ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

SIGERU MIZOHATA

**Une remarque sur le théorème de Cauchy-Kowalewski**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série*, tome 5, no 3 (1978), p. 559-566

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1978_4_5_3_559_0>

# Une remarque sur le théorème de Cauchy-Kowalewski.

SIGERU MIZOHATA (*)

*dédié à Jean Leray*

## 1. – Introduction.

Il s'agit du problème de Cauchy. Etant donnée une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine ($\subset \boldsymbol{C}^{n+1}$):

$$\partial_t^m u + \sum_{j=1}^{m} a_j(x, t; \partial_x)\, \partial_t^{m-j} u = f(x, t)\,, \tag{1.1}$$

le théorème de Cauchy-Kowalewski dit que si

$$\text{ordre } a_j(x, t; \partial_x) \leqslant j \qquad (1 \leqslant j \leqslant m)\,, \tag{1.2}$$

alors pour toutes les données holomorphes $\partial_t^j u(x, 0) = u_j(x)$ $(0 \leqslant j \leqslant m-1)$ et $f$ au voisinage de l'origine, il existe une solution $u(x, t)$ holomorphe dans un voisinage de l'origine.

La condition (1.2) serait nécessaire pour garantir l'existence des solutions holomorphes pour toutes les données holomorphes. En effet, l'auteur a montré que la condition

$$\text{ordre } a_j(x, 0; \partial_x) \leqslant j \qquad (1 \leqslant j \leqslant m) \tag{1.3}$$

est nécessaire [2] (1).

Cet article a pour but de montrer que si tous les coefficients ne dépendent que de $t$, la condition (1.2) est nécessaire. Le problème est tout-à-fait

(*) Department of Mathematics, Kyoto University.

(1) Il y a quelques articles sur ce sujet. Citons parmi eux, [3], [4].

Pervenuto alla Redazione il 27 Giugno 1977.

simple. Mais la méthode est différente de celle de [2] qui ne marche plus dans le cas actuel. Enonçons sous la forme suivante: Soit

$$\partial_t^m u + \sum_{j=1}^{m} a_j(t; \partial_x)\, \partial_t^{m-j} u = f . \tag{1.4}$$

THÉORÈME. *Pour que le théorème de Cauchy-Kowalewski pour* (1.4) *avec les données de Cauchy à* $t = 0$ *soit valable, il faut et suffit qu'on ait*

$$\text{ordre } a_j(t; \partial_x) \leqslant j \qquad (1 \leqslant j \leqslant m) . \tag{1.5}$$

Esquissons la démonstration. On cherche une famille de solutions $u_\zeta(x, t)$ de (1.4), supposée $f = 0$, sous la forme $e^{\zeta x} u(t; \zeta)$ avec des données de Cauchy $e^{\zeta x}$ multipliées par des vecteurs convenables $c(\zeta)$ *bornés* en $\zeta$. Supposé que la condition (1.5) est violée, on montre qu'on peut trouver $u_\zeta(x, t)$ qui se comporte de façon qu'on ait

$$\sum_{j=0}^{m-1} |\partial_t^j u_\zeta(0, t_0)| \geqslant C \exp\,(\delta |\zeta|^p) \qquad (C, \delta\text{: constantes positives}) \tag{1.6}$$

où $p > 1$ et $t_0$ est une valeur fixée de $t$, quand $\zeta$ $(\in \boldsymbol{C}^n)$ tend vers à l'infini convenablement. Cette inégalité montre que l'application de l'espace des données de Cauchy $\in \prod H(\boldsymbol{C}^n)$ dans l'espace des solutions $\in H(V)$ n'est pas continue, où $V$ est un voisinage (complexe) de l'origine, ce qui implique la non-existence de solutions (voir [1]). Or, si l'on pose

$$u_\zeta(x, t) = e^{\zeta x} u(t; \zeta) ,$$

l'équation (1.4) avec $f = 0$ se réduit à l'équation différentielle ordinaire contenant le paramètre $\zeta$:

$$L[u] = u^{(m)}(t; \zeta) + \sum_{j \geqslant 1} a_j(t; \zeta)\, u^{(m-j)}(t; \zeta) = 0 . \tag{1.7}$$

## 2. – Evaluations des solutions.

Soit

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant m} \ \operatorname*{ordre}_{\zeta} a_j(t; \zeta)/j = p . \tag{2.1}$$

*On suppose que* $p > 1$. Soit $h_j(t; \zeta)$ la partie homogène d'ordre $pj$ de $a_j$. Ensuite, soit $q_j$ l'ordre de zéro en $t$ à $t = 0$ de $h_j(t; \zeta)$ (si $h_j \equiv 0$, on convient de considérer $q_j = \infty$), et posons

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant m} q_j/j = q \,. \tag{2.2}$$

Soit $h_j(t;\zeta) = t^{q_j} \mathring{h}_j(t;\zeta)$. Rappelons que $\mathring{h}_j(t;\zeta)$ est homogène d'ordre $pj$ en $\zeta$, alors vu que pour au moins un des $j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, $\mathring{h}_j(0;\zeta) \not\equiv 0$, l'équation caractéristique

$$\lambda^m + \sum_j \mathring{h}_j(0;\zeta)\lambda^{m-j} = 0 \tag{2.3}$$

a au moins une racine $\lambda(\zeta)$ qui pour une valeur complexe convenable $\zeta_0$ $(|\zeta_0| = 1)$ satisfait à

$$\operatorname{Re} \lambda(\zeta_0) > 0 \,.$$

Posons

$$\zeta = \xi\zeta_0 \,,$$

$\xi$ étant réel positif à faire tendre vers à l'infini. La partie principale de (1.7) devient

$$L_P = \partial_t^m + \sum_j \mathring{h}_j(t;\zeta_0)(\xi^p t^q)^j \partial_t^{m-j} \,.$$

On pose ensuite, en désignant $u(t;\xi\zeta_0)$ par $u(t;\xi)$,

$$u_j = (\xi^p t^q)^{m-j-1} \partial_t^j u(t;\xi) \qquad (0 \leqslant j \leqslant m-1) \,. \tag{2.4}$$

On a alors

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t u_j &= \xi^p t^q u_{j+1} + q(m-1-j)u_j/t \qquad (0 \leqslant j \leqslant m-2) \,, \\ L_P[u] &= \partial_t u_{m-1} + \xi^p t^q \sum_j h_j(t) u_{m-j} \,, \end{aligned} \right. \tag{2.5}$$

où $h_j(t) = \mathring{h}_j(t;\zeta_0)$.

Quant à $L - L_P$, posons

$$a_j(t;\xi\zeta_0) - h_j(t;\xi\zeta_0) = b_j(t;\xi\zeta_0) \,.$$

Vu que ordre $b_j(t;\zeta) < pj$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, et que

$$b_j(t;\xi\zeta_0)\partial_t^{m-j} u(t;\xi) = b_j(t;\xi\zeta_0)(\xi^p t^q)^{-(j-1)} u_{m-j} \,,$$

posons

$$c_j(t;\xi)=b_j(t;\xi\zeta_0)(\xi^p t^q)^{-(j-1)}.$$

On voit que, quand $\xi\to+\infty$,

$$|c_j(t;\xi)|\leqslant c\xi^{\text{ordre}(b_j)-p(j-1)}t^{-q(j-1)}=c\xi^{p-(pj-\text{ordre}(b_j))}t^{-q(j-1)},$$

où $c$ est une constante ne dépend ni de $t$ et ni de $\xi$.

Soit

$$r=\min_{1\leqslant j\leqslant m}(pj-\text{ordre}(b_j))\qquad(>0),$$

alors,

$$|c_j(t;\xi)|\leqslant c\xi^{p-r}t^{-q(j-1)},\qquad(1\leqslant j\leqslant m).\tag{2.6}$$

Compte tenu de (2.6) et de

$$L[u]=\partial_t u_{m-1}+\xi^p t^q\sum_{j=1}^{m}h_j(t)u_{m-j}+\sum c_j(t;\xi)u_{m-j},$$

en posant

$$\mathfrak{U}(t;\xi)={}^t(u_0,u_1,\dots,u_{m-1}),$$

$L[u]=0$ s'écrit de la forme matricielle:

$$\partial_t\mathfrak{U}=A(t)\xi^p t^q\mathfrak{U}+\frac{1}{t}B\mathfrak{U}-C(t;\xi)\mathfrak{U},\tag{2.7}$$

où

$$A(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1\\ -h_m & -h_{m-1} & \cdots & & -h_1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}e_0 & & & \\ & e_1 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & e_{m-2} & \\ & & & 0\end{bmatrix},$$

$$C(t,\xi)=\begin{bmatrix} & 0 & & \\ c_m & c_{m-1} & \cdots & c_1\end{bmatrix},$$

où $e_j=q(m-1-j)$ $(0\leqslant j\leqslant m-2)$.

Les valeurs propres de $A(0)$ sont des racines de (2.3) avec $\zeta=\zeta_0$. Soient donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ $(k\geqslant 1)$ celles dont la partie réelle sont positives, et soit $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant k} \operatorname{Re}\lambda_j = 4\delta$ $(>0)$, on peut trouver une matrice régulière $N$ telle que

$$NA(0)N^{-1}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & 0 \\ & & \ddots & \\ & a_{ij} & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

et $|a_{ij}|\leqslant \delta/4m$. D'après la continuité de $A(t)$, si l'on prend $t_0$ $(>0)$ assez petit,

$$NA(t)N^{-1}=\begin{bmatrix} \lambda_1(t) & & \\ & \ddots & a_{ij}(t) \\ a_{ij}(t) & \ddots & \\ & & \lambda_m(t) \end{bmatrix}$$

satisfait dans $t\in[0, t_0]$ aux conditions suivantes:

$$(2.8)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \text{i)} & \min\limits_{1\leqslant j\leqslant k} \operatorname{Re}\lambda_j(t)\geqslant 3\delta\ , \\ \text{ii)} & \max\limits_{k+1\leqslant j\leqslant m} \operatorname{Re}\lambda_j(t)\leqslant \delta\ , \\ \text{iii)} & |a_{ij}(t)|\leqslant \delta/2m \qquad (i\neq j)\ . \end{array}\right.$$

Appliquons $N$ à (2.7) à gauche,

$$(2.9)\qquad \partial_t N\mathfrak{U} = NA(t)N^{-1}\xi^p t^q(N\mathfrak{U}) + NBN^{-1}\frac{1}{t}(N\mathfrak{U}) - NC(t;\xi)N^{-1}(N\mathfrak{U})\ .$$

Posons

$$(2.10)\qquad N\mathfrak{U}=\mathfrak{V}={}^t(v_1, v_2, \ldots, v_m)\ ,$$

et considérons

$$(2.11)\qquad S(t;\xi)=\exp\left(-4\delta\xi^p t^{q+1}/q+1\right)\left\{\sum_{i=1}^{k}|v_i(t;\xi)|^2-\sum_{i=k+1}^{m}|v_i(t;\xi)|^2\right\}.$$

Compte tenu de (2.6) et (2.8), par un calcul habituel, on a

$$(2.12)\qquad \exp\left(4\delta\xi^p t^{q+1}/q+1\right)S'(t;\xi)\geqslant\left(\delta\xi^p t^q-\frac{\text{const}}{t}-\text{const}\,\xi^{p-r}t^{-q(m-1)}\right)\cdot \cdot\sum_{i=1}^{m}|v_i|^2\ ,$$

où dans le second membre const/$t$ provient du second terme de (2.9) et le terme const $\xi^{p-r}t^{-q(m-1)}$ provient du troisième terme de (2.9).

Rappelons que $\xi$ est un paramètre positif qu'on fait tendre vers $\infty$. On choisit $t_\xi$ ($>0$) tendant vers 0 lorsque $\xi\to\infty$ de telle manière que

$$(2.13)\qquad \begin{cases} \text{i)} & \xi^p t_\xi^q \gg \dfrac{1}{t_\xi}, \\ \text{ii)} & \xi^p t_\xi^q \gg \xi^{p-r} t_\xi^{-q(m-1)}, \end{cases}$$

c'est-à-dire, $t_\xi^{q+1}\gg\xi^{-p}$, $t_\xi^{qm}\gg\xi^{-r}$. Si l'on veut choisir $t_\xi$ sous la forme $t_\xi=\xi^{-\sigma}$ ($\sigma>0$), ces conditions signifient:

$$(2.14)\qquad \sigma<\min\left(\frac{p}{q+1},\frac{r}{qm}\right).$$

On considère (2.11) et (2.12) pour $t\in[t_\xi, t_0]$. En choisissant $\delta'$ positif $<\delta$, (2.12) devient, pour $\xi$ assez grand,

$$S'(t;\xi)\geqslant\exp\left(-4\delta\xi^p t^{q+1}/q+1\right)\delta'\xi^p t^q\sum_{i=1}^m|v_i|^2\geqslant\delta'\xi^p t^q S(t;\xi)\,,\qquad t\geqslant t_\xi\,.$$

D'où,

$$(2.15)\qquad S(t;\xi)\geqslant\exp\left(\delta'\xi^p\int_{t_\xi}^t s^q\,ds\right)S(t_\xi;\xi)\,,\qquad t\geqslant t_\xi\,.$$

## 3. – Démonstration du Théorème.

D'abord (2.15) donne

$$(3.1)\qquad \begin{aligned}\sum_{i=1}^m|v_i(t;\xi)|^2&\geqslant\exp\left(4\delta\xi^p t^{q+1}/q+1\right)S(t;\xi)\geqslant\\ &\geqslant\exp\left[(\delta'+4\delta)\xi^p\int_{t_\xi}^t s^q\,ds\right]\left(\sum_{i=1}^k|v_i(t_\xi;\xi)|^2-\sum_{i=k+1}^m|v_i(t_\xi;\xi)|^2\right).\end{aligned}$$

Notons que $\mathcal{V}=N\mathcal{U}$ et comme $N$ est une matrice régulière constante,

$$\sum_{j=0}^{m-1}|u_j(t;\xi)|^2\geqslant\text{const}\sum_{i=1}^m|v_i(t;\xi)|^2\,,$$

et rappelons que le premier membre n'est autre que

$$\sum_{j=0}^{m-1}(\xi^p t^q)^{2(m-1-j)}|\,\partial_t^j u(t;\xi)|^2\,.$$

On considère l'évaluation des $\partial_t^j u(t;\xi)$ $(0 \leqslant j \leqslant m-1)$ pour $t \in [0, t_\xi]$ de la manière habituelle: posons

$$\tilde{u}_j(t;\xi) = \xi^{p(m-1-j)} \partial_t^j u(t;\xi)\,, \qquad (0 \leqslant j \leqslant m-1)\,.$$

Alors, $\partial_t \tilde{u}_j = \xi^p \tilde{u}_{j+1}$, $(0 \leqslant j \leqslant m-2)$, et

$$\partial_t \tilde{u}_{m-1} = \partial_t^m u(t;\xi) = -\sum_{j=1}^{m} a_j(t;\xi\zeta_0)\partial_t^{m-j} u =$$

$$= -\xi^p \sum_j a_j(t;\xi\zeta_0)/\xi^{pj}\xi^{p(j-1)}\partial_t^{m-j} u = -\xi^p \sum_j \tilde{a}_j(t;\xi)\tilde{u}_{m-j}\,,$$

où les $\tilde{a}_j(t;\xi)$ sont bornés par rapport à $\xi$ et $t$.

D'où, en posant $S_0(t;\xi) = \sum_{j=0}^{m-1} |\tilde{u}_j(t;\xi)|^2$, on a

$$S_0(0;\xi) \leqslant \exp(c'\xi^p t_\xi) S_0(t_\xi;\xi)\,,$$

où $c'$ est une constante positive convenable. Cette inégalité montre que, si

$$S_0(t_\xi;\xi) \equiv \sum_{j=0}^{m-1} \xi^{2p(m-1-j)} |\partial_t^j u(t_\xi;\xi)|^2 \leqslant \exp(-c'\xi^p t_\xi)\,, \tag{3.2}$$

on aura

$$S_0(0;\xi) \equiv \sum_{j=0}^{m-1} \xi^{2p(m-1-j)} |\partial_t^j u(0;\xi)|^2 \leqslant 1\,. \tag{3.3}$$

Notons que, d'après (2.10), en désignant $(m_{ij}) = N^{-1}$, on a

$$u_i(t_\xi;\xi) = \sum_j m_{i+1,j} v_j(t_\xi;\xi)\,. \tag{3.4}$$

Or, si l'on définit la famille de solutions $u_\xi(t;\xi)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_0)$ de (1.7) par les données de Cauchy à $t = t_\xi$:

$$v_i(t_\xi;\xi) = \begin{cases} \exp(-c'\xi^p t_\xi)\,, & i = 1\,, \\ 0\,, & i \neq 1\,, \end{cases} \tag{3.5}$$

la condition (3.2) est bien remplie. En effet, compte tenu de (3.4) et (3.5), on a $u_j(t_\xi;\xi)=m_{j+1,1}\exp(-c'\xi^p t_\xi)$ $(0\leqslant j\leqslant m-1)$, et d'après (2.4), on a

$$\xi^{2p(m-1-j)}|\partial_t^j u(t_\xi;\xi)|^2=t_\xi^{-2q(m-1-j)}|u_j(t_\xi;\xi)|^2=$$
$$=t_\xi^{-2q(m-1-j)}|m_{j+1,1}|^2\,|v_1(t_\xi;\xi)|^2=t_\xi^{-2q(m-1-j)}\exp(-2c'\xi^p t_\xi)|m_{j+1,1}|^2\,,$$

et compte tenu de $\xi^p t_\xi=\xi^{p-\sigma}$ et $p-\sigma>0$, on a

$$t_\xi^{-2q(m-1-j)}\exp(-c'\xi^{p-\sigma})\to 0\qquad(\xi\to\infty)\,.$$

D'autre part, d'après (3.1) et (3.5), $u_\xi(t;\xi)$ a la minoration:

$$\sum_{j=0}^{m-1}(\xi^p t^q)^{2(m-1-j)}|\partial_t^j u_\xi(t;\xi)|^2\geqslant\text{const}\exp\left[(\delta'+4\delta)\xi^p\int_{t_\xi}^{t}s^q\,ds-2c'\xi^p t_\xi\right].$$

On a donc montré (1.6), ce qui achève la démonstration du Théorème.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Mizohata, *On kowalewskian systems* (in Russian), Uspehi Mat. Nauk, **29** (1974), pp. 213-227.
[2] S. Mizohata, *On Cauchy-Kowalewski's Theorem; A necessary condition*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **10** (1975), pp. 509-519.
[3] M. Miyake, *A remark on Cauchy-Kowalewski's Theorem*, Publ. RIMS Kyoto Univ., **10** (1974), pp. 243-255.
[4] K. Kitagawa - T. Sadamatsu, *A necessary condition of Cauchy-Kowalewski's theorem*, Publ. RIMS Kyoto Univ., **11** (1976), pp. 523-534.