

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

ARMAND BOREL

**Cohomologie de  $SL_n$  et valeurs de fonctions zêta aux points entiers**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4<sup>e</sup> série*, tome 4, n° 4 (1977), p. 613-636

<[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1977\\_4\\_4\\_4\\_613\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1977_4_4_4_613_0)>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Cohomologie de $SL_n$ et valeurs de fonctions zeta aux points entiers.

ARMAND BOREL (\*)

*dédié à Jean Leray*

Cet article est une suite à [4] et est consacré principalement à l'étude d'un problème concernant l'homomorphisme canonique

$$j_\Gamma: H^*(X_u; \mathbf{R}) \rightarrow H^*(\Gamma; \mathbf{R}),$$

où  $\Gamma$  est un sous-groupe arithmétique d'un  $\mathbf{Q}$ -groupe semi-simple  $G$  et  $X_u$  l'espace symétrique « dual » de l'espace  $X$  des sous-groupe compacts maximaux du groupe  $G(\mathbf{R})$  des points réels de  $G$ . Cet homomorphisme est défini à l'aide de formes différentielles invariantes (cf. 3.4) et est un isomorphisme en basses dimensions [4]. Ces deux espaces vectoriels réels ont des  $\mathbf{Q}$ -structures rationnelles naturelles, définies par la cohomologie rationnelle, et notre but est d'étudier le comportement de  $j_\Gamma$  par rapport à elles. Le résultat principal de cet article concerne le cas où  $G = R_{k/\mathbf{Q}}SL_n$  est obtenu par restriction des scalaires du corps de nombres  $k$  à  $\mathbf{Q}$ , et met en jeu les valeurs de la fonction zêta de Dedekind  $\zeta_k(s)$  de  $k$  aux entiers positifs. Plus précisément, fixons un entier positif  $m$  et soit  $n$  un entier impair suffisamment grand. Alors  $H^*(X_u; \mathbf{Q})$  est une algèbre extérieure et la dimension de l'espace  $I^{2m+1}(X_u; \mathbf{Q})$  des éléments indécomposables de degré  $2m + 1$  de  $H^*(X_u; \mathbf{Q})$  se trouve être égale à l'ordre  $d_m$  du zéro de  $\zeta_k(s)$  au point  $s = -m$ . Soient  $L_m(X_u; \mathbf{Q}) = I^{d_m}I^{2m+1}(X_u; \mathbf{Q})$  et définissons de même  $L_m(\Gamma; \mathbf{Q})$  à partir de  $H^*(\Gamma; \mathbf{Q})$ . Alors  $j_\Gamma$  induit un isomorphisme de  $L_m(X_u; \mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$  sur  $L_m(\Gamma; \mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$  et l'on montrera que l'on a

$$(1) \quad j_\Gamma(L_m(X_u; \mathbf{Q})) = R'_m \cdot L_m(\Gamma; \mathbf{Q}),$$

(\*) The Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey.  
Pervenuto alla Redazione l'11 Novembre 1976.

avec

$$(2) \quad R'_m = |D|^{\frac{1}{2}} \zeta_k(m+1) \cdot \pi^{-d(m+1)},$$

où  $D$  est le discriminant et  $d$  le degré de  $k$  sur  $\mathbf{Q}$  (6.2). On a supposé ici implicitement  $\bar{d}_m \neq 0$ , ce qui est le cas sauf si  $m$  est impair et  $k$  totalement réel. En fait, il n'y a pas lieu d'imposer cette condition dans la démonstration, qui redonne donc aussi le fait bien connu que le membre de droite de (2) est un nombre rationnel lorsque  $\zeta_k(-m) \neq 0$  (6.3).

Multiplié par un facteur rationnel convenable, le nombre  $R'_m$  est le  $m$ -ième régulateur  $R_m$  de  $k$  qui intervient dans les conjectures de S. Lichtenbaum en  $K$ -théorie algébrique [12]. L'égalité (2) montre que si l'on divise par  $\pi^{dm}$  le membre de gauche de l'égalité conjecturale de [12: § 4], qui est par définition  $\lim_{s \rightarrow -m} \zeta_k(s)(s+m)^{-dm}$ , alors les deux membres de cette égalité sont commensurables (6.4).

Nous résumons maintenant la marche de la démonstration. Soient  $K$  (resp.  $G_u$ ) le sous-groupe compact maximal standard de  $G(\mathbf{R})$  (resp.  $G(\mathbf{C})$ ). On a donc

$$K = (\mathbf{SO}(n))^{r_1} \times (\mathbf{SU}(n))^{r_2}, \quad G_u = (\mathbf{SU}(n))^d,$$

où  $r_1$  (resp.  $r_2$ ) est le nombre de places réelles (resp. complexes) de  $k$ . Comme  $n$  est supposé impair,  $K$  est totalement non homologue à zéro dans  $G_u$  et dans  $G(\mathbf{R})/\Gamma$ . Cela permet de remplacer l'étude de  $j_\Gamma$  par celle de l'homomorphisme

$$\mu^*: H^*(G_u; \mathbf{C}) \rightarrow H^*(G(\mathbf{R})/\Gamma; \mathbf{C}),$$

défini par restriction de formes différentielles invariantes (3.4). Plus précisément, on peut identifier naturellement l'algèbre de cohomologie  $H^*(\mathfrak{g}; \mathbf{C})$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  à l'algèbre des formes différentielles biinvariantes sur  $G(\mathbf{C})$ . Alors  $\mu^* = \beta^* \circ \alpha^{*-1}$ , où

$$\alpha^*: H^*(\mathfrak{g}; \mathbf{C}) \rightarrow H^*(G_u; \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad \beta^*: H^*(\mathfrak{g}; \mathbf{C}) \rightarrow H^*(G(\mathbf{R})/\Gamma; \mathbf{C}),$$

sont définis par restriction de formes différentielles. Cela nous ramène à étudier l'effet de  $\alpha^*$  et  $\beta^*$  sur  $H^*(\mathfrak{g}(\mathbf{Q}); \mathbf{Q})$ . C'est aisé dans le cas de  $\alpha^*$ , et conduit à la puissance de  $\pi$  et au facteur  $|D|^{\frac{1}{2}}$  de (2), (cf. 5.4). Soient  $R\omega_{2j+1}$  une forme biinvariante sur  $G(\mathbf{C})$  qui représente un élément de la  $d$ -ième puissance extérieure de l'espace des éléments indécomposables de degré  $2j+1$  de  $H^*(\mathfrak{g}(\mathbf{Q}); \mathbf{Q})$ , et  $\eta_m$  le produit des  $R\omega_{2j+1}$  ( $1 \leq j \leq m$ ). Pour décrire l'effet de  $\beta^*$  sur la cohomologie rationnelle, on se ramène à prouver

que l'on a

$$(3) \quad \beta_*(\eta_m) \in i^{r_2 \cdot m} \left( \prod_{1 \leq j \leq m} \zeta_k(j+1) \right) \cdot H^*(\Gamma; \mathbf{Q})$$

et, pour cela, à construire une variété compacte  $Z_m$  dans  $G(\mathbf{R})/\Gamma$ , de dimension réelle  $d(m^2 + 2m)$ , sur laquelle l'intégrale de  $\eta_m$  est, à un facteur rationnel non nul près, le coefficient numérique dans la relation (3). Dans ce but, on part d'une algèbre à division  $D$  centrale sur  $k$ , de rang  $(m+1)^2$ , triviale à l'infini, on plonge le  $k$ -groupe algébrique  $H$  des éléments de norme réduite 1 de  $D \otimes_k \mathbf{C}$  dans  $G$  par la représentation régulière, et on prend pour  $Z_m$  le quotient  $H(\mathbf{R})/(\Gamma \cap H)$ . C'est une variété (si  $\Gamma$  est sans torsion, ce que l'on peut supposer sans inconvénient), qui est compacte (théor. de Fr. Hey), sur laquelle  $\eta_m$  définit une forme rationnelle invariante non nulle de degré maximum. L'assertion sur son intégrale (cf. 5.5) résulte alors du fait que le nombre de Tamagawa de  $H$  est un nombre rationnel (2.4).

Pour pouvoir poser notre problème, nous avons admis que  $j_\Gamma^*$  est un isomorphisme en basses dimensions. Mais en fait la construction précédente fournit une autre démonstration de l'injectivité de  $j_\Gamma^*$  qui, à l'encontre de celle de [4], ne fait pas intervenir la compactification de  $X/\Gamma$  en une variété à coins (cf. 5.6).

Donnons pour terminer quelques indications sur les différents paragraphes. Le § 1 fixe quelques notations et conventions, le § 2 est consacré aux algèbres à division. Les homomorphismes  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$ ,  $j_\Gamma^*$  sont définis au § 3 dans le cas général; le § 4 considère  $\alpha^*$  pour un groupe déployé. Les §§ 5, 6 sont consacrés au cas où  $G = R_{k/\mathbf{Q}}SL_n$ ; le premier étudie  $\alpha^*$  et  $\beta^*$ , le deuxième démontre (1), (2) et discute leurs relations avec la  $K$ -théorie algébrique. Enfin, le § 7 contient quelques remarques générales sur l'homomorphisme  $j_\Gamma^*$ .

Le principal résultat de ce travail a été annoncé dans [5: § 5].

## 1. — Notations et conventions.

Nous suivons en général celles de [4], avec une déviation notée en 1.2, et adoptons en outre les suivantes.

**1.1.** — Si  $a, b \in \mathbf{C}^*$ , alors  $a \sim b$  signifie que  $a/b \in \mathbf{Q}^*$ .

**1.2.** — Si  $M$  est une variété différentielle (de classe  $C^\infty$ ), on note  $A^p(M)$  (resp.  $A^p(M, \mathbf{C})$ ) l'espace des formes différentielles extérieures de degré  $p$  sur  $M$ , à valeurs réelles (resp. complexes) et  $A^*(M)$  (resp.  $A^*(M, \mathbf{C})$ ) la somme directe de ces espaces. Soient  $M_1, M_2$  deux variétés différentielles,

$\pi_i$  la projection de  $M = M_1 \times M_2$  sur  $M_i$  et  $\alpha_i \in A^*(M, \mathbf{C})$  ( $i = 1, 2$ ). Alors la forme différentielle  $\pi_1^* \alpha \wedge \pi_2^* \alpha$  sera simplement notée  $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ . On adopte une convention semblable pour un nombre quelconque de facteurs.

**1.3.** – Soit  $A$  une algèbre sur un corps  $F$  graduée par des sous-espaces  $A^p$  ( $p \in \mathbf{N}$ ). Par abus de langage, on appelle espace des *éléments indécomposables* de degré  $p$  de  $A$  le quotient de  $A^p$  par le sous-espace des éléments décomposables, i.e. le sous-espace engendré par les produits d'éléments de degrés  $< p$ .

**1.4.** – On note  $k$  un corps de nombres,  $\mathfrak{o}(k)$  l'anneau des entiers de  $k$ ,  $d$  le degré et  $D$  ou  $D_{k/\mathbf{Q}}$  le discriminant de  $k$  sur  $\mathbf{Q}$ ,  $V$  ou  $V_k$  l'ensemble des places de  $k$ ,  $V_\infty$  (resp.  $V_f$ ) celui des places archimédiennes (resp. ultramétriques) de  $k$ . Si  $v \in V$ , alors  $k_v$  est le complété de  $k$  en  $v$ , et, pour  $v \in V_f$ ,  $\mathfrak{o}_v$  est l'anneau des entiers de  $k_v$ . Comme d'habitude  $A_k$ , ou simplement  $A$ , est l'anneau des adèles de  $k$  et  $A_f$  est l'anneau des adèles finies de  $k$ , i.e. le produit restreint des  $k_v$  ( $v \in V_f$ ).

L'ensemble des isomorphismes de  $k$  dans  $\mathbf{C}$  est noté  $\Sigma$  et, suivant l'usage,  $r_1$  (resp.  $r_2$ ) est le nombre des places réelles (resp. complexes) de  $k$ . On a donc  $d = r_1 + 2r_2$ , et  $r_1$  est le nombre des  $\sigma \in \Sigma$  tels que  $\sigma(k) \subset \mathbf{R}$ .

Pour  $m \in \mathbf{N}$ ,  $d_m$  désigne l'ordre du zéro en  $-m$  de la fonction zêta de Dedekind  $\zeta_k(s)$  de  $k$ . Il résulte de l'équation fonctionnelle que  $d_0 = r_1 + r_2 - 1$ ,  $d_m = r_1 + r_2$  si  $m$  est pair non nul et  $d_m = r_2$  si  $m$  est impair.

**1.5.** – Soient  $G'$  un  $k$ -groupe connexe,  $n$  la dimension de  $G$  et  $G = R_{k/\mathbf{Q}} G'$  le  $\mathbf{Q}$ -groupe obtenu par restriction des scalaires à partir de  $G'$  [15: I]. Il existe un isomorphisme canonique

$$\nu: G \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma \in \Sigma} {}^\sigma G',$$

où  ${}^\sigma G'$  ( $\sigma \in \Sigma$ ) est le  $\sigma(k)$ -groupe obtenu à partir de  $G$  par le changement de base  $k \rightarrow \sigma(k)$ . Soit  $\eta$  une  $q$ -forme différentielle algébrique sur  $G'$ , invariante à droite et définie sur  $k$ . Il lui correspond canoniquement par  $\sigma$  une forme  ${}^\sigma \eta$  sur  ${}^\sigma G'$  invariante à droite et définie sur  $\sigma(k)$ ; le produit extérieur des  ${}^\sigma \eta$  définit donc une forme invariante à droite sur le produit des groupes  ${}^\sigma G'$ . On pose

$$R\eta = |D|^{-a/2} \nu^{*-1}(A_{\sigma \in \Sigma} \sigma_\eta).$$

C'est une forme de degré  $dq$  sur  $G$  invariante à droite et définie sur  $\mathbf{Q}$ , qui est aussi invariante à gauche si  $\eta$  l'est.

**1.6.** – Si  $v \in V$ , on pose  $G'_v = G'(k_v)$ . C'est un groupe de Lie sur  $k_v$ . L'isomorphisme  $\nu$  induit un isomorphisme

$$\nu_\infty : G(\mathbf{R}) \simeq \prod_{v \in V_\infty} G'_v.$$

Soit maintenant  $\omega$  une  $n$ -forme non nulle sur  $G'$ , invariante à droite et définie sur  $k$ . Elle définit canoniquement une mesure de Haar à droite  $\omega_v$  sur  $G'_v$  ( $v \in V$ ) [15: II]. Posons

$$(1) \quad \omega_\infty = |D|^{-n/2} \prod_{v \in V_\infty} \omega_v.$$

Il résulte des définitions que l'on a

$$(2) \quad \nu_\infty^{*-1}(\omega_\infty) = i^{r_2} \cdot R\omega|_{G(\mathbf{R})}.$$

Supposons  $G'$  semi-simple. Alors le produit de  $\omega_\infty$  par les  $\omega_v$  ( $v \in V_f$ ), est absolument convergent et définit la mesure de Tamagawa  $\omega_A$  de  $G(A_k)$  (loc. cit.). (En fait, la convergence de ce produit est démontrée dans [15] pour les groupes classiques, ce qui nous suffit. Pour le cas général, voir T. Ono, *Annals of Math.* (2) **82** (1965), 88-111.)

## 2. – Algèbres à division.

**2.1.** – On note  $\text{Br}_K$  le groupe de Brauer d'un corps  $K$ . Si  $K$  est local, on a un homomorphisme injectif canonique  $\text{inv}_K : \text{Br}_K \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ , qui est un isomorphisme si  $K$  est ultramétrique, et dont l'image est triviale si  $K = \mathbf{C}$ , d'ordre deux si  $K = \mathbf{R}$ . Si  $K = k_v$ , on écrira  $\text{inv}_v$  pour  $\text{inv}_K$ . Etant donné  $a \in \text{Br}_k$ , on note  $a_v$  l'image canonique de  $a$  dans  $\text{Br}_v$  et on pose  $\text{inv}_v a = \text{inv}_v a_v$ . On sait que  $\text{inv}_v a$  est nul pour presque tout  $v$  et que la somme des  $\text{inv}_v a$  est nulle. Réciproquement, si l'on se donne pour tout  $v \in V$  un élément  $b_v \in \text{Im}(\text{inv}_v)$ , nul pour presque tout  $v$ , et si la somme des  $b_v$  est nulle, alors il existe  $a \in \text{Br}_k$  tel que  $b_v = \text{inv}_v a$  pour tout  $v$  (voir par exemple [16: XIII, Th. 4, p. 264]).

Le lemme suivant est bien connu. Ne pouvant fournir de référence, nous en donnons brièvement la démonstration

**2.2.** – LEMME. *Soit  $n$  un entier  $\geq 1$ . Alors il existe une algèbre centrale à division  $D$  sur  $k$  de dimension  $n^2$  sur  $k$ , qui est triviale à l'infini.*

Soit  $S$  un ensemble de  $n$  places ultramétriques de  $k$ . Vu 2.1, il existe  $a \in \text{Br}_k$  tel que

$$(1) \quad \text{inv}_v a = 0 \quad \text{si } v \notin S \quad \text{et} \quad \text{inv}_v a = 1/n \quad \text{si } v \in S.$$

Comme  $a_v = 0$  si  $v \in V_\infty$ , il suffit de montrer que  $a$  peut être représenté par une algèbre à division de rang  $n^2$  sur  $k$ .

Il existe une extension  $L$  de  $k$ , cyclique de degré  $n$ , telle que  $[L_w : k_v] = n$  quels que soient  $v \in S$  et  $w \in V_L$  prolongeant  $v$  [1: p. 105]. Pour  $v \in S$ , l'homomorphisme canonique  $\text{Br}_v \rightarrow \text{Br}_{L_w}$  se traduit par la multiplication par  $n$  dans  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  [14: p. 202], donc annule  $a_v$ . Comme  $a_v$  est nul pour  $v \notin S$  par hypothèse, il s'ensuit que  $a$  est décomposé par  $L_w$  pour tout  $w \in V_L$ , donc  $a$  est aussi décomposé par  $L$  [16: XI, Th. 2, p. 206]. Cela entraîne que  $A$  peut être représenté par une algèbre  $A$  de dimension  $n^2$  sur  $k$  [14: p. 106]. Il existe alors  $m$  divisant  $n$  et une algèbre à division centrale  $D$  sur  $k$ , de rang  $d^2 = (n/m)^2$  sur  $k$ , tels que  $A \equiv \mathbf{M}_m(D)$ . Mais cela entraîne que  $d \cdot \text{inv}_v a = 0$  pour tout  $v$ , d'où, vu (1),  $\bar{d} = n$  et  $m = 1$ .

**2.3.** – Soit  $D$  satisfaisant aux conditions de 2.2. Soit  $H$  le  $k$ -groupe algébrique tel que  $H(L)$  soit le groupe des éléments de norme réduite 1 de  $D \otimes_k L$  quelle que soit l'extension  $L$  de  $k$ . Le quotient  $H(A_k)/H(k)$  est compact [15: 3.1.1].

Pour  $v \notin S$ , le groupe  $H$  est évidemment isomorphe à  $\mathbf{SL}_n$  sur  $k_v$ . Cependant, nous avons besoin d'une assertion plus précise.  $H$  est une forme intérieure de  $\mathbf{SL}_n$ , définie par un élément  $\alpha$  du premier ensemble de cohomologie galoisienne  $H^1(k, \mathbf{PSL}_n)$ . Par suite, si l'on fixe une  $k$ -réalisation linéaire  $H \rightarrow \mathbf{GL}_m$  de  $H$ , on peut trouver une partie finie  $S'$  de  $V_f$  contenant  $S$  telle que, pour  $v \notin S'$ , il existe un  $k_v$ -isomorphisme  $f_v$  de  $\mathbf{SL}_n$  sur  $H$ , qui applique  $\mathbf{SL}_n \mathfrak{o}_v$  sur  $H(\mathfrak{o}_v) = H \cap \mathbf{GL}_m \mathfrak{o}_v$ . [Pour le voir, on remarque que  $\alpha$  définit dans l'ensemble des  $\bar{k}$ -isomorphismes de  $\mathbf{SL}_n$  sur  $H$  une  $k$ -variété irréductible lisse  $X$ , qui est un  $k$ -espace homogène principal sous  $\mathbf{SL}_n$ , et que  $X$  possède un  $\mathfrak{o}_v$ -point pour presque tout  $v$ .] Il s'ensuit en particulier que si  $U_v$  est un sous-groupe compact ouvert de  $H_v$  ( $v \in V_f$ ), égal à  $f_v(\mathbf{SL}_n \mathfrak{o}_v)$  pour  $v \notin S''$ , avec  $S'' \subset V_f$  fini, contenant  $S'$ , alors le produit  $U$  des  $U_v$  est un sous-groupe compact ouvert de  $H(A_f)$ .

**2.4.** – PROPOSITION. Soit  $\omega_\infty$  la mesure sur  $H_\infty$  associée à une forme différentielle rationnelle  $\omega$  non nulle invariante de degré maximum  $n^2 - 1$  définie sur  $k$  (cf. 1.6). Soit  $\Gamma$  un sous-groupe arithmétique de  $H$ . Alors

$$m_\infty(\Gamma) = \int_{H_\infty/\Gamma} \omega_\infty \sim \prod_{1 \leq j < n} \zeta_k(j+1).$$

Soient  $U_v$  ( $v \in V_v$ ) et  $U$  comme ci-dessus. Le groupe  $\Gamma' = (H_\infty \times U) \cap H(F)$  est un sous-groupe arithmétique de  $H$ , donc est commensurable à  $\Gamma$ , et il suffit de montrer notre assertion pour  $\Gamma'$ . En prenant  $U$  assez petit, on peut

faire en sorte que  $\Gamma'$  soit sans torsion. Par approximation forte on a  $H(A_f) = H(F) \cdot U$ . On en déduit que  $H(A_k)/H(F)$  est fibré principal de groupe structural  $U$ , basé  $H_\infty/\Gamma'$ . Par suite le nombre de Tamagawa  $\tau(H)$  de  $H$ , i.e. le volume de  $H(A)/H(F)$  pour la mesure de Tamagawa, est produit de  $m_\infty(\Gamma')$  et du volume  $m(U)$  de  $U$  pour la mesure produit des  $\omega_f$  ( $v \in V_f$ ). Comme  $\tau(H) = 1$  ([15: Thm. 3.3.1]), il suffirait du reste ici de savoir que  $\tau(H)$  est rationnel, il reste à montrer:

$$(1) \quad m(U)^{-1} \sim \prod_{1 \leq j < n} \zeta_k(j+1).$$

Or

$$m(U) = \prod_{v \in V_f} m_v(U_v), \quad \text{avec} \quad m_v(U_v) = \int_{U_v} \omega_v.$$

Les nombres  $m_v(U_v)$  sont tous rationnels [13: 4.2.5]. Vu la remarque finale de 2.3, on est ramené à montrer (1) pour le groupe  $SL_n$ , avec  $U_v = SL_n(\mathfrak{o}_v)$  pour tout  $v \in V_f$ . Mais on a alors

$$m_v(U_v) = Nv^{-(n^2-1)} \cdot \text{Card}(SL_n(F_v)),$$

où  $F_v$  est le corps résiduel de  $\mathfrak{o}_v$  et  $Nv$  le nombre d'éléments de  $F_v$  [15: 2.2.5], et d'autre part

$$\text{Card } SL_n(F_v) = Nv^{(n^2-n)/2} \prod_{1 \leq j < n} (Nv^{j+1} - 1),$$

d'où le résultat.

### 3. — Définition de quelques homomorphismes.

Le but de ce paragraphe est de définir les homomorphismes  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  et  $j_F^*$  de l'introduction. Auparavant, nous rappelons quelques notions et faits connus concernant la cohomologie des algèbres de Lie semi-simples et les formes différentielles invariantes.

**3.1. — Cohomologie d'algèbres de Lie et formes invariantes.** Soient  $F$  un corps de caractéristique zéro,  $F'$  une extension de  $F$ , et  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie sur  $F$ . On note  $C^*(\mathfrak{g}; F')$  le complexe des cochaînes de  $\mathfrak{g}$ , à coefficients dans  $F'$  et  $H^*(\mathfrak{g}; F')$  l'espace de cohomologie correspondant [8; 9]. On a donc,  $C^*(\mathfrak{g}; F') = \text{Hom}_F(\Lambda \mathfrak{g}, F')$ . Si  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, alors  $H^*(\mathfrak{g}; F')$  s'identifie à l'algèbre des invariants (au sens infinitésimal) de  $\mathfrak{g}$ , opérant dans  $C^*(\mathfrak{g}; F')$  par la représentation adjointe, et est une algèbre extérieure [9: Thm. 10.2].



Si  $F = \mathbf{R}$  or  $\mathbf{C}$  et  $F' \subset \mathbf{C}$  et si  $G$  est un groupe de Lie connexe sur  $F$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  alors, en associant à  $\alpha \in C^*(\mathfrak{g}; F')$  la forme invariante à droite sur  $G$  égale à  $\alpha$  en l'élément neutre, on définit un isomorphisme de  $C^*(\mathfrak{g}; F')$  sur l'espace des formes invariantes à droite sur  $G$ . Rappelons que si  $F = \mathbf{R}$  et si  $G$  est compact, connexe, cet isomorphisme induit un isomorphisme de  $H^*(\mathfrak{g}; F')$  sur  $H^*(G; F')$ ; ce dernier espace s'identifie donc aussi dans ce cas à l'espace des formes biinvariantes sur  $G$ ; de plus, l'espace des éléments indécomposables de degré  $2j + 1$  ( $j \in \mathbf{N}$ ) de  $H^*(G; F')$  a un représentant canonique dans  $H^{2j+1}(G; F')$ , celui des éléments primitifs de degré  $2j + 1$  de  $H^*(G; F')$  pour sa structure d'algèbre de Hopf naturelle (Théorème de Samelson, cf. *loc. cit.*). On le notera  $P^{2j+1}(G; F')$  et on désignera aussi par  $P^{2j+1}(\mathfrak{g}; F')$  le sous-espace correspondant de  $H^*(\mathfrak{g}; F')$ . Tout cela vaut aussi sur  $\mathbf{C}$  pour un groupe connexe réductif complexe et son algèbre de Lie.

**3.2. — Cohomologie relative.** Soit  $\mathfrak{u}$  une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . On note  $C^*(\mathfrak{g}; \mathfrak{u}; F')$  le complexe des cochaines relatives de  $\mathfrak{g}$  modulo  $\mathfrak{u}$ , à coefficients dans  $F'$  et  $H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{u}; F')$  l'espace de cohomologie correspondant [8, 9]. En particulier,  $C^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{u}; F')$  est un sous-espace de  $C^*(\mathfrak{g}; F')$ , qui est canoniquement isomorphe à l'espace des invariants de  $\mathfrak{u}$ , opérant par la représentation adjointe, dans  $\text{Hom}_F(A(\mathfrak{g}/\mathfrak{u}), F')$ .

Si  $F = \mathbf{R}, \mathbf{C}$  et  $F' \subset \mathbf{C}$ , soit  $G$  comme plus haut et supposons que  $\mathfrak{u}$  soit l'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé connexe  $U$  de  $G$ . On identifie  $\mathfrak{g}/\mathfrak{u}$  à l'espace tangent à l'origine à  $U \setminus G$ . Etant donné  $\alpha \in C^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{u}; F')$ , il existe alors une et une seule forme invariante sur  $U \setminus G$  égale à  $\alpha$  à l'origine et cette correspondance définit un isomorphisme de  $C^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{u}; F')$  sur l'espace  $A(U \setminus G; F')^G$  des formes différentielles invariantes sur  $U \setminus G$ , à valeurs dans  $F'$ , d'où un isomorphisme canonique de  $H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{u}; F')$  sur  $H^*(U \setminus G; F')$ .

On s'intéressera surtout au cas où  $F = \mathbf{R}$ ,  $\mathfrak{g}$  est semi-simple,  $\mathfrak{u}$  est l'ensemble des points fixes d'un automorphisme involutif de  $\mathfrak{g}$  et ou bien  $\mathfrak{g}$  est compacte, ou bien  $\mathfrak{u}$  est compacte maximale dans  $\mathfrak{g}$ , ou encore à la complexification d'une telle situation. On sait qu'alors la différentielle extérieure est identiquement nulle sur  $C^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{u}; F')$  [9: p. 101], donc  $C^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{u}; F') = H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{u}; F')$ . Si  $F = \mathbf{C}$ , ou si  $F = \mathbf{R}$  et  $G$  est compact, alors on a de même, compte tenu du théorème de de Rham:

$$H^*(U \setminus G; F') = A(U \setminus G; F')^G = C^*(\mathfrak{g}; \mathfrak{u}; F').$$

**3.3. — Notations.** Dans la suite de ce paragraphe,  $G$  est un groupe semi-simple connexe défini sur  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie,  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G(\mathbf{R})$ ,  $\mathfrak{k}$  son algèbre de Lie et  $G_u$  un sous-groupe compact

maximal de  $G(\mathbf{C})$  contenant  $K$ . On suppose, ce qui est loisible, que les algèbres de Lie  $\mathfrak{g}(\mathbf{R})$  et  $\mathfrak{g}_u$  de  $G(\mathbf{R})$  et  $G_u$  admettent les décompositions de Cartan

$$(1) \quad \mathfrak{g}(\mathbf{R}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{g}_u = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_u,$$

avec

$$(2) \quad \mathfrak{p}_u = i \cdot \mathfrak{p}.$$

En particulier,  $\mathfrak{k}$  est l'ensemble des points fixes d'un automorphisme involutif de  $\mathfrak{g}(\mathbf{R})$  (resp.  $\mathfrak{g}_u$ ) qui laisse  $\mathfrak{p}$  (resp.  $\mathfrak{p}_u$ ) stable et est donc égal à  $-\text{Id.}$  sur cet espace. Soient encore

$$(3) \quad X = K \backslash G, \quad X_u = K \backslash G_u,$$

$\sigma: G \rightarrow X$ ,  $\sigma': G_u \rightarrow X_u$  les projections naturelles, et  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $G(\mathbf{R})$ .

**3.4.** - Les homomorphismes  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$ ,  $\bar{\alpha}^*$ ,  $\bar{\beta}^*$ ,  $j_{\Gamma}^*$ . Si  $\omega \in C^*(\mathfrak{g}; \mathbf{C})$ , on note  $\alpha(\omega)$  la forme invariante à droite sur  $G_u$  égale à  $\omega$  en l'élément neutre (3.1). De même on associe à  $\omega$  une forme invariante à droite sur  $G(\mathbf{R})$ , donc aussi une forme  $\beta(\omega)$  sur  $G(\mathbf{R})/\Gamma$ , et à  $\eta \in C^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_c; \mathbf{C})$ , où  $\mathfrak{k}_c = \mathfrak{k} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ , on fait correspondre une forme invariante  $\bar{\alpha}(\eta)$  sur  $G_u$  et une forme invariante sur  $X$ , donc une forme  $\bar{\beta}(\eta)$  sur  $X/\Gamma$ . En passant à la cohomologie, on obtient un diagramme commutatif

$$(1) \quad \begin{array}{ccccc} H^*(G_u; \mathbf{C}) & \xleftarrow{\alpha^*} & H^*(\mathfrak{g}; \mathbf{C}) & \xrightarrow{\beta^*} & H(G(\mathbf{R})/\Gamma; \mathbf{C}) \\ \uparrow \sigma^* & & \uparrow \lambda^* & & \uparrow \sigma'^* \\ H^*(X_u; \mathbf{C}) & \xleftarrow{\bar{\alpha}^*} & H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_c; \mathbf{C}) & \xrightarrow{\bar{\beta}^*} & H^*(X/\Gamma; \mathbf{C}), \end{array}$$

où  $\lambda^*$  est associé à l'inclusion  $C^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_c; \mathbf{C}) \rightarrow C^*(\mathfrak{g}; \mathbf{C})$ . Comme on l'a rappelé ci-dessus (3.1, 3.2),  $\alpha^*$  et  $\bar{\alpha}^*$  sont des isomorphismes et  $H^*(G_u; \mathbf{C})$  (resp.  $H^*(X_u; \mathbf{C})$ ) s'identifie à l'espace des formes biinvariantes (resp. invariantes) sur  $G_u$  (resp.  $X_u$ ).

On peut aussi définir directement

$$(2) \quad \mu = \tau \circ \alpha^{-1}: A(G_u; \mathbf{C})^{G_u} \rightarrow A(G(\mathbf{R})/\Gamma; \mathbf{C}),$$

$$(3) \quad \bar{\mu} = \bar{\beta} \circ \alpha^{-1}: A(X_u; \mathbf{C})^{G_u} \rightarrow A(X; \mathbf{C})^{G(\mathbf{R})} \rightarrow A(X/\Gamma; \mathbf{C}) = A(X; \mathbf{C})^{\Gamma},$$

en associant à une forme invariante à droite  $\omega$  sur  $G_u$  (resp. une forme invariante  $\eta$  sur  $X_u$ ) la forme invariante sur  $G(\mathbf{R})/\Gamma$  (resp.  $X/\Gamma$ ) qui, à l'origine, a même extension que  $\omega$  (resp.  $\eta$ ) à l'espace tangent complexe. L'homomorphisme  $\bar{\mu}^*$  associé en cohomologie à  $\bar{\mu}$  est essentiellement celui qui nous intéresse, mais il a l'inconvénient de ne pas envoyer la cohomologie réelle en la cohomologie réelle, aussi voulons-nous en modifier légèrement la définition. Vu 3.3 (2), il est clair que si une forme multilinéaire  $\eta$  de degré  $m$  sur  $\mathfrak{p} \otimes \mathbf{C}$  a une restriction réelle à  $\mathfrak{p}_u$ , alors  $i^m \cdot \eta$  a une restriction réelle sur  $\mathfrak{p}$ . En posant

$$(4) \quad j_{\Gamma}(\eta) = i^m \cdot \bar{\mu}(\eta), \quad (m \in \mathbf{N}; \eta \in A^m(X_u; \mathbf{R})^{G_u}),$$

on définit donc un isomorphisme de  $A^m(X_u; \mathbf{R})^{G_u}$  sur  $A^m(X; \mathbf{R})^{G(\mathbf{R})} = I_{G(\mathbf{R})}^m$ , d'où l'homomorphisme canonique

$$(5) \quad j_{\Gamma}^*: H^*(X_u; \mathbf{R}) \rightarrow H^*(X/\Gamma; \mathbf{R}) = H^*(\Gamma; \mathbf{R}).$$

**3.5.** — Nous voulons encore décrire une compatibilité qui sera utile plus loin. On suppose  $\Gamma$  sans torsion. Soient  $(E_r)$  et  $(E'_r)$  les suites spectrales des fibrations définies par  $\sigma$  et  $\sigma'$ , et  $(E''_r)$  la suite spectrale de cohomologie relative de  $\mathfrak{g} \bmod \mathfrak{k}_c$  [8, 9]. Cette dernière est définie à partir d'une filtration de  $C^*(\mathfrak{g}; \mathbf{C})$ . On peut aussi définir  $(E'_r)$  et  $(E_r)$  à partir d'une filtration de l'algèbre des formes différentielles (voir par exemple [3]). Il est immédiat que  $\alpha$  et  $\beta$  sont compatibles avec ces filtrations, donc induisent des homomorphismes de suites spectrales. En particulier

$$(1) \quad \alpha_2^*: E_2'' = H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_c; \mathbf{C}) \otimes H^*(\mathfrak{k}_c; \mathbf{C}) \rightarrow E_2 = H^*(X_u; \mathbf{C}) \otimes H^*(K_c; \mathbf{C}),$$

$$(2) \quad \beta_2^*: E_2'' \rightarrow E_2' = H^*(X/\Gamma; \mathbf{C}) \otimes H^*(K; \mathbf{C}),$$

satisfont à

$$(3) \quad \alpha_2^* = \bar{\alpha}_2^* \otimes \iota^*, \quad \beta_2^* = \bar{\beta}_2^* \otimes \iota^*,$$

où  $\iota^*: H^*(\mathfrak{k}; \mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} H^*(\mathfrak{k}_c; \mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} H^*(K_c; \mathbf{C})$  est l'isomorphisme canonique de 3.1.

#### 4. — L'isomorphisme $H^*(\mathfrak{g}; \mathbf{C}) \rightarrow H^*(G_u; \mathbf{C})$ dans le cas déployé.

**4.1.** — Soient  $V$  un espace vectoriel réel de dimension finie,  $L$  un réseau de  $V$  et  $T = V/L$  le tore quotient. Alors  $H^*(T; \mathbf{R})$  s'identifie canoniquement à l'algèbre des formes différentielles biinvariantes sur  $T$ , donc à  $\Lambda V^*$ .

Etant donné  $c \in V^*$ , soit  $\tilde{c}$  l'élément de  $H^1(T; \mathbf{R})$  correspondant. Il est élémentaire qu'il existe un isomorphisme naturel  $x \mapsto \tilde{x}$  de  $L$  sur  $H_1(T; \mathbf{Z})$  tel que

$$\langle \tilde{c}, \tilde{x} \rangle = c(x), \quad (c \in V^*, x \in L).$$

**4.2.** – Soit  $G$  un groupe semi-simple simplement connexe défini et déployé sur  $\mathbf{R}$ . On fixe un épinglage de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  [7]. Soient  $\mathfrak{h}$  la sous-algèbre de Cartan donnée de  $\mathfrak{g}$ ,  $R$  le système de racines de  $\mathfrak{g}$  par rapport à  $\mathfrak{h}$ ,  $S$  une base de  $R$ ,  $h_s$  ( $s \in S$ ),  $x_a$  ( $a \in R$ ) une base de Chevalley de  $\mathfrak{g}$  associée à l'épinglage donné et  $\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}$  la forme entière de  $\mathfrak{g}$  définie par cette base. Si  $F$  est un sous-corps de  $\mathbf{C}$ , on pose  $\mathfrak{g}(F) = \mathfrak{g}_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} F$ .

Soit  $\mathfrak{g}_u$  la forme compacte standard de  $\mathfrak{g}$  associée aux données précédentes. Elle est engendrée par  $\mathfrak{t} = i \cdot \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$  et les éléments  $u \cdot x_a + \bar{u} \cdot x_{-a}$  ( $u \in \mathbf{C}; a \in R$ ) et possède une forme entière  $\mathfrak{g}_{u\mathbf{Z}}$  sous-tendue par  $i \cdot \mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}$ ,  $(x_a + x_{-a})$ ,  $i(x_a - x_{-a})$  ( $a \in R$ ). On note  $G_u$  et  $T$  les sous-groupes intégraux de  $G(\mathbf{C})$  (vu comme groupe de Lie réel), d'algèbres de Lie  $\mathfrak{g}_u$  et  $\mathfrak{t}$ .

L'algèbre  $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_u \cap \mathfrak{g}(\mathbf{R})$  est engendrée par les  $x_a + x_{-a}$  ( $a \in R$ ). On a les décompositions de Cartan

$$(1) \quad \mathfrak{g}(\mathbf{R}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \mathfrak{g}_u = \mathfrak{k} \oplus i \cdot \mathfrak{p} \quad \text{avec} \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{h}(\mathbf{R}) + \sum_{a \in R} \mathbf{R}(x_a - x_{-a}).$$

Les espaces  $H^*(\mathfrak{g}(\mathbf{C}); \mathbf{C})$  et  $H^*(G_u; \mathbf{C})$  ont des  $\mathbf{Q}$ -structures naturelles définies par  $H^*(\mathfrak{g}(\mathbf{Q}); \mathbf{Q})$  et  $H^*(G_u; \mathbf{Q})$ . Nous nous proposons de déterminer le comportement de l'isomorphisme  $\alpha^*: H^*(\mathfrak{g}(\mathbf{C}); \mathbf{C}) \rightarrow H^*(G_u; \mathbf{C})$  de 3.3 par rapport à elles. Chacune de ces algèbres est une algèbre extérieure sur un espace d'éléments primitifs (3.1). Il suffit donc de connaître l'effet de  $\alpha^*$  sur ces derniers.

**4.3.** – PROPOSITION. Soient  $m \in \mathbf{N}$  et  $P^{2m+1}(\mathfrak{g}(\mathbf{Q}); \mathbf{Q})$  (resp.  $P^{2m+1}(\mathfrak{g}_u(\mathbf{Q}); \mathbf{Q})$ , resp.  $P^{2m+1}(G_u; \mathbf{Q})$ ) l'espace des éléments primitifs de degré  $2m + 1$  de  $H^*(\mathfrak{g}(\mathbf{Q}); \mathbf{Q})$  (resp.  $H^*(\mathfrak{g}_u(\mathbf{Q}); \mathbf{Q})$ , resp.  $H^*(G_u; \mathbf{Q})$ ). Alors  $\alpha^*$  applique  $P^{2m+1}(\mathfrak{g}(\mathbf{Q}); \mathbf{Q})$  isomorphiquement sur  $(\pi i)^{m+1} \cdot P^{2m+1}(G_u; \mathbf{Q})$ . L'injection canonique  $H^*(\mathfrak{g}_u(\mathbf{Q}); \mathbf{Q}) \rightarrow H^*(G_u; \mathbf{C})$  applique  $P^{2m+1}(\mathfrak{g}_{u\mathbf{Q}}; \mathbf{Q})$  isomorphiquement sur  $\pi^{m+1} \cdot P^{2m+1}(G_u; \mathbf{Q})$ .

Si  $c \in \mathfrak{h}^*$ , on note  $w_c$  la forme invariante à droite nulle sur les  $x_a$  et induisant  $c$  sur  $\mathfrak{h}$ . Soit  $w_a$  la forme invariante à droite duale de  $x_a$ , nulle sur  $\mathfrak{h}$ .

On identifie  $\mathfrak{t}$  au revêtement universel de  $T$  par l'application exponentielle. Le groupe fondamental de  $T$  s'identifie alors à  $2\pi i \cdot \mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}$ . Soit  $P$  le groupe des poids. C'est donc la  $\mathbf{Z}$ -forme de  $\mathfrak{h}^*$  duale de  $\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}$ . L'isomorphisme de 4.1 induit un isomorphisme  $\gamma$  de  $(2\pi i)^{-1} \cdot P$  sur  $H^1(T; \mathbf{Z})$ . On a (cf. [6: Part I,

§ 14.5]):

$$(1) \quad dw_c = - \sum_{a>0} c(h_a) \cdot w_a \wedge w_{-a}, \quad (c \in \mathfrak{h}^*),$$

et  $dw_c$  est un cocycle de  $C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbf{C})$ . L'application  $\tau: H^1(\mathfrak{h}; \Lambda) \rightarrow H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbf{C})$  ainsi définie est la transgression [9]. On a de même la transgression  $H^1(T; \mathbf{C}) \rightarrow H^2(T \setminus G_u; \mathbf{C})$  (cf. [2]). L'isomorphisme  $\alpha^*$  commute évidemment à la transgression donc, puisque  $\gamma$  définit un isomorphisme de  $H^1(\mathfrak{h}(\mathbf{Q}); \mathbf{Q})$  sur  $(\pi i)H^1(T; \mathbf{Q})$  on a

$$(2) \quad \alpha^*(\tau(P \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})) = \pi i \cdot H^2(T \setminus G_u; \mathbf{Q}).$$

En particulier,  $\alpha^*$  définit un isomorphisme

$$(3) \quad \alpha^*: H^2(\mathfrak{g}(\mathbf{Q}), \mathfrak{h}(\mathbf{Q}); \mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} (\pi i) \cdot H^2(T \setminus G_u; \mathbf{Q}).$$

Comme  $H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbf{C})$  et  $H^*(T \setminus G_u; \mathbf{C})$  sont isomorphes et que  $H^*(T \setminus G_u; \mathbf{C})$  est engendrée par ses éléments de degré deux [2: § 26; 11], on voit que  $\alpha^*$  induit des isomorphismes

$$(4) \quad \alpha^*: H^{2m}(\mathfrak{g}(\mathbf{Q}), \mathfrak{h}(\mathbf{Q}); \mathbf{Q}) \rightarrow (\pi i)^m \cdot H^{2m}(T \setminus G_u; \mathbf{Q}), \quad (m \in \mathbf{N}).$$

De même,  $\gamma$  et  $\alpha^*$  définissent des isomorphismes

$$(5) \quad \gamma: H^1(\mathfrak{h}(\mathbf{Q}); \mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} i \cdot H^1(\mathfrak{t}(\mathbf{Q}); \mathbf{Q}),$$

$$(6) \quad \alpha^*: H^{2m}(\mathfrak{g}(\mathbf{Q}), \mathfrak{h}(\mathbf{Q}); \mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} i^m \cdot H^{2m}(\mathfrak{g}_u(\mathbf{Q}), \mathfrak{t}(\mathbf{Q}); \mathbf{Q}), \quad (m \in \mathbf{N}).$$

On considère les suites spectrales de  $\mathfrak{g} \bmod \mathfrak{h}$ ,  $\mathfrak{g}_u \bmod \mathfrak{t}$  et  $G_u \bmod T$ . Elles sont isomorphes. En particulier, au niveau des termes  $E_2$  on a un isomorphisme

$$(7) \quad \alpha^* \otimes \gamma: H^{2j}(\mathfrak{g}(\mathbf{Q}), \mathfrak{h}(\mathbf{Q}); \mathbf{Q}) \otimes H^k(\mathfrak{h}(\mathbf{Q}); \mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} \\ \xrightarrow{\sim} (\pi i)^{j+k} H^{2j}(T \setminus G_u; \mathbf{Q}) \otimes H^k(T; \mathbf{Q}),$$

( $j, k \in \mathbf{N}$ ) et aussi, vu (5), (6)

$$(8) \quad H^{2j}(\mathfrak{g}(\mathbf{Q}), \mathfrak{h}(\mathbf{Q}); \mathbf{Q}) \otimes H^k(\mathfrak{h}(\mathbf{Q}); \mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} \\ \xrightarrow{\sim} i^{j+k} \cdot H^{2j}(\mathfrak{g}_u(\mathbf{Q}), \mathfrak{t}(\mathbf{Q}); \mathbf{Q}) \otimes H^k(\mathfrak{t}; \mathbf{Q}).$$

Soit  $(E_r)$  la suite spectrale de  $G_u \text{ mod } T$ . D'après J. Leray [11: p. 110], elle se termine à  $E_3$ , et l'isomorphisme  $\text{Gr } H^*(G_u; \mathbf{Q}) = E_\infty \xrightarrow{\sim} E_3$  applique les primitifs dans  $E_3^{*,1}$ . On a alors une assertion similaire pour les deux autres suites spectrales considérées ici, et la proposition résulte de (7), (8).

**4.4.** - *Normalisation de mesures invariantes sur  $T \setminus G_u$  et  $G_u$ .* On sait que  $T \setminus G_u$  admet un nombre fini de structures complexes invariantes, chacune associée à un ordre sur les racines [6: Part I, § 10]. Supposons  $T \setminus G_u$  muni de la structure complexe donnée par les racines positives. Alors les classes de Chern entières  $c_j$  de  $T \setminus G_u$  sont les fonctions symétriques élémentaires en les  $-\tau((2\pi i)^{-1} w_a)$  ( $a > 0$ ) [6: Part I, § 10.8], donc  $c_j$  est représentée par

$$(2\pi i)^{-j} \cdot \sigma_j \left( \left\{ \sum_{b>0} a(h_b) w_b \wedge \bar{w}_b \right\}_{a>0} \right),$$

où  $\sigma_j$  désigne la  $j$ -ème fonction symétrique élémentaire. On sait que  $c_1/2$  est aussi une classe entière et que  $(c_1/2)^m$  ( $m = (\dim T/G_u)/2$ ) est  $(m!) \cdot F$ , où  $F$  est la classe fondamentale [6: Part II, § 14.3]. Si  $r$  est la somme des racines positives, alors  $c_1$  est représentée par la forme

$$(2\pi i)^{-1} \sum_{a>0} r(a) (w_a \wedge \bar{w}_a),$$

done

$$F = (2\pi i)^{-m} \cdot D \cdot \prod_{a>0} (w_a \wedge \bar{w}_a), \quad \text{avec} \quad D = \prod_{a>0} (r(a)/2).$$

D'autre part, vu 4.1,  $\prod_{s \in S} w_s$  est la classe fondamentale de  $T$  multipliée par  $\pm (2\pi i)^{-l}$ , où  $l$  est la dimension de  $T$ . Par suite, à l'orientation près, la classe fondamentale de  $G_u$  est représentée par la forme

$$(2\pi i)^{-m-l} \cdot D \cdot \left( \prod_{a>0} w_a \wedge w_{-a} \right) \wedge \left( \prod_{s \in S} w_s \right).$$

Cette forme définit donc la mesure de Haar de  $G_u$  de volume total 1.

**5. - Les homomorphismes  $\alpha^*$  et  $\beta^*$  pour  $SL_n$ .**

**5.1.** - Soient  $n \in \mathbf{N}$ , on pose  $G'_n = SL_n$  et on note  $\mathfrak{g}'_n$  l'algèbre de Lie de  $G'_n$ . On fixe un corps de nombres  $k$  et on pose  $G_n = R_{k/\mathbf{Q}} G'_n$ . On utilise les notations du § 1. On envisage ici  $G'_n$  comme un  $k$ -groupe, mais comme

il est déjà défini sur  $\mathbf{Q}$ , on a évidemment  ${}^\sigma G'_n \cong G'_n$  pour tout  $\sigma \in \Sigma$ , et en particulier

$$(1) \quad G'_{nv} = \mathbf{SL}_n(\mathbf{R}) \text{ (resp. } G'_{nv} = \mathbf{SL}_n(\mathbf{C}))$$

si  $v \in V_\infty$  est réelle (resp. complexe).

On pose

$$(2) \quad K_{nv} = \mathbf{SO}(n), \quad G_{nv,u} = \mathbf{SU}(n), \quad \text{si } v \in V_\infty \text{ est réelle,}$$

$$(3) \quad K_{nv} = \mathbf{SU}(n), \quad G'_{nv,u} = \mathbf{SU}(n) \times \mathbf{SU}(n) \quad \text{si } v \in V_\infty \text{ est complexe,}$$

et, dans les deux cas,

$$(4) \quad X_{nv} = K_{nv} \backslash G'_{nv}, \quad X_{nv,u} = K_{nv} \backslash G'_{nv,u}.$$

Si  $v$  est complexe,  $K_{nv}$  est identifié à la diagonale de  $G_{nv,u} = K_{nv} \times K_{nv}$  et  $X$  est donc isomorphe à  $K_{nv}$  en tant qu'espace homogène. Soient encore

$$(5) \quad K_n = \prod_v K_{nv} = \mathbf{SO}(n)^{r_1} \times \mathbf{SU}(n)^{r_2},$$

$$(6) \quad G_{nu} = \prod_v G'_{nv,u} = (\mathbf{SU}(n))^d,$$

$$(7) \quad X_n = \prod_v X_{nv} = (\mathbf{SO}(n) \backslash \mathbf{SU}(n))^{r_1} \times (\mathbf{SU}(n) \backslash \mathbf{SL}_n(\mathbf{C}))^{r_2}$$

$$(8) \quad X_{n,u} = \prod_v X_{nv,u} = (\mathbf{SO}(n) \backslash \mathbf{SU}(n))^{r_1} \times \mathbf{SU}(n)^{r_2},$$

où les produits sont pris sur l'ensemble  $V_\infty$  des places archimédiennes de  $k$ .

Enfin,  $\Gamma_n$  désigne un sous-groupe arithmétique de  $G_n$ . C'est donc un sous-groupe de  $G_n(\mathbf{Q})$  commensurable à l'image de  $\mathbf{SL}_n \mathfrak{o}_k$  par l'isomorphisme canonique  $G'_n(k) \xrightarrow{\sim} G_n(\mathbf{Q})$  défini par la restriction des scalaires.

**5.2.** – Si  $v$  est complexe,  $K_{nv}$  est évidemment totalement non homologue à zéro dans  $G'_{nv}$ . Si  $n$  est impair, il en est de même pour  $v$  réelle [2: § 30], donc  $K_{nv}$  est totalement non homologue à zéro dans  $G_{nv,u}$ , et la suite spectrale  $(E_r)$  de  $G_{nu} \rightarrow X_{nu}$  dégénère. Il en est alors de même pour la suite spectrale  $(E'_r)$  de  $\mathfrak{g}_n$  modulo  $\mathfrak{k}_{nc}$  (cf. 3.5), qui lui est isomorphe, et pour celle de  $G_{nr} \rightarrow X_{nr}/\Gamma_n$  ( $\Gamma_n$  sans torsion), vu 3.5.

Le fait que  $(E_r)$  dégénère signifie qu'il existe un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels gradués entre  $E_2$ , gradué par le degré total, et  $\text{Gr } H^*(G_{nu}; \mathbf{C})$ , où  $\text{Gr}$  signifie l'espace gradué associé à une filtration con-

venable de  $H^*(G_{nu}; \mathbf{C})$ . Mais ici on a en fait, toujours pour  $n$  impair, un isomorphisme naturel d'algèbres graduées. En effet ces trois algèbres sont des algèbres extérieures;  $H^*(G_{nu}; \mathbf{C})$  est une algèbre extérieure sur un espace d'éléments primitifs  $P$ . De plus  $P$  est somme directe de deux sous-espaces  $P_1, P_2$  tels que  $\sigma^*$  applique  $H^*(X_{nu}; \mathbf{C})$  isomorphiquement sur  $\Lambda P_1$  et que la restriction  $H^*(G_{nu}; \mathbf{C}) \rightarrow H^*(K_n; \mathbf{C})$  applique  $\Lambda P_2$  isomorphiquement sur  $H^*(K_n; \mathbf{C})$  (l'assertion relative à  $\sigma^*$  est un théorème de H. Samelson, cf. par exemple [8: Théorème 13.2]). On a donc un diagramme commutatif

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} H^*(G_{nu}; \mathbf{C}) & \xleftarrow{\alpha^*} & H^*(\mathfrak{g}_n; \mathbf{C}) \\ \uparrow \iota & & \uparrow \iota \\ H^*(X_{nu}; \mathbf{C}) \otimes H^*(K_n; \mathbf{C}) & \xleftarrow{\alpha^* \otimes \iota} & H^*(\mathfrak{g}_n, \mathfrak{k}_{nv}; \mathbf{C}) \otimes H^*(\mathfrak{k}_{nv}; \mathbf{C}) \end{array}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes. Si l'on se limite aux degrés  $< (n-1)/4$ , pour lesquels  $\tilde{\beta}^*$  est un isomorphisme [4], alors  $\beta^*$  est un isomorphisme et on a de même un diagramme commutatif

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} H^*(\mathfrak{g}_n; \mathbf{C}) & \xrightarrow{\beta^*} & H^*(G_n(\mathbf{R})/\Gamma_n; \mathbf{C}) \\ \uparrow \iota & & \uparrow \iota \\ H^*(\mathfrak{g}_n, \mathfrak{k}_n; \mathbf{C}) \otimes H^*(\mathfrak{k}_{nv}; \mathbf{C}) & \xrightarrow{\tilde{\beta}^* \otimes \iota} & H^*(X_n/\Gamma_n; \mathbf{C}) \otimes H^*(K_n; \mathbf{C}). \end{array}$$

**5.3.** – L'algèbre de cohomologie  $H^*(\mathfrak{g}'_n(\mathbf{Q}); \mathbf{Q})$  est une algèbre extérieure sur un espace d'éléments primitifs  $P'$ , et  $P'^{2m+1}$  est de dimension 1 si  $1 \leq m < n$ , zéro sinon. On fixe un générateur  $\omega_{2m+1}$  de  $P'^{2m+1}$  et on note aussi de la même manière la forme rationnelle biinvariante sur  $SL_n(\mathbf{C})$  égale à  $\omega_{2m+1}$  à l'origine. De même, pour  $\sigma \in \Sigma$ ,  ${}^\sigma\omega_{2m+1}$  dénote la forme sur  ${}^\sigma\mathfrak{g}'_n \cong \mathfrak{g}'_n(\mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \sigma(\mathbf{F})$  définie par  $\omega_{2m}\omega_1$  ou la forme biinvariante sur  ${}^\sigma G'_n$  associée.

L'algèbre  $H^*(\mathfrak{g}_n; \mathbf{C})$  est le produit tensoriel des algèbres  $H^*(\mathfrak{g}_n; \mathbf{C})$ , donc de  $d$  copies de  $H^*(\mathfrak{g}'_n, \mathbf{C})$ . Par suite l'espace  $P^{2m+1}$  des éléments primitifs de  $H^{2m+1}(\mathfrak{g}_n; \mathbf{C})$  est de dimension  $d$  et admet les  ${}^\sigma\omega_{2m+1}$  ( $\sigma \in \Sigma$ ) comme base. La forme

$$R\omega_{2m+1} = |D|^{-(2m+1)/2} \gamma_\infty^{*-1} (\mathcal{A}_{\sigma \in \Sigma} {}^\sigma\omega_{2m+1}),$$

(cf. § 1 pour les notations) est une forme biinvariante sur  $G_n$ , définie sur  $\mathbf{Q}$ , dont la valeur à l'origine représente un générateur de

$$L_m(\mathfrak{g}_n, \mathbf{Q}) = \Lambda^d P^{2m+1}.$$

Soit  $L_m(G_{nu}; \mathbf{Q}) = \Lambda^d P^{2m+1}(G_{nu}; \mathbf{Q})$ .



**5.4. — PROPOSITION.** *On a*

$$\alpha^*(L_m(\mathfrak{g}_n; \mathbf{Q})) = (\pi i)^{d(m+1)} |D|^{-(2m+1)/2} L_m(G_{nu}; \mathbf{Q}).$$

En effet,  $\alpha^*$  est le produit d'isomorphismes

$$\alpha_\sigma^*: H^*(\mathfrak{g}'_n; \mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} H^*(({}^\sigma G'_n)_u; \mathbf{C}) \quad (\sigma \in \Sigma),$$

done en fait d'isomorphismes  $H^*(\mathfrak{g}'_n; \mathbf{C}) \rightarrow H^*(G'_{nu}; \mathbf{C})$ , auxquels on peut appliquer 4.3, ce qui entraîne la proposition.

**5.5. — THÉORÈME.** *Soit  $m \in \mathbf{N}$  et supposons  $n - 1 > 4d(2m + 1)$ . Posons  $Y_n = G_n(\mathbf{R})/\Gamma_n$ . Soit  $L_m(\Gamma_n; \mathbf{Q})$  la  $d$ -ième puissance extérieure de l'espace des éléments indécomposables de  $H^{2m+1}(Y_n; \mathbf{Q})$ . Alors*

$$(1) \quad \beta^*(L_m(\mathfrak{g}_n; \mathbf{Q})) = i^{r_1} \cdot \zeta_k(m + 1) \cdot L_m(Y_n; \mathbf{Q}).$$

Si (1) est vraie pour un sous-groupe arithmétique de  $G_n$ , elle l'est pour tous. D'autre part, soit  $q$  un entier  $\geq n$ . Le groupe  $G_n$  est naturellement plongé dans  $G_q$ . Si l'on choisit  $\Gamma_n$  et  $\Gamma_q$  tels que  $\Gamma_n = \Gamma_q \cap G_n$ , alors on a un diagramme commutatif

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} H^*(\mathfrak{g}_q; \mathbf{C}) & \xrightarrow{\beta^*} & H^*(G_q(\mathbf{R})/\Gamma_q; \mathbf{C}) \\ \downarrow \varrho & & \downarrow \varrho' \\ H^*(\mathfrak{g}_n; \mathbf{C}) & \xrightarrow{\beta^*} & H^*(G_n(\mathbf{R})/\Gamma_n; \mathbf{C}), \end{array}$$

où  $\varrho, \varrho'$  sont les homomorphismes associés à la restriction, et sont donc compatibles avec les structures rationnelles. De plus  $\mathfrak{g}_n$  est totalement non homologue à zéro dans  $\mathfrak{g}_q$  donc  $\varrho$  est surjective. Il en est alors de même pour  $\varrho'$  en dimensions  $< (n - 1)/4$ . L'assertion (1) pour  $q$  implique donc (1) pour  $n$ . Par conséquent, il suffit d'établir (1) pour  $n$  arbitrairement grand, et un choix quelconque de  $\Gamma_n$ . On supposera  $n > 4d(m + 1)^2$  impair et  $\Gamma_n$  sans torsion.

Soit  $s_j$  un nombre complexe tel que

$$(3) \quad \beta^*(L_j(\mathfrak{g}_n; \mathbf{Q})) = s_j \cdot L_j(Y_n; \mathbf{Q}).$$

Il est déterminé à un facteur rationnel près et nous devons montrer que l'on a

$$(4) \quad s_j \sim i^{r_1} \cdot \zeta_k(j + 1), \quad (1 \leq j \leq m).$$

Soient  $\omega_{2j+1}$ ,  $R\omega_{2j+1}$  comme en 4.2 et

$$(5) \quad \eta_j = A_{1 \leq s \leq j} R\omega_{2s+1}, \quad (1 \leq j \leq m).$$

Les nombres  $s_j$  sont définis en calculant modulo les éléments décomposables, i.e., en considérant des quotients de la cohomologie. Mais nous voulons nous placer dans la cohomologie elle-même; il faut alors avoir quelques renseignements sur les éléments décomposables ainsi introduits. Notons  $\omega'_{2j+1,\sigma}$  des éléments de  $H^{2j+1}(Y_n; \mathbf{Q})$  qui forment une base d'un supplémentaire dans  $H^{2j+1}(Y_n; \mathbf{Q})$  de l'espace des éléments décomposables, donc qui, par passage au quotient, définissent une base de l'espace des éléments indécomposables de degré  $2j + 1$ . On peut écrire

$$(6) \quad \beta^*(\omega_{2j+1}) = \sum_{\tau \in \Sigma} c_{j,\sigma}^\tau \cdot \omega'_{2j+1,\tau} + d_{j,\sigma}; \quad (c_{j,\sigma}^\tau \in \mathbf{C}),$$

où  $d_{j,\sigma}$  est dans la sous-algèbre de  $H^*(Y_n; \mathbf{C})$  engendrée par les  $\omega'_{2s+1,\sigma}$  avec  $s < j$ ,  $\sigma \in \Sigma$ . Par suite, si l'on pose

$$(7) \quad \omega_j'' = \prod_{\sigma \in \Sigma} \omega'_{2j+1,\sigma},$$

on a

$$\beta^*(R\omega_{2j+1}) = s'_j \cdot \omega_j'' + e_j, \quad \text{avec} \quad s'_j = |D|^{j+(1/2)} \cdot \det(c_{j,\sigma}^\tau),$$

et  $e_j$  dans l'idéal  $I_j$  engendré par les  $\omega'_{2s+1,\sigma}$  avec  $s < j$ . En passant au quotient par les éléments décomposables on voit que

$$(9) \quad s'_j \sim s_j.$$

D'autre part  $I_j$  est aussi l'idéal engendré par les  $\beta^*(\omega_{2s+1})$ . Il est donc annulé par  $\beta_*(\eta_{j-1})$ , d'où

$$\beta^*(\eta_j) = s'_1 \dots s'_j \cdot \omega_1'' \wedge \dots \wedge \omega_j'',$$

ou encore

$$(10) \quad \beta^*(\eta_j) \in s_1 \dots s_j \cdot H^{d(j^2+2j)}(Y_n; \mathbf{Q}).$$

Comme  $i^{r_s(2j+1)} \sim i^{r_s}$ , il suffit, pour établir (4) et le théorème, de montrer l'existence d'une sous-variété compacte  $Z_j$  de  $Y_n$ , de dimension  $j^2 + 2j$ ,

telle que

$$(11) \quad \int_{Z_j} \beta^*(\eta_j) \sim i^{r_s(j^2+2j)} \cdot \prod_{1 \leq s \leq j} \zeta_k(s+1), \quad (1 \leq j \leq m).$$

Fixons  $j \leq m$ . Soit  $D$  une algèbre à division centrale sur  $k$ , de rang  $(j+1)^2$  et soit  $H'$  le groupe algébrique semi-simple correspondant (2.3). On plonge  $D$  dans l'algèbre des matrices carrées d'ordre  $n$  par la représentation régulière, d'où des plongements de  $H'$  dans  $G'_n = \mathbf{SL}_n$  et de  $H = R_{k/\mathbf{Q}}H'$  dans  $G_n$ . Le groupe  $H \cap \Gamma_n$  est un sous-groupe arithmétique de  $H$  sans torsion et le quotient

$$Z_j = H(\mathbf{R}) / (H(\mathbf{R}) \cap \Gamma_n),$$

est donc une sous-variété compacte connexe orientable de  $Y_n$ . La forme  $\beta(R\eta_j)$  est une forme rationnelle sur  $G_n$ , biinvariante et définie sur  $\mathbf{Q}$ . Sa restriction à  $H$  est une forme rationnelle biinvariante définie sur  $\mathbf{Q}$  de degré maximum  $j^2 + 2j$ . Montrons qu'elle est *non nulle*. Avec nos conventions,  $\beta(R\eta_j)$  est une forme sur  $Y_n$ , mais cette assertion est indépendante de  $\Gamma_n$ . Convenons de désigner aussi par  $\beta$  l'application qui associe à une forme sur l'algèbre de Lie la forme invariante à droite sur le groupe qui lui est égale à l'origine. Nous devons donc montrer que la restriction de  $\beta(R\eta_j)$  à  $H(\mathbf{R})$ , ou, ce qui revient au même, à  $H(\mathbf{C})$ , est non nulle. Comme  $H(\mathbf{C})$  est le produit des  ${}^\sigma H'$  et que  $\nu_\infty^\sigma(R\eta_j)$  est, à un facteur numérique près, le produit des  ${}^\sigma \eta_j$  ( $\sigma \in \Sigma$ ), il suffit de faire voir que la restriction de  $\eta_j$  à  $H'_j$  est non nulle.

On a  $H(\mathbf{C}) = \mathbf{SL}_{j+1}(\mathbf{C})$ . Comme l'inclusion  $H' \rightarrow G'_n$  provient de la représentation régulière de  $D$  on peut supposer, après conjugaison, que le plongement de  $H(\mathbf{C})$  dans  $\mathbf{SL}_n(\mathbf{C})$  est le composé de l'application diagonale de  $H'(\mathbf{C})$  dans le produit de  $j+1$  copies  $H_s$  ( $1 \leq s \leq j+1$ ) de  $\mathbf{SL}_{j+1}(\mathbf{C})$  et de l'injection standard de ce produit dans  $\mathbf{SL}_n(\mathbf{C})$ . On a des isomorphismes naturels  $\nu_s: H' \rightarrow H_s$  ( $1 \leq s \leq j+1$ ) et les  $H_s$  sont conjugués au sous-groupe standard  $\mathbf{SL}_{j+1}(\mathbf{C})$  de  $\mathbf{SL}_n(\mathbf{C})$  défini par les  $j+1$  premières coordonnées. Les restrictions  $\tau_s$  de  $\beta(\eta_j)$  aux  $H_s$  sont des formes non nulles qui se correspondent par les isomorphismes  $\nu_t \circ \nu_s^{-1}$  ( $1 \leq s, t \leq j+1$ ). La restriction de  $\beta(\eta_j)$  à  $H'$  est donc égale à  $(j+1)\nu_1^*(\tau_1)$ .

Ainsi  $\beta(R\eta_j)$  a une restriction non nulle à  $H$ . L'égalité (11) résulte alors de 1.6 (2) et 2.4.

**5.6. – Remarque.** Nous avons utilisé le fait que  $\beta^*$  est un isomorphisme dans les dimensions considérées, par exemple pour pouvoir établir 5.5 (10). Mais la démonstration du fait que  $\beta(R\eta_j)$  a une intégrale non nulle sur  $Z_j$  en est évidemment indépendante. Cela montre donc en particulier, sans

utiliser [4], que  $\beta^*(R\eta_m) \neq 0$ . Vu la définition de  $\eta_m$ , cela entraîne que  $\beta^*$  est injectif en degrés  $\leq 2m + 1$ . Or on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathfrak{g}'_n; \mathbf{C}) & \xrightarrow{\beta^*} & H^*(Y_n; \mathbf{C}) \\ \uparrow \lambda^* & & \uparrow \\ H^*(\mathfrak{g}'_n, k'_n; \mathbf{C}) = I_{G'_n(\mathbf{R})} & \xrightarrow{j_r^*} & H^*(\Gamma_n; \mathbf{C}), \end{array}$$

et l'application  $\lambda^*$  est injective si  $n$  est impair (cf. 5.2). Par suite  $j_r^*$  est injectif en dimensions  $\leq 2m + 1$ . Cela donne donc une démonstration de l'injectivité différente de celle de [4], tout au moins jusqu'à une dimension qui est plus petite que  $(n - 1)/4$ , mais au moins égale à  $(dn)^\frac{1}{2}$ , et qui tend donc aussi vers l'infini avec  $n$ , ce qui suffit pour les applications à la cohomologie stable.

**6. - Les régulateurs supérieurs de  $k$ .**

**6.1.** - On conserve les notations de 5.1, 5.2. Soient  $m, n \in \mathbf{N}$  et supposons  $(n - 1) > 4d(2m + 1)$ . Soit  $I^{2m+1}(X_{nu}; \mathbf{Q})$  (resp.  $I^{2m+1}(\Gamma_n; \mathbf{Q})$ ) l'espace des éléments indécomposables de degré  $2m + 1$  de  $H^*(X_{nu}; \mathbf{Q})$  (resp.  $H^*(\Gamma_n; \mathbf{Q})$ ). Il est donc de dimension  $d_m$  (cf. [4: 11.4] et 1.4). Soit

$$(1) \quad L_m^r(X_{nu}; \mathbf{Q}) = \Lambda^{d_m} I^{2m+1}(X_{nu}; \mathbf{Q}), \quad L_m(\Gamma_n; \mathbf{Q}) = \Lambda^{d_m} I^{2m+1}(\Gamma_n; \mathbf{Q}).$$

**6.2.** - THÉORÈME. *L'homomorphisme canonique  $j_\Gamma^*$  (cf. 314) applique  $L_m(X_{nu}; \mathbf{Q})$  sur  $R'_m \cdot L_m(\Gamma_n; \mathbf{Q})$ , avec  $R'_m = |D|^\frac{1}{2} \cdot \zeta_k(m + 1) \cdot \pi^{-d(m+1)}$ .*

Les homomorphismes considérés ici sont compatibles avec la restriction  $SL_n \rightarrow SL_q$  ( $n \geq q > 4d(2m + 1) + 1$ ). Notre assertion pour  $n$  l'entraîne donc pour  $q$ . Il suffit par suite de la démontrer pour  $n$  arbitrairement grand. En particulier, on peut supposer  $n$  impair. Dans ce cas, 5.2 (1), (2) donnent un diagramme commutatif

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} H^*(G_{nu}; \mathbf{C}) & \xrightarrow{\mu^*} & H^*(Y_n; \mathbf{C}) \\ \uparrow \iota & & \uparrow \iota \\ H^*(X_{nu}; \mathbf{C}) \otimes H^*(K_n; \mathbf{C}) & \xrightarrow{\bar{\mu}^* \otimes \text{id.}} & H^*(\Gamma_n; \mathbf{C}) \otimes H^*(K_n; \mathbf{C}) \end{array}$$

avec

$$(2) \quad \mu^* = \beta^* \circ \alpha^{*-1}, \quad \bar{\mu}^* = \bar{\beta}^* \circ \bar{\alpha}^{*-1}.$$

Soit  $s_m$  (resp.  $t_m$ ) un nombre complexe tel que

$$(3) \quad \mu^*(L_m(G_{nu}; \mathbf{Q})) = s_m \cdot L_m(Y_n; \mathbf{Q}) \text{ (resp. } \bar{\mu}^*(L_m(X_{nu}; \mathbf{Q})) = t_m \cdot L_m(\Gamma_n; \mathbf{Q})) .$$

Soit  $L_m(K_n, \mathbf{Q})$  la  $(d - d_m)$ -ième puissance extérieure de l'espace des éléments primitifs de degré  $2m + 1$  de  $H^*(K_n; \mathbf{Q})$  (qui est de dimension  $d - d_m$ ). On a des isomorphismes canoniques

$$(4) \quad \begin{cases} L_m(G_{nu}; \mathbf{Q}) = L_m(X_{nu}; \mathbf{Q}) \otimes L_m(K_n; \mathbf{Q}), \\ L_m(Y_n; \mathbf{Q}) = L_m(\Gamma_n; \mathbf{Q}) \otimes L_m(K_n; \mathbf{Q}) \end{cases}$$

done, vu (1),  $s_m \sim t_m$ .

D'après 5.4 et 5.5 on peut écrire

$$(5) \quad s_m \sim (\pi i)^{-d(m+1)} \cdot |D|^{\frac{1}{2}} \cdot i^{r_1} \cdot \zeta_k(m+1) .$$

Mais, en dimension  $s$ , on a  $j_{\Gamma}^* = i^s \cdot \bar{\mu}^*$  vu 3.4 (4), donc

$$R'_m \sim i^{d_m(2m+1)} \cdot s_m \sim i^{d_m(2m+1)} \cdot t_m \sim \pi^{-d(m+1)} \cdot |D|^{\frac{1}{2}} \cdot \zeta_k(m+1) \cdot i^{r_1+d(m+1)+d_m} .$$

Comme  $d_m = r_1 + r_2$  si  $m$  est pair non nul et  $d_m = r_2$  si  $m$  est impair, l'exposant de  $i$  est toujours pair, ce qui établit le théorème.

**6.3. - REMARQUE.** Supposons  $k$  totalement réel et  $m$  impair. Alors  $d_m = 0$  donc (cf. 6.2 (4)), on a des isomorphismes

$$L_m(G_{nu}; \mathbf{Q}) \cong L_m(K_n; \mathbf{Q}) \cong L_m(Y_n; \mathbf{Q}),$$

et, vu les définitions,  $\mu^*$  devient l'identité de  $L_m(K_n; \mathbf{Q})$ . On a alors  $s_m = 1$ , et 6.2 fournit donc une démonstration du fait bien connu que  $|D|^{\frac{1}{2}} \cdot \zeta_k(m+1) \cdot \pi^{-d(m+1)}$  est un nombre rationnel sous ces hypothèses.

**6.4. - Les régulateurs de  $k$ .** Soient

$$X_u = \varinjlim_n X_{nu}, \quad SL_0 = \varinjlim_n SL_n \mathfrak{o},$$

(cf. [4: §§ 10, 11]). Définissons  $L_m(X_u; \mathbf{Q})$  et  $L_m(SL_0; \mathbf{Q})$  comme  $L_m(X_{nu}; \mathbf{Q})$  et  $L_m(\Gamma_n; \mathbf{Q})$ . On a aussi, vu [4: § 11])

$$(1) \quad j_{\Gamma}(L_m(X_u; \mathbf{Q})) = R'_m \cdot L_m(SL_0; \mathbf{Q}), \quad (m = 1, 2, \dots) .$$

Le nombre  $R'_m$  est défini à un facteur rationnel près. Nous voulons en fixer une normalisation. On sait que  $I^{2m+1}(X_u; \mathbf{Q})$  s'identifie au dual de  $\pi_{2m+1}(X_u) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$  et que de même  $I^{2m+1}(SL\mathfrak{o}; \mathbf{Q})$  s'identifie au dual de  $K_{2m+1} \mathfrak{v} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$  (cf. [4: 10.6, 12.1]). Par suite  $L_m(X_u; \mathbf{Q})$  (resp.  $L_m(SL\mathfrak{o}; \mathbf{Q})$ ) s'identifie au dual de

$$A^{d_m}(\pi_{2m+1}(X_u) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}) \text{ (resp. } (A^{d_m} K_{2m+1} \mathfrak{v} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}) \text{)} .$$

Soit  $x_m$  (resp.  $y_m$ ) un générateur du dual de

$$A^{d_m}(\pi_{2m+1}(X_u) \otimes 1) \text{ (resp. } A^{d_m}(K_{2m+1} \mathfrak{v} \otimes 1) \text{)} .$$

On définit alors le nombre  $R_m$  par l'égalité

$$(2) \quad j_{\Gamma}^*(x_m) = R_m \cdot y_m ,$$

en supposant de plus  $R_m > 0$ , ce qui est loisible, quitte à remplacer  $x_m$  par  $-x_m$ . On obtient ainsi le  $m$ -ième régulateur de  $k$  ( $m \geq 1$ ) défini dans [12: § 4]. La conjecture de [12] impliquerait en particulier  $R_m \sim c_m$ , avec

$$(3) \quad c_m > 0, \quad c_m = \pm \lim \zeta_k(s) \cdot (s + m)^{-d_m} .$$

Mais il résulte de l'équation fonctionnelle (cf. [15: VII, Thm. 3, p. 129]) que l'on a

$$(4) \quad c_m \sim \pi^{-d(m+1) + d_m} \cdot |D|^{\frac{1}{2}} \cdot \zeta_k(m + 1) .$$

Le théorème 6.2 montre que si l'on remplace dans cette égalité conjecturale le membre de gauche par  $c'_m = c_m \cdot \pi^{-d_m}$ , autrement dit par

$$(5) \quad c'_m = \pm \lim_{s \rightarrow -m} \zeta_k(s) \cdot (\pi(s + m))^{-d_m}, \quad c'_m > 0 ,$$

alors le quotient des deux membres est en tout cas un nombre rationnel.

**7. - Remarques générales sur l'homomorphisme  $j_{\Gamma}^*$ .**

**7.1.** - Nous revenons à la situation générale de 3.3 et notons  $B_K$  un espace classifiant pour  $K$  [2]. La fibration principale  $\sigma: G_u \rightarrow X_u$  est image réciproque de la fibration universelle  $E_K \rightarrow B_K$  par une application classifiante  $\varrho: X_u \rightarrow B_K$ , définie à homotopie près. Supposons  $\Gamma$  sans torsion. Alors

$\sigma': G(\mathbf{R})/\Gamma \rightarrow X/\omega$  est aussi une  $K$ -fibration principale. Soit  $\varrho': X/\Gamma \rightarrow B_K$  une application classifiante.

**7.2. PROPOSITION.** *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} H^*(X_u; \mathbf{R}) & \xrightarrow{j_R^*} & H^*(\Gamma; \mathbf{R}) \\ \swarrow \varrho^* & & \nearrow \varrho'^* \\ & H^*(B_K; \mathbf{R}) & \end{array}$$

*est commutatif.*

Cela se voit facilement en utilisant l'interprétation de  $\varrho^*$  et  $\varrho'^*$  à l'aide de l'homomorphisme de Chern-Weil. Indiquons brièvement comment. Les décompositions de Cartan 3.3 (1) définissent des connexions sur  $G_u$  et  $G(\mathbf{R})/\Gamma$  respectivement, dont les tenseurs de courbure sont donnés par la relation  $R(X, Y) = ad[X, Y]$  ( $X, Y$  dans  $\mathfrak{p}$ , ou dans  $\mathfrak{p}_u$ ). Soit d'autre part  $I_K$  l'algèbre des polynômes sur  $\mathfrak{k}$  invariants par la représentation adjointe de  $K$ . Il existe un isomorphisme canonique  $\delta: I_K \xrightarrow{\sim} H^*(B_K; \mathbf{R})$  tel que si  $P \in I_K^m$ , alors  $\varrho^*(\delta(P))$  (resp.  $\varrho'^*(\delta(P))$ ) est représentée par la classe de cohomologie de la forme fermée invariante par  $G_u$  (resp.  $G$ ) donnée par  $(X_1 \dots X_{2m}) \mapsto P(R(X_1, X_2), \dots, R(X_{2m-1}, X_{2m}))$ . Cela étant, la commutativité de (1) résulte de la définition même de  $j_R^*$ .

**7.3. - COROLLAIRE.** *Soit  $x \in H^*(X_u; \mathbf{Q})$ . Si  $x$  est contenu dans l'image de  $\varrho^*$ , alors  $j(x) \in H^*(\Gamma; \mathbf{Q})$ . Si  $G$  et  $K$  ont même rang, alors  $j^*(H^*(X_u; \mathbf{Q})) \subset H^*(\Gamma; \mathbf{Q})$ .*

Les homomorphismes  $\varrho^*$  et  $\varrho'^*$  proviennent d'applications continues, donc envoient la cohomologie rationnelle dans la cohomologie rationnelle. Vu 7.2, cela établit la première assertion. La deuxième résulte alors du fait que  $\varrho^*$  est surjectif si  $G_u$  et  $K$  sont de même rang [2: § 26].

**7.4. -** Supposons  $G$  connexe. D'après [10],  $H^*(X_u; \mathbf{Q}) = A \otimes B$ , où  $A = \text{Im } \varrho^*$  est la sous-algèbre caractéristique et est formée d'éléments de degrés pairs et  $B$  est une algèbre extérieure appliquée isomorphiquement par  $\sigma^*$  sur  $\text{Im } \sigma^*$ . Cette dernière est une algèbre extérieure engendrée par des éléments primitifs, comme on l'a déjà rappelé (5.2). D'après 7.3,  $j^*(A) \subset H^*(\Gamma; \mathbf{Q})$ . On a, pour  $m$  entier,  $I^{2m+1}(X_u; \mathbf{Q}) = I^{2m+1}(B)$ , donc aussi  $L_m(X_u; \mathbf{Q}) = L_m(B)$ . Le problème général dont nous avons discuté un cas particulier plus haut est donc d'étudier les nombres réels  $s_m$  tels que

$$j_R^*(L_m(X_u; \mathbf{Q})) = s_m \cdot L_m(\Gamma; \mathbf{Q}),$$

lorsque  $j_r^*$  est un isomorphisme en dimensions  $\leq 2m + 1$ . Dans certains cas classiques, on retrouve en fait certains des régulateurs du § 6. Par exemple soit  $G = G_{k/\mathbb{Q}} Sp_{2n}$ . Le plongement  $Sp_{2n} \rightarrow SL_{2n}$  donne lieu à un diagramme commutatif

$$\begin{CD} H^*(X_{2n,u}; \mathbb{R}) @>j_r^*>> H^*(SL_{2n}\mathfrak{o}; \mathbb{R}) \\ @Vv^*VV @VVv'^*V \\ H^*(X_u; \mathbb{R}) @>j_r^*>> H^*(Sp_{2n}\mathfrak{o}; \mathbb{R}), \end{CD}$$

où les flèches verticales sont les homomorphismes de restriction. La forme compacte standard de  $Sp_{2n}(\mathbb{C})$  est le groupe unitaire quaternionnien  $USp_n$  à  $n$  variables quaternionniennes. Sa cohomologie est une algèbre extérieure sur des générateurs de degrés  $2m + 1$ , avec  $m$  impair  $\leq n$ . L'espace dual de  $U(n) \backslash Sp_{2n}(\mathbb{R})$  est  $U(n) \backslash USp_n$ ; sa cohomologie réelle est concentrée en degrés pairs, et est égale à sa sous-algèbre caractéristique, puisque  $U(n)$  et  $USp_n$  ont même rang. On a, comme dans 3.4, une décomposition

$$X_u = (U(n) \backslash USp_n)^{r_1} \times (USp_n)^{r_2},$$

donc,

$$A = H^*(U(m) \backslash USp_n)^{r_1}, \quad B = H^*((USp_n)^{r_2}; \mathbb{Q}),$$

et  $I^{2m+1}(X_u; \mathbb{Q})$  est de dimension  $r_2$  pour  $m$  impair, nulle pour  $m$  pair  $> 0$ . Par conséquent, on n'a à considérer  $s_m$  que pour  $m$  impair. Mais  $USp_n$  est totalement non homologue à zéro dans  $SU_{2n}$  [2: § 30]. On en déduit immédiatement que  $v^*$  induit un isomorphisme de  $L_m(X_{2n,u}; \mathbb{Q})$  sur  $L_m(X_u; \mathbb{Q})$ , d'où  $s_m \sim R_m$  pour  $m$  impair. On a un résultat semblable si  $G = R_{k/\mathbb{Q}} SO_{n,n}$ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. ARTIN - J. TATE, *Class field theory*, Benjamin, New York, 1967.
- [2] A. BOREL, *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Annals of Math. (2), **57** (1953), pp. 115-207.
- [3] A. BOREL, *A spectral sequence for complex analytic bundles*, Appendix 2 in F. HIRZEBRUCH, *Topological methods in algebraic geometry*, 3rd ed., Springer (1966), pp. 202-217.
- [4] A. BOREL, *Stable real cohomological of arithmetic groups*, Annales E.N.S. (4), **7** (1974), pp. 235-272.
- [5] A. BOREL, *Cohomology of arithmetic groups*, Proc. Int. Congress Math. Vancouver 1974, vol. 1, pp. 435-442.



- [6] A. BOREL - F. HIRZEBRUCH, *Characteristic classes and homogeneous spaces - I*, Amer. Jour. Math., **80** (1958), pp. 458-536; *II, ibid.*, **81** (1959), pp. 315-382.
- [7] N. BOURBAKI, *Groupes et Algèbres de Lie*, Chap. 7, 8, Act. Sci. Ind. 1364, Hermann éd., Paris, 1975.
- [8] G. HOCHSCHILD - J.-P. SERRE, *Cohomology of Lie algebras*, Annals of Math. (2), **57** (1953), pp. 591-603.
- [9] J.-L. KOSZUL, *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*, Bull. Soc. Math. France, **78** (1950), pp. 65-127.
- [10] J.-L. KOSZUL, *Sur un type d'algèbres différentielles en rapport avec la transgression*, Coll. Topologie algébrique, Bruxelles 1950, G. Thone, Liège, 1951, pp. 73-81.
- [11] J. LERAY, *Sur l'homologie des groupes de Lie, des espaces homogènes et des espaces fibrés principaux*, Coll. Topologie algébrique, Bruxelles 1950, G. Thone, Liège 1951, pp. 101-115.
- [12] S. LICHTENBAUM, *Values of zeta-functions, étale cohomology, and algebraic K-theory, Algebraic K-theory - II*, Springer Lecture Notes in Mathematics, **342** (1973), pp. 489-501.
- [13] T. ONO, *Algebraic groups and discontinuous groups*, Nagoya Math. Jour., **27** (1966), pp. 279-322.
- [14] J.-P. SERRE, *Corps locaux*, Act. Sci. Ind. 1296, Hermann, Paris 1966.
- [15] A. WEIL, *Adeles and algebraic groups*, Notes by M. Demazure and T. Ono, Institute for Advanced Study, Princeton, N.J., 1961.
- [16] A. WEIL, *Basic number theory*, Grund. Math. Wiss., **144**, Springer 1973.