

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

C. BARDOS

S. BENACHOUR

**Domaine d'analyticit  des solutions de l'équation
d'Euler dans un ouvert de R^n**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e s rie, tome 4, n  4
(1977), p. 647-687

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1977_4_4_4_647_0

  Scuola Normale Superiore, Pisa, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Domaine d'analyticité des solutions de l'équation d'Euler dans un ouvert de R^n (*).

C. BARDOS (**) - S. BENACHOUR (***)

dédié à Jean Leray

Introduction.

On se propose d'étudier les propriétés d'analyticité de la solution de l'équation d'Euler dans un ouvert Ω de R^n (en général n sera pris égal à 2 ou 3).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad v \cdot u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Le premier travail mathématique sur l'équation d'Euler, remonte à Lichtenstein [17]. Dans [17] on considère l'équation dans R^3 , on suppose que les données initiales sont assez régulières et à support compact. On prouve alors qu'il existe une unique solution. Ensuite Wolibner [21], Hölder [11], Leray [16] et Schaeffer [19] ont prouvé qu'en dimension 2 il existait, pour tout temps, une unique solution, appartenant à un espace de Hölder convenable. Ces résultats ont été repris par Kato [13] et Ebin et Marsden [9]. Dans [9] on trouve le résultat important suivant pour la solution de l'équation d'Euler sur une variété sans bord de dimension n (le cas de l'ouvert avec bord a été traité par Foias, Frisch et Temam [10]). Si la donnée initiale est dans C^k ($k \geq 2$) la solution est dans C^k tant que son gradient est borné,

(*) Ce travail a été effectué durant l'année scolaire 1975-76 alors que les deux auteurs se trouvaient à l'Université de Nice.

(**) Dept. de Mathématiques, Université de Paris-Nord, 93 - Villetaneuse.

(***) Institut de Mathématiques, Université des Sciences et Techniques - Bab Ezzouar - Alger

Pervenuto alla Redazione il 21 Dicembre 1976 ed in forma definitiva il 19 Febbraio 1977.

en particulier en dimension deux la solution est toujours dans C^k , dès que la donnée initiale est dans C^k . De même si la donnée initiale appartient à C^∞ , il en est de même de la solution, tant que son gradient est borné, pour $n \geq 2$, et toujours si $n = 2$. On se propose dans cet article de démontrer des résultats analogues concernant l'analyticité des solutions. L'analyticité locale (en temps) a été prouvée par Baouendi et Goulaouic [1]. (cf. également Nishida [18] pour un énoncé particulièrement simple du théorème de Cauchy Kowalewski). Toutefois les démonstrations de [1] et [18] ne tiennent pas compte du caractère hyperbolique de l'équation, elles ne permettent donc pas de prouver (ce qui serait peut être faux dans un cadre plus général) que la solution reste analytique, tant qu'elle est continûment différentiable. La méthode que nous proposons permet de prouver des résultats de ce type et de préciser le domaine d'analyticité. Enfin on peut, comme dans Bardos et Frisch [3], considérer des solutions analytiques dans un ouvert non borné de R^n , d'énergie totale infinie. Ce cas correspond en particulier à la turbulence homogène, l'énergie du fluide par unité de volume est alors finie mais son énergie totale est infinie. Les méthodes de démonstration ont déjà été utilisées pour des variétés sans bord (Bardos, Benachour et Zerner [4], Benachour [5], [6]). Certains résultats concernant les problèmes aux limites ont été annoncés dans [2].

Ce travail est organisé comme suit. Le § I contient les notations, les énoncés et les démonstrations de lemmes et propositions concernant d'une part l'extension des opérateurs intégraux singuliers au domaine complexe, et d'autre part la propagation de solution d'équations du type transport dans le domaine complexe. Dans le § II on traite le cas de l'ouvert borné en dimension 3, et dans § III celui de l'ouvert non borné. On pourrait, en utilisant le Théorème II.2 adapté au cas $n = 2$ et les résultats de [9], [10] prouver que pour $n = 2$ la solution est toujours analytique dès que les données initiales sont analytiques. Il nous a paru cependant intéressant de donner une démonstration directe qui permet de décrire le domaine d'analyticité. Ceci est l'objet du § IV.

Pour simplifier l'exposé nous établirons seulement l'analyticité par rapport à la variable d'espace, l'analyticité par rapport à la variable de temps s'établirait de manière analogue en utilisant les méthodes de ce travail et une complexification par rapport à la variable t . Ceci est fait dans [6] pour les cas des ouverts sans bord. De même nous nous limiterons au cas $t \geq 0$; on sait que si la solution est régulière on peut inverser le sens du temps dans l'équation d'Euler. Dans les § II et § IV nous avons supposé l'ouvert simplement connexe, cela permet de mettre mieux en évidence le rôle du rotationnel. Si l'ouvert est borné, mais non simplement connexe on peut prouver alors l'analyticité pour un temps fini en utilisant la méthode du § III,

qui dans ce cas se simplifie considérablement (Elle consiste alors à éliminer le terme ∇p , ce qui est très proche de la méthode utilisée par Temam [20] pour prouver l'existence d'une solution continûment différentiable.) Pour obtenir les résultats du § IV dans un ouvert non simplement connexe on peut adapter la méthode donnée dans l'appendice de [19].

Pour la réalisation de ce travail ainsi que de certains articles antérieurement écrits sur ce sujet nous avons bénéficié constamment des suggestions et de l'intérêt que portent à ces problèmes U. Frisch et M. Zerner.

I. – Préliminaires.

On désignera par $x = (x_1, \dots, x_n)$ le point courant de R^n ($n = 2, 3$), par z le point courant du complexifié de R^n . On notera $x = Rez$ et $y = Imz$ les parties réelles et imaginaires de z ⁽¹⁾ et on utilisera les normes Euclidiennes

$$|x|^2 = \sum_{j=1}^n |x_j|^2, \quad |y|^2 = \sum_{j=1}^n |y_j|^2, \quad |z|^2 = |x|^2 + |y|^2.$$

Ω désignera un ouvert de R^n , de frontière $\partial\Omega$ bornée de classe C^2 ; en tout point $x \in \partial\Omega$ on désignera par $\nu(x)$ (ou plus brièvement ν) $= (\nu_1, \dots, \nu_n)$ la normale extérieure à $\partial\Omega$. On posera $d(x) = d(x, \partial\Omega)$. On introduit un nombre $a > 0$ possédant les propriétés suivantes. Sur l'ouvert $A = d^{-1}(]0, a[) \cap \Omega$ la fonction d est continûment différentiable, il existe un unique point $p(x) \in \partial\Omega$ vérifiant la relation $d(x) = |x - p(x)|$ et la fonction $x \rightarrow p(x)$ est deux fois continûment différentiable. Il convient de remarquer que pour tout $x \in \partial\Omega$ on a la relation

$$(1) \quad \nabla d(x) \wedge \nu(x) = 0.$$

On appellera voisinage admissible de Ω un ouvert $\theta(\lambda, \mu)$ de C^n dépendant de deux paramètres λ et μ vérifiant les relations $0 < \lambda < 1$, $\mu > 0$ et $\mu/\lambda < a$, défini par la formule:

$$\theta(\lambda, \mu) = \{z | Rz \in \Omega, |Iz| < \mu; |Iz| < \lambda d(Rz), \text{ si } Rz \in A\}.$$

On remarque que $\theta(\lambda, \mu) \supset \{z | Rz \in \Omega \setminus A, |Iz| < \mu\}$; d'autre part tout point $z \in \theta(\lambda, \mu)$ vérifie la relation $Rz \in \Omega$. Enfin, pour tout $z = (x + iy) \in \theta(\lambda, \mu)$, le tronc de cône $C(z) = \{(\sigma + i\eta) | |x_j - \sigma_j| < |y_j - \eta_j|, |y_j| > |\eta_j|, y \cdot \eta > 0\}$ est contenu dans $\theta(\lambda, \mu)$.

(1) Pour alléger l'écriture de certaines formules on posera souvent $Re z = Rz$, $Im z = Iz$.

Prolongement au domaine complexe des opérateurs intégraux singuliers ⁽²⁾.

Pour des fonctions u, v holomorphes dans un voisinage $\theta = \theta(\lambda, \mu)$ de Ω , on notera $\nabla u, \nabla \wedge u, \nabla \cdot u$ et $v \cdot \nabla u$ les opérateurs gradients, rotationnel, divergence et $\sum_{j=1}^n v_j D^j u$ (fréquemment on écrira $D^j = \partial/\partial z_j$, et on omettra le signe de sommation \sum). En dimension deux le rotationnel est un scalaire que l'on peut identifier à un vecteur de C^3 orthogonal à C^2 .

Pour tout voisinage admissible $\theta = \theta(\lambda, \mu)$, on désignera par $B(\theta, k, \alpha)$ ($0 < \alpha < 1$) l'espace des fonctions u scalaires ou vectorielles holomorphes dans θ vérifiant les relations:

$$(2) \quad \sup_{\substack{z \in \theta \\ |l| \leq k}} (|D^l u(z)|) + \sup_{\substack{z \in \theta \\ z' \in \theta \\ |l| = k}} (|D^l u(z) - D^l u(z')|/|z - z'|^\alpha) < +\infty.$$

Bien entendu le premier membre de (2) définit une norme et pour cette norme notée $|\cdot|_{k, \alpha}^\theta$, $B(\theta, k, \alpha)$ est un espace de Banach. On utilisera également l'espace des fonctions u holomorphes dans θ , et uniformément bornées. On notera $B(\theta, 0)$ cet espace et $|\cdot|_0^\theta$ la norme correspondante. On désignera par $K_n(z)$ la fonction holomorphe dans le cône $\text{Re} z_j^2 > 0$ ($1 \leq j \leq n$), réelle pour z réel définie par les relations:

$$(3) \quad K_n(z) = \begin{cases} (\frac{1}{2}\pi) \text{Log}(z_1^2 + z_2^2) & \text{si } n = 2 \\ (\frac{1}{4}\pi)(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)^{-\frac{1}{2}} & \text{si } n = 3. \end{cases}$$

(Dans le second membre de (2) on choisit les déterminations des fonctions Log et $\sqrt{\quad}$ de manière à ce qu'elles coïncident avec les fonctions usuelles sur R_+).

PROPOSITION I.1. *Soit θ un voisinage admissible de Ω ouvert borné de R^n . Alors pour toute fonction $\omega \in B(\theta, 0, \alpha)$, la fonction $\varphi(\lambda)$ définie par*

$$(4) \quad \varphi(\lambda) = \int_{\Omega} K_n(\lambda - \tilde{\lambda}) \omega(\tilde{\lambda}) d\tilde{\lambda}$$

se prolonge en une fonction holomorphe dans θ , donnée par la relation

$$(5) \quad \varphi(z) = \int_{\Gamma(z)} K_n(z - \tilde{z}) \omega(\tilde{z}) d\tilde{z}$$

où $\Gamma(z)$ est une surface convenable de dimension n contenue dans $(\theta \setminus C(z)) \cup \{z\}$

⁽²⁾ Une méthode de prolongement semblable a été utilisée par Kahane [12].

et passant par z

$$(C(z) = \{\xi = (\sigma_j + i\eta_j) \mid |x_j - \sigma_j| \leq |y_j - \eta_j|, 1 \leq j \leq n\}.$$

φ appartient à $B(\theta, z, \alpha)$ et il existe cinq constantes $C_j(\theta)$ ($1 \leq j \leq 5$) telles que l'on ait:

$$(6) \quad |\nabla\varphi|_0^0 \leq C_1(\theta)|\omega|_0^0$$

$$(7) \quad |\varphi|_{2,\alpha}^0 \leq C_2(\theta)|\omega|_{0,\alpha}^0$$

$$(8) \quad |\nabla\varphi(z) - \nabla\varphi(\tilde{z})| \leq C_3(\theta)|\omega|_0|z - \tilde{z}| \operatorname{Log} \frac{C_4(\theta)}{|z - \tilde{z}|}$$

$$(9) \quad |\nabla(\nabla\varphi)|_0^0 \leq (C_5(\theta)/\alpha)|\omega|_{0,\alpha}^0 \text{ } ^{(3)}.$$

Ces constantes sont des fonctions croissantes de θ . ($\theta \subset \hat{\theta} \Rightarrow C_j(\theta) \leq C_j(\hat{\theta})$) et la constante $C_5(\theta)$ est indépendante de α .

DÉMONSTRATION. On introduit un pavé $P(z) = \{\eta \in \Omega \mid |\eta_j - x_j| < \delta_j\}$, contenant $C(z) \cap \Omega$ et on pose:

$$(10) \quad \varphi(z) = \int_{\Omega \setminus P(z)} K_n(z - \tilde{z})\omega(\tilde{z})d\tilde{z} + \int_{\pi\Gamma_j(z)} K_n(z - \tilde{z})\omega(\tilde{z})\pi d\tilde{z}_j.$$

Dans le second terme de (10) $\Gamma_j(z_j)$ désigne une courbe contenue dans le cône $|Re(\sigma_j - z_j)| > |Im(\sigma_j - z_j)|$, passant par les points z_j et $x_j \pm \delta_j$. Les intégrales figurant dans le second membre de (10) sont définies dès que $\omega \in B(\theta, 0)$ et elles ne dépendent pas du choix des courbes $\Gamma_j(z_j)$; ainsi on désignera par $\Gamma(z)$ tout contour d'intégration semblable à celui qui apparaît dans le second membre de (10). Pour montrer que φ est holomorphe il suffit de prouver que φ vérifie les relations de Cauchy-Riemann, par rapport à toute variable $z_j = x_j + iy_j$. La seule difficulté provient du fait que le contour d'intégration peut être amené à varier avec z . Voici comment cette difficulté peut être tournée: on remarque que si h_j est un vecteur unitaire du plan complexe, de parties réelles et imaginaires Rh_j et Imh_j , vérifiant $|Rh_j| > |Imh_j|$, on peut pour t réel assez petit choisir un contour d'intégration $\Gamma(z)$, indépendant de t , pour calculer $\varphi(z + th_j)$. On supposera que $\Gamma_j(z_j)$ contient

(3) C_i désignera différentes constantes qu'on utilisera explicitement par la suite par contre C pourra représenter plusieurs constantes.

le segment $\{z_j + th_j\}$. On obtient alors:

$$(11) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (R\varphi) R h_j + \frac{\partial}{\partial y_j} (R\varphi) I h_j \right) + i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (I\varphi) R h_j + \frac{\partial}{\partial y_j} (I\varphi) I h_j \right) = \\ = \int_{\Gamma(z)} \lim_{t \rightarrow 0} (K_n(z + th_j - \tilde{z}) - K_n(z - \tilde{z})) / t \omega(\tilde{z}) d\tilde{z} = \int_{\Gamma(z)} \frac{\partial}{\partial z_j} (K_n(z - \tilde{z})) \cdot h_j \omega(\tilde{z}) d\tilde{z}.$$

En utilisant la relation (11) avec deux vecteurs linéairement indépendants on obtient les relations de Cauchy-Riemann.

Pour établir les majorations (6)-(9) on va paramétrer le contour $\Gamma(z)$ par la variable $\tilde{x} = R\tilde{z}$ et on va se ramener à des cas où le contour est indépendant de z , de manière à utiliser les résultats classiques sur les intégrales singulières dans le domaine réel (cf. Ladyzenskaia et Uraltceva [15] chap. 3 page 116 et suivantes). On va d'abord prouver les relations (6) et (9), la relation

$$(7)' \quad |\nabla(\nabla\varphi)|_0^\theta \leq C_2(\theta) |\omega|_{0,\alpha}^\theta$$

et les relations suivantes:

$$(7)'' \quad |\nabla(\nabla\varphi)(z) - \nabla(\nabla\varphi)(\tilde{z})| \leq C_2(\theta) |\omega|_{0,\alpha}^\theta |z - \tilde{z}|^\alpha$$

$$(8)' \quad |(\nabla\varphi)(z) - (\nabla\varphi)(\tilde{z})| \leq C_3(\theta) |\omega|_0 |z - \tilde{z}| \operatorname{Log} \frac{C_4(\theta)}{|z - \tilde{z}|}$$

lorsque $z - \tilde{z}$ est un vecteur réel.

Comme φ est une fonction holomorphe, pour établir ces inégalités, il suffit de faire varier la partie réelle de z , en fixant la partie imaginaire. On paramètre le contour d'intégration $\Gamma(z)$ par la variable réelle \tilde{x} et on posera:

$$(\Gamma(z))_j = \tilde{x}_j + i\gamma_j(z, \tilde{x}_j).$$

$\gamma_j(z, \tilde{x}_j)$ est une courbe convenable vérifiant la relation $\gamma_j(z, \tilde{x}_j) = 0$ si $|\tilde{x}_j - x_j| > (|y_j| + \delta_j)$, et $\gamma_j(z, \tilde{x}_j) = y_j$ dans un voisinage de x_j . γ_j peut être choisie deux fois continûment différentiable, elle peut être bornée, ainsi que ses dérivées premières et secondes par une constante indépendante de z , croissant avec θ . Lorsque x' varie dans un voisinage de x ce contour peut être utilisé pour calculer $\varphi(x + iy)$ et $\varphi(x' + iy)$. La fonction φ s'écrit alors:

$$(12) \quad \varphi(x' + iy) = \int_{\Omega} K_n(x' + iy - (\tilde{x} + i\gamma(\tilde{x}))) \omega(\tilde{x} + i\gamma(\tilde{x})) \prod_{j=1}^n (1 + \gamma'_j) d\tilde{x}_j$$

et les inégalités (6) (9) (7)' (7)'' et (8)' s'obtiennent en procédant exactement

comme dans [15]. Pour terminer la démonstration de la proposition I.1 on va établir des inégalités du type (7)" et (8)' lorsque $z - \tilde{z} \notin C(0)$. ($|R(z - \tilde{z})_j| > |I(z - \tilde{z})_j|$) le résultat général s'en déduira par linéarité (ou équivalence des normes dans R^n). Pour cela on choisit un vecteur $h_j \notin C(0)$, ($|Rh_j| > |Ih_j|$). Puis on introduit un contour $\Gamma(z)$, défini par $(\Gamma(z))_j = \tilde{x}_j + i\gamma_j(z, \tilde{x}_j)$; on suppose maintenant que pour t assez petit $z_j + th_j$ appartient à ce contour. On peut donc, à l'aide de ce contour calculer $\varphi(z + th_j)$ par la formule

$$(13) \quad \varphi(z + th_j) = \int_{\Omega} K_n(z + th_j - (\tilde{x} + i\gamma(\tilde{x}))) \omega(\tilde{x} + i\gamma(\tilde{x})) \prod_{j=1}^n (1 + \gamma'_j) d\tilde{x}_j.$$

On termine la démonstration comme ci dessus en procédant comme dans [15].

REMARQUE I.1. L'enoncé de la Proposition I.1 resterait valable si on remplaçait la fonction $K_n(z - \tilde{z})$ par une fonction $E(z, \tilde{z})$ holomorphe par rapport aux variables z et \tilde{z} pour $z - \tilde{z} \notin C(0)$, vérifiant les majorations suivantes:

si $n = 3$ et $0 < p < 2$

$$|\nabla_z^p E(z, \tilde{z})| + |\nabla_{\tilde{z}}^p E(z, \tilde{z})| \leq C|z - \tilde{z}|^{-(p+1)},$$

si $n = 2$ et $1 < p < 2$

$$|E(z, \tilde{z})| \leq C \text{Log}(K/|z - \tilde{z}|), \quad |\nabla^p E(z, \tilde{z})| \leq C|z - \tilde{z}|^{-p}.$$

COROLLAIRE I.1. Soit Ω un ouvert borné simplement connexe de R^3 , θ un voisinage admissible de Ω , alors pour tout $\omega \in B(\theta, 0, \alpha)$, vérifiant la relation $\nabla \cdot \omega = 0$ dans Ω , l'unique solution \mathbf{u} du problème $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ dans Ω , $\nabla \wedge \mathbf{u} = \omega$ dans Ω et $\mathbf{u} \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$ se prolonge en une fonction u appartenant à $B(\theta, 1, \alpha)$ vérifiant la relation

$$(14) \quad |u|_{1,\alpha}^0 \leq C_7(\theta) |\omega|_{0,\alpha}^0$$

où $C_7(\theta)$ est une fonction croissante de θ .

DÉMONSTRATION. Comme Ω est simplement connexe il existe une unique fonction $\mathbf{u} \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ (4) solution du problème $\nabla \wedge \mathbf{u} = \omega$, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, $\mathbf{u} \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$.

(4) On désignera par $C^{k,\alpha}(\Omega)$ les espaces de Hölder réels usuels et on notera $|\cdot|_{k,\alpha}$ les normes correspondantes.

De même il existe une unique fonction $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ solution du problème $\nabla \wedge \varphi = \mathbf{u}$, $\nabla \cdot \varphi = 0$ dans Ω , $\varphi \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$. φ est solution de l'équation $-\Delta\varphi = \omega$ et vérifie la majoration $|\varphi|_{2,\alpha} < C(\theta)|\omega|_{0,\alpha}$. La fonction $\bar{\varphi}$ obtenue en prolongeant φ par zéro en dehors de Ω est solution dans R^3 de l'équation

$$(15) \quad -\Delta\bar{\varphi} = \bar{\omega} + \frac{\partial\delta(\partial\Omega)}{\partial\nu} \otimes \varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \otimes \delta(\partial\Omega).$$

Dans (15) $\bar{\omega}$ désigne la fonction obtenue en prolongeant ω par zéro en dehors de Ω . $\delta(\partial\Omega)$ désigne la masse de Dirac portée par $\partial\Omega$ et les distributions figurant dans les deuxième et troisième termes du second membre de $\partial\Omega$ sont données par les formules suivantes

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial\nu} \delta(\partial\Omega) \otimes \varphi, \psi \right\rangle &= - \int_{\partial\Omega} \varphi(\sigma) \frac{\partial\psi}{\partial\nu}(\sigma) d\sigma \\ \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \otimes \delta(\partial\Omega), \psi \right\rangle &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(\sigma) \psi(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

On en déduit tout de suite, en convolant avec $K_3(x)$ que φ s'écrit sous la forme

$$(16) \quad \varphi(x) = \int_{\Omega} K_3(x - \tilde{x}) \omega(\tilde{x}) d\tilde{x} + \int_{\partial\Omega} \left(K_3(x - \sigma) \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(\sigma) + \frac{\partial K_3(x - \sigma)}{\partial\nu} \varphi(\sigma) \right) d\sigma.$$

D'après la proposition I.1 le premier terme du second membre de (16) se prolonge bien en une fonction appartenant à $B(\theta, 2, \alpha)$ vérifiant la relation (7). On considère maintenant la seconde intégrale. $K_3(x - \sigma)$ se prolonge en une fonction holomorphe dès que $z - \sigma \notin C(0)$ donc dès que $|R(z - \sigma)| > |I(z - \sigma)|$ ce qui est réalisé pour tout $z \in \theta$. Ainsi:

$$\varphi_2(z) = \int_{\partial\Omega} \left(K_3(z - \sigma) \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(\sigma) + \frac{\partial}{\partial\nu} (K_3(z - \sigma)) \varphi(\sigma) \right) d\sigma$$

est-elle une fonction holomorphe définie dans tout θ .

Comme φ est borné dans $C^{2,\alpha}(\Omega)$, donc dans $C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ par $C(\Omega)|\omega|_{0,\alpha}$ on en déduit, en procédant comme dans [15] (ici le fait que z soit complexe ne présente pas de difficulté supplémentaire) que l'on a

$$(17) \quad |\varphi_2(\cdot)|_{2,\alpha}^\theta < C(\theta) |\varphi_2|_{2,\alpha}^{\partial\Omega} < C(\theta) |\omega|_{0,\alpha}.$$

Comme $u = \nabla \wedge \varphi$ cela termine la démonstration du Corollaire I.1.

COROLLAIRE I.2. *On suppose maintenant que Ω est un ouvert non borné, de frontière $\partial\Omega$, bornée et régulière, alors, pour tout θ il existe une constante $C_8(\theta)$ telle que l'on ait:*

$$(18) \quad |u|_{1,\alpha}^\theta \leq C_8(\theta) \{ |u|_{0,\alpha}^\theta + |\nabla \wedge u|_{0,\alpha}^\theta \} \quad u \in B(\theta, 1, \alpha), \quad \nabla \cdot u = 0, \quad u \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0.$$

Cette constante est une fonction croissante de Ω .

DÉMONSTRATION. On introduit une famille d'ouverts Ω_i munis de voisinages admissibles θ_i possédant les propriétés suivantes. $\theta_i \subset \theta$ et $\theta = \cup \theta_i$. Chaque ouvert Ω_i est borné et simplement connexe; de plus il existe I tel que pour $i > I$ les ouverts θ_i se déduisent les uns des autres par une translation parallèle au domaine réel. Cette dernière hypothèse est faite de manière à obtenir une majoration uniforme des constantes $C_i(\theta)$ pour $i > I$. On remarque en effet que les constantes $C_k(\theta)$ intervenant dans la proposition I.1 et dans le Corollaire I.1 sont inchangées par une translation parallèle au domaine réel. On remarque ensuite qu'il existe une constante $C(\Omega)$ telle que l'on ait:

$$(19) \quad |u|_{1,\alpha} \leq C(\Omega) \{ |u|_{0,\alpha} + |\nabla \wedge u|_{0,\alpha} \}.$$

Soit $z \in \theta$, il existe donc θ_i tel que $z \in \theta_i$. Comme Ω_i est simplement connexe il existe une fonction φ_i solution du problème:

$$(20) \quad \nabla \wedge \varphi_i = u, \quad \nabla \cdot \varphi_i = 0 \text{ dans } \Omega_i, \quad \varphi_i \cdot \nu_i = u \cdot \nu_i \text{ sur } \partial\Omega_i.$$

φ_i appartient à $C^{2,\alpha}(\Omega_i)$ et vérifie une majoration du type

$$|\varphi_i|_{2,\alpha}^{\Omega_i} \leq C_1(\Omega_i) \cdot |u|_{1,\alpha} \leq C_2(\Omega_i) \{ |u|_{0,\alpha} + |\nabla \wedge u|_{0,\alpha} \}.$$

Enfin comme dans le corollaire I.1 on a, en désignant par $\bar{\varphi}_i$ la fonction obtenue en prolongeant φ_i par zéro en dehors de Ω , la relation:

$$(21) \quad \Delta \bar{\varphi}_i = \bar{\omega} - \frac{\partial}{\partial \nu_i} (\delta(\partial\Omega_i)) \otimes \varphi_i - \delta(\partial\Omega_i) \otimes \varphi_i.$$

On prolongera donc φ_i en une fonction appartenant à $B(\theta_i, 2, \alpha)$ et on majorera sa norme par $C(\theta_i) \{ |u|_{0,\alpha}^\theta + |\nabla \wedge u|_{0,\alpha}^\theta \}$ en procédant comme dans la démonstration du corollaire I.1.

On désignera maintenant par $B_\sigma(\theta, k, \alpha)$ l'espace des $u \in B(\theta, k, \alpha)$ vérifiant les relations $\nabla \cdot u = 0$ et $u \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$. D'après les corollaires I.1 et I.2 on voit qu'il est possible de munir l'espace $B_\sigma(\theta, 0, \alpha)$ d'une norme équivalente

définie par:

$$(22) \quad \begin{cases} \|u\|_\theta = |\nabla \wedge u|_{0,\alpha}^\theta & \text{si } \Omega \text{ est borné et simplement connexe,} \\ \|u\|_\theta = |\nabla \wedge u|_{0,\alpha}^\theta + |u|_{0,\alpha}^\theta & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

COROLLAIRE I.3. *On suppose que Ω est un ouvert borné et simplement connexe de \mathbb{R}^2 , alors pour tout $\omega \in B(\theta, 0, \alpha)$ l'unique fonction u solution du problème $\nabla \wedge u = \omega$, $\nabla \cdot u = 0$, $u \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$ se prolonge en une fonction $u \in B_\sigma(\theta, 1, \alpha)$ vérifiant les relations:*

$$(23) \quad |\nabla u|_0^\theta \leq (C_9(\theta)/\alpha) |\omega|_{0,\alpha}^\theta,$$

$$(24) \quad |u(z) - u(\tilde{z})| \leq C_{10}(\theta) |\omega|_0 |z - \tilde{z}| \text{Log} \frac{L(\theta)}{|z - \tilde{z}|}.$$

Les constantes $C_9(\theta)$, $C_{10}(\theta)$ et $L(\theta)$ étant des fonctions croissantes de θ .

DÉMONSTRATION. On introduit la fonction φ solution du problème $-\Delta\varphi = \omega$, $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$, u est alors donnée par la relation $u = \nabla \wedge (\varphi^1 + \varphi^2)$ ⁽⁵⁾ où φ^1 et φ^2 sont définies par les formules

$$(25) \quad \varphi^1(x) = \int_\Omega K_2(x - \tilde{x}) \omega(x) dx, \varphi^2(x) = \int_{\partial\Omega} K_2(x - \sigma) \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(\sigma).$$

D'après la proposition I.1 φ^1 se prolonge en une fonction $\varphi^1(z)$ appartenant à $B(\theta, 2, \alpha)$. Des relations (3) et (9) on déduit que $u_1 = \nabla \wedge \varphi^1$ vérifie les relations (23) et (24). Les majorations uniformes (en z) (23) et (24) ne présentent des difficultés qu'au voisinage de la frontière $\partial\Omega$. Par localisation et changement de carte on se ramène à prouver (23) et (24) pour des fonctions du type $h_k(z_1, z_2) = D_k \int_{\mathbb{R}} \log(z_1^2 + (z_2 - \sigma)^2) D_1 \varphi(0, \sigma) d\sigma$ où φ est une fonction à support compact dans $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ solution de l'équation $-\Delta\varphi = \omega$, $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$. On considérera seulement l'indice $k = 1$, le cas $k = 2$ se traite de manière analogue. Les constantes qui interviendront dans la suite dépendront du support de ω mais comme on se ramène à considérer un nombre fini de fonctions de ce type on omettra cette dépendance. On désignera toutes les constantes par la même lettre C . Comme φ est solution du problème de Dirichlet on a:

$$(26) \quad D_1\varphi(0, \sigma) = C \int_{\tilde{\Omega}} \xi / (\xi^2 + (\sigma - \eta)^2) \omega(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad \tilde{\Omega} = (\xi > 0, \eta \in \mathbb{R})$$

⁽⁵⁾ Le rotationnel d'une fonction scalaire φ , en deux dimensions est le vecteur $(\partial\varphi/\partial x_2, -\partial\varphi/\partial x_1)$.

et

$$(27) \quad h_1(z) = C \int_{\tilde{\Omega}} d\xi d\eta \omega(\xi, \eta) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} z_1 \cdot \xi / (\xi^2 + (\sigma - \eta)^2) (z_1^2 + (z_2 - \sigma)^2) d\sigma \right).$$

Comme

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_1}{(z_1^2 + (z_2 - \sigma)^2)} \frac{\xi}{(\xi^2 + (\sigma - \eta)^2)} d\sigma &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_1}{(z_1^2 + \sigma^2)} \frac{\xi}{(\xi^2 + (\sigma - \eta)^2)} d\sigma \\ &= (1/\pi)(z_1 + \xi) / ((z_2 - \eta)^2 + (\xi + z_1)^2). \end{aligned}$$

On a, en posant

$$(28) \quad g(z, X) = g_1, z_2, \xi, \eta = (1/\pi)(z_1 + \xi) / ((z_2 - \eta)^2 + (\xi + z_1)^2)$$

la représentation

$$(29) \quad h_1(z) = \int_{\tilde{\Omega}} g(z, X) \omega(X) dX.$$

La fonction $g(z, X)$ définie par (28) possède dans le domaine:

$$\tilde{\theta} = \{(X, z) | X \in \tilde{\Omega}, \operatorname{Re} z \in \tilde{\Omega}, |\operatorname{Im} z| < \lambda \operatorname{Re} z_1, 0 < \lambda < 1\}$$

(qui correspond à un voisinage admissible), les propriétés suivantes:

- (1) Elle est holomorphe en z ;
- (2) Elle vérifie les majorations

$$(30) \quad |g(z, X)| < C(x_1 + \xi) / ((x_2 - \eta)^2 + (\xi + x_1)^2)$$

et

$$(31) \quad |\nabla_z g(z, X)| < C_2(x_1 + \xi) / ((x_2 - \eta)^2 + (\xi + x_1)^2)^{\frac{3}{2}}.$$

La fonction qui figure au second membre de (30) présente au point $(-x_1, x_2)$ une singularité en $1/\rho$; et celle qui figure au second membre de (31) une singularité en $1/\rho^2$ ($\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$). On note

$$M(\delta) = \{(\xi, \eta) \in \tilde{\Omega} | |x_1 + \xi|^2 + |x_2 - \eta|^2 < \delta\}.$$

On a alors la relation

$$\begin{aligned}
 (32) \quad |h_1(z) - h_1(\tilde{z})| &= \left| \int_{\tilde{\Omega}} g(z, X) \omega(X) dX - \int_{\tilde{\Omega}} g(\tilde{z}, X) \omega(X) dX \right| \\
 &= \left| \int_{\tilde{\Omega}} g(z, X) (\omega(X) - \omega(0, x_2)) dX - \int_{\tilde{\Omega}} g(\tilde{z}, X) (\omega(X) - \omega(0, x_2)) dX \right| \quad (6) \\
 &\leq \int_{M(\delta)} (|g(z, X)| + |g(\tilde{z}, X)|) |\omega(X) - \omega(0, x_2)| dX + \\
 &\quad + \int_{\tilde{\Omega} \setminus M(\delta)} |g(z, X) - g(\tilde{z}, X)| (\omega(X) - \omega(0, x_2)) dX \\
 &\leq C \left(\int_{\varrho \geq \delta} |\omega(x_1, x_2) - \omega(0, x_2)| \varrho^{-2} dX \right) |z - \tilde{z}|.
 \end{aligned}$$

On choisit alors $\delta = 2|z - \tilde{z}|$. En utilisant (30) on voit que le premier terme du dernier membre de (32) est toujours borné par $C\delta|\omega|_0$. Pour majorer le second terme on utilise la relation (31) et le théorème des accroissements finis. On a :

$$(33) \quad |g(z, X) - g(\tilde{z}, X)| \leq |z - \tilde{z}| \cdot \sup |(x'_1 + \xi)/(x'_2 - \eta)^2 + (x'_1 + \xi)^2)^{\frac{3}{2}}|;$$

où (x'_1, x'_2) appartient au segment $[Rz, R\tilde{z}]$.

D'après l'inégalité triangulaire on a, dès que $X \notin M(\delta)$:

$$\begin{aligned}
 (34) \quad \left| \int_{\tilde{\Omega} \setminus M(\delta)} (g(z, X) - g(\tilde{z}, X)) (\omega(X) - \omega(0, x_2)) dX \right| &\leq \\
 &\leq C \left(\int_{\varrho \geq \delta} |\omega(x_1, x_2) - \omega(0, x_2)| \varrho^{-2} dX \right) |z - \tilde{z}|.
 \end{aligned}$$

Dès que ω est Holderien d'ordre α cette dernière intégrale est majorée par

$$(35) \quad I = C \left(\int_0^1 \varrho^\alpha \varrho^{-2} \varrho d\varrho \right) |z - \tilde{z}| \omega|_{0,\alpha}.$$

Ainsi on obtient :

$$(36) \quad |h_1(z) - h_1(\tilde{z})| \leq (C/\alpha) |\omega|_{0,\alpha} |z - \tilde{z}|,$$

(6) Il convient d'utiliser la relation :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (z_1 + \xi) / ((z_2 - \eta)^2 + (z_1 + \xi)^2) d\eta - \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{z}_1 + \xi) / ((\tilde{z}_2 - \eta)^2 + (\tilde{z}_1 + \xi)^2) d\eta = 0.$$

ce qui prouve la majoration (23). Pour prouver la majoration (24) on remarque de même que l'on a :

$$(37) \quad \left| \int_{\tilde{\Omega} \setminus \tilde{M}(\alpha)} (g(z, X) - g(\tilde{z}, X)) (\omega(x) - \omega(0, x_2)) \right| dX \leq \left(\int_{\delta}^1 \varrho^{-2} \varrho d\varrho C |z - \tilde{z}| \right) |\omega|_0 \leq \leq C |z - \tilde{z}| \text{Log} (C' / |z - \tilde{z}|) |\omega|_0 \quad (7).$$

Ce qui prouve pour h_1 une majoration du type (24).

Propagation de solutions d'équation du type transport dans un domaine complexe.

On désignera toujours par Ω un ouvert de R^n ($n = 2, 3$), de frontière $\partial\Omega$ bornée et régulière. Pour $t \in [0, T[\subset R_+$ on désignera par $\theta(t) = \theta(t) = \theta(\lambda(t), \mu(t))$ une famille de voisinages admissibles de Ω . On notera $\Sigma(T)$ le domaine de $\Omega \times iR^n \times R_+$ défini par $\Sigma(T) = \{(z, t) | 0 < t < T, z \in \theta(t)\}$. On dira que $\theta(t)$ varie régulièrement si $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ sont des fonctions continues de t . Pour toute application $t \rightarrow z(t)$ définie sur $[0, T[$, à valeurs dans C^n , vérifiant $z(t) \in \theta(t)$, $Re z(t) \in A$, on notera $\gamma(t)$ la fonction $\gamma(t) = |Im z(t)| / d(Rz(t))$. Bien entendu on a $|\gamma(t)| < \lambda(t) < 1$. Pour contrôler le comportement des caractéristiques dans le domaine complexe, nous aurons à utiliser la proposition suivante :

PROPOSITION I.2. *On suppose que $V(z, t)$ est une fonction définie sur $\Sigma(T)$, à valeur dans C^n , holomorphe par rapport à la variable z et continue par rapport à la variable t , appartenant, pour tout t à $B(\theta(t), 1, \alpha)$. On suppose de plus, que pour tout $x \in \partial\Omega$ on a $V(x, t) \cdot \nu(x) = 0$, et que $V(z, t)$ est réel dès que $Im z = 0$. On a alors les estimations suivantes*

(1) *Toute courbe $\gamma(t, z(t))$ contenue dans $\Sigma(T)$ et vérifiant les relations $Rz(t) \in A, z'(t) = V(z(t), t), |Im z(t)| \neq 0$, satisfait à la relation*

$$(38) \quad |\gamma'(t)| \leq D \cdot \gamma(t) |\nabla V|_0^{\theta(t)}.$$

(2) *On suppose que pour tout $\xi \in \Sigma(T)$ la solution $z(t)$ de l'équation différentielle*

$$z'(s) = V(z(s), s), \quad z(t) = \xi$$

est contenue dans $\theta(s)$, pour $0 \leq s \leq t$. Alors toute fonction $u(z, t)$ définie sur $\Sigma(T)$, holomorphe par rapport à la variable z et continue par rapport à la variable t ,

(7) Bien entendu cette démonstration s'inspire largement de [15]. Et c'est la contribution de la constante C' qui introduit la constante $L(\theta)$.

appartenant, pour tout $t \in B(\theta(t), 1, \alpha)$ solution de l'équation différentielle

$$(39) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u = g$$

vérifie la majoration à priori suivante:

$$(40) \quad |u(\cdot, t)|_{0, \alpha}^{\theta(t)} \leq |u(\cdot, 0)|_{0, \alpha}^{\theta(0)} + \int_0^t (|g(\cdot, s)|_{0, \alpha}^{\theta(s)} + \alpha |\nabla V|_0^{\theta(s)} |u(\cdot, s)|_{0, \alpha}^{\theta(s)}) ds.$$

DÉMONSTRATION. On remarque d'abord que, comme $|\operatorname{Im} z(t)| \neq 0$, et comme $z(t) \notin \partial\Omega$ les fonctions $|\operatorname{Im} z(t)|$ et $d(\operatorname{Re} z(t))$ sont dérivables. On a en particulier:

$$(41) \quad \frac{d}{dt} |\operatorname{Im} z(t)| \leq \left| \frac{d}{dt} (\operatorname{Im} z(t)) \right| \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} [d(\operatorname{Re} z(t))] = \\ = \nabla d(\operatorname{Re} z(t)) \cdot \frac{d}{dt} (\operatorname{Re} z(t)).$$

On peut alors écrire:

$$(42) \quad \left| \frac{d}{dt} \gamma(t) \right| \leq |\operatorname{Im} z'(t)| / d(\operatorname{Re} z(t)) + |\nabla d(\operatorname{Re} z(t)) \cdot \operatorname{Re} z'(t)| |\operatorname{Im} z(t)| \cdot \\ \cdot (d(\operatorname{Re} z(t)))^2 \leq |\operatorname{Im} V(z(t), t)| / d(\operatorname{Re} z(t)) + |\nabla d(\operatorname{Re} z(t)) \cdot \operatorname{Re} V(z(t), t)| \cdot |\operatorname{Im} z(t)| \cdot \\ \cdot (d(\operatorname{Re} z(t)))^2.$$

Comme $V(\cdot, t) \in B(\theta(t), 1, \alpha)$ est réelle pour z réel on a:

$$(43) \quad |\operatorname{Im} V(z(t), t)| \leq |\operatorname{Im} z(t)| |\nabla V(\cdot, t)|_0^{\theta(t)}$$

De même on peut écrire la relation

$$(44) \quad |\nabla d(\operatorname{Re} z(t)) \cdot \operatorname{Re} V(z(t), t)| \leq \\ \leq |\nabla d(\operatorname{Re} z(t)) \cdot V(\operatorname{Re} z(t), t)| + C |\operatorname{Im} z(t)| |\nabla V(\cdot, t)|_0^{\theta(t)}.$$

De plus comme $V(x, t)$ est tangent à $\partial\Omega$ on a

$$(45) \quad |\nabla d(x, t) \cdot V(x, t)| \leq |\nabla d(p(x)) \cdot V(p(x), t)| + |\nabla(\nabla d(\cdot) \cdot V(\cdot, t))|_0 d(x) \\ \leq D_2 |\nabla V(\cdot, t)|_0 d(x).$$

En utilisant les inégalités (42), (44) et (45) on obtient la relation

$$(46) \quad \left| \frac{d}{dt} \gamma(t) \right| \leq |\nabla V(\cdot, t)|_0^{\theta(t)} \left\{ \gamma(t) + (D_1 |\operatorname{Im} z(t)| + D_2 d(\operatorname{Re} z(t))) |\operatorname{Im} z(t)| / (d(\operatorname{Re} z(t)))^2 \right\}.$$

Soit

$$(47) \quad \left| \frac{d}{dt} \gamma(t) \right| \leq \gamma(t) (1 + D_1(\gamma(t)) + D_2) |\nabla V(\cdot, t)|_0^{\theta(t)}.$$

Et comme $\gamma(t) < 1$ on a ainsi prouvé le point (1). Prouvons maintenant le point (2). Comme $u(\cdot, t)$ est solution de (39) on a :

$$(48) \quad \frac{d}{ds} u(z(s), s) = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z_i} z'_i(s) = \frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u = g(z(s), s).$$

Comme la courbe: $(s, z(s))$ ($0 \leq s \leq t$) est contenue dans $\Sigma(T)$ on déduit de (48) la relation :

$$(49) \quad |u(z(t), t)| \leq |u(z(0), 0)| + \int_0^t |g(z(s), s)| ds \leq |u(\cdot, 0)|_0^{\theta(0)} + \int_0^t |g(\cdot, s)|_0^{\theta(s)} ds.$$

Comme pour tout point $z \in \theta(t)$, il existe une courbe $(s, z(s))$ contenue dans $\Sigma(T)$ pour $0 \leq s \leq t$ et vérifiant la relation $z(t) = z$, on déduit de (49) la majoration à priori

$$(50) \quad |u(\cdot, t)|_0^{\theta(t)} \leq |u(\cdot, 0)|_0^{\theta(0)} + \int_0^t |g(\cdot, s)|_0^{\theta(s)} ds.$$

Soient maintenant $z(s)$ et $\tilde{z}(s)$ deux fonctions définies pour $0 \leq s \leq t$ solutions des équations :

$$\frac{d}{ds} z(s) = V(z(s), s), \quad \frac{d}{ds} \tilde{z}(s) = V(\tilde{z}(s), s); \quad z(t) = \tilde{z} \quad (\tilde{z} \neq z).$$

Comme $\tilde{z} \neq z$, et comme la fonction $V(z, s)$ est uniformément lipschitzienne par rapport à la variable z , on déduit du théorème de Cauchy Lipschitz, que pour tout $0 \leq s \leq t$ on a $z(s) \neq \tilde{z}(s)$; la fonction $\varrho(s) = |\tilde{z}(s) - z(s)|$ est donc dérivable et on a la relation :

$$(51) \quad |\varrho'(s)| \leq |z'(s) - \tilde{z}'(s)| = |V(\tilde{z}(s), s) - V(z(s), s)| \leq \varrho(s) |\nabla V|_0^{\theta(s)}.$$

En dérivant la fonction $[(u(z(s), s) - u(\tilde{z}(s), s))] \varrho(s)^{-\alpha}$ on obtient la relation:

$$(52) \quad \frac{d}{ds} [(u(z(s), s) - u(\tilde{z}(s), s)) \varrho(s)^{-\alpha}] \leq \\ \leq \left(\frac{d}{ds} u(z(s), s) - \frac{d}{ds} u(\tilde{z}(s), s) \varrho(s)^{-\alpha} - [u(z(s), s) - u(\tilde{z}(s), s)] \alpha \varrho'(s) \right) \varrho^{-\alpha-1}.$$

Ceci permet d'écrire la majoration

$$(53) \quad \left| \frac{d}{ds} [(u(z(s), s) - u(\tilde{z}(s), s)) \varrho(s)^{-\alpha}] \right| \leq \\ \leq |(gz(s), s) - g(\tilde{z}(s), s)) \varrho(s)^{-\alpha}| + \alpha |\varrho'(s) \varrho(s)^{-1}| |(u(z(s), s) - u(\tilde{z}(s), s)) \varrho(s)^{-\alpha}| \leq \\ \leq |g(\cdot, s)|_{0, \alpha}^{\theta(s)} + \alpha |\nabla V(\cdot, s)|_0^{\theta(s)} \cdot |u(\cdot, s)|_{0, \alpha}^{\theta(s)}.$$

En intégrant on obtient:

$$(54) \quad |(u(z(t), t) - u(\tilde{z}(t), t)) \varrho(t)^{-\alpha}| \leq |(u(z(0), 0) - u(\tilde{z}(0), 0)) \varrho(0)^{-\alpha}| + \\ + \int_0^t (|g(\cdot, s)|_{0, \alpha}^{\theta(s)} + \alpha |\nabla V(\cdot, s)|_0^{\theta(s)} |u(\cdot, s)|_{0, \alpha}^{\theta(s)}) ds.$$

Comme pour tout couple $(z, \tilde{z}) \in \theta(t)$, il existe deux courbes $z(s), \tilde{z}(s)$ définies pour $0 \leq s \leq t$ et vérifiant les relations $z'(s) = V(z(s), s)$, $\tilde{z}'(s) = V(\tilde{z}(s), s)$; $z(t) = z$; $\tilde{z}(t) = \tilde{z}$, on déduit de la relation (54) la relation

$$(55) \quad |u(z, t) - u(\tilde{z}, t)| |z - \tilde{z}|^{-\alpha} \leq |u(\cdot, 0)|_{0, \alpha}^{\theta(0)} + \\ + \int_0^t (|g(\cdot, s)|_{0, \alpha}^{\theta(s)} + \alpha |\nabla V(\cdot, s)|_0^{\theta(s)} |u(\cdot, s)|_{0, \alpha}^{\theta(s)}) ds.$$

En prenant la borne supérieure du premier membre de (55) rapport à $(z, \tilde{z}) \in \theta(t) \times \theta(t)$, puis en additionnant avec (49) on obtient la relation (40), et on a ainsi démontré la proposition I.2.

On désignera par $E(t)$ une famille d'opérateurs linéaires continus de $B(\theta(t), 0, \alpha)$ dans $B(\theta(t), 0, \alpha)$, ($0 \leq t \leq T$). On dira que cette famille est régulière si, pour toute fonction $u(z, t)$, définie sur $\Sigma(T)$, continue par rapport aux variables (z, t) et vérifiant $u(\cdot, t) \in B(\theta(t), 0, \alpha)$, la fonction $E(t)u(\cdot, t) \in B(\theta(t), 0, \alpha)$ est continue par rapport aux variables (z, t) . De la proposition I.2 on peut maintenant déduire la

PROPOSITION I.3. Soit $V(z, t)$ une fonction définie sur $\Sigma(T)$, réelle pour z réel, appartenant à $B(\theta(t), 1, \alpha)$ continue par rapport aux variables z et t . On suppose que pour tout $z \in \theta(t)$ la solution de l'équation différentielle:

$$(56) \quad z'(s) = V(z(s), s), \quad z(t) = z, \quad 0 \leq s \leq t,$$

vérifie $z(s) \in \theta(s)$. Soit d'autre part $E(t)$ une famille régulière d'opérateurs linéaires continus de $B(\theta(t), 0, \alpha)$ à valeur dans $B(\theta(t), 0, \alpha)$.

Alors pour tout $u_0 \in B(\theta(0), 0, \alpha)$ il existe une unique fonction $u(\cdot, t) \in B(\theta(t), 0, \alpha)$ solution du problème

$$(57) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u = E(t)(u(\cdot, t)) \quad \text{dans } \Sigma(T), \quad u(\cdot, 0) = u_0.$$

De plus cette fonction vérifie la majoration:

$$(58) \quad |u(\cdot, t)|_{0, \alpha}^{\theta(t)} \leq |u_0|_{0, \alpha}^{\theta(0)} + \int_0^t (\|E(s)\|_{0, \alpha}^{\theta(s)} |u(\cdot, s)|_{0, \alpha}^{\theta(s)} + \alpha |\nabla V|_0^{\theta(s)} |u(\cdot, s)|_{0, \alpha}^{\theta(s)}) ds.$$

Dans le second membre $\|E(s)\|_{0, \alpha}^{\theta(s)}$ désigne la norme de l'opérateur $E(s)$ continu de $B(\theta(s), 0, \alpha)$ dans $B(\theta(s), 0, \alpha)$.

DÉMONSTRATION. La démonstration se fait par itération. On remarque d'abord que la fonction $z_z(s)$ solution de l'équation (56) est une fonction holomorphe de la variable z . On introduit alors $u^n(z, t)$ défini par les relations:

$$(59) \quad z'_z(s) = V(z_z(s), s), \quad z_z(t) = z.$$

$$(60) \quad u^n(z, t) = u_0(z_z(0)) + \int_0^t (E(s)u^{n-1}(\cdot, s))(z_z(s)) ds.$$

$$(61) \quad u^0(\cdot, s) = 0.$$

La fonction $u^n(z, t)$ est continue par rapport au couple (z, t) , holomorphe par rapport à la variable z , réelle pour z réel. De plus elle est solution de l'équation

$$(62) \quad \frac{\partial u^n}{\partial t} + V \cdot \nabla u^n = E(t) \cdot u^{n-1}.$$

Elle vérifie donc la majoration

$$(63) \quad |u^n(\cdot, t)|_{0, \alpha}^{\theta(t)} \leq |u_0|_{0, \alpha}^{\theta(0)} + \int_0^t (\|E(s)\|_{0, \alpha}^{\theta(s)} |u^{n-1}(\cdot, s)|_{0, \alpha}^{\theta(s)} + \alpha |\nabla V|_0^{\theta(s)} |u^n(\cdot, s)|_{0, \alpha}^{\theta(s)}) ds.$$

D'autre part d'après le lemme de Gronwall toute suite $\varphi^n(t)$ de fonctions continues positives solutions d'une inéquation du type:

$$(64) \quad \varphi^n(t) \leq F + \int_0^t (g(s)\varphi^{n-1}(s) + h(s)\varphi^n(s)) ds$$

vérifie la majoration:

$$(65) \quad \varphi^n(t) \leq F \exp \left[\int_0^t h(s) ds \right] + \int_0^t \exp \left[\int_s^t h(\sigma) d\sigma \right] g(s) \varphi^{n-1}(s) ds .$$

Maintenant si on suppose que φ^{n-1} vérifie la majoration:

$$(66) \quad \varphi^{n-1}(t) \leq F \exp \left[\int_0^t (h(s) + g(s)) ds \right]$$

on déduit de (65) la majoration:

$$(67) \quad \begin{aligned} \varphi^n(t) &\leq \\ &\leq F \left(\exp \left[\int_0^t h(s) ds \right] + \int_0^t \exp \left[\int_0^t h(\sigma) d\sigma \right] g(s) \exp \left[\int_0^s (h(\sigma) + g(\sigma)) d\sigma \right] ds \right) \leq \\ &\leq F \exp \left[\int_0^t h(s) ds \right] \left(1 + \int_0^t g(s) \exp \left[\int_0^s g(\sigma) d\sigma \right] ds \right) \leq F \exp \left[\int_0^t (h(s) + g(s)) ds \right] . \end{aligned}$$

En posant $h(s) = \alpha |\nabla V|_0^{\theta(s)}$ et $g(s) = \|E(s)\|_{0,\alpha}^{\theta(s)}$ et en appliquant (66) et (67) on prouve par récurrence la majoration:

$$(68) \quad |u^n(\cdot, t)|_{0,\alpha}^{\theta(t)} \leq |u_0|_{0,\alpha}^{\theta(0)} \exp \left[\int_0^t (\|E(s)\|_{0,\alpha}^{\theta(s)} + \alpha |\nabla V|_0^{\theta(s)} ds) \right] .$$

A partir de cette majoration uniforme il est facile de prouver la proposition I.3 en faisant tendre n vers l'infini. En particulier on obtient (58) en faisant tendre n vers l'infini dans (63).

II. - Analyticité de la solution de l'équation d'Euler dans un ouvert borne simplement connexe de R^3 .

Nous nous limiterons dans ce § au cas de l'ouvert simplement connexe de manière à mettre plus en évidence le rôle du rotationnel dans la régularité de la solution. Pour tout voisinage θ admissible de Ω , nous munirons l'espace

$B_\sigma(\theta, 1, \alpha)$ de la norme définie par $|v|_{1,\alpha}^\theta = |\nabla v|_{0,\alpha}^\theta$ (cf. § 1, (22)). On introduit ensuite un voisinage admissible $\hat{\theta}$ assez grand et une constante \bar{K} choisie également suffisamment grande de manière à vérifier la relation:

$$(69) \quad |\nabla v|_{0,\alpha}^\theta + \alpha |\nabla v|_0^\theta \leq \bar{K} |\nabla v|_{0,\alpha}^\theta \quad v \in B(\theta, 1, \alpha) \text{ et } \theta \subset \hat{\theta}.$$

Dans le membre de gauche de (69) la norme du tenseur $\nabla v = (D_j v_i)$ est choisie de manière à coïncider avec la norme de l'opérateur $\omega \rightarrow \omega \cdot \nabla v$ linéaire et continu de $B(\theta, 0, \alpha)$ dans lui même.

Soit $u_0 \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ une fonction réelle vérifiant les relations $\nabla \cdot u_0 = 0$, $u_0 \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$, on pose $M = |\nabla \wedge u_0|_{0,\alpha}$, $M(t) = M/(1 - \bar{K}Mt)$. On sait (cf. [3]) que sur l'intervalle $0 \leq t < T^* = (\bar{K}M)^{-1}$ l'équation d'Euler:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad u \cdot \nu|_{\partial\Omega \times [0, T^*]} = 0, \quad u(\cdot, 0) = u_0$$

admet une solution vérifiant la majoration $|\nabla \wedge u(\cdot, t)|_{0,\alpha} \leq M(t)$. De plus cette solution est indéfiniment dérivable dès que u_0 est indéfiniment dérivable. Ce résultat se transpose au cas analytique comme suit:

THÉORÈME II.1. *Soit $\theta(\lambda, \mu) \subset \hat{\theta}$ un voisinage admissible de l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ borné et simplement connexe. Soit $u_0 \in B_\sigma(\theta, 1, \alpha)$ une fonction réelle pour z réel, $M = |u_0|_{0,\alpha}^\theta$ et $M(t) = M/(1 - KMt)$ où K désigne une constante suffisamment grande en particulier supérieure à \bar{K} .*

Alors la solution de l'équation d'Euler se prolonge pour tout $t(0 \leq t < (KM)^{-1})$ en une fonction $u(z, t) \in B_\sigma(\theta(t), 1, \alpha)$ vérifiant la majoration

$$(70) \quad |u|_{0,\alpha}^{\theta(t)} \leq M/(1 - KMt).$$

($\theta(t)$, $0 \leq t < (KM)^{-1}$, est une famille continue décroissante de voisinages admissibles de Ω).

DÉMONSTRATION - On pose $\theta(t) = \theta(\lambda(1 - KMt), \mu(1 - KMt))$.

Puis on définit la suite ω_n par les relations:

$$(71) \quad u_n(t) \in B_\sigma(\theta, 1, \alpha), \quad \nabla \wedge u_n = \omega^n,$$

$$(72) \quad \frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial t} + (u_n \cdot \nabla) \omega^{n+1} = (\omega^{n+1} \cdot \nabla) u_n; \quad \omega^n(\cdot, 0) = \nabla \wedge u_0.$$

On va montrer que ce procédé détermine bien une suite (u_n, ω^n) vérifiant les relations:

$$(73) \quad \nabla \cdot \omega^n = 0, \quad |\omega^n(t)|_{0,\alpha}^{\theta(t)} \leq M(t).$$

Supposons que ces propriétés soient vraies jusqu'à l'ordre n , u_n est alors déterminé par (71), appartient à $B_\sigma(\theta(t), 1, \alpha)$ et vérifie (Corollaire I.1) l'inégalité

$$(74) \quad |\nabla u_n|_0^{\theta(t)} \leq KM(t).$$

Ensuite on considère $z(s)$ solution de l'équation différentielle:

$$(75) \quad z'(s) = u_n(z(s), s), \quad z(t) = z \in \theta(t)$$

et on va montrer que, si K a été choisit assez grand alors $z(s)$ ne peut rencontrer la frontière de $\Sigma(T)$ pour $(0 \leq s < t)$. Ceci prouvera en particulier que la solution de (75) est définie pour tout s $(0 \leq s < t)$. On a d'abord

$$(76) \quad |Imz'(s)| = |Imu_n(z(s), s)| < |\nabla u_n(\cdot, s)|_0^{\theta(s)} |Imz(s)| \leq KM(s) |Imz(s)| \quad (*)$$

Ensuite, comme $u_n \in B_\sigma(\theta, 1, \alpha)$ on a d'après la proposition I.2(1) (et en utilisant les notations de cet énoncé), dès que $Rez(s) \in A$:

$$(77) \quad |\gamma'(s)| \leq D\gamma(s) |\nabla V|_0^{\theta(t)} \leq D\bar{K}M(s) \gamma(s) \leq KM(s) \gamma(s).$$

D'après (76), pour tout $s < t$ on a:

$$(78) \quad (|Im z(s)| / |Im z(t)|) \leq \frac{(1 - KM_s)}{(1 - KM_t)}.$$

Comme $z(t) \in \theta(t)$ on a: $|Imz(t)| < \mu(1 - KMt)$ et de (78) on déduit que $|Imz(s)| < \mu(1 - KMs)$.

Ainsi $z(s)$ ne peut appartenir à $\partial\theta(s) \cap \{z | Rez \notin A\}$. Si $z(s_1)$ appartenait à $\partial\theta(s_1) \cap \{z | Rez \in A\}$, il existerait t_1 tel que pour $0 \leq s_1 < s < t_1 < t$, $Rez(s)$ appartienne à A . En utilisant (77) on obtiendrait alors:

$$(79) \quad |\gamma'(s)| \leq \gamma(s) KM(s) \quad (s_1 \leq s \leq t_1)$$

et de (79) on déduirait, par intégration, la relation:

$$(80) \quad |\gamma(s)| \leq \gamma(t_1)(1 - KMs)/(1 - KMt_1).$$

(*) Remarquons que $u_n(z)$ est réel dès que z est réel.

Comme on a $\gamma(t_1) < \lambda(t_1) = \lambda(1 - KMt_1)$. On déduit de (80) que l'on a :

$$(81) \quad |\gamma(s_1)| < \lambda(1 - KM s_1)$$

et ainsi $z(s_1)$ n'appartient pas à $\partial\theta(s_1) \cap \{z | \operatorname{Re} z \in A\}$.

On peut donc maintenant intégrer l'équation (72) en utilisant la proposition I.3. On obtient une fonction $\omega^{n+1}(t)$ qui vérifie la majoration (cf. (58)) :

$$(82) \quad |\omega^{n+1}(t)|_{0,\alpha}^{\theta(t)} < |\nabla \wedge u_0|_{0,\alpha}^{\theta(0)} + \int_0^t (|\nabla u^n|_{0,\alpha}^{\theta(s)} + \alpha |\nabla u^n|_{0,\alpha}^{\theta(s)}) |\omega^{n+1}(s)|_{0,\alpha}^{\theta(s)} ds \leq \\ \leq M + \int_0^t KM(s) |\omega^{n+1}(s)|_{0,\alpha}^{\theta(s)} ds.$$

En utilisant encore une fois le lemme de Gronwall on déduit que $|\omega^{n+1}(t)|_{0,\alpha}^{\theta(t)} < M(t)$. Enfin en prenant la divergence de l'équation (72), on obtient, compte tenu de la relation $\nabla \cdot u_n = 0$ la relation :

$$(83) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \omega^{n+1}) + u_n \cdot \nabla (\nabla \cdot \omega^{n+1}) = 0$$

ce qui prouve que $\nabla \cdot \omega^{n+1} = 0$ car $\nabla \cdot \omega^{n+1}(\cdot, 0) = \nabla \cdot (\nabla \wedge u_0)(\cdot, 0) = 0$.

Ayant obtenu la majoration (73) on montre facilement (d'autant plus que le résultat est déjà prouvé dans le domaine réel) que les suites u_n, ω^n convergent (par exemple uniformément sur tout compact de $\Sigma(T)$) vers des fonctions u et ω appartenant à $B_\sigma(\theta(t), 1, \alpha)$ et $B(\theta(t), 0, \alpha)$ solutions des équations :

$$(84) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \nabla \omega = \omega \cdot \nabla u, \quad \nabla \cdot \omega = 0, \quad \omega(\cdot, 0) = \nabla \wedge u_0(\cdot) \quad \nabla \wedge u = \omega.$$

Dans le domaine réel ces équations sont équivalentes, dès que Ω est simplement connexe, à l'équation d'Euler et ceci termine la démonstration du Théorème II.1.

THÉORÈME II.2. *On désigne toujours par Ω un ouvert borné, simplement connexe et régulier de R^3 et par $u(x, t)$ une fonction réelle solution de l'équation d'Euler dans $\Omega \times [0, T[$. On suppose que u est continûment différentiable dans $\Omega \times [0, T[$ et que $u(\cdot, 0)$ se prolonge en une fonction analytique dans un voisinage admissible θ de Ω . Alors $u(x, t)$ est pour tout $t \in [0, T[$ une fonction analytique de x .*

REMARQUE II.1. On sait déjà qu'il ne peut y avoir de perte de régularité C^∞ sans perte de régularité C^1 ([9] et [10]). Le théorème ci dessus prouve qu'il ne peut y avoir de perte de régularité analytique sans perte de régularité C^1 .

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME II.2. On désigne par T^{**} la borne supérieure des nombres T' possédant la propriété suivante. Pour tout $t \in [0, T'[$ la fonction $u(\cdot, t)$ se prolonge en une fonction analytique $u(z, t) \in B(\theta(t), 1, \alpha)$ où $\theta(t)$ désigne un voisinage admissible de Ω . D'après le théorème II.1 on sait déjà que $T^{**} > 0$. On va montrer que $T^{**} = T$. En réduisant éventuellement les voisinages $\theta(t)$, on peut supposer que pour tout $t \in [0, T[$ on a $\theta(t) \subset \theta$. On suppose que $T^{**} < T$ et on introduit T' ($T^{**} < T' < T$). Sur l'intervalle $[0, T'[$ les dérivées premières et secondes de u sont bornées par une constante $P > 0$. Soit $\varepsilon > 0$, d'après la définition de T^{**} , $u(T^{**} - \varepsilon)$ se prolonge en une fonction analytique dans un voisinage admissible $\theta(T^{**} - \varepsilon)$. Comme sur l'axe réel les dérivées premières et secondes de u sont bornées. En choisissant $\theta(T^{**} - \varepsilon)$ assez petit on peut réaliser l'inégalité:

$$(85) \quad |\nabla \cdot u(T^{**} - \varepsilon)|_{0, \alpha}^{\theta(T^{**} - \varepsilon)} \leq (P + 1).$$

En appliquant le théorème II.1, après avoir changé t en $t + T^{**} - \varepsilon$, on voit que pour tout t , $T^{**} - \varepsilon \leq t < (T^{**} - \varepsilon) + 1/K(P + 1)$, $u(\cdot, t)$ se prolonge en une fonction analytique. En choisissant ainsi $\varepsilon < 1/K(P + 1)$ on obtient une contradiction.

REMARQUE II.2. Les deux étapes essentielles de la démonstration des théorèmes II.1 et II.3 sont l'utilisation du corollaire I.1 (analyticité dans le domaine complexe) et de la proposition I.2 (propagation des solutions). En généralisant l'énoncé du corollaire I.1 (cf. Remarque I.1) on peut démontrer le théorème suivant

THÉORÈME II.3. On désigne par Ω un ouvert borné de R^n , par $L(t)$ et $M(t)$ deux familles d'opérateurs possédant les propriétés suivantes:

1) Pour tout voisinage admissible θ de Ω , $L(t)$ se restreint en un opérateur linéaire continu de $(B(\theta, 0, \alpha))^p$ dans $(B(\theta, 1, \alpha))^n$, vérifiant les relations suivantes:

$$L(\omega) \cdot \gamma|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{et} \quad |L(\omega)|_{0, \alpha}^{\theta} \leq C(\theta) |\omega|_{0, \alpha}^{\theta}$$

où $C(\theta)$ est une fonction croissante de θ .

2) M s'écrit sous la forme:

$$G(\omega) = \sum_{r=1}^R G_r(\omega)$$

où $G_r(\cdot)$ un opérateur r linéaire continu de $(B(\theta, 0, \alpha))^p$ dans $B(\theta, 0, \alpha)^n$ vérifiant la relation:

$$|G_r(\omega)|_{0,\alpha}^\theta \leq C_r(\theta)(|\omega|_{0,\alpha}^\theta)^r$$

3) Si $\omega|_\Omega$ est réel, il en est de même de $G(\omega)|_\Omega$ et de $L(\omega)|_\Omega$.

Alors on a les résultats:

I) Il existe une constante K telle que pour tout $\omega_0 \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ le problème

$$(86) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + L(\omega) \cdot \nabla \omega = G(\omega), \quad \omega(\cdot, 0) = \omega_0(\cdot)$$

admette une unique solution höldérienne dans $\Omega \times [0, (K|\omega_0|_{0,\alpha}^{R-1})^{-1}]$ vérifiant la majoration:

$$(87) \quad |\omega(t, \cdot)|_{0,\alpha} \leq |\omega_0|_{0,\alpha} (1 - (K|\omega_0|_{0,\alpha}^{R-1})t)^{-1/(R-1)}.$$

II) On suppose que ω_0 se prolonge en une fonction appartenant à $B(\theta(0), 0, \alpha)^p$, alors toute solution continûment différentiable du problème (86) est en fait analytique.

La démonstration de ce théorème se fait en généralisant la démonstration des théorèmes II.1 et II.2. Elle introduit cependant des notations supplémentaires et aussi nous l'omettons.

III. – Le cas de l'ouvert non borné.

On se propose dans ce § de donner une méthode permettant de traiter à la fois le cas des ouverts bornés non simplement connexes et celui des ouverts non simplement connexes et non bornés. Lorsque l'ouvert est borné la méthode est plus simple ainsi nous ne traiterons en détail que le cas de l'ouvert non borné. Un point intéressant est le suivant: les résultats que nous allons développer permettent de prouver l'analyticité de la solution dans le cas où les données initiales sont analytiques mais pas d'énergie totale finie. Cette idée apparait dans [3] et nous la reprenons dans le cadre analytique. Comme

dans [3] on va construire une solution de l'équation :

$$(88) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p, \quad u \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0, \quad \nabla \cdot u = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

vérifiant les relations $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$, $\nabla p \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Il convient de remarquer si u ne vérifie pas l'hypothèse de décroissance à l'infini, les équations (88) ne permettent pas de déterminer ∇p de manière unique. Ceci provient du fait que le problème $-\Delta p = 0$ dans Ω , ∇p borné, $\partial p / \partial \nu|_{\partial\Omega} = 0$ admet des solutions non triviales: par exemple $A \cdot x$ si $\Omega = R^3$ ou $2x_3 + x_3/|x|^{-3}$ si $\Omega = \{x \mid |x| > 1\}$. Aussi il est nécessaire comme dans [3] de préciser le terme ∇p en introduisant un opérateur $F(u, v)$. Pour cela nous démontrons le

LEMME III.1. *Soit Ω un ouvert non borné de frontière $\partial\Omega$ régulière et bornée, alors pour tout $g \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ il existe une solution p du problème $-\Delta p = 0$ dans Ω , $\partial p / \partial \nu|_{\partial\Omega} = g$, donnée par une expression de la forme :*

$$(89) \quad p(x) = (1/4\pi) \int_{\partial\Omega} (g(\sigma)/|x - \sigma| d\sigma + (1/4\pi) \int_{\partial\Omega} \nu \cdot \nabla (1/|x - \sigma|) (M \cdot g)(\sigma) d\sigma$$

où M est un opérateur linéaire continu de $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ dans $C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ · p se prolonge en une fonction analytique dans tout voisinage admissible θ de Ω et vérifie la relation :

$$(90) \quad |p|_{1,\alpha}^\theta < C_{11}(\theta) |g|_{0,\alpha}$$

où $C(\theta)$ désigne une fonction croissante de θ .

REMARQUE III.1. Avant de faire la démonstration il convient de remarquer que l'énoncé ci dessus est faux si Ω est borné, la condition $\int_{\partial\Omega} g(\sigma) d\sigma = 0$ étant alors nécessaire. Si Ω n'est pas borné le premier terme du second membre de (89) se comporte asymptotiquement comme $|x|^{-1} \cdot \int_{\partial\Omega} g(\sigma) d\sigma$. Ainsi la condition $\int_{\partial\Omega} g(\sigma) d\sigma = 0$ équivaut alors à une décroissance en $|x|^{-2}$ pour $|x| \rightarrow \infty$.

DÉMONSTRATION DU LEMME III.1. Montrons d'abord que l'opérateur

$$Lg = (1/4\pi) \int_{\partial\Omega} |\sigma - \hat{\sigma}|^{-1} g(\hat{\sigma}) d\hat{\sigma}$$

linéaire et continu dans $C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ est injectif. Pour chercher une solution du problème de Neumann $-\Delta p = 0$, $\partial p / \partial \nu = g$ dans $\tilde{\Omega} = R^3 \setminus \Omega$, on peut

prolonger par zéro p dans Ω . La fonction \bar{p} ainsi obtenue est solution de l'équation

$$(91) \quad \Delta \bar{p} = g \otimes \delta_{\partial\Omega} + p \otimes \frac{\partial}{\partial \nu} (\delta_{\partial\Omega})$$

($\bar{\nu}$ normale extérieure à $\partial\bar{\Omega}$, vérifie la relation $\bar{\nu} = -\nu$). Comme \bar{p} est une fonction à support compact, l'équation (91) est équivalente à l'équation:

$$(92) \quad p(x) = \left(-\frac{1}{4\pi}\right) \int_{\partial\Omega} |x - \sigma|^{-1} g(\sigma) d\sigma - \left(\frac{1}{4\pi}\right) \int_{\partial\Omega} \nu(\sigma) \cdot \nabla \frac{1}{|x - \sigma|} p(\sigma) d\sigma.$$

Pour que (92) ait une solution il faut et il suffit que l'équation

$$(93) \quad (I + G)h = (-1/(4\pi)) \int_{\partial\Omega} |\cdot - \sigma|^{-1} g(\sigma) d\sigma$$

où G désigne l'opérateur:

$$(94) \quad (Gh)(\tau) = \lim_{x \rightarrow \tau} (-1/(4\pi)) \int_{\partial\Omega} \nu(\sigma) \cdot \nabla (|x - \sigma|^{-1}) h(\sigma) d\sigma$$

ait une solution. Si $Lg = 0$ $h = 0$ est solution de (93) et ainsi il existe p vérifiant dans $\bar{\Omega}$ les relations:

$$(95) \quad -\nabla p = 0, \quad \delta p / \partial \nu = g, \quad p|_{\partial\bar{\Omega}} = 0.$$

On en déduit que p et g sont identiquement nulles. On remarque ensuite que l'on a, pour tout $x \in \Omega$

$$(96) \quad \int_{\partial\Omega} \nu(\sigma) \cdot \nabla (1/|x - \sigma|) d\sigma = 0.$$

On déduit de (96) que l'on peut écrire:

$$(97) \quad (Gh)(\tau) = -\lim_{x \rightarrow \tau} (1/(4\pi)) \int_{\partial\Omega} \nu(\sigma) \cdot \nabla (|x - \sigma|^{-1}) (h(\sigma) - h(\tau)) d\sigma.$$

Le terme figurant dans le second membre de (97) est uniformément intégrable dès que $h \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$. On peut appliquer le théorème de Lebesgue pour passer à la limite on obtient:

$$(98) \quad (Gh)(\tau) = \left(-\frac{1}{4\pi}\right) \int_{\partial\Omega} \nu(\sigma) \cdot \frac{(\tau - \sigma)}{|\tau - \sigma|} \cdot \frac{1}{|\tau - \sigma|^2} (h(\sigma) - h(\tau)) d\sigma.$$

Lorsque σ tend vers τ , $\nu(\sigma)$ tend vers $\nu(\tau)$ et $(\tau - \sigma)/|\tau - \sigma|$ vers un vecteur unitaire tangent. Comme $\partial\Omega$ est une surface régulière, on en déduit qu'il existe une constante C telle que l'on ait :

$$(99) \quad |\nu(\sigma) \cdot (\tau - \sigma)| \leq C |\tau - \sigma|^2.$$

La fonction $r(\sigma, \tau) = \nu(\sigma) \cdot (\tau - \sigma) / |\tau - \sigma|^3$ est régulière (continument différentiable) pour $\sigma \neq \tau$ et présente au point z une singularité en $|\tau - \sigma|^{-1}$. Elle est donc intégrable sur $\partial\Omega$ et on a

$$\int_{\partial\Omega} |r(\sigma, \tau)| d\sigma \leq C$$

où C est une constante indépendante de τ . Ainsi l'opérateur \hat{G} défini par

$$\hat{G}h(\tau) = \int_{\partial\Omega} r(\sigma, \tau) h(\sigma) d\sigma$$

est compact dans $C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$.

D'autre part on intègre la fonction $\Delta(|x - \tau|^{-1})$ dans l'ouvert $\Omega_\delta = \Omega \cap \{x \mid |x - \tau| > \delta\}$ et on utilise la formule de Green. En faisant tendre δ vers zéro on obtient :

$$\int_{\partial\Omega} r(\sigma, \tau) d\sigma = -2\pi.$$

Ainsi $I + G = I/2 + \hat{G}$. D'après la théorie de Fredholm, pour prouver que $I + G$ est inversible, il suffit de prouver que $I + G$ est injectif.

Soit $h \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ vérifiant la relation $h + Gh = 0$. On pose :

$$(100) \quad p(x) = (1/4\pi) \int_{\partial\Omega} \nu \cdot \nabla |x - \sigma|^{-1} h(\sigma) d\sigma \quad \text{si } x \in \Omega, \quad p(x) = 0 \quad \text{si } x \notin \Omega;$$

p est solution de l'équation

$$(101) \quad -\Delta p = \delta(\partial\Omega) \otimes \frac{\partial p}{\partial \nu} + (\partial/\partial \nu)(\delta(\partial\Omega)) \otimes p.$$

Une solution de (101) est donnée par la formule :

$$(102) \quad p_1 = (1/4\pi) \int_{\partial\Omega} (\nu \cdot \nabla)(|x - \sigma|^{-1}) p(\sigma) p \sigma + (1/4\pi) \int_{\partial\Omega} |x - \sigma| (\partial/\partial \nu)(p(\sigma) d\sigma).$$

On a $\Delta(p - p_1) = 0$ dans R^3 ainsi $p - p_1$ est une fonction harmonique dans R^3 , décroissant comme $|x|^{-1}$ lorsque $|x| \rightarrow \infty$. Elle est donc nulle.

De la relation (100) on déduit que $p|_{\partial\Omega} = h$ puis de la relation (102) on déduit que $p_1 = p$ vérifie l'équation

$$(103) \quad \int_{\partial\Omega} |x - \sigma|^{-1} \frac{\partial p}{\partial \nu}(\sigma) d\sigma = L\left(\frac{\partial p}{\partial \nu}\right) = 0.$$

Comme L est injectif $\partial p/\partial \nu$ est identiquement nul. De plus p décroît comme $|x|^{-2}$, et ∇p comme $|x|^{-3}$, on peut donc intégrer dans $\Omega_R = \Omega \cap \{x \mid |x| < R\}$ l'expression:

$$(104) \quad \int_{\Omega_R} |\nabla p|^2 du = \int_{|x|=R} p(\sigma) \frac{\partial p}{\partial |\sigma|} \sigma d\sigma - \int_{\Omega_R} \nabla p \cdot p dx = \int_{|x|=R} p(\sigma) \frac{\partial p}{\partial |\sigma|}(\sigma) d\sigma.$$

En faisant tendre R vers l'infini on obtient

$$(105) \quad \int_{\Omega} |\nabla p|^2 dx = 0$$

ce qui prouve que p est constant et égal à zéro (car il tend vers zéro pour $|x| \rightarrow \infty$). h est donc nul et $(I + G)$ est injectif dans $C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ ainsi on posera:

$$Mg = (I + G)^{-1}Lg.$$

L est continu de $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ dans $C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ et $(I + G)^{-1}$ continu dans $C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$. On définit p par la relation:

$$(106) \quad p(x) = (1/4\pi) \int_{\partial\Omega} |x - \sigma|^{-1} g(\sigma) d\sigma + (1/4\pi) \int_{\partial\Omega} \nu(\sigma) \cdot \nabla(|x - \sigma|^{-1})(Mg(\sigma)) d\sigma$$

si $x \in \Omega$, $p(x) = 0$ si $x \notin \Omega$.

Bien entendu p est solution de l'équation:

$$-\Delta p = \delta(\partial\Omega) \frac{\partial p}{\partial \nu} + \frac{\partial}{\partial \nu}(\delta(\partial\Omega)) \otimes p.$$

En utilisant la décroissance de p à l'infini en $|x|^{-1}$, on voit que p coïncide avec la fonction

$$(107) \quad p_1(x) = \left(\frac{1}{4\pi}\right) \int_{\partial\Omega} |x - \sigma|^{-1} \frac{\partial p}{\partial \nu}(\sigma) d\sigma + \left(\frac{1}{4\pi}\right) \int_{\partial\Omega} \nu(\sigma) \cdot \nabla(|x - \sigma|^{-1}) p(\sigma) d\sigma.$$

De (105) on déduit la relation :

$$p|_{\partial\Omega} = Lg - G(I + G)^{-1}Lg,$$

ou encore $(I + G)p|_{\partial\Omega} = Lg$ c'est à dire $p|_{\partial\Omega} = Mg$; puis de l'injectivité de L on déduit que $\partial p/\partial\nu = g$.

Enfin les fonctions $|z - \sigma|^{-1}$ et $\nu(\sigma) \cdot \nabla(|z - \sigma|^{-1})$ sont holomorphes dans tout voisinage de θ admissible et l'inégalité (90) se prouve en procédant comme dans [15], p. 116, le fait que z soit complexe ne présentant pas ici de difficulté supplémentaire.

PROPOSITION III.1. *Il existe un opérateur bilinéaire continu $(u, v) \rightarrow F(u, v)$ de $C^{0,\alpha}(\Omega) \times C^{1,\alpha}(\Omega)$ dans $C^{0,\alpha}(\Omega)$ possédant les propriétés suivantes :*

1) *Pour tout voisinage admissible θ de Ω , F se prolonge en un opérateur bilinéaire continu de $B(\theta, 0, \alpha) \times B(\theta, 1, \alpha)$ dans $B(\theta, 0, \alpha)$ et sa norme est une fonction croissante de θ .*

2) *Pour tout couple $(u, v) \in C^\alpha(\Omega) \times C^{1,\alpha}(\Omega)$ $F(u, v)$ est un gradient et vérifie la relation :*

$$(108) \quad F(u, v) \cdot \nu|_{\partial\Omega} = -u_i v_j D_j v_i.$$

3) *Pour tout couple $(u, v) \in C^\alpha(\Omega) \times C^{1,\alpha}(\Omega)$ vérifiant les relations $\nabla \cdot v = 0$, $v \cdot \nu|_{\partial\Omega} = u \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$ on a*

$$(109) \quad \nabla \cdot F(u, v) = D_i u_j D_j v_i + R_j(v_j \cdot (\nabla \cdot u)).$$

(Dans (109) R_j désigne un opérateur linéaire continu et borné de $C^{0,\alpha}(\Omega)$ à valeur dans $C^{0,\alpha}(\Omega)$).

4) *Si u est une fonction régulière d'énergie totale finie solution de l'équation d'Euler $\partial u/\partial t + u \nabla u = -\nabla p$, $\nabla \cdot u = 0$, $u \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$, le terme ∇p est donné par la relation $-\nabla p = F(u, u)$.*

DÉMONSTRATION. Le terme ∇p qui figure dans l'équation d'Euler peut s'obtenir en général (ouvert borné, solution d'énergie finie) en résolvant le système

$$-\Delta p = \nabla(u \cdot \nabla u), \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = -(u \cdot \nabla u) \cdot \nu.$$

Une première étape est alors la construction d'une fonction ∇p_1 donnée par la formule :

$$(110) \quad (4\pi) \nabla p_1 = \nabla \left(\int_{\Omega} |x - \hat{x}|^{-1} \nabla \cdot (u \cdot \nabla u)(\lambda) d\lambda \right).$$

Si $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ la fonction qui figure sous l'intégrale décroît à l'infini comme $|x|^{-1}$ et l'intégrale est divergente. La méthode utilisée dans [3] et que nous étendons ici au cadre analytique consiste à remarquer que l'on peut écrire cette fonction sous la forme

$$D_{ij}^2(\nabla(|x - \hat{x}|^{-1})) u_i(x) u_j(x)$$

ce qui fait apparaître un terme en $|x - \hat{x}|^{-4}$ assurant la convergence à l'infini. Aussi si nous allons poser

$$H(x) = (1/4\pi) \exp[-|x|^2] |x|^{-1}, \quad S(x) = ((1 - \exp[-|x|^2])/4\pi |x|$$

H et S se prolongent en des fonctions analytiques dans le cône :

$$C_\lambda = \{z | \lambda |Re z_j| > |Im z_j| \ (1 \leq j \leq 3), \ 0 < \lambda < 1\}.$$

H présente au voisinage de $z = 0$ la même singularité que $|z|^{-1}$, tandis que pour $|Re z| \rightarrow \infty$ elle décroît, ainsi que ses dérivées, comme $\exp(-|Re z|^2)$. Pour $|Im z|$ borné la fonction $S(z)$ est bornée ainsi que sa différentielle, de plus la fonction $D_{ijk}^3(S(z))$ présente au voisinage de zéro une singularité en $|z|^{-2}$ tandis que pour $|z| \rightarrow \infty$ et $|Im z|$ borné on a :

$$(111) \quad |D_{ijk}^3 S(z)| \leq O(|z|^{-4}).$$

On pose ensuite :

$$R(x) = (2\nabla(\exp[-|x|^2]) \cdot \nabla(|x|^{-1}) + |x|^{-1} \Delta(\exp[-|x|^2])) / 4\pi$$

$R(x)$ est une fonction intégrable et on a :

$$(112) \quad \Delta H = \delta + R(x); \quad \Delta S = -R(x).$$

On définit alors la fonction $F_1(u, v)$ par la formule :

$$(113) \quad F_1(u, v) = \nabla \int_{\Omega} (D_i H(x - \hat{x})) (u_j \cdot D_j v_i)(\hat{x}) d\hat{x} + \int_{\Omega} D_{ij}^2(\nabla S(x - \hat{x})) (v_i \cdot u_j)(\hat{x}) d\hat{x}.$$

L'opérateur $W \rightarrow K_1 W$ défini par :

$$(114) \quad K_1 W = \int_{\Omega} D_i H(x - \hat{x}) W(\hat{x}) d\hat{x}$$

est continu de $C^{0,\alpha}(\Omega)$ dans $C^{1,\alpha}(\Omega)$, en effet le noyau $D_i S(x)$ est intégrable à l'infini et présente à l'origine une singularité en $|x|^{-2}$. L'opérateur $W \rightarrow K_2 W$ défini par :

$$(115) \quad K_2 W = \int_{\Omega} D_{ij}^2(\nabla S(x - \hat{x})) W(\hat{x}) d\hat{x}$$

est linéaire et continu de $C^{0,\alpha}(\Omega)$ dans $C^{0,\alpha}(\Omega)$ en effet le noyau $D_{ij}^2(\nabla S(x))$ est intégrable à l'infini, il se comporte comme $|x|^{-4}$, cf. (110), et en zéro il présente une singularité en $|x|^{-2}$. Ainsi F_1 est un opérateur bilinéaire et continu de $C^{0,\alpha}(\Omega) \times C^{1,\alpha}(\Omega)$ à valeur dans $C^{0,\alpha}(\Omega)$.

De même pour tout couple $(u, v) \in B(\theta, 0, \alpha) \times B(\theta, 1, \alpha)$ on posera :

$$(116) \quad F_1(u, v)(z) = \nabla \int_{\Omega \setminus P(z)} D_i H(z - \hat{x})(u, D_j v_i)(\hat{x}) d\hat{x} + \\ + \int_{\Omega \setminus P(z)} D_{ij}^2(\nabla S(z - \hat{z}))((v_i \cdot u_j)(\hat{z})) d\hat{z} + \nabla \int_{\pi\Gamma_j(z)} (D_i H(z - \hat{z}))((u_j \cdot D_j v_i)(\hat{z})) d\hat{z} + \\ + \int_{\pi\Gamma_j(z)} D_{ij}^2(\nabla S(z - \hat{z}))((v_i \cdot u_j)(\hat{z})) d\hat{z}.$$

Dans (116) le pavé $P(z)$ et les contours $\Gamma_j(z_j)$ sont choisis comme au § I. Grâce à la décomposition du noyau en la somme $S + H$ et en particulier grâce à la relation (111), le fait que Ω ne soit pas borné ne présente pas de difficultés supplémentaires. En procédant comme au § I, Proposition I.1, on montre que $F_1(u, v)$ appartient à $B(\theta, 0, \alpha)$ et vérifie la relation :

$$(117) \quad |F_1(u, v)|_{0,\alpha}^0 \leq C(\theta) |u|_{0,\alpha}^0 |v|_{1,\alpha}^0.$$

Pour prouver que $F_1(u, v)$ est un gradient il suffit de montrer que chacun des termes du second membre de (113) est orthogonal à l'espace des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ vérifiant la relation $\nabla \cdot \varphi = 0$ (cf. Derahm [8] et Zerner [22]). On établit ceci pour le premier terme du second membre de (113), le calcul est le même pour le second. D'après le théorème de Fubini on a :

$$(118) \quad \int_{\Omega} dx \varphi(x) \int_{\Omega} D_i(\nabla H(x - \hat{x}))(u, D_j v_i)(\hat{x}) d\hat{x} = \\ = \int_{\Omega} (u, D_j v_i)(\hat{x}) \left(\int_{\Omega} \nabla D_i H(x - \hat{x}) \varphi(x) dx \right) d\hat{x}.$$

Et ce dernier terme est nul car $\nabla \cdot \varphi = 0$. Calculons maintenant $\nabla \cdot F_1(u, v)$, pour $(u, v) \in C^{1,\alpha}(\Omega) \times C^{1,\alpha}(\Omega)$ vérifiant les relations $\nabla \cdot v = 0$, $v \cdot \nu|_{\partial\Omega} =$

$= u \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$. On a, par une intégration par parties:

$$(119) \quad \nabla \left(\int_{\Omega} D_i(H(x - \hat{x}))(u_j D_j v_i)(\hat{x}) d\hat{x} \right) = \\ = \int_{\Omega} (H(x - \hat{x})) D_i(u_j D_j v_i)(\hat{x}) d\hat{x} - \int_{\partial\Omega} \nabla H(x - \sigma)(\nu_i \cdot u_j D_j v_i)(\sigma) d\sigma.$$

Puis en prenant la divergence du second membre de (119) on obtient, en utilisant la relation (112):

$$(120) \quad \nabla \cdot \nabla \left(\int_{\Omega} D_i(H(x - \hat{x}))(u_j D_j v_i)(\hat{x}) d\hat{x} \right) = \\ = D_i(u_j D_j v_i(x)) + \int_{\Omega} R(x - \hat{x}) D_i(u_j D_j v_i)(\hat{x}) d\hat{x} - \int_{\partial\Omega} R(x - \sigma)(\nu_i \cdot u_j D_j v_i)(\sigma) d\sigma.$$

De même on a:

$$(121) \quad \nabla \cdot \int_{\Omega} \nabla D_{ij}^2 S(x - \hat{x})(u_j v_i)(\hat{x}) d\hat{x} = \\ = \int_{\Omega} D_{ij}^2 \Delta S(x - \hat{x})(u_j v_i)(\hat{x}) d\hat{x} = - \int_{\Omega} D_i D_j R(x - \hat{x})(u_j v_i)(\hat{x}) d\hat{x} = \\ = - \int_{\Omega} D_i(R(x - \hat{x})) D_j(u_j v_i)(\hat{x}) d\hat{x} + \int_{\partial\Omega} D_i(R(x - \sigma))(\nu_j u_j v_i)(\sigma) d\sigma$$

(d'après (111)).

Comme $u \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$, on déduit de (120) la relation

$$(122) \quad \nabla \cdot \int_{\Omega} \nabla D_{ij}^2 S(x - \hat{x})(u_j v_i)(\hat{x}) d\hat{x} = - \int_{\Omega} D_i(R(x - \hat{x})) D_j(u_j v_i)(\hat{x}) d\hat{x} = \\ = - \int_{\Omega} R(x - \hat{x}) D_i D_j(u_j v_i)(\hat{x}) d\hat{x} + \int_{\partial\Omega} R(x - \sigma) \nu_i D_j(u_j v_i)(\sigma) d\sigma.$$

Comme $\nu \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$ on a:

$$(123) \quad \int_{\partial\Omega} R(x - \sigma) \nu_i D_j(u_j v_i)(\sigma) d\sigma = \int_{\partial\Omega} R(x - \sigma) \nu_i (u_j D_j v_i)(\sigma) d\sigma.$$

On peut d'autre part écrire la relation

$$(124) \quad - \int_{\Omega} R(x - \hat{x}) D_i D_j(u_j v_i)(\hat{x}) d\hat{x} = - \int_{\Omega} R(x - \hat{x}) (D_i u_j v_i)(\hat{x}) d\hat{x} - \\ - \int_{\Omega} R(x - \hat{x}) D_i(v_i D_j u_j)(\hat{x}) d\hat{x}.$$

En utilisant (120), (122), (123) et (124) on obtient enfin la relation :

$$(125) \quad \nabla \cdot F_1(u, v) = D_i u_j D_j v_i - \int_{\Omega} R(x - \hat{x})(D_i(v_i \nabla u))(\hat{x}) d\hat{x}.$$

Une dernière intégration par parties donne alors

$$(126) \quad \nabla \cdot F_1(u, v) = D_i u_j D_j v_i - \int_{\Omega} v_i(x) D_i R(x - \hat{x}) \cdot (\nabla u)(\hat{x}) d\hat{x}.$$

On introduit ensuite la solution du problème

$$(127) \quad -\Delta p = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \nu} = -u_i v_j D_j v_i - F_1(u, v) \cdot \nu \quad \text{sur } \partial\Omega$$

définie par le lemme III.1 et la formule (89) et on pose $F(u, v) = F_1(u, v) + \nabla p$. L'application $(u, v) \rightarrow F(u, v)$, ainsi définie, satisfait aux propriétés 1), 2), 3) et 4) de la proposition III.1 (vérification facile et laissée au lecteur).

THÉORÈME III.1. (1) *On désignera par K une constante réelle assez grande (dépendant de Ω). Soit $u_0 \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ une fonction réelle vérifiant les relations $\nabla \cdot u_0 = 0$, $u_0 \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$, on pose $\bar{M} = |u_0|_{0,\alpha} + |\nabla \wedge u_0|_{0,\alpha}$ alors sur l'intervalle $[0, 1/\bar{K}\bar{M}[$ il existe une unique fonction $u \in C([0, 1/\bar{K}\bar{M}[; C^{1,\alpha}(\Omega))$ solution de l'équation d'Euler « précisée » :*

$$(128) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = F(u, u), & \nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, 1/\bar{K}\bar{M}[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & u \cdot \nu|_{\partial\Omega \times [0, 1/\bar{K}\bar{M}[} = 0. \end{cases}$$

Cette fonction vérifie la majoration :

$$(129) \quad \bar{M}(t) = |u(t)|_{0,\alpha} + |\nabla \wedge u(t)|_{0,\alpha} \leq \bar{M}/(1 - \bar{K}\bar{M}t).$$

De plus lorsque u_0 est d'énergie finie cette solution coïncide avec la solution usuelle de l'équation d'Euler.

(2) *Soit θ un voisinage admissible de Ω . Il existe une constante K (assez grande mais ne dépendant que de θ) tel que pour tout $u_0 \in B_\sigma(\theta, 1, \alpha)$ ($\theta = \theta(\lambda, \mu)$) et tout $t \in [0, 1/KM[$ ($M = |u_0|_{0,\alpha}^\theta + |\nabla \wedge u_0|_{0,\alpha}^\theta$) la solution de (128) se prolonge en une fonction $u(\cdot, t) \in B_\sigma(\theta(t), 1, \alpha)$ vérifiant la relation :*

$$(130) \quad M(t) = |u(t)|_{0,\alpha}^{\theta(t)} + |\nabla \wedge u(\cdot, t)|_{0,\alpha}^{\theta(t)} \leq M/(1 - KMt).$$

La famille $\theta(t)$ est donnée par la relation

$$\theta(t) = \theta(\lambda(1 - KMt), \mu(1 - KMt)).$$

(3) Soit u une fonction appartenant à $C(0, T; C^{1,\alpha}(\Omega))$. On suppose que u est solution de (128) sur l'intervalle $[0, T[$, et que u_0 se prolonge en une fonction $u_0(z) \in B_\theta(\theta, 1, \alpha)$ où θ est un voisinage admissible de Ω . Alors pour tout $t \in [0, T[$ $u(\cdot, t)$ se prolonge en une fonction analytique dans un voisinage admissible $\theta(t)$ de Ω .

DÉMONSTRATION. L'unicité de la solution de (128) est évidente, car $F(u, v)$ est un opérateur linéaire continu. De même il est évident que u coïncide avec la solution de l'équation d'Euler usuelle, car on sait qu'il existe au plus une solution régulière, d'énergie finie de l'équation $\partial u / \partial t + u \cdot \nabla u = -\nabla p$, $\nabla \cdot u = 0$, $u \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$, $u(x, 0) = u_0(x)$. Pour prouver l'existence d'une solution dans le domaine réel on procède par itération. On construit la suite u_n définie par les relations:

$$(131) \quad u_0(x, t) = u_0(x), \quad u^{n+1}(\cdot, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} + u^n \cdot \nabla u^{n+1} = F(u^{n+1}, u^n)$$

et on va montrer que si la fonction u^n vérifie les relations

$$(132) \quad \nabla \cdot u^n = 0, \quad u^n \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0, \quad |u^n(t)|_{0,x} + |\nabla \wedge u^n(t)|_{0,\alpha} \leq \bar{M}(t)$$

les équations (131) déterminent bien une fonction u^{n+1} vérifiant également les relations (132).

Comme $u^n \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$, et comme u^n appartient à $C([0, T[; C^{1,\alpha}(\Omega))$ la solution de l'équation différentielle

$$(133) \quad x'(s) = u^n(x(s), s), \quad x(t) = x$$

est définie par tout $t \in [0, T[$ et est contenue dans Ω (cf. Bourguignon et Brézis p. 362 [7]). D'autre part, l'opérateur $(u, v) \rightarrow F(u, v)$ est linéaire et continu de $C^{0,\alpha}(\Omega) \times C^{1,\alpha}(\Omega)$ dans $C^{0,\alpha}(\Omega)$. Ainsi l'opérateur $w \rightarrow F(w, u^n)$ est-il linéaire continu dans $C^{0,\alpha}(\Omega)$. En procédant comme dans la démonstration de la Proposition I.3 (la démonstration est d'ailleurs plus simple car on se limite au cas réel), on montre qu'il existe une unique fonction u^{n+1} solution de l'équation

$$(134) \quad \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} + u^n \cdot \nabla u^{n+1} = F(u^n, u^{n+1}), \quad u^{n+1}(\cdot, 0) = u_0(\cdot).$$

Pour tout $x \in \partial\Omega$, on multiplie la valeur des deux membres de (134) en x par $\nu(x)$ et on obtient:

$$(135) \quad \frac{\partial}{\partial t} (u^{n+1}(x) \cdot \nu(x)) + (u^n \nabla u^{n+1})(x) \cdot \nu(x) = F(u^n, u^{n+1})(x) \cdot \nu(x) = \\ = - (u_j^n u_i^{n+1})(x) (D_j \nu_i)(x)$$

(d'après (132)).

De (135) on déduit la relation

$$(136) \quad \frac{\partial}{\partial t} (u^{n+1} \cdot \nu) + u^n \cdot \nabla (u^{n+1} \cdot \nu)|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial t} (u^{n+1} \cdot \nu) + \\ + u_i^n D_i u_j^{n+1} \nu_j + u_j^n u_i^{n+1} D_j \nu_i|_{\partial\Omega}, \quad (u^{n+1} \cdot \nu)(0, \cdot) = 0.$$

Comme l'application $x \rightarrow x(s)$ définie par l'équation (133) est une bijection de $\partial\Omega$ sur $\partial\Omega$ on déduit de (136) la relation $u^{n+1} \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$. Ensuite en prenant la divergence de l'équation (134) et en utilisant (108) on obtient:

$$(137) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot u^{n+1}) + u^n \cdot \nabla (\nabla \cdot u^{n+1}) = R_j(v_j \cdot (\nabla \cdot u^{n+1})).$$

Comme $\nabla \cdot u^{n+1}(\cdot, 0) = 0$ on déduit de (137) que la divergence de u^{n+1} est toujours nulle. Enfin en prenant le rotationnel de l'équation (134) on obtient la relation

$$(138) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge u^{n+1}) + u^n \cdot \nabla (\nabla \wedge u^{n+1}) = B(u^n, u^{n+1}).$$

Dans (138) $B(u^n, u^{n+1})$ désigne une expression ne faisant intervenir que des produits de dérivées premières et secondes de u^n et u^{n+1} . En procédant (toujours dans le cadre réel) comme dans la démonstration de la Proposition I.2 (40) on déduit de (134), (138) et de la continuité de l'opérateur $F(\cdot, \cdot)$, les relations suivantes:

$$(139) \quad |u^{n+1}(t)|_{0,\alpha} \leq |u_0|_{0,\alpha} + \int_0^t (|F(u^{n+1}, u^n)(s)|_{0,\alpha} + \alpha |\nabla u^n(s)|_0 |u^{n+1}(s)|_{0,\alpha}) ds \leq \\ \leq |u_0|_{0,\alpha} + M_1 \int_0^t |u^n(s)|_{1,\alpha} |u^{n+1}(s)|_{0,\alpha} ds$$

et

$$(140) \quad |\nabla \wedge u^{n+1}(t)|_{0,\alpha} \leq |\nabla \wedge u_0|_{0,\alpha} + \int_0^t (|B(u^n, u^{n+1})(s)|_{0,\alpha} + \alpha M_2 |\nabla u^n(s)|_0 |u^{n+1}(s)|_{0,\alpha}) ds \leq \leq |\nabla \wedge u_0|_{1,\alpha} + M_3 \int_0^t (|u^n(s)|_{1,\alpha} |u^{n+1}(s)|_{1,\alpha}) ds .$$

En additionnant (139) et (140) puis en utilisant la relation

$$(141) \quad |u|_{1,\alpha} < C\{|u|_{0,\alpha} + |\nabla \wedge u|_{0,\alpha}\} \quad u \in C^{1,\alpha}(\Omega), \nabla \cdot u = 0, u \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$$

on obtient enfin, en posant :

$$\bar{M}^n(t) = |u^n(t)|_{0,\alpha} + |\nabla \wedge u^n(t)|_{0,\alpha}$$

l'estimation suivante :

$$(142) \quad \bar{M}^{n+1}(t) \leq \bar{M} + \bar{K} \int_0^t \bar{M}^{n+1}(s) \cdot \bar{M}^n(s) ds .$$

Comme $\bar{M}^n(t)$ vérifie la relation :

$$\bar{M}^n(t) \leq \bar{M} / (1 - \bar{K} M(t)) ,$$

en utilisant le lemme de Gronwall, on déduit qu'il en est de même pour $\bar{M}^{n+1}(t)$. Ayant obtenu cette majoration a priori, uniforme en n et t pour $0 < t < T - \varepsilon$ on termine aisément la démonstration du point (1).

Pour prouver le point (2) on étend au domaine complexe les étapes de la démonstration du point (1). On va montrer que si $u_0 \in B_\sigma(\theta, 1, \alpha)$, la suite $u^n(t)$ définie par (131) se prolonge en une suite, toujours notée $u^n(t)$, appartenant à $B_\sigma(\theta(t), 1, \alpha)$ et vérifiant la majoration (130). On procède toujours par itération et récurrence, on suppose que $u^n(t) \in B_\sigma(\theta(t), 1, \alpha)$ et vérifie la majoration (129). On pose $\Sigma(T) = \{(t, z), z \in \theta(t), 0 < t < T = (\bar{K}M)^{-1}\}$. On considère alors, pour tout $z \in \theta(t)$, $z(s)$ solution de l'équation :

$$(143) \quad z'(s) = u^n(z(s), s), \quad z(t) = z ,$$

IV. – Domaine d'analyticité de la solution de l'équation d'Euler en dimension deux.

On sait que si les données initiales sont indéfiniment différentiables et d'énergie totale finie la solution de l'équation d'Euler est en dimension deux toujours indéfiniment différentiable; en utilisant les théorèmes II.2 et III.3 (3) on pourrait donc prouver que si les données initiales se prolongent en une fonction $u_0 \in B(\theta, 1, \alpha)$ et vérifient la relation $\int_{\Omega} |u_0(x)|^2 dx < +\infty$, la solution $u(x, t)$ est analytique en x pour tout $t > 0$. Cependant il nous paraît intéressant de préciser le domaine d'analyticité en utilisant une version complexe de l'estimation (2.17) de Kato [13], cf.  galement Bardos, Benachour et Zerner [4], ou Benachour [6]. Pour simplifier nous supposons toujours que l'ouvert Ω est borné et simplement connexe.

THÉORÈME IV.1. *Soit Ω un ouvert simplement connexe et borné de R^2 , de frontière $\partial\Omega$ régulière. Soit θ un voisinage admissible de Ω , alors il existe deux constantes K et L possédant les propriétés suivantes. Pour tout $u_0 \in B_\alpha(\theta, 1, \alpha)$ ($\theta \subset \hat{\theta}$) on pose $M = |\nabla \wedge u_0|_0^\theta$, $M_\alpha = |\nabla \wedge u_0|_{0,\alpha}^\theta$. Alors la solution de l'équation d'Euler*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p, \quad \nabla \cdot u = 0, \quad u \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

indéfiniment dérivable pour tout $t \in R^+$, se prolonge en une fonction $u(z, t)$ holomorphe par rapport à la variable z , dans le domaine Σ défini par les relations suivantes:

$$(150) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_0 = \theta(\lambda, \mu), \quad \theta(t) = \theta(\lambda(t), \mu(t)), \\ \lambda(t) = \lambda \exp[-L(M_2/M)e^{KMt}]/(\exp - L(M_2/M)), \\ \mu(t) = \mu \exp[-L(M_2/M)e^{KMt}]/(\exp - L(M_2/M)) \\ \Sigma = \{(t, z) | t \in R_+, z \in \theta(t) = \theta(\lambda(t), \mu(t))\}. \end{array} \right.$$

DÉMONSTRATION. Comme l'ouvert est simplement connexe on sait que dans le domaine réel, la solution de l'équation d'Euler est la limite de la suite u^n définie par les relations

$$(151) \quad u_0(x, t) = u_0(x), \quad \frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial t} + u^n \cdot \nabla \omega^{n+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \times R, \quad \omega^{n+1}(\cdot, 0) = (\nabla \wedge u_0)(\cdot)$$

dans Ω ; $\nabla \cdot u^{n+1} \equiv 0$, $u^{n+1} \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$, $\omega^{n+1} = \nabla \wedge u^{n+1}$.

On va étendre au domaine complexe l'itération (151). On supposera que, pour tout $s \in [0, t[$ et tout $z \in \theta(t)$ la solution de l'équation différentielle

$$(152) \quad z'(s) = u^n(z(s), s), \quad z(t) = z$$

vérifie $z(s) \in \theta(s)$. On en déduira que $|\omega^{n+1}(z, t)| < M \forall (t, z) \in \Sigma$, puis on en déduira, que pour tout $s \in [0, t]$ et tout $z \in \theta(t)$, la solution de l'équation différentielle:

$$(153) \quad z'(s) = u^{n+1}(z(s), s), \quad z(t) = z$$

vérifie la relation $z(s) \in \theta(s)$.

Si la solution de (152) est contenue dans $\theta(s)$ pour $0 \leq s \leq t$, la seconde équation de (151) est équivalente à l'équation:

$$(154) \quad \frac{d}{dt} \omega^{n+1}(z(s), s) = 0.$$

La fonction $\omega^{n+1}(z, t)$ est donc déterminée par les relations:

$$(155) \quad \omega^{n+1}(z, t) = \nabla \wedge u_0(z(0)), \quad z'(s) = u^n(z(s), s), \quad z(t) = z$$

elle est donc une fonction analytique de z et elle vérifie la majoration $|\omega^{n+1}(\cdot, t)|_0^{\theta(t)} < M$. On pose maintenant

$$(156) \quad \alpha(t) = \alpha \exp[-EMt]$$

(dans (156) E désigne une constante assez grande, supérieure à la constante $C_{11}(\theta)$, intervenant dans l'inégalité (24) du Corollaire I.3).

Soient maintenant $z(s)$ et $\tilde{z}(s)$ deux solutions des équations différentielles suivantes:

$$\begin{aligned} z'(s) &= u^n(z(s), s), & z(t) &= z \in \theta(t), & 0 \leq s \leq t, \\ \tilde{z}'(s) &= u^n(\tilde{z}(s), s), & \tilde{z}(t) &= \tilde{z} \in \theta(t), & 0 \leq s \leq t. \end{aligned}$$

De la relation (24) Corollaire I.3, on déduit que l'on a, en posant $\varrho(t) = |z(t) - \tilde{z}(t)|$

$$(157) \quad |\varrho(s)| = |z'(s) - \tilde{z}'(s)| = |u^n(z(s), s) - u^n(\tilde{z}(s), s)| \leq EM\varrho \operatorname{Log}(F_1/\varrho).$$

De (157) on déduit la relation:

$$(158) \quad \left| \frac{d}{ds} \left(\text{Log Log} \left(\frac{F_1}{\varrho(s)} \right) \right) \right| < EM$$

et, après intégration, la relation:

$$(159) \quad \varrho(t)^{\alpha(t)} \geq F_1^{\alpha(\alpha(t)-\alpha)} (\varrho(0))^\alpha.$$

De (155) et (159) on déduit que pour tout couple, $(z, \tilde{z}) \in \theta(t) \times \theta(t)$ on a:

$$(160) \quad \frac{|\omega^{n+1}(z, t) - \omega^{n+1}(\tilde{z}, t)|}{|z - \tilde{z}|^{\alpha(\exp - EMt)}} = \frac{|\omega^{n+1}(z(t), t) - \omega^{n+1}(\tilde{z}(t), t)|}{\varrho(t)^{\alpha(t)}} \leq \\ \leq \frac{|\omega^{n+1}(z, (0), 0) - \omega^{n+1}(\tilde{z}(0), 0)|}{(\varrho(0))^\alpha F^{\alpha(t)-\alpha}} \leq F_2 M_\alpha.$$

Ceci donne la majoration

$$|\omega^{n+1}(\cdot, t)|_{\alpha(t), 0}^{\theta(t)} \leq F_2 M_\alpha.$$

Des relations (23) (Corollaire I.3) et (161) on déduit maintenant la majoration

$$(161) \quad |\nabla u^{n+1}|_0 < F_3 M_\alpha \exp [EMt].$$

De la relation (161) on va déduire que la solution de l'équation (153) ne rencontre jamais la frontière $\partial\Omega(s)$ de $\theta(s)$ ($0 \leq s \leq t$) pourvu que $z(t) \in \theta(t)$. Il en résultera qu'elle sera définie pour tout $s \in [0, t[$. En effet on a:

$$(162) \quad |Imz'(s)| \leq F_3 M_\alpha \exp [EMt] |Imz(s)|.$$

On en déduit que l'on a, en choisissant la constante L assez grande, la relation suivante:

$$(163) \quad \text{Log } |Imz(s)| \leq \text{Log } |Imz(t)| - L(M_\alpha/M) \exp [Mt] + L(M_\alpha/M) \exp [Ms].$$

Comme $z(t) \in \theta(t)$ on a

$$|Imz(t)| \leq \mu \exp [-L(M_\alpha/M) e^{Mt}] / \exp [-L(M_\alpha/M)]$$

et on déduit la relation

$$(164) \quad |Imz(s)| \leq \mu \exp [-L(M_\alpha/M) e^{Mt}] / (\exp [-L(M_\alpha/M)]).$$

Ainsi $z(s)$ ne peut appartenir à $\partial\theta(s) \cap \{z | \text{Re}z \notin A\}$. Montrons enfin que $z(s)$ ne peut appartenir à l'ensemble $\partial\theta(s) \cap \{z | \text{Re}z \in A\}$. Si $z(s_1)$ appartenait à cet ensemble, il existerait t_1 tel que sur l'intervalle $[s_1, t_1[$, $z(s)$ vérifie la relation $\text{Re}z(s) \in A$. En utilisant la Proposition I.2 on écrit alors

$$(165) \quad |\gamma'(s)| \leq D\gamma(s) |\nabla u^{n+1}|_0^{\theta(s)} \leq D\gamma(s) F_4 \exp[EMs].$$

En procédant comme ci dessus, et en choisissant toujours L assez grand, on déduit de (165) la majoration

$$(166) \quad \text{Log } \gamma(s_1) \leq \text{Log } \gamma(t_1) - L(M_\alpha/M) \exp[EMt_1] + L(M_\alpha/M) \exp[EMs_1].$$

Ainsi comme $z(t_1) \in \theta(t_1)$, on a

$$\gamma(t_1) \leq \lambda(\exp[-L(M_\alpha/m) e^{Mt_1}] / (\exp - L(M_\alpha/M)))$$

et on déduit de (166) que l'on a également:

$$(167) \quad \gamma(s_1) \leq \lambda(\exp - L(M_\alpha/M) e^{Ms_1}) / (\exp[-L(M_\alpha/M)]).$$

Ainsi la solution de (153) ne rencontre-t-elle jamais la frontière de Σ . Elle est donc définie pour tout s ($0 \leq s \leq t$). On a donc prouvé que le procédé itératif (151) permet de construire une suite de fonctions $\omega^n(z, t)$ holomorphes par rapport à z dans le domaine $\theta(t)$, et vérifiant la majoration $|\omega^n(z, t)| \leq M$ dans Σ . On termine alors la démonstration en faisant tendre n vers l'infini.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC, *Problèmes de Cauchy pseudo-différentiels analytiques*, Séminaires Goulaouic-Schwartz, 1975-76, Ecole Polytechnique.
- [2] C. BARDOS, *Analyticité de la solution de l'équation d'Euler dans un ouvert de \mathbb{R}^n* , Note C. R. Acad. Sc., Paris.
- [3] C. BARDOS - U. FRISCH, *Finite time regularity for bounded unbounded ideal incompressible fluids using Hölder estimates*, Proc. of « Journées Mathématiques sur la Turbulence », R. TEMAM ed., Springer (1975).
- [4] C. BARDOS - S. BENACHOUR - M. ZERNER, *Analyticité des solutions périodiques de l'équation d'Euler en deux dimensions*, Note C. R. Acad. Sc., Paris, **282 A** (1976), pp. 995-998.
- [5] S. BENACHOUR, *Analyticité des solutions de l'équation d'Euler en trois dimensions*, Note C. R. Acad. Sc., Paris, **285 A** (1976), pp. 107-110.
- [6] S. BENACHOUR, *Analyticité des solutions des équations d'Euler*, Thèse, Nice, Juin 1976, à paraître in Arch. Rational Mech. Anal.

- [7] J. P. BOURGUIGNON - H. BREZIS, *Remarks on the Euler equation*, J. Funct. Analysis, **15** (1974), pp. 341-363.
- [8] DERHAM, *Variétés différentiables, Formes, Courants, Formes harmoniques*, Paris, Hermann, 1955.
- [9] D. EBIN - J. MARSDEN, *Groups of diffeomorphism and the motion of an incompressible fluid*, Ann. of Math., **92** (1970), pp. 102-163.
- [10] C. FOIAS - U. FRISCH - R. TEMAM, *Existence des solutions C^∞ des équations d'Euler*, C. R. Acad. Sc., Paris, **280** A (1975), pp. 505-508.
- [11] E. HÖLDER, *Über die Unberchränkte Fortsetzbarkeit einer Stetigen ebener Bewegung in einer unbegrenzten inkompressiblen Flüssigkeit*, Math. Z., **37** (1933), pp. 727-732.
- [12] C. KAHANE, *Solutions of Mildly singular integral equations*, Comm. Pure Appl. Math., **18** (1965), pp. 593-626.
- [13] T. KATO, *On the classical solution of the two dimensional non stationary Euler equation*, Arch. Rat. Mech. Anal., **25** (1967), pp. 302-324.
- [14] T. KATO, *Non stationary flows of viscous and ideal fluids in R^3* , J. Funct. Anal. (1972), pp. 296-305.
- [15] O. A. LADYZENSKAIA - N. URALTCEVA, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, Ne -York (1969).
- [16] J. LERAY, *Etudes de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique*, J. Math. Pure Appl., **9** (12) (1933), pp. 1-82.
- [17] I. LICHTENSTEIN, *Über einige existenz problem der Hydrodynamic ...*, Math. Z., **23** (1925).
- [18] T. NISHIDA, à paraître au Journal of Differential Equations.
- [19] A. C. SCHAEFFER, *Existence theorem for the flow of an incompressible fluid in two dimensions*, Trans. of the A.M.S., **42** (1937), pp. 497-513.
- [20] R. TEMAM, *On the Euler equation of incompressible perfect fluids*, J. Funct. Anal., **20** (1975), pp. 32-49.
- [21] W. WOLIBNER, *Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long*, Mat. Z., **37** (1933), pp. 727-738.
- [22] M. ZERNER, *Sur une inégalité de Poincaré*, Séminaire d'Analyse, Nice, 1975-76.