exp tH)(F^{-1}\cos t\lambda)(0)\, d\lambda\,.$$

Or $\tilde{f}$ est un élément quelconque de $\hat{\mathcal{D}}_+$ (théorème 1) et $F^{-1}\cos t\lambda$, resp. $\varphi_\lambda(\exp tH)(F^{-1}\cos t\lambda)(0)$, sont des fonctions paires de λ; l'identification de (14) et (14′) donne donc

$$(15) \qquad \varphi_\lambda(\exp tH)(F^{-1}\cos t\lambda)(0) = F^{-1}\cos t\lambda\,, \qquad t, \lambda \in \boldsymbol{R}$$

ou si l'on préfère

$$(15') \qquad \varphi_\lambda(x)(\mathcal{A}^{-1}\cos t\lambda)(e) = (\mathcal{A}^{-1}\cos t\lambda)(x)\,, \qquad x \in G,\ \lambda \in \boldsymbol{R}\,,$$

F^{-1} et $\mathcal{A}^{-1}$ agissant sur la variable t. Les relations ci-dessus inversent la transformation sphérique, avec la mesure de Plancherel

$$(2\pi)^{-1}|\alpha|(F^{-1}\cos t\lambda)(0)\, d\lambda\,,$$

et permettent le calcul des fonctions sphériques.

THÉORÈME 4 (Plancherel). *Sous les hypothèses du théorème* 1, *les fonctions sphériques sont données par*

$$\varphi_\lambda(\exp tH) = F\big((\varrho + i\lambda)/2,\ (\varrho - i\lambda)/2;\ (\dim N + 1)/2;\ -\operatorname{sh}^2 t\big)$$

où $\lambda, t \in \boldsymbol{R}$, $\alpha(H) = 1$, $\varrho = (m_\alpha/2) + m_{2\alpha}$, $\dim N = m_\alpha + m_{2\alpha}$, *et* F *désigne la fonction hypergéométrique. Pour* $f \in \mathcal{D}(G\|K)$ *on a la formule d'inversion*

$$f(x) = (4\pi)^{-1}\int_{\boldsymbol{R}} \tilde{f}(\lambda)\varphi_\lambda(x)|c(\lambda)|^{-2}|\alpha|\, d\lambda\,, \qquad x \in G$$

avec

$$|c(\lambda)|^{-2} = \frac{B\big(m_\alpha/2,\ (m_\alpha/2) + m_{2\alpha}\big)^2 B\big(m_{2\alpha}/2,\ (m_\alpha + m_{2\alpha})/2\big)^2}{|B(m_\alpha/2,\ i\lambda)|^2 |B\big(m_{2\alpha}/2,\ (m_\alpha/4) + i\lambda/2\big)|^2}$$

où B *est la fonction Béta, et* $d\lambda$ *la mesure de Lebesgue de* $\boldsymbol{R}$. $\big(|\alpha|\, d\lambda$ est donc la mesure définie par la forme de Killing sur $\mathfrak{a}^*$.)

DÉMONSTRATION. D'après ce qui précède, il suffit d'expliciter $F^{-1}\cos t\lambda$ et de justifier (14). Le retour à la variable $u = \operatorname{ch} t$ et le calcul de $E^{-1}\varphi(u)$, où $\varphi(u) = \cos t\lambda$ sont basés sur les quatre formules suivantes (cf. Magnus et al. [1], chap. II):

$$\cos t\lambda = F(i\lambda/2, -i\lambda/2; 1/2; 1-u^2) \tag{16}$$

pour $t, \lambda \in \boldsymbol{R}$, $u = \operatorname{ch} t$;

$$\frac{d}{dz} F(a, b; c; z) = abc^{-1}F(a+1, b+1; c+1; z); \tag{17}$$

$$F(a, b; c; 1-u^2) = F(2a, 2b; c; (1-u)/2) \tag{18}$$

lorsque $c = a + b + \frac{1}{2}$, $u \geqslant 1$ (« transformation quadratique »);

$$F(a, b; c; -v) = B(b, c-b)^{-1}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1+tv)^{-a}\, dt \tag{19}$$

pour $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$, $v \geqslant 0$ (représentation intégrale d'Euler).

De (17) on déduit, pour $u \geqslant 1$

$$(2u)^{-1}D_u\big(F(a, b; c; 1-u^2)\big) = abc^{-1}F(a+1, b+1; c+1; 1-u^2)\,, \tag{20}$$

et de (17) et (18), lorsque $c = a + b + \frac{1}{2}$:

$$D_u\big(F(a, b; c; 1-u^2)\big) = 2abc^{-1}F(a+\tfrac{1}{2}, b+\tfrac{1}{2}; c+1; 1-u^2)\,. \tag{21}$$

Les puissances 1/2 de ces opérateurs s'obtiendront à partir du

LEMME 3. *Pour* $\operatorname{Re} a > 1/2$, $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 1/2$, $v \geqslant 0$, *on a*

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{R}} & F(a, b; c; -(v+x^2))\, dx \\ &= B(a-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})B(b-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})B(c-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^{-1}F(a-\tfrac{1}{2}, b-\tfrac{1}{2}; c-\tfrac{1}{2}; -v)\,.\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. D'après (19) il s'agit de transformer l'intégrale

$$\int_{\boldsymbol{R}} dx \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1+tv+tx^2)^{-a}\, dt\,.$$

Pour $t > 0$, $v \geqslant 0$, $\operatorname{Re} a > 1/2$, on trouve

$$\int_{\boldsymbol{R}} (1 + tv + tx^2)^{-a}\, dx = B(a - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) t^{-1/2} (1 + tv)^{-a+1/2}$$

par le changement de variable $y = tx^2(1 + tv + tx^2)^{-1}$. La convergence absolue des intégrales écrites et la formule du lemme s'en déduisent aisément.

Rappelons que $R^{-1}E_0R\varphi(u) = \int_{\boldsymbol{R}} \varphi\big((u^2 + \pi x^2)^{1/2}\big)\, dx$; d'après le lemme 3, on a donc pour $\operatorname{Re} a > 1/2$, $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 1/2$, $u \geqslant 1$

$$\text{(22)} \quad R^{-1}E_0R\big(F(a, b; c; 1 - u^2)\big)$$
$$= \pi^{-1/2} B(a - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) B(b - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) B(c - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^{-1} F(a - \tfrac{1}{2}, b - \tfrac{1}{2}; c - \tfrac{1}{2}; 1 - u^2)\,.$$

D'après (18) et le lemme 3 on a aussi

$$\text{(23)} \quad E_0\big(F(a, b; c; 1 - u^2)\big)$$
$$= (2/\pi)^{1/2} B(2a - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) B(2b - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) B(c - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^{-1} F(a - \tfrac{1}{4}, b - \tfrac{1}{4}; c - \tfrac{1}{2}; 1 - u^2),$$

pour $\operatorname{Re} a > \frac{1}{4}$, $\operatorname{Re} a + \frac{1}{2} > \operatorname{Re} b > \frac{1}{4}$, $u \geqslant 1$ et $c = a + b + \frac{1}{2}$. La fin du calcul n'offre plus de difficulté: compte tenu de (20), (22) et de la définition des puissances 1/2, on trouve

$$\big((2u)^{-1}D_u\big)^p \big(F(a, b; c; 1 - u^2)\big)$$
$$= \Gamma(p) B(a, p)^{-1} B(b, p)^{-1} B(c, p) F(a + p, b + p; c + p; 1 - u^2)$$

si $\operatorname{Re} a \geqslant 0$, $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b \geqslant 0$, $u \geqslant 1$, et $2p \in \boldsymbol{N}$. De même, à partir de (21) et (23),

$$D_u^q\big(F(a, b; c; 1 - u^2)\big)$$
$$= 2^{-q} \Gamma(q) B(2a, q)^{-1} B(2b, q)^{-1} B(c, q) F\left(a + \frac{q}{2}, b + \frac{q}{2}; c + q; 1 - u^2\right)$$

si $\operatorname{Re} a \geqslant 0$, $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b \geqslant 0$, $u \geqslant 1$, $c = a + b + \frac{1}{2}$ et $2q \in \boldsymbol{N}$. On déduit alors de (8), (12′), (16) et de la formule de duplication

$$\Gamma(2z) = \pi^{-1/2} 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma(z + \tfrac{1}{2})$$

l'égalité:

$$F^{-1} \cos t\lambda = 2^{-1} |c(\lambda)|^{-2} F\big((\varrho + i\lambda)/2, (\varrho - i\lambda)/2; (\dim N + 1)/2; -\operatorname{sh}^2 t\big)$$

où $|c(\lambda)|^{-2}$ a l'expression voulue; comme $F(a, b; c; 0) = 1$, on en dèduit celle de φ_λ (cf. (15)).

Enfin la majoration $|(1+tv)^{-a}| \leqslant 1$ pour $tv \geqslant 0$, $\operatorname{Re} a \geqslant 0$ montre, avec (19), que

$$|F(a, b; c; 1-u^2)| \leqslant B(\operatorname{Re} b, \operatorname{Re}(c-b))|B(b, c-b)|^{-1}$$

pour $\operatorname{Re} a \geqslant 0$, $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$, $u \geqslant 1$. D'autre part les facteurs qui interviennent dans nos calculs devant les fonctions hypergéométriques sont des produits de facteurs de la forme $B(\alpha, \beta + ix)$ avec α, β constantes > 0 et $x = 0$ ou λ ou $\lambda/2$, ou de leurs inverses; d'après les propriétés de la fonction Γ, ils sont tous à croissance polynomiale en λ. Ces majorations justifient l'application de F^{-1} sous le signe $\int$ en (14), et achèvent la démonstration.

REMARQUES. 1) La démonstration ci-dessus justifie donc l'écriture

$$(\mathcal{A}^{-1} \cos t\lambda)(x) = 2^{-1}|c(\lambda)|^{-2}\varphi_\lambda(x)\,, \quad x \in G,\ \lambda \in \boldsymbol{R}\,,$$

mais non l'écriture formelle

$$\cos t\lambda = 2^{-1}|c(\lambda)|^{-2}\big(\mathcal{A}\varphi_\lambda(\exp tH)\big);$$

dans $F = CF_0^{m_\alpha}F_0'^{m_{2\alpha}}$, l'application du dernier F_0 ne serait en effet pas légitime ici (c'est le cas $\operatorname{Re} a = \operatorname{Re} b = 1/4$ dans (23), i.e. $\operatorname{Re} a = \operatorname{Re} b = 1/2$ dans le lemme 3).

2) Lorsque $m_{2\alpha} = 0$, on peut donner d'autres expressions à φ_λ, par exemple

$$\varphi_\lambda(\exp tH) = 2^{1-(m_\alpha/2)}\Gamma(m_\alpha)|\Gamma((m_\alpha/2) + i\lambda)|^{-2}\int_0^\infty (\operatorname{ch} t + \operatorname{ch} x)^{-m_\alpha/2} \cos \lambda x \, dx\,,$$

ou au moyen des fonctions de Legendre de première espèce .... Dans ce cas

$$|c(\lambda)|^{-2} = B(m_\alpha/2, m_\alpha/2)^2|B(m_\alpha/2, i\lambda)|^{-2}.$$

Si de plus m_α est pair (cas où $\mathfrak{g}$ n'a qu'une classe de conjugaison de sous-algèbres de Cartan), cela se réduit au polynôme

$$|c(\lambda)|^{-2} = \left(\frac{m_\alpha}{2} - 1\right)!^2(m_\alpha - 1)!^{-2}\lambda^2(\lambda^2 + 1^2)\ldots\left(\lambda^2 + \left(\frac{m_\alpha}{2} - 1\right)^2\right),$$

et la formule d'inversion à l'élément neutre s'écrit, d'après les théorèmes 1 et 4

$$f(e) = C^{-1}\lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{m_\alpha/2}\mathcal{A}f(\exp tH) = P\left(\frac{d}{dt}\right)\mathcal{A}f(\exp tH)_{t=0}\,,$$

pour $f\in\mathcal{D}(G\|K)$, où P est l'opérateur différentiel à coefficients constants

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{m_\alpha}{2}-1\right)!^2(m_\alpha-1)!^{-2}\left(-\frac{d^2}{dt^2}\right)\left(-\frac{d^2}{dt^2}+1^2\right)\dots\left(-\frac{d^2}{dt^2}+\left(\frac{m_\alpha}{2}-1\right)^2\right).$$

6. – Extension aux espaces $I^p(G)$.

Pour $0<p\leqslant 2$, on définit $I^p(G)$ comme l'espace des fonctions f, C^∞ sur G, bi-invariantes par K, et telles que pour tout $P\in U(\mathfrak{g})$ et tout $k\in\boldsymbol{N}$

$$\sup_{x\in G}(1+|x|)^k\delta_0(x)^{1/p}|Pf(x)|<+\infty;$$

ici $|\;|$ et δ_0 sont définis par $|k_1\cdot\exp tH\cdot k_2|=|t|$ pour $k_1,k_2\in K$, $t\in\boldsymbol{R}$, et

$$\delta_0(k_1\cdot\exp tH\cdot k_2)=(\operatorname{sh} t/t)^{m_\alpha}(\operatorname{sh} 2t/2t)^{m_{2\alpha}}.$$

Muni des semi-normes naturelles, $I^p(G)$ est un espace de Fréchet contenant $\mathcal{D}(G\|K)$. Cette définition de $I^p(G)$ est celle utilisée par Helgason [4], p. 14; mais l'inégalité $(1+|t|)^{-1}\operatorname{ch} t\leqslant \operatorname{sh} t/t\leqslant \operatorname{ch} t$, $t\in\boldsymbol{R}$, montre que l'on peut remplacer δ_0 par

$$\delta_1(k_1\cdot\exp tH\cdot k_2)=(\operatorname{ch} t)^{2\varrho}$$

$(\varrho=(m_\alpha/2)+m_{2\alpha})$, ce qui sera plus commode ici. Dans [1], Trombi et Varadarajan remplacent δ_0 par

$$\delta_2(x)=\varphi_0(x)^{-2};$$

l'inégalité (2.4.1) de leur article (que l'on pourrait établir ici à partir de l'expression de φ_0 au théorème 4) montre que cette définition de $I^p(G)$ équivaut aux deux précédentes.

Soit d'autre part H_r, pour $r>0$, l'espace des fonctions f, C^∞ sur $\boldsymbol{R}$, paires, qui sont prolongeables en des fonctions holomorphes de $z\in\boldsymbol{C}$ dans la bande $|\operatorname{Im} z|<r$, avec

$$\sup_{|\operatorname{Im} z|<r}(1+|z|)^k|(\partial/\partial z)^l f(z)|<+\infty$$

pour tous $k, l \in \boldsymbol{N}$. Soit H_0 le sous-espace des fonctions paires dans l'espace de Schwartz usuel des fonctions C^∞ sur $\boldsymbol{R}$ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées. Munis de leurs semi-normes naturelles, les H_r sont des espaces de Fréchet pour $r \geqslant 0$.

THÉORÈME 5. *Sous les hypothèses du théorème* 1, *la transformation sphérique* $f \mapsto \tilde{f}$ *est un isomorphisme d'espaces de Fréchet de* $I^p(G)$ *sur* H_r, *avec* $0 < p \leqslant 2$ *et* $r = (2/p - 1)(m_\alpha/2 + m_{2\alpha})$.

DÉMONSTRATION. Pour $r \geqslant 0$ soit $\mathcal{S}_r$ l'espace des fonctions f, C^∞ sur $\boldsymbol{R}$, paires, telles que pour tous $k, l \in \boldsymbol{N}$

$$\sup_{t \in \boldsymbol{R}} (\operatorname{ch} t)^r (1 + |t|)^k |f^{(l)}(t)| < + \infty .$$

Muni des semi-normes naturelles, $\mathcal{S}_r$ est un espace de Fréchet; de plus $\mathcal{S}_0 = H_0$.

Soit enfin Σ_r, pour $r \geqslant 0$, l'espace de Fréchet des fonctions φ, C^∞ sur $[1, +\infty[$, telles que

$$\sup_{u \geqslant 1} (\operatorname{Log} u)^k u^{r+1} |\varphi^{(l)}(u)| < + \infty .$$

La preuve du théorème consiste à montrer que chacune des flèches suivantes est un isomorphisme d'espaces de Fréchet:

$$\begin{array}{ccccccccccc} I^p(G) & \xrightarrow{\text{restr}^\cdot} & \mathcal{S}_{r+\varrho} & \longrightarrow & \Sigma_{r+\varrho} & \xrightarrow{E} & \Sigma_r & \longrightarrow & \mathcal{S}_r & \xrightarrow{\text{Fourier}} & H_r \\ f & \longrightarrow & f_A(t) & \longrightarrow & \varphi(u) & \longrightarrow & E\varphi(u) & \longrightarrow & Ff_A(t) & \longrightarrow & \tilde{f}(\lambda) , \end{array}$$

pour $r = ((2/p) - 1)\varrho$; il suffira bien sûr de montrer qu'elles sont bijectives et continues. C'est l'objet des cinq lemmes suivants, dont les deux premiers ont leur intérêt propre.

LEMME 4. *Pour* $P \in U(\mathfrak{g})$ *il existe un opérateur différentiel* $\delta'(P)$ *sur* $\boldsymbol{R} \setminus 0$ *tel que, pour* $f \in C^\infty(G \| K)$, $t \neq 0$

$$(Pf)_A(t) = \delta'(P) f_A(t) .$$

L'ordre de $\delta'(P)$ *est au plus égal à celui de* P, *et ses coefficients sont des polynômes en* $(e^{2t} - 1)^{-1}$ *et* $(e^{4t} - 1)^{-1}$.

(Rappelons que $f_A \in C_+^\infty$ est la restriction de f à A, identifié à $\boldsymbol{R}$: $f_A(t) = f(\exp tH)$).

DÉMONSTRATION. La formule explicite du lemme 1 donne ici une démonstration élémentaire de ce lemme de Harish-Chandra. Si $P \in U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}$, évidemment $Pf = 0$. La décomposition $\mathfrak{g} = \boldsymbol{R}H + \mathfrak{n} + \mathfrak{k}$ montre qu'il suffit de considérer le cas où $P = H^k X_1 \dots X_l$, avec $k, l \in \boldsymbol{N}$, $X_1, \dots, X_l \in \mathfrak{n}$. Alors

$$Pf(\exp tH)$$
$$= \partial_{t_1} \dots \partial_{t_k} \partial_{u_1} \dots \partial_{u_l} f(\exp (t + t_1 + \dots + t_k)H \cdot \exp u_1 X_1 \dots \exp u_l X_l)(0)$$

où $\partial_{t_1} = \partial/\partial t_1$ etc., et les dérivées sont prises pour $t_1 = \dots = t_k = u_1 = \dots$ $\dots = u_l = 0$, ou encore

$$(Pf)_A(t) = \partial_t^k \partial_{u_1} \dots \partial_{u_l} f_A\big(s(\exp tH \cdot \exp u_1 X_1 \dots \exp u_l X_l)\big)_{u=0} \, .$$

Par dérivation des fonctions composées, cette expression est une somme de dérivées d'ordre $\leqslant k + l$ de f_A, prises au point $s(\exp tH) = t$, multipliées par des polynômes de dérivées en $t, u_1, \dots, u_l$ de la fonction $s(\exp tH \cdot \exp u_1 X_1 \dots \exp u_l X_l)$, prises en t, et $u_1 = \dots = u_l = 0$. D'après le lemme 1, cette fonction est donnée par

$$\operatorname{ch} 2s = A(u_1, \dots, u_l) e^{2t} + B(u_1, \dots, u_l) + e^{-2t}/2$$

où A et B sont des polynômes; par dérivations successives par rapport à $t, u_1, \dots, u_l$ en $u_1 = \dots = u_l = 0$ on en déduit des relations de la forme

$$\operatorname{sh} 2t \cdot \partial^p s + \operatorname{ch} 2t \cdot C_p + \operatorname{sh} 2t \cdot D_p = a_p \operatorname{sh} 2t + b_p \operatorname{ch} 2t + c_p \, ,$$

où p est un multi-indice, C_p et D_p des polynômes des dérivées de s d'ordre $< |p|$, et a_p, b_p, c_p des constantes. Cela entraîne par récurrence que les dérivées cherchées de s sont des polynômes en $\coth 2t = 2(e^{4t} - 1)^{-1} + 1$ et en $1/\operatorname{sh} 2t = 2(e^{2t} - 1)^{-1} - 2(e^{4t} - 1)^{-1}$, d'où le lemme.

LEMME 5. *L'application de restriction $f \mapsto f_A$ est un isomorphisme d'espaces de Fréchet de $I^p(G)$ sur $\mathcal{S}_{r+\varrho}$, avec $0 < p \leqslant 2$, $r = \big((2/p) - 1\big)\varrho$.*

DÉMONSTRATION (cf. Helgason [4], pp. 33-34). Si $f \in I^p(G)$, on a en particulier

$$\sup_{t \in \boldsymbol{R}} (1 + |t|)^k (\operatorname{ch} t)^{2\varrho/p} |Pf(\exp tH)| < + \infty$$

pour $k \in \boldsymbol{N}$, et $P \in U(\mathfrak{a}) \subset U(\mathfrak{g})$; mais dans ce cas $Pf(\exp tH) = Pf_A(t)$ (i.e. $\delta'(P) = P$ si $P \in U(\mathfrak{a})$ en identifiant $H \in \mathfrak{a}$ à d/dt), d'où $f_A \in \mathcal{S}_{2\varrho/p} = \mathcal{S}_{r+\varrho}$. La continuité de $f \mapsto f_A$ est claire.

Inversement, soient $g \in \mathcal{S}_{r+\varrho}$ et $f(x) = g(s(x))$ son prolongement en une fonction $C^\infty(G\|K)$ (corollaire du lemme 1). Alors $Pf(\exp tH) = \delta'(P)g(t)$ d'après le lemme 4; les coefficients de $\delta'(P)$ étant bornés pour $|t|\geqslant 1$, $Pf(\exp tH)$ est majoré par une somme finie de dérivées $|g^{(l)}(t)|$, lorsque $|t|\geqslant 1$, d'où pour chaque $k \in \boldsymbol{N}$

$$(1+|t|)^k(\operatorname{ch} t)^{2\varrho/p}|Pf(\exp tH)|\leqslant C\,, \qquad t \in \boldsymbol{R}\,.$$

L'application $P \mapsto \delta'(P)$ étant linéaire, donc continue sur les sous-espaces de dimension finie de $U(\mathfrak{g})$, il est facile de voir que cette inégalité est encore valable avec $\operatorname{Ad}(k_2)P$ au lieu de P, et C indépendant de $k_2 \in K$. Or

$$\big(\operatorname{Ad}(k_2)Pf\big)(\exp tH) = Pf(k_2^{-1}\cdot \exp tH\cdot k_2) = Pf(k_1\cdot \exp tH \cdot k_2)\,,$$

pour k_1, $k_2 \in K$, d'où pour tout $x \in G$: $(1+|x|)^k\delta_1(x)^{1/p}|Pf(x)|\leqslant C$; c'est dire que $f \in I^p(G)$, d'où le lemme.

LEMME 6. *L'application $\varphi \mapsto f$, avec $f(t) = \varphi(\operatorname{ch} t)$, est un isomorphisme d'espaces de Fréchet de Σ_r sur $\mathcal{S}_r$, pour $r\geqslant 0$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de préciser les résultats du lemme 2. Pour $\varphi \in C_1^\infty$ et $f(t) = \varphi(\operatorname{ch} t)$ on a

$$f^{(l)}(t) = \sum_{1\leqslant m\leqslant l} P_{l,m}(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)\varphi^{(m)}(\operatorname{ch} t)\,, \qquad l\geqslant 1 \tag{24}$$

où $P_{l,m}$ est un polynôme homogène de degré m. Par suite

$$|t^k f^{(l)}(t)|\leqslant C_l(\operatorname{Log} 2u)^k \sum_{1\leqslant m\leqslant l} u^m|\varphi^{(m)}(u)|$$

avec $u = \operatorname{ch} t$, $k\geqslant 0$, et C_l constant. Si $\varphi \in \Sigma_r$ on a donc $f \in \mathcal{S}_r$ et $\varphi \mapsto f$ est continue.

Inversement soit $f \in \mathcal{S}_r$ et $\varphi(u) = f(\operatorname{Arg ch} u)$. De (24) on déduit facilement, par récurrence sur $l\geqslant 1$, l'inégalité

$$u^l|\varphi^{(l)}(u)|\leqslant C'_l \sum_{1\leqslant m\leqslant l}|f^{(m)}(t)|$$

valable pour $|t|\geqslant a > 0$, a étant choisi assez grand pour que, par exemple, $|\operatorname{sh} t|\geqslant u/2$ quand $|t|\geqslant a$, i.e. quand $u\geqslant \operatorname{ch} a$. Pour $1\leqslant u\leqslant \operatorname{ch} a$ on aura

$$|\varphi^{(l)}(u)|\leqslant C''_l \sum_{1\leqslant m\leqslant 2l+1} \sup_{|t|\leqslant a}|f^{(m)}(t)|\,,$$

d'après les majorations du lemme 2. Comme $f \in \mathcal{S}_r$, ces deux inégalités entraînent $\varphi \in \Sigma_r$, d'où le lemme.

LEMME 7. *L'application E: $\mathfrak{D}_1 \to \mathfrak{D}_1$ se prolonge en un isomorphisme d'espaces de Fréchet de $\Sigma_{r+\varrho}$ sur Σ_r, pour $r \geqslant 0$.*

DÉMONSTRATION. Soient $r \geqslant 0$ et

$$\sigma_{k,l}^r(\varphi) = \sup_{u \geqslant 1} (\operatorname{Log} u)^k u^{r+l} |\varphi^{(l)}(u)|$$

les semi-normes de Σ_r. D'après les expressions (11) et (12) de E et E^{-1}, le lemme résultera des trois remarques suivantes:

1) *E_0: $\Sigma_{r+(1/2)} \to \Sigma_r$ est continu.* En effet

$$(\operatorname{Log} u)^k |\varphi^{(l)}(u + \pi x^2)| \leqslant \sigma_{k,l}^{r+1/2}(\varphi)(u + \pi x^2)^{-r-l-1/2}$$

pour $\varphi \in \Sigma_{r+1/2}$, $k, l \in \boldsymbol{N}$, $u \geqslant 1$, $x \in \boldsymbol{R}$. Si $r > 0$ on aura donc

$$\begin{aligned}(\operatorname{Log} u)^k \int_{\boldsymbol{R}} |\varphi^{(l)}(u + \pi x^2)| dx &\leqslant \sigma_{k,l}^{r+1/2}(\varphi) \int_{\boldsymbol{R}} (u + \pi x^2)^{-r-l-1/2}\, dx \\ &\leqslant C \sigma_{k,l}^{r+1/2}(\varphi) u^{-r-l}\end{aligned}$$

par le changement de variable $x = y\sqrt{u}$, d'où l'existence de $E_0\varphi \in C_1^\infty$, et l'inégalité

$$\sigma_{k,l}^r(E_0\varphi) \leqslant C \sigma_{k,l}^{r+1/2}(\varphi) .$$

Si $r = 0$ et $l > 0$, cette majoration est valable sans changements. Si $r = l = 0$, on écrira

$$\begin{aligned}(\operatorname{Log} u)^k |\varphi(u + \pi x^2)| \leqslant & \big(\sigma_{k,0}^{1/2}(\varphi) + \sigma_{k+2,0}^{1/2}(\varphi)\big) \\ & \cdot \big[1 + \big(\operatorname{Log}(u + \pi x^2)\big)^2\big]^{-1} (u + \pi x^2)^{-1/2}\end{aligned}$$

d'où en intégrant, avec le même changement de variable:

$$\sigma_{k,0}^0(E_0\varphi) \leqslant C\big(\sigma_{k,0}^{1/2}(\varphi) + \sigma_{k+2,0}^{1/2}(\varphi)\big) .$$

2) *R: $\Sigma_{2r} \to \Sigma_r$ est un isomorphisme d'espaces de Fréchet.* Soit $\varphi \in \Sigma_{2r}$, $R\varphi(u) = \varphi(u^{1/2})$. Comme $R^{-1}DR = (2u)^{-1}D$, on a $D^lR = 2^{-l}R(u^{-1}D)^l$ et

d'après (7), pour $l \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} u^{r+l}|(R\varphi)^{(l)}(u)| &= 2^{-l}u^{r+l}|((u^{-1}D)^l\varphi)(u^{1/2})| \\ &\leqslant Cu^{r+l}\sum_{1\leqslant m\leqslant l} u^{(m-2l)/2}|\varphi^{(m)}(u^{1/2})| \\ &\leqslant C\sum_{1\leqslant m\leqslant l} u^{(2r+m)/2}|\varphi^{(m)}(u^{1/2})|\,, \end{aligned}$$

donc

$$\sigma^r_{k,l}(R\varphi) \leqslant C\sum_{1\leqslant m\leqslant l}\sigma^{2r}_{k,m}(\varphi) \quad \text{pour } l\geqslant 1\,.$$

Evidemment $\sigma^r_{k,0}(R\varphi) = 2^k\sigma^{2r}_{k,0}(\varphi)$, d'où la continuité de R. Celle de R^{-1} se montre de manière analogue, à partir de

$$(R^{-1}\varphi)^{(l)}(u) = \sum_{l\leqslant 2m\leqslant 2l} b_{l,m}u^{2m-l}\varphi^{(m)}(u^2)\,.$$

3) $D\colon \Sigma_r \to \Sigma_{r+1}$ *est continu.* En effet $\sigma^{r+1}_{k,l}(D\varphi) = \sigma^r_{k,l+1}(\varphi)$.

Cela entraîne le lemme.

LEMME 8. *La transformation de Fourier de* $\mathbf{R}$ *est un isomorphisme d'espaces de Fréchet de* $\mathcal{S}_r$ *sur* H_r, *pour* $r\geqslant 0$.

La démonstration est laissée au lecteur, ce qui achèvera la preuve du théorème 5.

7. – Cas des groupes semisimples complexes.

Dans ce paragraphe on abandonne l'hypothèse du rang un, mais on suppose que G est un groupe de Lie semisimple complexe, considéré comme groupe réel. Les notations sont celles du paragraphe 1(b). En particulier Σ^+ est l'ensemble des racines restreintes positives, $m_\alpha = 2$ et $m_{2\alpha} = 0$ pour $\alpha\in\Sigma^+$, $\varrho = \Sigma_{\alpha\in\Sigma^+}\alpha$. Notons $\pi(\lambda) = \prod_{\alpha\in\Sigma^+}(\alpha, \lambda)$ pour tout λ appartenant à $\mathfrak{a}^*$ ou à son complexifié.

THÉORÈME 6 (inversion de la transformation d'Abel). *Soient* G *un groupe de Lie connexe semisimple complexe, et* $\mathcal{A}$ *la transformation d'Abel associée à une décomposition d'Iwasawa de* G. *Il existe une constante* $C\neq 0$ *telle que pour* $f\in\mathcal{D}(G\|K)$ *on ait*

$$Cf(\exp H) = \Big(\prod_{\alpha\in\Sigma^+}\operatorname{sh}\alpha(H)\Big)^{-1}\prod_{\alpha\in\Sigma^+}(\alpha, \partial_H)\big(\mathcal{A}f(\exp H)\big)\,,$$

pour tout $H\in\mathfrak{a}$ *tel que* $\alpha(H)\neq 0$ *pour tout* $\alpha\in\Sigma^+$.

Ici (α, ∂_H) est l'opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathfrak{a}$ défini par $(\alpha, \partial_H)\varphi(H) = \big(\alpha, \varphi'(H)\big)$, où $\varphi'(H) \in \mathfrak{a}^*$ est la différentielle en H de $\varphi \in C^\infty(\mathfrak{a})$.

DÉMONSTRATION. Adoptons, faute de mieux, la démarche inverse de celle du théorème 4 ci-dessus, en admettant l'expression explicite des φ_λ dans le cas présent. La transformée sphérique $\tilde{f}$ de $f \in \mathfrak{D}(G\|K)$ est donnée par

$$\tilde{f}(\lambda) = (\mathcal{A}f\circ\exp)\hat{}\,(\lambda) = \int_{\mathfrak{a}} \mathcal{A}f(\exp H)e^{-i\lambda(H)}\,dH = \int_G f(x)\varphi_\lambda(x^{-1})\,dx$$

pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, avec

$$\varphi_\lambda(\exp H) = \pi(\varrho)\pi(i\lambda)^{-1}\delta(H)^{-1}\sum_{w\in W} \text{dét}\, w\cdot e^{iw\lambda(H)}$$

pour $H \in \mathfrak{a}$ et $\alpha(H) \neq 0$ si $\alpha \in \Sigma^+$; on a posé

$$\delta(H) = \sum_{w\in W} \text{dét}\, w\cdot e^{w\varrho(H)} = \prod_{\alpha\in\Sigma^+} 2\,\text{sh}\,\alpha(H)\,.$$

(cf. Helgason [5], p. 31). D'après un résultat classique on a

$$\int_G F(x)\,dx = C_0\int_{\mathfrak{a}} F(\exp H)\delta(H)^2\,dH$$

pour F bi-invariante par K; C_0 est une constante > 0.

Comme $\varphi_\lambda\big(\exp(-H)\big) = \varphi_{-\lambda}(\exp H)$, et $\delta(wH) = \text{dét}\, w\cdot\delta(H)$, on déduit des relations ci-dessus

$$\begin{aligned}\pi(-i\lambda)\int_G f(x)\varphi_\lambda(x^{-1})\,dx &= C_0\pi(\varrho)\sum_w \text{dét}\, w\int_{\mathfrak{a}} f(\exp H)\delta(H)e^{-iw\lambda(H)}\,dH\\ &= C_0\pi(\varrho)\,\text{card}\, W\int_{\mathfrak{a}} f(\exp H)\delta(H)e^{-i\lambda(H)}\,dH,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\pi(-i\lambda)\tilde{f}(\lambda) = C_0\pi(\varrho)\,\text{card}\, W(\delta\cdot f\circ\exp)\hat{}\,(\lambda)\,. \tag{25}$$

Or $\pi(-i\lambda)\tilde{f}(\lambda) = \big(\pi(-\partial_H)\mathcal{A}f\big)\hat{}\,(\lambda)$, par suite

$$C_0\pi(\varrho)\,\text{card}\, W\delta(H)f(\exp H) = \pi(-\partial_H)\mathcal{A}f(\exp H)\,,$$

d'où le théorème, avec $C = C_0\pi(-2\varrho)\,\text{card}\, W$.

REMARQUES. 1) Compte tenu de nos normalisations on trouve, en s'inspirant des calculs de Duistermaat et al. [1], paragraphe 3.7, que $C_0 = (\text{card } W)^{-1}$, d'où $C = \pi(-2\varrho)$.

2) Par inversion de Fourier sur $\mathfrak{a}$, on déduit alors de (25)

$$\pi(\varrho)\delta(H)f(\exp H) = \int_{\mathfrak{a}^*} \tilde{f}(\lambda)\pi(-i\lambda)e^{i\lambda(H)}\, d\lambda$$
$$= (\text{card } W)^{-1}\int \tilde{f}(\lambda) \sum_w \text{dét } w\cdot e^{iw\lambda(H)}\pi(-i\lambda)\, d\lambda\,,$$

d'où la formule de Plancherel

$$f(x) = (\text{card } W)^{-1}\int_{\mathfrak{a}^*} \tilde{f}(\lambda)\varphi_\lambda(x)|c(\lambda)|^{-2}\, d\lambda$$

pour $f \in \mathfrak{D}(G\|K)$, $x \in G$; $d\lambda$ désigne la mesure duale de dH pour la transformation de Fourier, et

$$|c(\lambda)|^{-2} = |\pi(i\lambda)|^2\pi(\varrho)^{-2}\,.$$

Pour $x = e$ on obtient en particulier

$$f(e) = \lim_{H\to 0}\pi(-2\varrho)^{-1}(\Pi \operatorname{sh}\alpha(H))^{-1}\Pi(\alpha, \partial_H)(\mathcal{A}f(\exp H))$$
$$= (\text{card } W)^{-1}\pi(\varrho)^{-2}\Pi(-(\alpha, \partial_H)^2)(\mathcal{A}f\circ\exp)(0);$$

la première égalité est fournie par le théorème, la deuxième par la formule de Plancherel, en observant que $|c(\lambda)|^{-2}$ est un polynôme en λ.

3) La formule d'inversion du théorème 1 admet donc un analogue exact pour les groupes complexes. Il serait intéressant d'en obtenir une démonstration directe analogue à celle du rang un.

Note ajoutée sur épreuves. L'article ci-dessus est partiellement recoupé par le travail de plusieurs auteurs, comme je m'en suis aperçu après la rédaction. Il faut citer:
J. FARAUT, J. Funct. Anal., **49** (1982), pp. 230-268;
T. KOORNWINDER, Arkiv für Mat., **13** (1975), pp. 145-159; et
N. LOHOUE - T. RYCHENER, Comment. Math. Helvet., **57** (1982), pp. 445-468.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. J. DUISTERMAAT - J. A. C. KOLK - V. S. VARADARAJAN, *Spectra of compact locally symmetric manifolds of negative curvature,* Invent. Math., **52** (1979), pp. 27-93.

[1] HARISH-CHANDRA, *Spherical functions on a semisimple Lie group I, II,* Amer. J. Math., **80** (1958), pp. 241-310 et 553-613.

[1] S. HELGASON, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, 1962.
[2] S. HELGASON, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.
[3] S. HELGASON, *An analogue of the Paley-Wiener theorem for the Fourier transform on certain symmetric spaces*, Math. Ann., **165** (1966), pp. 297-308.
[4] S. HELGASON, *A duality for symmetric spaces with applications to group representations*, Advances in Math., **5** (1970), pp. 1-154.
[5] S. HELGASON, *Analysis on Lie groups and homogeneous spaces*, Regional Conf. Series Math., n. 14 (1972).
[1] W. MAGNUS - F. OBERHETTINGER - R. P. SONI, *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*, 3rd ed., Springer-Verlag, 1966.
[1] R. TAKAHASHI, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés*, Bull. Soc. Math. France, **91** (1963), pp. 289-433.
[1] P. C. TROMBI - V. S. VARADARAJAN, *Spherical transforms on semisimple Lie groups*, Ann. of Math., **94** (1971), pp. 246-303.
[1] N. R. WALLACH, *Harmonic analysis on homogeneous spaces*, Marcel Dekker, 1973.
[1] G. WARNER, *Harmonic analysis on semisimple Lie groups II*, Springer-Verlag, 1972.

Département de Mathématiques,
Parc Valrose,
06034 Nice cedex - France