Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Pham The Lai
D. Robert

Valeurs propres d'une classe d'équations différentielles singulières sur une demi-droite

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 6, nº 2 (1979), p. 335-366
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1979_4_6_2_335_0>

Valeurs propres d'une classe d'équations différentielles singulières sur une demi-droite.

PHAM THE LAI (*) - D. ROBERT (*)

Introduction.

Dans l'étude d'opérateurs différentiels elliptiques sur un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, dégénérant sur la frontière de Ω, on associe, à tout point $s \in \Gamma$, une équation différentielle singulière sur la demi-droite: $\{t \cdot \boldsymbol{n}_s + s;\, t > 0\}$ où $\boldsymbol{n}_s$ est la normale intérieure en s à Γ. Cette équation différentielle est obtenue par figeage des coefficients en s et par transformation de Fourier partielle par rapport au $(n-1)$ variables tangentielles en s à Γ. Le rôle joué dans l'étude de la régularité par cette équation différentielle est mis en évidence dans Bolley-Camus-Heffer [2] et Grushin-Savsan [5]. D'autre part Pham The Lai [8] a montré comment cette équation différentielle intervient dans la théorie spectrale des opérateurs elliptiques dégénérés.

Dans Bolley-Camus-Pham The Lai [3], où l'on étudie la théorie spectrale d'une classe de problèmes elliptiques dégénérés, avec un type de dégénérescence non nécessairement normal à Γ, intervient une classe d'opérateurs différentiels singuliers qui sur $[0, +\infty[$ s'écrivent

$$L(t, D_t) = \sum_{0 \leqslant j,\, l \leqslant m} a_{jl} \cdot D^l [t^{2(\sigma + \delta m) + (j+l)(1-\delta)} D^j] \tag{1}$$

où $D = i^{-1}(d/dt)$, σ réel < 0, δ réel > 0 tels que $\sigma + \delta m > 0$ et $\sigma + m \geqslant 0$; a_{jl} est réel et $a_{jl} = a_{lj}$ pour $0 \leqslant j,\, l \leqslant m$.

Sous une hypothèse de coercivité naturelle (c) (voir § 1), on considère une réalisation A dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ de $L(t, D_t)$. L'opérateur A a alors une suite $(\lambda_j)_{j \geqslant 0}$ de valeurs propres réelles, chacune étant répétée suivant sa multiplicité. De plus, on a: $\lim\limits_{j \to +\infty} \lambda_j = +\infty$. Nous nous proposons dans ce travail d'étudier la croissance de la suite $(\lambda_j)_{j \geqslant 0}$.

(*) Université de Nantes, Institut de Mathématiques et d'Informatique.
Pervenuto alla Redazione il 23 Febbraio 1978.

Lorsque $\delta = 1$ et $\sigma \in Z$, cette étude a été faite par A. Mohamed [7] où il a été établi que $\lim\limits_{j\to+\infty} [j^{-2(\sigma+\delta m)} \cdot \lambda_j] = l$ où l est un nombre > 0 qui s'exprime en fonction du symbôle de L.

Dans [3] Bolley-Camus-Pham The Lai ont montré que:

$$\liminf_{j\to+\infty} [j^{-2(\sigma+\delta m)/\delta} \cdot \lambda_j] > 0 \qquad \text{lorque} \qquad \frac{\delta}{2(\sigma+\delta m)} < 1 .$$

Le résultat principal de cet article est que, sous les hypothèses (1) et (c) on a:

$$\lim_{j\to+\infty} (j^{-2(\sigma+\delta m)/\delta} \cdot \lambda_j) > 0 . \tag{2}$$

Nous établissons (2) par une méthode indirecte: on considère un entier p assez grand de sorte que pour $\lambda \geqslant \lambda_0$, $G_\lambda^{(p)} = (A^p + \lambda)^{-1}$ soit un opérateur nucléaire de $L^2(\mathbb{R}_+)$. On étudie alors le comportement en λ du noyau de $G_\lambda^{(p)}$ au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$. On en déduit un équivalent en λ pour Trace $(A^p + \lambda)^{-1}$, $\lambda \to +\infty$ et le théorème taubérien de Hardy-Littlewood donne [2].

Le paragraphe I est consacré à des préliminaires: noyau d'opérateur associé à un problème variationnel et espaces de Sobolev à poids sur $\mathbb{R}_+$.

Dans le paragraphe II nous précisons les hypothèses et les résultats obtenus puis nous donnons quelques examples.

Dans le paragraphe III nous étudions le noyau de $G_\lambda(t, t)$ sur $[1, +\infty[$. Cette étude est le point crucial de notre travail. Nous utilisons ici deux types de méthode. Pour $\delta \geqslant 1$ on procède par figeage des coefficients de l'opérateur et par estimation de commutateurs. Pour $0 < \delta < 1$ on construit une paramétrix à droite pour l'opérateur $L + \lambda$. La deuxième méthode s'adapte pour traiter le cas $\delta \geqslant 1$.

Enfin, dans le paragraphe IV, on achève l'étude de $\mathrm{Tr}\,(A^p + \lambda)^{-1}$.

I. – Préliminaries.

Rappelons d'abord quelques résultats généraux qui nous seront utiles. $L^2(\Omega)$ étant l'espace des fonctions mesurables de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit V un espace de Hilbert dense dans $L^2(\Omega)$. On suppose:

(i) l'injection de V dans $L^2(\Omega)$ est continue;

(ii) l'injection de V dans $C(\Omega)$ (muni de la convergence uniforme sur tout compact) est compacte;

(iii) il existe $\chi \in C(\Omega)$, $\chi > 0$ sur Ω et des constantes γ, $c_1 > 0$ telles que: $|u(x)| \leqslant c_1 \chi^{-1}(x) \|u\|_V^\gamma \cdot \|u\|_{L^2}^{1-\gamma}$ pour tout $u \in V$ et $x \in \Omega$.

Soit V' l'anti-dual de V par rapport au produit scalaire de $L^2(\Omega)$. On notera par $\|T\|_{V',V}$ la norme dans $\mathcal{L}(V', V)$, espace des opérateurs linéaires continues de V' dans V. On introduit de même les normes $\|T\|_{V',L^2}$, $\|T\|_{L^2,V}$ et $\|T\|_{L^2,L^2}$.

THÉORÈME (I.1) (Bolley-Camus-Pham The Lai [3]). *Soit $T \in \mathcal{L}(V', V)$. Alors T est un opérateur intégral de noyau $K(x, y)$ continu sur $\Omega \times \Omega$ et*

$$(1.0) \qquad |K(x, y)| \leqslant c_1^2 (\chi(x) \cdot \chi(y))^{-1} \|T\|_{V',V}^{\gamma^2} \|T\|_{L^2,V}^{\gamma(1-\gamma)} \|T\|_{L^2,V}^{\gamma(1-\gamma)} \|T\|_{L^2,L^2}^{(1-\gamma)^2}$$

pour tout $x, y \in \Omega$.

Soit $a(u, v)$ une forme sequilinéaire, continue sur $V \times V$ et V-coercive c'est-à-dire qu'il existe $c_2 > 0$ *et* $\lambda_0 \geqslant 0$ telles que

$$(1.1) \qquad \operatorname{Re} a(u, u) \geqslant c_2 \|u\|_V^2 - \lambda_0 \|u\|_{L^2}^2 \quad \text{pour tout } u \in V .$$

Soit $A \in \mathcal{L}(V, V')$ l'opérateur associé à a par le théorème de Lax-Milgram. D'après (1.2), $A + \lambda$ est un isomorphisme de V sur V' pour $\operatorname{Re} \lambda \geqslant \lambda_0$. Posons alors $G_\lambda = (A + \lambda)^{-1}$. On a alors:

PROPOSITION (I.2). *Sous les hypothèses* (i), (ii), (iii) *et* (1.2), *pour $\lambda \geqslant \lambda_0$, G_λ est un opérateur intégral de noyau $G_\lambda(x, y)$ continu sur $\Omega \times \Omega$ et vérifiant:*

$$|G_\lambda(x, y)| \leqslant c_1^2 c_2^{-\gamma} (\chi(x) \cdot \chi(y))^{-1} \lambda^{-1+\gamma}$$

pour tout $\lambda > \lambda_0$.

Puisque nous nous proposons d'étudier les valeurs propres de problèmes associés aux formes:

$$a(u, v) = \sum_{0 \leqslant j, l \leqslant m} \int_0^{+\infty} a_{jl}(t) \cdot t^{2(\sigma + \delta m) + (j+l)(1-\delta)} D^j u \overline{D^l v}\, dt$$

il est naturel de considérer les espaces:

$$W^m_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}_+) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}_+),\ t^{\sigma + \delta m + j(1-\delta)} D^j u \in L^2(\mathbf{R}_+),\ 0 \leqslant j \leqslant m\}$$

où $m \in \mathbf{N}$, σ réel < 0, δ réel > 0 tels que $\sigma + m \geqslant 0$ et $\sigma + \delta m > 0$.

$W^m_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}_+)$ est un espace de Hilbert pour la norme canonique.

Nous donnons maintenant les propriétés de ces espaces:

PROPOSITION (I.3) (Bolley-Camus-Pham The Lai [3]).

$$W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+) : t^{\sigma+m}\cdot D^m u \in L^2(\mathbb{R}_+) \text{ et } t^{\sigma+\delta m} u \in L^2(\mathbb{R}_+)\}\,.$$

PROPOSITION (I.4) (Bolley-Camus-Pham The Lai [3]).

(i) *On a une injection continue*: $W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+) \hookrightarrow H^{-\sigma}(\mathbb{R}_+)$

(ii) *On a une injection compacte*: $W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$.

PROPOSITION (I.5):

(i) *On a une injection compacte*: $W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+) \hookrightarrow c(]0, +\infty[)$

(ii) *Il existe une constante $c > 0$ telle que*:

$$|u(t)| \leqslant c t^{-(\sigma+m)/m}\cdot \|u\|^{1/2m}_{W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+)}\cdot \|u\|^{1-1/2m}_{L^2(\mathbb{R}_+)} \tag{1.2}$$

$$|u(t)| \leqslant c t^{-(\sigma+\delta m)+(\delta-1)/2}\cdot \|u\|_{W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+)} \tag{1.3}$$

pour tout $u \in W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+)$.

DÉMONSTRATION:

(i) résulte de l'inclusion: $W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+) \subset H^m_{\mathrm{loc}}(]0, +\infty[)$ et de $m > \frac{1}{2}$ par le théorème de Sobolev usuel.

(ii) Par le théorème de Sobolev, il existe $c > 0$ telle que:

$$|W(t)|^2 \leqslant c\left[\int_\tau^{+\infty} |D^m W|^2 dt + \int_\tau^{+\infty} |W|^2 dt\right] \tag{1.4}$$

pour tout réel $\tau > 0$, $t \geqslant \tau$ et $W \in H^m(]\tau, +\infty[)$.

Soit alors $u \in W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+)$ et $\lambda > 0$. Posons $W(x) = u(\lambda\cdot x)$; (1.4) donne:

$$|u(t)|^2 \leqslant c\left[\int_{\lambda^{-1}t}^{\infty} |D^m W|^2 dx + \int_{\lambda^{-1}t}^{\infty} |W|^2 dx\right],$$

$t > 0$, d'où

$$|u(t)|^2 \leqslant \frac{C}{\lambda}\left[\lambda^{2m}\int_t^{\infty} |D^m u|^2\, dx + \int_t^{\infty} |u|^2\, dx\right]$$

et comme $x \geq t$ on en déduit:

$$|u(t)|^2 \leq \frac{c}{\lambda}\left[\lambda^{2m} t^{-2(\sigma+m)} \int_0^\infty x^{2(\sigma+m)} |D^m u|^2\, dx + \int_0^\infty |u|^2\, dx\right] \tag{1.5}$$

pour tout $u \in W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+)$, $t > 0$, $\lambda > 0$.

(1.5) avec $\lambda = t^{(\sigma+m)/m}$ donne:

$$|u(t)|^2 \leq c \cdot t^{-(\sigma+m)/m}\left[\int_0^\infty x^{2(\sigma+m)} |D^m u|^2 dx + \int_0^\infty |u|^2 dx\right].$$

Appliquons cette inégalité à $v(x) = u(r \cdot x)$, $r > 0$:

$$|u(r \cdot t)|^2 \leq \frac{c}{r}\, t^{-(\sigma+m)/m}\left[r^{-2\sigma} \int_0^\infty x^{2(\sigma+m)}\, |D^m u|\, dx + \int_0^\infty |u|^2\, dx\right].$$

Posons $r^\sigma = \varrho$, il vient:

$$|u(t)|^2 \leq c \cdot t^{-(\sigma+m)/m} \varrho^{-1+1/2m}\left[\|u\|^2_{W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+)} + \varrho \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right].$$

On obtient alors (1.2) avec

$$\varrho = \|u\|^2_{W^m_{\sigma,\delta}} / \|u\|^2_{L^2}.$$

$\lambda = t^{1-\delta}$ dans (1.5) donne immédiatement (1.3).

Soit $a(u, v)$ une forme sesquilinéaire continue sur $W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+) \times W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+)$ et $W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+)$-coercive. Notons par $W^{-m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+)$ l'antidual de $W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+)$ par rapport au produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}_+)$. Soit $A \in \mathcal{L}(W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+), W^{-m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+))$ l'opérateur engendré par a. Posons $G_\lambda = (A + \lambda)^{-1}$ pour $\lambda \geq \lambda_0 > 0$.

THÉORÈME (I.6).

(i) *On a les majorations*:

$$\begin{aligned} &\|G_\lambda\|_{W^{-m}_{\sigma,\delta},\, W^m_{\sigma,\delta}} \leq c \\ &\|G_\lambda\|_{W^{-m}_{\sigma,\delta},\, L^2} \leq c \cdot \lambda^{-1/2} \\ &\|G_\lambda\|_{L^2,\, W^m_{\sigma,\delta}} \leq c \cdot \lambda^{-1/2} \\ &\|G_\lambda\|_{L^2, L^2} \leq c \cdot \lambda^{-1} \end{aligned} \tag{1.6}$$

pour $\lambda \geq \lambda_0$.

(ii) *G_λ a un noyau continu, $G_\lambda(t, \tau)$, sur $]0, +\infty[\times]0, \infty[$ et il existe une constante $c > 0$ indépendante de λ, t ed τ telle que*:

$$|G_\lambda(t, \tau)| \leqslant c(t \cdot \tau)^{-(\sigma+m)/2m} \cdot \lambda^{-1+(1/2m)} \tag{1.7}$$

$$|G_\lambda(t, \tau)| \leqslant c(t \cdot \tau)^{-(\sigma+\delta m)+(1/2)(\delta-1)} \tag{1.8}$$

pour t, $\tau > 0$ et $\lambda \geqslant \lambda_0$.

DÉMONSTRATION. (1.6) résulte de la coercivité de a.
On obtient (1.7) et (1.8) à partir de (1.6), de la proposition (I.5) et de (1.0).

II. – Hypothèses. Résultats. Exemples.

Soit la forme intégro-differentielle:

$$a(u, v) = \sum_{0 \leqslant j, l \leqslant m} \int_0^{+\infty} a_{jl}(t)\, t^{2(\sigma+m)+(j+l)(1-\delta)} D^j u \overline{D^l v}\, dt$$

On suppose:

(H_1) $a_{jl} \in L^\infty(\mathbf{R}_+)$, à valeurs réelles

(H_2) $a_{jl} = a_{lj}$ pour $0 \leqslant j$, $l \leqslant m$

(H_3) $\lim_{t \to +\infty} a_{jl}(t) = a_{jl}(\infty)$ existe pour $0 \leqslant j$, $l \leqslant m$

(H_4) a est $W^m_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}_+)$-coercive: il existe c, $\lambda_0 > 0$ telles que
$$a(u, v) + \lambda_0 \;\|u\|^2_{L^2} \geqslant c \;\|u\|^2_{W^m_{\sigma,\delta}} \quad \text{pour tout } u \in W^m_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}_+)\,.$$

Soit $A \in \mathcal{L}\big(W^m_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}_+), W^{-m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}_+)\big)$ l'opérateur engendré par a. Comme précédemment, on pose: $G_\lambda = (A + \lambda)^{-1}$ pour $\lambda \geqslant \lambda_0$.
Posons:

$$\omega_\infty(\xi) = \sum_{0 \leqslant j, l \leqslant m} a_{jl}(\infty) \cdot \xi^{j+l} \quad \text{pour } \xi \in \mathbf{R}\,.$$

Nous nous proposons dans ce travail d'établir les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME (II.1). (1) *Il existe $E > 0$ telle que*:

$$\omega_\infty(\xi) \geqslant E \cdot (1 + \xi^2)^m \quad \textit{pour tout } \xi \in \mathbf{R}\,.$$

(2) *G_λ a un noyau continu sur* $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

(3) *Si* $\alpha = \delta/2(\sigma + \delta m) < 1$, *$G_\lambda$ est un opérateur nucléaire de* $L^2(\mathbf{R}_+)$ *dans lui-même et l'on a:*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{1-\alpha}\int_0^{+\infty} G_\lambda(t, t)\,dt = \frac{1}{2\pi\delta}\cdot\frac{\pi\alpha}{\sin\pi\alpha}\int_{\mathbf{R}} \omega_\infty(\xi)^{-\alpha}\,d\xi\,. \tag{2.1}$$

THÉORÈME (II.2). (1) *Le spectre de A est discret, constitué d'une suite croissante $(\lambda_k)_{k\geqslant 0}$ de valeurs propres, chacune étant répétée suivant sa multiplicité qui est finie, et telle que* $\lim\limits_{k\to+\infty}\lambda_k = +\infty$.

(2) *Posons*: $N(\lambda) = \sum\limits_{\lambda_k\leqslant\lambda} 1$. *On a alors:*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{-\alpha}\cdot N(\lambda) = \frac{1}{2\pi\delta}\int_{\mathbf{R}} \omega_\infty(\xi)^{-\alpha}\,d\xi\,. \tag{2.2}$$

REMARQUE. (2.2) est une conséquence directe de (2.1) pour $\delta/2(\sigma+\delta m) < 1$ par le théorème de Hardy-Littlewood. Pour le cas général nous étudierons le noyau de $(A^p + \lambda)^{-1}$, p entier assez grand, après avoir réduit le problème au cas où les a_j sont constants à l'infini.

Extablissons maintenant le point (1) de (II.1):

PROPOSITION (II.3). *Sous les hypothèses* (H_1) *à* (H_4), *il existe $E > 0$ telle que*

$$\omega_\infty(\xi) \geqslant E(1 + \xi^2)^m \quad \textit{pour tout } \xi\in\mathbf{R}\,. \tag{2.3}$$

DÉMONSTRATION. Soit $\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbf{R}_+)$, $\varphi\geqslant 0$ et $\operatorname{supp}\varphi\subseteq\,]1, +\infty[$ telle que $\int_1^{+\infty} t^{2(\sigma+\delta m)}\cdot\varphi(t)^2\,dt = 1$.

Posons:

$$u_{\varepsilon,\xi}(t) = \varepsilon^{\sigma+\delta m+(1/2)}\cdot\varphi(\varepsilon t)\cdot\exp\left[i\xi\delta^{-1}t^\delta\right], \qquad 0 < \varepsilon\leqslant 1\,.$$

La coercivité de a et la proposition (I.3) donnent:

$$a(u_{\varepsilon,\xi}, u_{\varepsilon,\xi}) + \lambda_0\,\|u_{\varepsilon,\xi}\|^2_{L^2} \geqslant c\left(\|t^{\sigma+m}D^m u_{\varepsilon,\xi}\|^2_{L^2} + \|t^{\sigma+\delta m}\cdot u_{\varepsilon,\xi}\|^2_{L^2}\right). \tag{2.4}$$

On a clairement:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|u_{\varepsilon,\xi}\|^2_{L^2} = 0 \quad\text{et}\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\|t^{\sigma+\delta m}\cdot u_{\varepsilon,\xi}\|^2_{L^2} = 1\,.$$

On a d'autre part:

(2.5) $$D^m u_{\varepsilon,\xi}(t) = \varepsilon^{\sigma+\delta m+(1/2)}\cdot\varphi(\varepsilon t)(\xi t^{\delta-1})^m\cdot\exp[i\xi\delta^{-1}t^\delta] + \\ + \varepsilon^{\sigma+\delta m+(1/2)}\sum_{0\leqslant k\leqslant m-1}\varepsilon^{m-k}\cdot D^{m-k}\varphi(\varepsilon t)\cdot\Big(\sum_{h=0}^{k}c_{h,k}(\xi)\,t^{(k-h)(\delta-1)-h}\Big)\exp[i\xi\delta^{-1}t^\delta]\,.$$

Posons:

$$R_{\varepsilon,\xi} = \varphi(\varepsilon t)(\xi t^{\delta-1})^m \quad \text{et} \quad R^{(m)}_{\varepsilon,\xi} = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant m-1\\ 0\leqslant h\leqslant k}}\varepsilon^{m-k}\;D^{m-k}\varphi(\varepsilon t)\,c_{h,k}(\xi)\,t^{(k-h)(\delta-1)-h}\,.$$

On a facilement:

$$\|t^{\sigma+m}R_{\varepsilon,\xi}\|^2_{L^2} = \xi^{2m} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\|t^{\sigma+m}R^{(m)}_{\varepsilon,\xi}\|_{L^2} = 0$$

d'où:

(2.6) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\|t^{\sigma+m}D^m u_{\varepsilon,\xi}\|^2_{L^2} = \xi^{2m}\,.$$

On aura établi la proposition si l'on prouve:

(2.7) $$\lim_{\varepsilon\to 0} a(u_{\varepsilon,\xi}, u_{\varepsilon,\xi}) = \omega_\infty(\xi)\,.$$

Or d'après (2.5) on a:

$$a(u_{\varepsilon,\xi}, u_{\varepsilon,\xi}) = \varepsilon^{2(\sigma+\delta m)+1}\cdot\int_0^\infty\Big(\sum_{0\leqslant j,\,l\leqslant m}a_{jl}(t)\cdot\xi^{j+l}\cdot t^{2(\sigma+\delta m)}|\varphi(\varepsilon t)|^2\,dt\Big) + \\ + \varepsilon^{2(\sigma+\delta m)+1}\int_0^\infty\sum_{0\leqslant j,\,l\leqslant m}a_{jl}(t)\,t^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)}\cdot \\ \cdot\big[R^{(j)}_{\varepsilon,\xi}(t)\cdot\overline{R^{(l)}_{\varepsilon,\xi}}(t) + \varphi(\varepsilon\tau)\big((\varepsilon t^{\delta-1})^l R^{(j)}_{\varepsilon,\xi}(t) + (\xi t^{\delta-1})^l R^{(j)}_{\varepsilon,\xi}(t)\big)\big]\,dt$$

Par le théorème de Lebesgue on a:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\varepsilon^{2(\sigma+\delta m)+1}\int_0^\infty\sum_{0\leqslant j,\,l\leqslant m}a_{jl}(t)\cdot\xi^{j+l}\cdot t^{2(\sigma+\delta m)}\,|\varphi(\varepsilon t)|^2\,dt\Big] = \omega_\infty(\xi)\,.$$

On a: Supp $R^{(j)}_{\varepsilon,\xi}\subseteq[1/\varepsilon, A/\varepsilon]$, A constante >1 et il existe γ_j fonction de ξ, indépendante de t et ε telle que:

$$|R^{(j)}_{\varepsilon,\xi}(t)|\leqslant\gamma_j(\xi)\cdot\varepsilon\cdot t^{(j-1)(\delta-1)} \qquad \text{pour } t\in[1/\varepsilon, A/\varepsilon]\,.$$

D'où:

$$\varepsilon^{2(\sigma+\delta m)+1}\left|\int_0^\infty a_{jl}(t)\, t^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)}\, R^{(j)}_{\varepsilon,\xi}\cdot \overline{R^{(l)}_{\varepsilon,\xi}}\, dt\right| \leqslant c\cdot\gamma_j(\xi)\,\gamma_l(\xi)\,\varepsilon^\delta \int_1^A \tau^{2(\sigma+\delta m)+2(1-\delta)}\, d\tau\ .$$

On a de même:

$$\varepsilon^{2(\sigma+\delta m)+1}\cdot\left|\int_0^\infty a_{jl}(t)\, t^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)}\cdot\varphi(\xi t)\cdot(\xi t^{\delta-1})\, R^{(j)}_{\varepsilon,\xi}\, dt\right| \leqslant c(\xi)\cdot\varepsilon^\delta\ ,$$

comme $\delta > 0$, les majorations précédentes impliquant (2.7).

EXEMPLES (II.4). (1) $L(t, D_t) = D_t^2 + t^k$, k réel > 0.

C'est un opérateur du type Schrödinger sur $[0, +\infty[$. Dans ce cas il a été démontré par Lévitan [6] que:

$$\text{(L)}\qquad N(\lambda) \sim (2\pi)^{-1}\int_0^\infty dt \int_{\xi^2+t^k\leqslant\lambda} d\xi\ .$$

Montrons que cette formule coïncide avec (2.2) dans ce cas particulier. On a ici:

$$m = 1\ ,\qquad \sigma = -1\ ,\qquad \delta = \frac{k}{2}+1 \quad\text{et}\quad \alpha = \frac{\delta}{2(\sigma+\delta m)} = \frac{1}{2}+\frac{1}{k}\,.$$

(2.2) s'écrit alors:

$$N(\lambda) \sim \pi^{-1}(k+2)^{-1}\left(\int (1+\xi^2)^{-(1/k)-(1/2)}\, d\xi\right)\lambda^{1/2+1/k}\ .$$

Utilisant la fonction béta classique il vient:

$$(2.2)'\qquad N(\lambda) \sim \pi^{-1}(k+2)^{-1} B\left(\frac{1}{k},\frac{1}{2}\right)\lambda^{1/2+1/k}\ ,\qquad \lambda \to +\infty\,.$$

D'autre part, par quasi-homogénéité, on a:

$$\int_0^{+\infty} dt \int_{\xi^2+t^k\leqslant\lambda} d\xi = \lambda^{1/2+1/k}\int_0^{+\infty} d\tau \int_{\eta^2+\tau^k\leqslant 1} d\eta = 2\cdot\lambda^{1/2+1/k}\int_0^1 (1-\tau^k)^{1/2}\, d\tau\ .$$

Or:

$$\int_0^1 (1-\tau^k)^{1/2}\, d\tau = \frac{1}{k}\int_0^1 u^{(1/k)-1}(1-u)^{1/2}\, du = \frac{1}{k} B\left(\frac{1}{k},\frac{3}{2}\right).$$

Or la fonction béta vérifie:

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p+q} B(p, q) \qquad p, q > 0 ,$$

d'où:

$$B\left(\frac{1}{k}, \frac{3}{2}\right) = k(k+2)^{-1} \cdot B\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{2}\right),$$

ce qui prouve que (L) et (2.2)′ coïncident et que:

$$N(\lambda) \sim (k \cdot \pi)^{-1} \cdot B\left(\frac{1}{k}, \frac{3}{2}\right) \cdot \lambda^{1/2+1/2}, \qquad \lambda \to +\infty .$$

Pour $k = 2$ on trouve: $\lambda_j = 4j + 1$ (opérateur d'Hermite sur $[0, +\infty[$).

(2) Soit $L(t, D_t) = a_1 D_t(tD_t) + a_0 t$, $\quad a_1, a_0 > 0$.

Un calcul explicite prouve que $\lambda_j = 2(\sqrt{a_0 a_1}) \cdot j + \sqrt{a_0 a_1}$.
La j-ième fonction propre est donnée par:

$$\varphi_j(t) = \exp\left[-\left(\sqrt{(a_0/a_1)}\right) t\right] \cdot L_j\left(2\sqrt{\frac{a_0}{a_1}} \cdot t\right),$$

où L_j est le j-ième polynôme de Laguerre.

(3) Plus généralement, considérons le opérateurs:

$$L(t, D_t) = D_t(t^h D_t) + t^k \quad \text{pour } 0 \leqslant h < 2 \text{ et } k > 0 ,$$

on a alors:

$$m = 1 , \qquad \sigma = \frac{h}{2} - 1 , \qquad \delta = 1 - \frac{h-k}{2}, \qquad \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{k} - \frac{h}{2k} .$$

Un calcul analogue à celui fait dans (1) montre que:

$$N(\lambda) \sim (\pi k)^{-1} \cdot B\left(\frac{1}{k} - \frac{h}{2k}, \frac{3}{2}\right) \cdot \lambda^{1/2+1/k-h/2k}, \qquad \lambda \to +\infty .$$

III. – Etude du modèle.

LEMME (III.1). *Avec les notations du paragraphe* II, *pour tout réel* $T > 0$, *on a*:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{1-\alpha} \int_0^T G_\lambda(t, t)\, dt = 0 .$$

DÉMONSTRATION. D'après (1.7) on a:

$$\lambda^{1-\alpha}\cdot\int_0^T G_\lambda(t,t)\,dt \leqslant c\cdot\lambda^{(1/2m)-\alpha}\int_0^T t^{-(\sigma+m)/m}\,dt\,,$$

or:

$$\frac{1}{2m}-\alpha=\frac{1}{2m}-\frac{\delta}{2(\sigma+\delta m)}=\frac{\sigma}{2m(\sigma+\delta m)}\,,$$

où $\sigma<0$, d'où le lemme.

Le lemme (III.1) montre qu'il suffit de faire l'étude de G_λ sur $[T,+\infty[$, $T>0$. Désignons par $W^m_{\sigma,\delta}([T,+\infty[)$ l'espace des $u\in W^m_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}_+)$ tel que $\operatorname{Supp} u\subset[T,+\infty[$ muni de la structure hilbertienne évidente.

LEMME (III.2). *Avec les notations de* II, *il existe* $T_0>0$ *tel que pour* $T\geqslant T_0$, *la forme*

$$a_T(u,v)=\sum_{0\leqslant j,l\leqslant m}a_{jl}(\infty)\int_T^\infty t^{2(\lambda\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)}D^j u\overline{D^l v}\,dt$$

soit coercive sur $W^m_{\sigma,\delta}([T,+\infty[)$.

DÉMONSTRATION. Evidente à partir de la coercivité de a et de la définition de $a_{jl}(\infty)$.

Nous allons étudier comme modèle la forme intégro-différentielle:

$$\alpha(u,v)=\sum_{0\leqslant j,l\leqslant m}\alpha_{jl}\int_1^{+\infty} t^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)}D^j u\overline{D^l v}\,dt\,.$$

On suppose: α_{jl} réels, $\alpha_{jl}=\alpha_{lj}$ pour tout $0\leqslant j,\ l\leqslant m$ et α $W^m_{\sigma,\delta}([1,\infty[)$-coercive: il existe c, $\lambda_0>0$ telles que

(3.1) $\qquad\alpha(u,v)+\lambda_0\ \|u\|^2_{L^2}\geqslant c\|u\|^2_{W^m_{\sigma,\delta}}\qquad$ pour tout $u\in W^m_{\sigma,\delta}([1,\infty[)$.

Posons:

$$\omega(\xi)=\sum_{0\leqslant j,l\leqslant m}\alpha_{jl}\cdot\xi^{j+l}\,,$$

(2.3) entraîne qu'il existe $E>0$ telle que:

(3.2) $\qquad\omega(\xi)\geqslant E(1+\xi^2)^m\qquad$ pour tout $\xi\in\mathbf{R}$.

Soit $\mathcal{A}$ l'opérateur engendré par $\left(\alpha, W^m_{\sigma,\delta}([1, \infty[), L^2([1, \infty[)\right)$. Posons $\mathcal{G}_\lambda = (\mathcal{A} + \lambda)^{-1}$ pour $\lambda \geqslant \lambda_0$. Il résulte du paragraphe I que $\mathcal{G}_\lambda$ est un opérateur à noyau continu sur $[1, +\infty[\times[1, +\infty[$. De plus il existe $c > 0$ telle que:

$$|\mathcal{G}_\lambda(t, \tau)| \leqslant c(t\cdot\tau)^{-(\sigma+m)/m}\cdot\lambda^{-1+(1/2m)} \tag{3.3}$$

$$|\mathcal{G}_\lambda(t, \tau)| \leqslant c(t\cdot\tau)^{-(\sigma+\delta m)+(1/2)(\delta-1)}, \tag{3.4}$$

pour tout $\lambda \geqslant \lambda_0$, t, $\tau \in [1, +\infty[$.

Le but de ce paragraphe est de prouver le:

THÉORÈME (III.3). *Supposons de plus*: $\alpha = \delta/2(\sigma + \delta m) < 1$. *Alors* $t \to \mathcal{G}_\lambda(t, t)$ *est intégrable sur* $[1, +\infty[$ *et l'on a*:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{1-\alpha}\int_1^\infty \mathcal{G}_\lambda(t, t)\, dt = (\pi\alpha)\cdot(2\pi\delta)^{-1}\cdot(\sin \pi\alpha)^{-1}\int_{\mathbf{R}} \omega(\xi)^{-\alpha}\, d\xi\,. \tag{3.5}$$

La démonstration du théorème (III.3) est assez longue. Comme il est indiqué dans l'introduction, nous donnons deux types de démonstration suivant que $\delta \geqslant 1$ ou que $0 < \delta < 1$.

(III.A): $\delta \geqslant 1$. Dans tout ce sous-paragraphe nous faisons l'hypothèse supplémentaire $\delta \geqslant 1$.

Soit $t_0 \geqslant 2$ fixé et posons $\tau = t_0^{1-\delta}$.

La forme α figée en t_0 s'écrit:

$$\alpha_{t_0}(u, v) = \sum_{0\leqslant j,l\leqslant m} \alpha_{jl}\int_{-\infty}^{+\infty} t_0^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)} D^j u\overline{D^l v}\, dt$$

pour u, $v \in H^m(\mathbf{R})$.

Par (3.2), α_{t_0} est $H^m(\mathbf{R})$-coercive.

Posons:

$$\beta_\tau(u, v) = \sum_{0\leqslant j,l\leqslant m} \alpha_{jl}\int_{-\infty}^{+\infty} (\tau\cdot D)^j u\cdot\overline{(\tau\cdot D)^l v}\, dt\,, \qquad 0 < \tau \leqslant 1$$

pour u, $v \in H^m(\mathbf{R})$.

On a:

$$\alpha_{t_0}(u, v) = t_0^{2(\sigma+m)}\cdot\beta_{t_0^{1-\delta}}(u, v)\,.$$

Pour m réel désignons par $H^m_{(\tau)}(\mathbf{R})$ l'espace de Sobolev usuel $H^m(\mathbf{R})$ muni de la norme: $\|u\|^2_{m,\tau} = \int_{\mathbf{R}}(|\tau\cdot\xi|^2 + 1)^m|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$ où $\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \exp[ix\cdot\xi]u(x)\,dx$.

(3.2) entraîne:

$$\beta_\tau(u, u) \geqslant E \cdot \|u\|^2_{m,\tau} \quad \text{pour tout } u \in H^m_{(\tau)}(\mathbf{R}) . \tag{3.6}$$

Pour $m > \frac{1}{2}$ on a une injection continue: $H^m_{(\tau)}(\mathbf{R}) \subsetneq C(\mathbf{R})$. De plus il existe $c > 0$ telle que:

$$|u(x)| \leqslant c \cdot \tau^{-1/2} \cdot \|u\| \cdot^{1/2m}_{m,\tau} \|u\|_0^{1-(1/2m)} \tag{3.7}$$

pour tout $u \in H^m(\mathbf{R})$ et $x \in \mathbf{R}$.

Il résulte du théorème (I.1) et de (3.7) que l'on a:

PROPOSITION (III.4). *Supposons* $m > \frac{1}{2}$.

Soit $T \in \mathcal{L}(H^{-m}_{(\tau)}(\mathbf{R}), H^m_{(\tau)}(\mathbf{R}))$. *Alors* T *admet un noyau* $T(x, y)$, *continu et borné sur* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. *De plus on a*:

$$|T(x, y)| \leqslant \frac{c}{\tau} \quad \|T\|^{(1/2m)^2}_{H_\tau^{-m}, H_\tau^m} \cdot \|T\|^{(1/2m)(1-(1/2m))}_{H_\tau^{-m}, L^2} \cdot \|T\|^{(1/2m)(1-(1/2m))}_{L^2, H_\tau^m} \cdot \|T\|^{(1-(1/2m))^2}_{L^2, L^2} \tag{3.8}$$

pour tout $x, y \in \mathbf{R}$ où c est indépendante de T, τ, x et y.

Soit $\mathcal{B}_\tau \in \mathcal{L}(H^{-m}_{(\tau)}, H^m_{(\tau)})$ l'opérateur engendré par β_τ.

Posons $\mathcal{R}_{\lambda,(\tau)} = (\mathcal{B}_\tau + \lambda)^{-1}$ pour $\lambda \geqslant 0$. Il est clair que $\mathcal{R}_{\lambda,(\tau)}$ a un noyau:

$$\mathcal{R}_{\lambda,(\tau)}(x, y) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbf{R}} \frac{\exp[i(x-y)\cdot\xi]}{\sum_{0 \leqslant j, l \leqslant m} \alpha_{jl}(\tau\cdot\xi)^{j+l} + \lambda} d\xi .$$

On a les inégalités:

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{R}_{\lambda,(\tau)}\|_{H^{-m}_{(\tau)}, H^m_{(\tau)}} \leqslant E^{-1} \\
&\|\mathcal{R}_{\lambda,(\tau)}\|_{H^{-m}_{(\tau)}, L^2} \leqslant E^{-1/2}(E + \lambda)^{-1/2} \\
&\|\mathcal{R}_{\lambda,(\tau)}\|_{L^2, H^m_{(\tau)}} \leqslant E^{-1/2}(E + \lambda)^{-1/2} \\
&\|\mathcal{R}_{\lambda,(\tau)}\|_{L^2, L^2} \leqslant (E + \lambda)^{-1} .
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Soit alors $\mathcal{A}_{t_0}$ l'opérateur engendré par α_{t_0}. On a:

$$\mathcal{G}_{\lambda,t_0} = (\mathcal{A}_{t_0} + \lambda)^{-1} = t_0^{-2(\sigma+\delta m)} \cdot \mathcal{R}_{\lambda\cdot t_0^{-2(\sigma+\delta m)}, t_0^{1-\delta}} .$$

Par suite $\mathcal{G}_{\lambda,t_0}$ a un noyau explicite:

$$\mathcal{G}_{\lambda,t_0}(x, y) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i(x-y)\xi]\, d\xi}{\sum_{0 \leqslant j, l \leqslant m} \alpha_{jl} t_0^{2((\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)} \xi^{j+l} + \lambda} .$$

Par le changement de variable: $\eta = t_0^{1-\delta}\cdot\xi$ il vient:

$$\mathcal{G}_{\lambda,t_0}(x,x) = (2\pi)^{-1}\cdot t_0^{\delta-1}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{t_0^{2(\sigma+\delta m)}\cdot\omega(\eta)+\lambda}\,.$$

Posons:

$$\mathcal{F}_\lambda(t) = (2\pi)^{-1}\,t^{\delta-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi}{t^{2(\sigma+\delta m)}\cdot\omega(\xi)+\lambda}\,.$$

On a alors:

Proposition (III.5). *Soit* $\alpha = \delta/2(\sigma+\delta m) < 1$. *Alors*:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^{1-\alpha}\cdot\int\limits_{1}^{\infty}\mathcal{F}_\lambda(t)\,dt = (2\pi\delta)^{-1}\cdot(\sin\pi\alpha)^{-1}\cdot\pi\alpha\int\limits_{\mathbf{R}}\omega(\xi)^{-\alpha}\,d\xi\,.$$

Démonstration. Par application du théorème de Fubini à des fonctions positives il vient:

$$\int\limits_{1}^{\infty}\mathcal{F}_\lambda(t)\,dt = (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbf{R}}d\xi\left(\int\limits_{1}^{\infty}\frac{t^{\delta-1}\,dt}{t^{2(\sigma+\delta m)}\cdot\omega(\xi)+\lambda}\right).$$

Posons:

$$f_\lambda(\xi) = \int\limits_{1}^{\infty}\frac{t^{\delta-1}}{t^{2(\sigma+\delta m)}\cdot\omega(\xi)+\lambda}\,dt\,.$$

Par des changements de variables évidents on a:

$$f_\lambda(\xi) = \lambda^{-1+(\delta/2(\sigma+\delta m))}\cdot\frac{\omega(\xi)^{-\delta/2(\sigma+\delta m)}}{2(\sigma+\delta m)}\int\limits_{\omega(\xi)/\lambda}^{+\infty}\frac{u^{-1+(\delta/2(\sigma+\delta m))}}{1+u}\,du\,.$$

Or:

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{u^{-1+\beta}}{1+u}\,du = \frac{\pi}{\sin\beta\pi}\qquad\text{où } 0<\beta<1\,.$$

Comme $\delta/2(\sigma+\delta m) < 1$, f est intégrable sur $\mathbf{R}$ et le théorème de Lebesgue implique la proposition.

Nous allons établir une estimation précise de $\mathcal{G}_{\lambda,t}(t,t)-\mathcal{G}_\lambda(t,t)$ qui à l'aide de (III.5) donnera (3.5) pour $\delta\geqslant 1$.

Introduisons les notations suivantes: soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Posons:

$$|u|_{h,I}^2=\int_I |D^h u|^2\,dt\,; \qquad \|u\|_{h,I}^2=\sum_{k=0}^h |u|_{k,I}^2\,;$$

$$|u|_{h,I,\tau}^2=\int_I |(\tau D)^h u|^2\,dt\,; \qquad \|u\|_{h,I,\tau}^2=\sum_{k=0}^h |u|_{k,I,\tau}^2\,.$$

Si $I=\mathbf{R}$ on supprime la lettre $\mathbf{R}$.

On a l'inégalité d'interpolation:

$$|u|_{h,\tau}\leqslant C\cdot\left[\left(\frac{\varrho}{\tau}\right)^{m-h}\cdot|u|_{m,\tau}+\left(\frac{\varrho}{\tau}\right)^{-h}\cdot|u|_0\right] \tag{3.10}$$

pour $1\geqslant\varrho\geqslant 0$, $u\in H^m_{(\tau)}$ et $0\leqslant h\leqslant m$.

Soit $\theta\in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\operatorname{Supp}\theta\subseteq[-1,1]$, $\theta\equiv 1$ au voisinage de 0.

Pour $0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}$, posons $\varrho_\varepsilon(t)=\theta\big((t-t_0)/(\varepsilon\cdot t_0\cdot\tau)\big)$. On a clairement

$$\operatorname{Supp}\varrho_\varepsilon\subseteq I=\left[\frac{t_0}{2},\frac{3t_0}{2}\right].$$

Posons:

$$\zeta(t)=\varrho_{1/2}(t)=\theta\left(\frac{2(t-t_0)}{t_0\cdot\tau}\right) \qquad \text{et} \qquad H_{\lambda,\varepsilon}=\varrho_\varepsilon\cdot\mathcal{G}_\lambda\cdot\zeta-\varrho_\varepsilon\cdot\mathcal{G}_{\lambda,t_0}\cdot\zeta\,.$$

On remarque que $\varrho_\varepsilon\cdot\mathcal{G}_\gamma\cdot\zeta\in\mathcal{L}(H^{-m}_{(\tau)},H^m_{(\tau)})$.

En effet si $g\in H^{-m}_{(\tau)}$ on a $\zeta\cdot g\in V'$ où $V=W^m_{\sigma,\delta}([1,\infty[)$ d'où: $\varrho_\varepsilon\cdot\mathcal{G}_\lambda\cdot\zeta g\in$ $\in V\subset H^m_{(\tau)}$ (prolongement par 0 hors de $[1,\infty[$).

Par conséquent $H_{\lambda,\varepsilon}$ a un noyau $H_{\lambda,\varepsilon}(t,\tau)$ que l'on peut estimer à l'aide de (3.8). Pour cela il nous faut majorer les normes: $\|H_{\lambda,\varepsilon}\|_{-m,\tau;m,\tau}$, $\|H_{\lambda,\varepsilon}\|_{-m,\tau;0}$

$$\|H_{\lambda,\varepsilon}\|_{-m,\tau;m,\tau}=\sup_{f,g\in L^2}\frac{|\langle g,H_{\lambda,\varepsilon}f\rangle|}{\|g\|_{-m,\tau}\cdot\|f\|_{-m,\tau}}\,. \tag{3.11}$$

On a des expressions analogues pour les autres normes de $H_{\lambda,\varepsilon}$.

Il vient facilement:

$$(\mathcal{G}_\lambda-\mathcal{G}_{\lambda,t_0})\zeta f=\mathcal{G}_{\lambda,t_0}(\mathcal{A}_{t_0}-\mathcal{A})\mathcal{G}_\lambda\cdot\zeta f$$

et

$$H_{\lambda,\varepsilon} f = \mathcal{G}_{\lambda,t_0} \cdot \varrho_\varepsilon (\mathcal{A}_{t_0} - \mathcal{A}) \mathcal{G}_\lambda \zeta f - [\mathcal{G}_{\lambda,t_0}, \varrho_\varepsilon](\mathcal{A}_{t_0} - \mathcal{A}) \mathcal{G}_\lambda \cdot \zeta f$$

où $[\cdot,\cdot]$ désigne le commutateur de deux opérateurs.

On a donc:

$$\langle g, H_{\lambda,\varepsilon} f\rangle = \Delta^1_{\lambda,\varepsilon}(f, g) + \Delta^2_{\lambda,\varepsilon}(f, g)$$

où:

$$\Delta^1_{\lambda,\varepsilon}(f, g) = \langle g_\varepsilon, \mathcal{G}_{\lambda,t_0} \varrho_\varepsilon (\mathcal{A}_{t_0} - \mathcal{A}) \mathcal{G}_\lambda \zeta f\rangle$$

et

$$\Delta^2_{\lambda,\varepsilon}(f, g) = \langle g, [\varrho_\varepsilon, \mathcal{G}_{\lambda,t_0}](\mathcal{A}_{t_0} - \mathcal{A}) \cdot \mathcal{G}_\lambda \cdot \zeta f\rangle .$$

Utilisant le caractère hermitien de α et α_{t_0} il vient:

$$\overline{\Delta^1_{\lambda,\varepsilon}(f, g)} = \alpha_{t_0}(\mathcal{G}_\lambda \zeta f, \varrho_\varepsilon \mathcal{G}_{\lambda,t_0} g) - \alpha(\mathcal{G}_\lambda \zeta f, \varrho_\varepsilon \mathcal{G}_{\lambda,t_0} g) .$$

D'autre part:

$$\Delta^2_{\lambda,\varepsilon}(f, g) = \langle g, [\varrho_\varepsilon, \mathcal{G}_{\lambda,t_0}](\mathcal{A}_{t_0} + \lambda) \mathcal{G}_\lambda \zeta f\rangle - \langle g, [\varrho_\varepsilon, \mathcal{G}_{\lambda,t_0}](\mathcal{A} + \lambda) \mathcal{G}_\lambda \zeta f\rangle =$$
$$= (\mathrm{I}) - (\mathrm{II}) .$$

On a: $$(\mathrm{I}) = \langle g, \mathcal{G}_{\lambda,t_0}[\mathcal{A}_{t_0}, \varrho_\varepsilon] \mathcal{G}_\lambda \zeta f\rangle$$

et $$\overline{(\mathrm{I})} = - \alpha_{t_0}(\mathcal{G}_\lambda \zeta f, \varrho_\varepsilon \mathcal{G}_{\lambda,t_0} g) + \alpha_{t_0}(\varrho_\varepsilon \mathcal{G}_\lambda \zeta f, \mathcal{G}_{\lambda,t_0} g)$$

$$(\mathrm{II}) = \langle g, [\varrho_\varepsilon, \mathcal{G}_{\lambda,t_0}] \zeta f\rangle$$
$$= \langle g, \mathcal{G}_{\lambda,t_0}[\mathcal{A}_{t_0}, \varrho_\varepsilon] \mathcal{G}_{\lambda,t_0} \zeta f\rangle$$

d'où $$\overline{(\mathrm{II})} = \alpha_{t_0}(\varrho_\varepsilon \mathcal{G}_{\lambda,t_0} \zeta f, \mathcal{G}_{\lambda,t_0} g) - \alpha_{t_0}(\mathcal{G}_{\lambda,t_0} \zeta f, \varrho_\varepsilon \mathcal{G}_{\lambda,t_0} g) .$$

En définitive on a:

$$\begin{aligned}(3.11)\quad \overline{\langle g, H_{\lambda,\varepsilon} f\rangle} = {} & \alpha_{t_0}(\varrho_\varepsilon \mathcal{G}_\lambda \zeta f, \mathcal{G}_{\lambda,t_0} g) - \alpha_{t_0}(\mathcal{G}_\lambda \zeta f, \varrho_\varepsilon \mathcal{G}_{\lambda,t_0} g) + \\ & + \alpha_{t_0}(\varrho_\varepsilon \mathcal{G}_{\lambda,t_0} \zeta f, \mathcal{G}_{\lambda,t_0} g) - \alpha_{t_0}(\mathcal{G}_{\lambda,t_0} \zeta f, \varrho_\varepsilon \mathcal{G}_{\lambda,t_0} g) + \\ & + \alpha_{t_0}(\mathcal{G}_\lambda \zeta f, \varrho_\varepsilon \mathcal{G}_{\lambda,t_0} g) - \alpha(\mathcal{G}_\lambda \zeta f, \varrho_\varepsilon \mathcal{G}_{\lambda,t_0} g) .\end{aligned}$$

L'estimation de $\langle g, H_{\lambda,\varepsilon} f\rangle$ va résulter des lemmes suivants:

LEMME (III.6). *Posons* $J = [t_0/2, \infty[$. *On a*:

(i) $\|\mathcal{G}_\lambda \zeta f\|_{m,J;\tau} \leqslant c t_0^{-2(\sigma+\delta m)} \|f\|_{-m,\tau}$

(ii) $\|\mathcal{G}_\lambda \zeta f\|_{m,J;\tau} \leqslant c t_0^{-(\sigma+\delta m)} (t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1/2} \|f\|_0$

(iii) $\|\mathcal{G}_\lambda \zeta f\|_{0,J} \leqslant c_0^{-(\sigma+\delta m)}(t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1/2} \|f\|_{-m,J}$

(iv) $\|\mathcal{G}_\lambda \zeta f\|_{0,J} \leqslant c(t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1} \|f\|_0$

pour tout $f \in L^2$ *et pour tout* $\lambda \geqslant \lambda_0$, λ_0 *assez grand.*

DÉMONSTRATION. Posons $u = \mathcal{G}_\lambda \zeta f$. On a alors:

$$(\mathcal{A} + \lambda) u = \zeta f$$

ou encore: $\alpha(u, v) + \lambda(u, v) = (\zeta f, v)$ pour tout $v \in V$.

La coercivité de α $\big((3.1)\big)$ entraîne:

$$c\|u\|_V^2 + (\lambda - \lambda_0)\|u\|_{L^2}^2 \leqslant |(\zeta f, u)| \quad \text{pour } \lambda \geqslant \lambda_0 . \tag{3.12}$$

Or on a facilement:

$$|(\zeta f, u)| \leqslant \gamma \|f\|_{-m,\tau} \|u\|_{m,J;\tau}$$

et

$$\|u\|_{m,J;\tau}^2 \leqslant \gamma t_0^{-2(\sigma+\delta m)} \|u\|_V^2 \qquad \text{avec } \tau = t_0^{1-\delta} .$$

D'où il résulte:

$$c t_0^{2(\sigma+\delta m)} \|u\|_{m,J;\tau}^2 + \big(\lambda - \lambda_0\big) \|u\|_{0,J}^2 \leqslant \gamma \|f\|_{-m,\tau} \|u\|_{m,J;\tau} \tag{3.13}$$

de même on a:

$$c t_0^{2(\sigma+\delta m)} \|u\|_{m,J;\tau}^2 + (\lambda - \lambda_0) \|u\|_{0,J}^2 \leqslant \gamma' \|f\|_0 \cdot \|u\|_0 . \tag{3.14}$$

(3.13) entraîne (i).

De (3.14) on tire:

$$[c t_0^{2(\sigma+\delta m)} + (\lambda - \lambda_0)] \|u\|_{0,J} \leqslant \gamma' \cdot \|f\|_0$$

d'où (iv) et

$$c t_0^{2(\sigma+\delta m)} \cdot \|u\|_{m,J;\tau}^2 \leqslant \gamma' \cdot \|f\|_0 \cdot \|u\|_{0,J} \leqslant \gamma' [c t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda - \lambda_0]^{-1} \|f\|_0^2$$

d'où (ii).

On a de même (iii) à partir de (3.13).

LEMME (III.7). *Posons*:

$$\Delta_\varepsilon^{(j,l)}(u, v) = \int_{\mathbf{R}} \tau^{j+l} D^j u\, \overline{D^l(\varrho_\varepsilon v)}\, dt - \int_{\mathbf{R}} \varrho_\varepsilon \tau^{j+l} D^j u\, \overline{D^l v}\, dt .$$

Il existe $C > 0$ telle que:

$$(3.15)\qquad |\Delta_\varepsilon^{(j,l)}(u,v)| \leqslant C\varepsilon^{-m} t_0^{-1+(\sigma+\delta m)/m}\left(t_0^{2(\sigma+\delta m)}+\lambda\right)^{-1/2m}\cdot \|u\|_{m,I;\tau}\left[|v|_{m,\tau}+\frac{\left(t_0^{2(\sigma+\delta m)}+\lambda\right)^{1/2}}{t_0^{\sigma+\delta m}}|v|_0\right]$$

pour tout $u,\ v\in W^m_{\sigma,\delta}[1,\infty[,\ 0<\varepsilon\leqslant\frac12,\ 0\leqslant j,\ l\leqslant m,\ \lambda>0,\ t_0\geqslant 2.$

DÉMONSTRATION. Par Leibnitz et compte tenu de la définition de $\Delta_\varepsilon^{(j,l}$ il vient:

$$|\Delta_\varepsilon^{(j,l)}(u,v)|\leqslant C|u|_{j,I;\tau}\sum_{h=0}^{l-1}(\varepsilon t_0)^{h-l}|v|_{h,\tau}\,.$$

Appliquons (3.10) à v avec $\varrho=\tau\cdot t_0^{(\sigma+\delta m)/m}\left(t_0^{2(\sigma+\delta m)}+\lambda\right)^{-1/2m}$.
On a en particulier $\varrho\leqslant\tau$ d'où il résulte:

$$(3.16)\qquad |v|_{h,\tau}\leqslant C\cdot t_0^{(\sigma+\delta m)/m}\left(t_0^{2(\sigma+\delta m)}+\lambda\right)^{-1/2m}\cdot\left[|v|_{m,\tau}+\frac{\left(t_0^{2(\sigma+\delta m)}+\lambda\right)^{1/2}}{t_0^{\sigma+\delta m}}|v|_0\right]$$

pour tout $0\leqslant h\leqslant m-1$.
(3.15) est alors une conséquence de (3.16) sachant que $0<\varepsilon\leqslant\frac12$ et $t_0\geqslant 2$.

LEMME (III.8). *Il existe $C>0$ telle que*

$$(3.17)\qquad |\alpha_{t_0}(u,\varrho_\varepsilon v)-\alpha(u,\varrho_\varepsilon v)|\leqslant C\cdot\varepsilon\cdot t_0^{2(\sigma+\delta m)}\|u\|_{m,J;\tau}\cdot\left[1+\frac{\varepsilon^{-m}t_0^{((\sigma+\delta m)/m)-1}}{\left(t_0^{2(\sigma+\delta m)}+\lambda\right)^{1/2m}}\right]\left[|v|_{m,\tau}+\frac{\left(t_0^{2(\sigma+\delta m)}+\lambda\right)^{1/2}}{t_0^{\sigma+\delta m}}|v|_0\right]$$

pour tout $u,\ v\in W^m_{\sigma,\delta}\big([1,\infty[\big),\ 0<\varepsilon\leqslant\frac12,\ \lambda\geqslant 0,\ t_0\geqslant 2.$

DÉMONSTRATION. $\alpha_{t_0}(u,\varrho_\varepsilon w)-\alpha(u,\varrho_\varepsilon v)$ est une combinaison linéaire de termes du type:

$$D_\varepsilon^{(j,l)}(u,v)=\int t_0^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)}D^j u\,\overline{D^l\varrho_\varepsilon v}\,dt-\int t_0^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)}D^j u\,\overline{D^l\varrho_\varepsilon v}\,dt\,.$$

Or Supp $\varrho_\varepsilon\subseteq I$ et il existe $C>0$ indépendente de t et $t_0\geqslant 2$ telle que:

$$\left|t_0^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)}-t^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)}\right|\leqslant C|t-t_0|t_0^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)-1}$$

pour tout $t\in I$.

Or sur Supp ϱ_ε on a: $|t-t_0|\leqslant\varepsilon\cdot t_0\cdot\tau$ d'où

$$|t_0^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)}-t^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)}|\leqslant C\cdot\varepsilon\cdot t_0^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)}$$

pour tout $t\in\operatorname{Supp}\varrho_\varepsilon$.

Par Leibnitz, comme dans la démonstration de (3.15) on à:

$$|D_\varepsilon^{(j,l)}(u,v)|\leqslant C\cdot\varepsilon\cdot t_0^{2(\sigma+\delta m)}\|u\|_{m,J;\tau}\left(\sum_{h=0}^{l}(\varepsilon t_0)^{h-l}|v|_{\tau,h}\right). \tag{3.18}$$

Pour $0\leqslant h\leqslant l-1$ on majore $|v|_{\tau,h}$ par (3.16) et $|v|_{\tau,l}\leqslant C(|v|_{m,\tau}+|v|_0)$ ((3.10) avec $\varrho=\tau$).

On obtient alors facilement (3.17) à partir de (3.18).

LEMME (III.9). *Il existe $C>0$ telle que:*

$$|\alpha_{t_0}(\varrho_\varepsilon u,v)-\alpha_{t_0}(u,\varrho_\varepsilon v)|\leqslant Ct_0^{2(\sigma+\delta m)}\cdot\varepsilon^{-m}\frac{t_0^{-1+((\sigma+\delta m)/m)}}{(t_0^{2(\sigma+\delta m)}+\lambda)^{1/2m}}\cdot \tag{3.19}$$
$$\cdot\left[|u|_{m,\tau}+\frac{(t_0^{2(\sigma+\delta m)}+\lambda)^{1/2}}{t_0^{\sigma+\delta m}}|u|_0\right]\left[|v|_{m,\tau}+\frac{(t_0^{2(\sigma+\delta m)}+\lambda)^{1/2}}{t_0^{\sigma+\delta m}}|v|_0\right]$$

pour tout $u,\ v\in W_{\sigma,\delta}^m([1,\infty[)$, $0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}$, $\lambda\geqslant0$, $t_0\geqslant2$.

DÉMONSTRATION. On procède comme dans (III.7): on combine Leibnitz avec (3.16) appliqué à u et à v.

REMARQUE. Dans le second membre de (3.19) on peut remplacer $|u|_{m,\tau}$ et $|u|_0$ respectivement par $|u|_{m,J;\tau}$ et $|u|_{0,J}$ où $J=[t_0/2,\infty[$.

Les quatre lemmes qui précèdent permettent d'estimer les différentes normes de $H_{\lambda,\varepsilon}$.

LEMME (III.10). *Il existe $C>0$ telle que:*

$$\begin{aligned}
&\|H_{\lambda,\varepsilon}\|_{-m,\tau;m,\tau}\leqslant Ct_0^{-2(\sigma+\delta m)}\left[\varepsilon+\varepsilon^{-m}\frac{t_0^{-1+((\sigma+\delta m)/m)}}{(t^{2(\sigma+\delta m)}+\lambda)^{1/2m}}\right],\\
&\|H_{\lambda,\varepsilon}\|_{-m,\tau;L^2}\leqslant Ct_0^{-(\sigma+\delta m)}(t_0^{2(\sigma+\delta m)}+\lambda)^{-1/2}[\ldots],\\
&\|H_{\lambda,\varepsilon}\|_{L^2;m,\tau}\leqslant Ct_0^{-(\sigma+\delta m)}(t_0^{2(\sigma+\delta m)}+\lambda)^{-1/2}[\ldots],\\
&\|H_{\lambda,\varepsilon}\|_{L^2,L^2}\leqslant C(t_0^{2(\sigma+\delta m)}+\lambda)^{-1}[\ldots],
\end{aligned}\tag{3.20}$$

pour tout $0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}$, $t_0\geqslant2$, $\lambda\geqslant\lambda_0$, λ_0 assez grand.

DÉMONSTRATION. De (3.9) on tire les inégalités:

$$\|\mathcal{G}_{\lambda,t_0}\|_{-m,\tau;m,\tau} \leqslant E^{-1} t_0^{-2(\sigma+\delta m)}$$
$$\|\mathcal{G}_{\lambda,t_0}\|_{-m,\tau;L^2} \leqslant E^{-1/2} \cdot t_0^{-(\sigma+\delta m)} (E \cdot t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1/2}$$
$$\|\mathcal{G}_{\lambda,t_0}\|_{L^2;m,\tau} \leqslant E^{-1/2} \cdot t_0^{-(\sigma+\delta m)} (E \cdot t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1/2}$$
$$\|\mathcal{G}_{\lambda,t_0}\|_{L^2;L^2} \leqslant (E \cdot t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1} .$$

D'après (3.11) on a:

$$\overline{\langle g, H_{\lambda,\varepsilon} f \rangle} = \Delta_\varepsilon^{(1)}(f, g) + \Delta_\varepsilon^{(2)}(f, g) + \Delta_\varepsilon^{(3)}(f, g) .$$

$\Delta_\varepsilon^{(1)}$ et $\Delta_\varepsilon^{(2)}$ se majorent à l'aide du lemme (III.6), de (3.21) et du lemme (III.9). On majore $\Delta_\varepsilon^{(3)}$ à l'aide de (3.17).

PROPOSITION (III.11). *$H_{\lambda,\varepsilon}$ est un opérateur intégral de noyau $H_{\lambda,\varepsilon}(x, y)$ vérifiant:*

$$(3.22) \qquad |H_{\lambda,\varepsilon}(x, y)| \leqslant C t_0^{\delta-1-((\sigma+\delta m)/m)} (t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{1+(1/2m)} \cdot \left[\varepsilon + \varepsilon^{-m} \frac{t_0^{-1+((\sigma+\delta m)/m)}}{(t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{1/2m}}\right]$$

pour tout $x, y \in \mathbf{R}$, $t_0 \geqslant 2$, $\lambda \geqslant \lambda_0$, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$.

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate de (3.8) et (3.20).

PROPOSITION (III.12). *En plus des hypothèses du théorème* (III.3), *supposons $\delta \geqslant 1$. On a alors:*

$$(3.5) \qquad \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{1-\alpha} \int_1^{+\infty} \mathcal{G}_\lambda(t, t)\, dt = (\pi\alpha)(2\pi\delta)^{-1}(\sin \pi\alpha)^{-1} \int_{\mathbf{R}} \omega(\xi)^{-\alpha}\, d\xi .$$

DÉMONSTRATION. On a évidemment:

$$H_{\lambda,\varepsilon}(t_0, t_0) = \mathcal{G}_\lambda(t_0, t_0) - \mathcal{G}_{\lambda,t_0}(t_0, t_0)$$

d'où:

$$H_{\lambda,\varepsilon}(t_0, t_0) = \mathcal{G}_\lambda(t_0, t_0) - \mathcal{F}_\lambda(t_0)$$

pour tout $t_0 \geqslant 2$, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$, $\lambda \geqslant \lambda_0$.

Utilisons (3.22). Remarquons d'abord que l'on a:

$$\int_2^\infty t^{\delta-1-((\sigma+\delta m)/m)}(t^{2(\sigma+\delta m)}+\lambda)^{-1+(1/2m)}dt \leqslant C\cdot\lambda^{\alpha-1} \tag{3.23}$$

$$\int_2^\infty t^{\delta-2}(t^{2(\sigma+\delta m)}+\lambda)^{-1}dt \leqslant \lambda^{-\theta}\int_2^\infty t^{\delta-2+(\theta-1)(\sigma+\delta m)}dt \tag{3.24}$$

pour tout $\theta\in[0,1[$ vérifiant $0<\theta<1-\alpha+1/2(\sigma+\delta m)$.

Comme $\alpha\in[0,1[$ on peut choisir $\theta=1-\alpha+\eta$, $\eta>0$ assez petit. On obtient alors:

$$\int_2^\infty t^{\delta-2}(t^{2(\sigma+\delta m)}+\lambda)^{-1}dt \leqslant C\lambda^{\alpha-1-\eta} \tag{3.25}$$

(3.23) et (3.25) donnent:

$$\lambda^{1-\alpha}\left|\int_2^\infty(\mathcal{G}_\lambda(t,t)-\mathcal{G}_{\lambda,t}(t,t)\,dt\right| \leqslant C[\varepsilon+\varepsilon^{-m}\lambda^{-\eta}]. \tag{3.26}$$

Par le théorème du noyau dans les espaces de Sobolev usuels on a:

$$\begin{aligned}\lambda^{1-\alpha}\left|\int_1^2[\mathcal{G}_\lambda(t,t)-\mathcal{G}_{\lambda,t}(t,t)]\,dt\right| &\leqslant C\cdot\lambda^{(1/2m)-\alpha}\\ &\leqslant C\cdot\lambda^{\sigma/2m(\sigma+\delta m)}\end{aligned}$$

d'où

$$\lambda^{1-\alpha}\left|\int_1^\infty[\mathcal{G}_\lambda(t,t)-\mathcal{G}_{\lambda,t}(t,t)]\,dt\right| \leqslant C[\varepsilon+\varepsilon^{-m}\lambda^{-\eta}+\lambda^{\sigma/2m(\sigma+\delta m)}]. \tag{3.27}$$

On obtient alors (3.5) en faisant tendre λ vers l'infini puis ε vers 0, compte tenu de la proposition (III.5).

(III.B): $\delta\in]0,1[$. Posons:

$$L(t,D)_t=\sum_{0\leqslant j,l\leqslant m}\alpha_{jl}\cdot D_t[t^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)}\cdot D_t^j]$$

$$L_0(t,D_t)=\sum_{0\leqslant j,l\leqslant m}\alpha_{jl}\cdot t^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)}\cdot D_t^{j+l}$$

(partie principale de L à l'infini) et

$$L_1(t, D_t) = L(t, D_t) - L_0(t, D_t) .$$

D'après (3.2) on a:

$$L_0(t, \xi) \geqslant E \cdot t^{2(\sigma+\delta m)} \cdot \left(1 + (t^{1-\delta}\xi)^2\right)^m \tag{3.28}$$

pour tout $(t, \xi) \in [1, \infty[\times \mathbf{R}$.

Posons:

$$\phi(t, \xi) = \begin{cases} (1 + |\xi|^2)^{1/2} & \text{pour } |\xi| \geqslant 1,\ t \geqslant 1 \\ t^{\delta-1} & \text{pour } |\xi| \leqslant 1,\ t \geqslant 1 \end{cases}$$

et $\varphi(t, \xi) = 1 + t$ pour $(t, \xi) \in [1, \infty[\times \mathbf{R}$.

On vérifie facilement que l'on a:

$$\phi \cdot \varphi \geqslant (1/3)\left(1 + t^\delta + |\xi|\right) \quad \text{pour tout } (t, \xi) \in [1, \infty[\times \mathbf{R} . \tag{3.29}$$

L'intérêt des fonctions ϕ et φ réside dans le:

LEMME (III.13). *Pour tout couple d'entiers p, $q \geqslant 1$, il existe $C_{p,q} > 0$ telle que*

$$|\partial_\xi^p D_t^q L_0| \leqslant C^{p,q} \cdot L_0 \cdot \phi^{-p} \cdot \varphi^{-q} \tag{3.30}$$

$$|\partial_\xi^p D_t^q L_1| \leqslant C_{p,q} \cdot L_0 \cdot \phi^{-p-1} \varphi^{-q-1} \tag{3.31}$$

uniformément pour $(t, \xi) \in [1, \infty[\times \mathbf{R}$.

DÉMONSTRATION. $\partial_\xi^p \cdot D_t^q L_0$ est une combinaison linéaire de termes du type: $\xi^{j+l-p} \cdot t^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)-q}$.

Pour $|\xi| \leqslant 1$, $t \geqslant 1$ on a:

$$|\xi^{j+l-p} \cdot t^{(j+l)(1-\delta)-q}| \leqslant 2^{-q} t^{p(1-\delta)}(1 + t)^{-q}$$

d'où pour $|\xi| \leqslant 1$ et $t \geqslant 1$ on a, compte tenu de (3.28):

$$|\partial_\xi^p D_t^q L_0| \leqslant C \cdot L_0 \cdot \phi^{-p} \cdot \varphi^{-q} .$$

Pour $|\xi| \geqslant 1$ et $t \geqslant 1$ on a:

$$|\xi^{j+l-p} \cdot t^{(j+l)(1-\delta)}| \leqslant 2^{-q} \cdot (1 + t)^{-q} \cdot (t^{1-\delta} \cdot \xi)^{2m} \cdot |\xi|^{-p}$$

d'où l'on déduit (3.30).

(3.31) s'établit de la même manière.

(3.30) et (3.31) vont nous permettre de construire une paramétrix à droite pour $L(t, D_t) + \lambda$ au voisinage de l'infini et d'obtenir des estimations sur le symbole en fonction de λ. Nous avons déjà fait ce type de calcul dans [9] et [10].

Définissons la suite de symboles suivants:

$$(3.32)\qquad \begin{cases} b_{0,\lambda}(t, \xi) = \big(L_0(t, \xi) + \lambda\big)^{-1} \\ \text{et par récurrence sur } j \in \mathbf{N}: \\ b_{j+1,\lambda}(t, \xi) = -\, b_{0,\lambda}(t, \xi) \displaystyle\sum_{\substack{i+\alpha=j-k+1\\ 0\leqslant k\leqslant j\\ i=0,1}} \frac{1}{\alpha!}\, \partial_\xi^\alpha L_i \cdot D_t^\alpha b_{k,\lambda} \end{cases}$$

où $(t, \xi) \in [1, \infty] \times \mathbf{R}$, $\lambda \geqslant 0$.

Posons:

$$B_{N,\lambda} = \sum_{k=0}^{N} b_{k,\lambda} \qquad \text{et} \qquad R_{N,\lambda} = \big(L(t, D_t) + \lambda\big)\cdot B_{N,\lambda} - I\,.$$

Un calcul simple prouve que le symbole de $R_{N,\lambda}$ est donné par:

$$(3.33)\qquad R_{N,\lambda}(t, \xi) = \sum_{\substack{\gamma+k\geqslant N+1\\ k\leqslant N}} \frac{1}{\alpha!}\, \partial_\xi^\gamma L_0(t, \xi) D_t^\gamma b_{k,\lambda} + \sum_{\substack{\gamma+k\geqslant N\\ k\leqslant N}} \frac{1}{\alpha!}\, \partial_\xi^\gamma L_1(t, \xi)\cdot D_t^\gamma b_{k,\lambda}\,.$$

Le lemme suivant se démontre comme dans [10] lemme (4.1) à partir de (3.30), (3.31) et (3.32):

LEMME (III.14). *Pour tout entiers p, q, $N \geqslant 0$, il existe $C(N, p, q) > 0$ telle que*:

$$(3.34)\qquad \partial_\xi^p D_t^q b_{N,\lambda}| \leqslant C(N, p, q)|b_{0,\lambda}| \sum_{l=1}^{2N+p+q} |L_0 \cdot b_{0,\lambda}|^l (\phi\cdot\varphi)^{-N} \phi^{-p} \varphi^{-q}$$

pour tout $(t, \xi) \in [1, \infty[\times \mathbf{R}$, $\lambda \geqslant 0$.

Soit $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$, Supp $\chi \subseteq [1, \infty[$ et $\chi \equiv 1$ sur $[2, \infty[$. On a alors:

$$(3.35)\qquad \big(L(t, D_t) + \lambda\big)(\chi\cdot B_{N,\lambda}) = \chi + \chi\cdot R_{N,\lambda} + [L(t, D_t), \chi] B_{N,\lambda}\,.$$

LEMME (III.15). *Si $f \in C_0^\infty(]1, \infty[)$ alors $(\chi\cdot B_{N,\lambda})f \in D(\mathcal{A})$ où $D(\mathcal{A})$ est le domaine de $\mathcal{A}$ considéré comme opérateur non borné de $L^2(]0, \infty[)$ dans lui-même.*

DÉMONSTRATION. On a:

$$D(\mathcal{A}) = \{u \in W^m_{\sigma,\delta}([1, \infty[) : v \to \alpha(u, v) \text{ est } L^2\text{-continue}\} .$$

Il suffit de prouver que $(\chi\ B_{N,\lambda})f$ est C^∞_- sur $[1, \infty[$ et à décroissance rapide au voisinage de l'infini.

On a:

$$B_{N,\lambda}f(t) = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbf{R}} \exp[it\xi]\cdot B_{N,\lambda}(t, \xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi$$

d'où il résulte que $B_{N,\lambda}f$ est C^∞.

D'autre part, pour $p,\ q \geqslant 1$, $t \geqslant 1$, $t^p \cdot D^q_t B_{N,\lambda}f(t)$ est une combinaison linéaire d'intégrales du type:

$$\int_{\mathbf{R}} \exp[it\xi]\cdot \xi^h \cdot \partial^k_\xi \cdot D^l_t(B_{N,\lambda})\cdot \hat{f}(\xi)\,d\xi .$$

Or (3.28) et (3.24) entraînent:

$$\begin{aligned} |\partial^k_\xi D^l_t B_{N,\lambda}| &\leqslant C\cdot L_0^{-1}\phi^{-k}\cdot\varphi^{-l} \\ &\leqslant C\cdot E^{-1}\cdot t^{-2(\sigma+\delta m)}\big(1 + (t^{1-\delta}\cdot\lambda)^2\big)^{-m} \end{aligned}$$

d'où:

$$t^p\cdot D^q_t\cdot B_{N,\lambda}f(t) = O(1)\,, \qquad t \to +\infty .$$

$\mathcal{A}$ étant une réalisation de $L(t, D_t)$ et $\mathcal{G}_\lambda = (\mathcal{A} + \lambda)^{-1}$, λ réel$\geqslant 0$, on a alors, d'après (3.35) et le lemme (III.15):

$$\chi\cdot B_{N,\lambda}f = \mathcal{G}_\lambda\cdot\chi\cdot f + \mathcal{G}_\lambda\cdot\chi\cdot R_{N,\lambda}\cdot f + \mathcal{G}_\lambda\cdot[L, \chi]\cdot B_{N,\lambda}\cdot f \tag{3.36}$$

pour tout $f \in C^\infty_0(]1, \infty[)$.

Le symbole: $[L, \chi]\cdot b_{k,\lambda}$ est de la forme:

$$[L, \chi]\cdot b_{k,\lambda} = \sum_{p,q\leqslant 2m-1} \psi_{p,q}\cdot D^{p+q}_t t_{k,\lambda}$$

où $\psi_{p,q} \in C^\infty(\mathbf{R})$, Supp $\psi_{p,q} \subset [1, 2]$.

Soit $\delta_{k,\lambda}$ le noyau-distribution défini par le symbole $\psi_{k,\lambda} D^{p+q}_t b_{k,\lambda}$:

$$\delta_{k,\lambda}(\tau, t) = (2\pi)^{-1}\cdot\psi_{p,q}(\tau)\int_{\mathbf{R}} \exp[i(\tau - t)\cdot\xi]\cdot D^{p+q}_\tau b_{k,\lambda}(\tau, \xi)\,d\xi \tag{3.37}$$

on a alors;

LEMME (III.16). *Il existe C, $\lambda_0 > 0$ telles que:*

$$|\delta_{k,\lambda}(\tau, t)| \leqslant \frac{C}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{(\tau - t)^2} \tag{3.38}$$

pour $1 \leqslant \tau \leqslant 2$, $\lambda \geqslant \lambda_0$ et $t \geqslant 3$.

DÉMONSTRATION. Par intégration par parties on a:

$$(\tau - t)^h \delta_{k,\lambda}(\tau, t) = (2\pi)^{-1} \psi_{p,q}(\tau) \int_{\mathbf{R}} \exp[i(\tau - t)\xi] D_\tau^{p+q} \partial_\xi^h b_{k,\lambda}(\tau, \xi)\, d\xi \,. \tag{3.39}$$

D'après (3.34) on a:

$$|D_\tau^{p+q} \partial_\xi^h b_{k,\lambda}| \leqslant C(L_0 + \lambda)^{-2} \cdot L_0 (\phi \cdot \varphi)^{-k} \phi^{-h} \cdot \varphi^{-p-q} \,.$$

Comme $1 \leqslant \tau \leqslant 2$ il vient:

$$|D_\tau^{p+q} \partial_\xi^h b_{k,\lambda}| \leqslant C \lambda^{-2} (1 + \xi^2)^{m-(h/2)} \,.$$

On obtient donc (3.38) à partir de (3.39) en choisissant h assez grand.

Désignons par $\varrho_{N,\lambda}(t, \tau)$ le noyau-distribution associé à $R_{N,\lambda}$. On a l'estimation suivante:

LEMME (III.17). *Pour tous entiers $p \geqslant 0$ et $N \geqslant 2m + 1$ il existe $C(p, N) > 0$ telle que*

$$|\varrho_{N,\lambda}(t, \tau)| \leqslant C(p, N) \cdot \lambda^{-1} \cdot [1 + (t - \tau)^2]^{-p} \cdot t^{2(\sigma + m + \delta m) - N\delta} \tag{3.40}$$

pour tout $\lambda \geqslant 1$, τ et $t \geqslant 1$.

DÉMONSTRATION. Par intégration par parties il vient:

$$\varrho_{N,\lambda}(t, \tau) = (2\pi)^{-1} [1 + (t - \tau)^2]^{-\varrho} \int_{\mathbf{R}} \exp[i(t - \tau)\xi] \cdot \left(1 - \frac{d^2}{d\xi^2}\right)^p R_{N,\lambda}(t, \xi)\, d\xi \,. \tag{3.41}$$

Or d'après (3.33) et (3.34) on a:

$$\left| \left(1 - \frac{d^2}{d\xi^2}\right)^p R_{N,\lambda}(t, \xi) \right| \leqslant C''(p, N) L_0(t, \xi) \cdot \lambda^{-1} \cdot (\phi \cdot \varphi)^{-N-1} \,.$$

D'autre part:

$$L_0(t, \xi) \leqslant C \cdot t^{2(\sigma + \delta m)} (t^{1-\delta} \cdot \lambda)^{2m} \quad \text{et} \quad (\phi\varphi)^{-N-1} \leqslant C \cdot \left(1 + t^\delta + |\xi|\right)^{-N-1}$$

d'où

(3.42)
$$\left|\left(1-\frac{d^2}{d\xi^2}\right)^p R_{N,\lambda}(t,\xi)\right| \leqslant$$
$$\leqslant C'(p,N)\lambda^{-1}\cdot t^{2(\sigma+\delta m)}\cdot(t^{1-\delta}\cdot\lambda)^{2m}\cdot(1+t^\delta+|\xi|)^{-N-1}$$

pour tout $t\geqslant 1$, $\lambda\geqslant 1$, $\xi\in\mathbb{R}$.

(3.41) et (3.42) entraînent facilement (3.40).

Pour estimer le membre de gauche on a besoin du:

LEMME (III.18). *Pour tout entier $k\geqslant 1$ il existe $C(k)>0$ telle que*:

(3.43)
$$\int_1^\infty dt\int_{\mathbb{R}}|b_{k,\lambda}(t,\xi)|\,d\xi\leqslant C(k)\cdot\lambda^{-1/2m}\int_1^\infty\int_{\mathbb{R}} b_{0,\lambda}(t,\xi)\,d\xi\,dt$$

pour tout $\lambda\geqslant 1$.

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord qu'il existe $C>0$ telle que:

(3.44)
$$L_0^{1/2m}\leqslant C\cdot\phi\cdot\varphi \quad \text{uniformément sur } [1,\infty[\times\mathbb{R}\,.$$

Il résulte de (3.34) qu'il existe $C>0$ telle que:

$$|b_{k,\lambda}|\leqslant C|b_{0,\lambda}|^2 L_0^{1-(1/2m)}\,.$$

Or:

$$|b_{0,\lambda}|\leqslant L_0^{-\theta}\cdot\lambda^{-1+\theta} \quad \text{pour tout } \theta\in[0,1]\,.$$

Donc $\theta=1-1/2m$ donne:

$$|b_{k,\lambda}|\leqslant C(k)\cdot b_{0,\lambda}\cdot\lambda^{-1/2m}$$

d'où (3.43).

Nous pouvons maintenant achever la démonstration de (3.5).

Fin de la démonstration de (3.5) *lorsque* $\delta\in\,]0,1[$: En plus des lemmes précédents nous utilisons l'inégalité déjà citée:

(3.3)
$$|\mathcal{G}_\lambda(t,\tau)|\leqslant C(t\cdot\tau)^{-(\sigma+m)/m}\cdot\lambda^{-1+(1/2m)}\,.$$

D'après (3.38) et (3.3) on a:

(3.45)
$$\sum_{k=0}^N\int_3^\infty dt\int_1^2|\mathcal{G}_\lambda(t,\tau)\,\delta_{k,\lambda}(\tau,t)|\,d\tau\leqslant C\cdot\lambda^{-2}\int_3^\infty\int_1^2|G_\lambda(t,\tau)|(t-\tau)^{-2}\,d\tau\,dt\leqslant$$
$$\leqslant C'\cdot\lambda^{-3+(1/2m)}\int_3^\infty(t-2)^{-2}\cdot t^{-(\sigma+m)/m}\,dt\leqslant C''\cdot\lambda^{-3+(1/2m)}\,.$$

Posons d'autre part:

$$\Delta_{N,\lambda}(t, t) = \int_1^\infty \mathcal{G}_\lambda(t, \tau)\,\chi(\tau)\,\varrho_{N,\lambda}(\tau, t)\,d\tau\,.$$

(3.3) et (3.40) donnent:

$$|\Delta_{N,\lambda}(t, t)| \leqslant C\cdot\lambda^{-2+(1/2m)}\int_1^\infty \tau^{\beta-N\delta}\cdot[1 + (t-\tau)^2]^{-p}\,d\tau$$

où l'on a posé: $\beta = 2(\sigma + m + \delta m)$.

Or d'après l'inégalité de Peetre on a:

$$\int_1^\infty [1 + (t-\tau)^2]^{-p}\,\tau^{\beta-N\delta}\,d\tau \leqslant C(1 + t^2)^{-p}\int_1^\infty \tau^{\beta-N\delta}(1+\tau^2)^p\,d\tau\,.$$

Choisissons $p = 1$ et N assez grand, il vient:

$$\int_1^\infty |\Delta_{N,\lambda}(t, t)|\,dt \leqslant C\cdot\lambda^{-2+(1/2m)}\,. \tag{3.46}$$

D'après la proposition (III.5) on a:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{1-\alpha}\int_1^\infty\int_{\mathbf{R}} b_{0,\lambda}(t, \xi)\,dt\,d\xi = (2\pi\delta\sin\pi\alpha)^{-1}\pi\alpha\int_{\mathbf{R}} \omega(\xi)^{-\alpha}\,d\xi\,. \tag{3.47}$$

D'autre part: $1-\alpha-2-(1/2m) = -\alpha-1+(1/2m) < 0$.

Par conséquent on obtient (3.5) à partir de (3.36), (3.45), (3.46), (3.43) et (3.47).

Remarques (III.19): (1) La méthode de (III.B) s'appliquerait également au cas $\delta \geqslant 1$ en prenant: $\phi(t, \xi) = \left(1 + |\xi|^2\right)^{1/2}$ et $\varphi(t, \xi) = 1 + t$ pour $(t, \xi) \in [1, \infty[\,\times\mathbf{R}$.

(2) Le calcul de paramétrix fait dans (III.B) permettrait d'obtenir des formules asymptotiques avec reste pour Trace $\mathcal{G}_\lambda$ et pour $N(\lambda)$. On pourrait également étudier le prolongement holomorphe de la fonction d'Epstein ζ_A associée à $\left(\zeta_A(s) = \sum_{j=0}\lambda_j^{-s}\right)$. Ceci sera détaillé ailleurs.

IV. – Comportement de $\mathrm{Tr}\,(A^p + \lambda)^{-1}$.

Dans tout ce paragraphe p désigne un entier tel que $p > \alpha$ où $\alpha = \delta/2(\sigma + \delta m)$.

Posons $G_\lambda^{(p)} = (A^p + \lambda)^{-1}$. On a $G_\lambda^{(p)} \in \mathcal{L}(W_{\sigma,\delta}^{-m}, W_{\sigma,\delta}^{m})$ donc $G_\lambda^{(p)}$ a un noyau continu sur $]0, \infty[\times]0, \infty[$. De plus $t \to G_\lambda^{(p)}(t, t)$ est localement intégrable sur $]0, \infty[$ (1.7).

LEMME (IV.1). *Sous les hypothèses du théorème* (II.2) *on a*:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{1-(\alpha/p)} \int_0^T G_\lambda^{(p)}(t, t)\, dt = 0 . \tag{4.1}$$

DÉMONSTRATION. Soit $(\varphi_j)_{j \in \mathbf{N}}$ un système orthonormal de vecteurs propres de A associé à la suite des valeurs propres $(\lambda_j)_{j \in \mathbf{N}}$. Un argument classique utilisé dans la démonstration du théorème de Mercer montre que:

$$\sum_{j \geqslant 0} \frac{|\varphi_j(t)|^2}{\lambda_j^p + \lambda} \leqslant G_\lambda^{(p)}(t, t) \qquad \text{pour tour } t \in]0, \infty[$$

d'où l'on déduit que pour tout $\varepsilon \in]0, T[$, la série $\sum_{j \geqslant 0} |\varphi_j(t)|^2/(\lambda_j^p + \lambda)$ converge uniformément vers $G_\lambda^{(p)}(t, t)$ sur $[\varepsilon, T]$.

En faisant tendre ε vers 0 il vient alors:

$$\int_0^T G_\lambda^{(p)}(t, t)\, dt = \sum_{j \geqslant 0} \int_0^T \frac{|\varphi_j(t)|^2}{\lambda_j^p + \lambda}\, dt . \tag{4.2}$$

Posons:

$$M(\tau) = \sum_{\lambda_j \leqslant \tau} \int_0^T |\varphi_j(t)|^2\, dt .$$

On a alors:

$$\int_0^T G_\lambda(t, t)\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{dM(\tau)}{\tau + \lambda}$$

et

$$\int_0^T G_\lambda^{(p)}(t, t)\, dt = \int_0^{\infty} \frac{dM(\tau)}{\tau^p + \lambda} .$$

On sait (Lemme (III.1)) que:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{1-\alpha} \int_0^{\infty} \frac{dM(\tau)}{\tau + \lambda} = 0$$

d'où l'on déduit:

$$\lim_{\tau\to+\infty} \tau^{-\alpha}\cdot M(\tau) = 0 \quad \text{(Agmon [1])} .$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $\tau(\varepsilon) > 0$ assez grand on a:

$$M(\tau) \leqslant \varepsilon\cdot\tau^{\alpha} \qquad \text{pour } \tau \geqslant \tau(\varepsilon) \tag{4.4}$$

d'où:

$$\int_{\tau(\varepsilon)}^{\infty} \frac{dM(\tau)}{\tau^p+\lambda} = p\int_{\tau(\varepsilon)}^{\infty} \frac{\tau^{p-1}M(\tau)d\tau}{(\tau^p+\lambda)^2} - \left[\frac{M(\tau)}{\tau^p+\lambda}\right]_{\tau(\varepsilon)}^{\infty} .$$

Utilisant (4.4) il vient alors:

$$\int_{\tau(\varepsilon)} \frac{dM(\tau)}{\tau^p+\lambda} \leqslant C\cdot\varepsilon\cdot\lambda^{-1+(\alpha/p)}$$

et

$$\lambda^{1-(\alpha/p)}\int_0^{\infty} \frac{dM(\tau)}{\tau^p+\lambda} \leqslant \lambda^{1-(\alpha/p)}\int_0^{\tau(\varepsilon)} \frac{dM(\tau)}{\tau^p+\lambda} + C . \tag{4.5}$$

Dans (4.5) faisont $\lambda \to +\infty$ puis $\varepsilon \to 0$ on en déduit (4.1).

PROPOSITION (IV.2). *On suppose qu'il existe $T > 0$ tel que $a_{jl}(t)$ est constant sur $[T, \infty[$ pour $0 \leqslant j,\ l \leqslant m$. On a alors*:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{1-(\alpha/p)}\int_0^{\infty} G_\lambda^{(p)}(t, t)\, dt = (2\pi\delta)^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi\alpha}{p}\right)\right)^{-1}\left(\frac{\pi\alpha}{p}\right)\int_{\mathbf{R}} \omega_\infty(\xi)^{-\alpha}\, d\xi . \tag{4.6}$$

DÉMONSTRATION. D'après (4.1) il suffit de calculer $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda^{1-(\alpha/p)}\Big(\int_{T'}^{\infty} G_\lambda^{(p)}(t, t)\, dt\Big)$ pour $T' > T$, T' assez grand.

Pour faire ce calcul on adapte la construction de paramétrix faite dans (III.B) à l'opérateur $L^p + \lambda$ sur $]T, \infty[$. On distingue les cas $0 < \delta < 1$ et $\delta \geqslant 1$ pour la définition de ϕ et φ. Il est facile de voir que l'on peut prendre $\big(L_0(t, \xi)\big)^p$ comme symbole principal de L.

On prouve comme dans (III.B) que le terme principal de $\int_{T'}^{\infty} G_\lambda^{(p)}(t, t)\, dt$ pour $\lambda \to +\infty$ est donné par:

$$(2\pi)^{-1}\int_{T'}^{\infty}\int_{\mathbf{R}} \frac{dt\, d\xi}{L_0^p(t, \xi) + \lambda} .$$

Un calcul analogue à celui fait dans la proposition (III.5) donne:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{1-(\alpha/p)}(2\pi)^{-1}\int_{T'}^{\infty}\int_{\mathbf{R}} \frac{dt\,d\xi}{L_0^p(t,\xi)+\lambda} = (2\pi\delta)^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi\alpha}{p}\right)\right)^{-1}\left(\frac{\pi\alpha}{p}\right)\int_{\mathbf{R}}\omega_\infty(\xi)^{-\alpha}\,d\xi\,.$$

Il résulte de ce qui précède que l'on a prouvé (2.1) et (2.2) pour des opérateurs à coefficients constants à l'infini. (2.2) résulte de (4.6) par application du théorème de Hardy-Littlewood [1].

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la démonstration de (2.1) et (2.2) dans le cas général.

Fin de la démonstration de (2.1) *et* (2.2): Soit $\varepsilon \in]0, 1[$.

Posons:

$$a_{j,l}^{(\varepsilon)}(t) = \begin{cases} a_{j,l}(\infty) & \text{pour } t \geqslant T(\varepsilon) \\ a_{j,l}(t) & \text{pour } 0 \leqslant t < T(\varepsilon) \end{cases}$$

où $T(\varepsilon) > 0$ tel que: $|a_{j,l}(t) - a_{j,l}(\infty)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \geqslant T(\varepsilon)$.

Posons alors:

$$a_\varepsilon(u, v) = \sum_{0\leqslant j,\, l\leqslant m} \int_0^\infty a_{j,l}^{(\varepsilon)}\, t^{2(\sigma+m\delta)+(j+l)(1-\delta)}\, D^j u \overline{D^l v}\, dt$$

pour u, $v \in W^m_{\sigma,\delta}$, on a clairement:

$$|a(u, v) - a_\varepsilon(u, v)| \leqslant \varepsilon \cdot \|u\|_{W^m_{\sigma,\delta}} \cdot \|v\|_{W^m_{\sigma,\delta}}$$

d'où il résulte que pour ε assez petit, a_ε est $W^m_{\sigma,\delta}$-coercive et que l'on a:

$$|a(u, u) - a_\varepsilon(u, u)| \leqslant C\cdot\varepsilon\cdot a_\varepsilon(u, u) + \lambda_0'\cdot\|u\|^2_{L^2} \tag{4.7}$$

pour tout $u \in W^m_{\sigma,\delta}$.

Soit $(\lambda_j^{(\varepsilon)})_{j\in\mathbf{N}}$ la suite des valeurs propres relative à a_ε (chaque valeur propre étant répétée suivant sa multiplicité). De (4.7) et de la formule du Max-Min (Courant-Hilbert [4]) on déduit

$$-\lambda_0' + (1 - C\cdot\varepsilon)\lambda_j^{(\varepsilon)} \leqslant \lambda_j \leqslant (1 + C\cdot\varepsilon)\lambda_j^{(\varepsilon)} + \lambda_0' \tag{4.8}$$

pour $j \in \mathbf{N}$, ε assez petit.

(4.8) entraîne:

$$N_\varepsilon\left(\frac{\lambda}{1+C\cdot\varepsilon}\right)\leqslant N(\lambda+\lambda_0'),\tag{4.9}$$

$$N(\lambda-\lambda_0)\leqslant N_\varepsilon\left(\frac{\lambda}{1-C\cdot\varepsilon}\right),\tag{4.10}$$

pour $\lambda>0$, $\varepsilon\in]0,1[$ assez petit.

Posons:

$$\gamma=(2\pi\delta)^{-1}\int_{\mathbf{R}}\omega_\infty^{-\alpha}(\xi)\,d\xi\,.$$

On a vu précédemment que

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^{-\alpha}N_\varepsilon(\lambda)=\gamma\quad\text{pour tout }\varepsilon\in]0,1[\,.$$

(4.9) donne alors:

$$(1+C\cdot\varepsilon)^{-\alpha}\cdot\gamma\leqslant\varliminf_{\lambda\to+\infty}\lambda^{-\alpha}\cdot N(\lambda)$$

et (4.10):

$$\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\lambda^{-\alpha}\cdot N(\lambda)\leqslant(1-C\cdot\varepsilon)^{-\alpha}\cdot\gamma\,.$$

Faisons tendre ε vers 0:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^{-\alpha}\cdot N(\lambda)=\gamma\,.$$

On a donc prouvé (2.2). On en déduit (2.1) dans le cas général, pour $\alpha<1$ par le théorème réciproque de Hardy-Littlewood [1].

REFERENCES

[1] S. Agmon, *Lectures on elliptic boundary value problems*, Math. Studies no. 2, Van Nostrand, Princeton, 1965.

[2] P. Bolley - J. Camus - B. Helffer, *Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques*, J. Math. Pures Appl., **55** (1976), pp. 131-171.

[3] P. Bolley - J. Camus - Pham The Lai, *Noyau, résolvante et valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés*, à paraître.

[4] R. Courant - D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, vol. I, Interscience Publishers, 1953.

[5] V. V. Grushin - M. A. Savsan, *Smoothness of the solutions of boundary-value problems for a class of elliptic equations of arbitrary order which degenerate on the boundary of the domain*, Vestnik Moskov. Univ. Math., **30** (1975), pp. 33-41.

[6] B. M. Levitan - I. S. Sargsjan, *Introduction to spectral theory*, Trans. of Math. Monographs **39**, American Mathematical Society, 1975.

[7] A. Mohamed, *Régularité et théorie spectrale d'une classe d'équations différentielles singulières sur une demidroite*, Thèse de Doctorat de 3-ème cycle, Université de Nantes, 1977.

[8] Pham The Lai, *Comportement asymptotique du noyau de la résolvante et des valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés non nécessairement auto-adjoint*, J. Math. Pures Appl., **55** (1976), pp. 379-420.

[9] Pham The Lai, *Théorie spectrale d'une classe d'opérateurs différentiels hypo-elliptiques*, Comm. Partial Differential Equations, **2** (1977), pp. 439-497.

[10] D. Robert, *Propriétés spectrales d'opérateurs pseudo-différentiels*, Comm. Partial Diffential Equations, **3** (9) (1978), pp. 755-826.