ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

A. BENSOUSSAN
J.-L. LIONS

Inéquations quasi variationnelles dépendant d'un paramètre

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 4, nº 2 (1977), p. 231-255
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1977_4_4_2_231_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Inéquations quasi variationnelles dépendant d'un paramètre.

A. BENSOUSSAN (*) - J-L. LIONS (**)

dédié à Hans Lewy

Introduction.

Par « *Inéquation Quasi Variationnelle* » — en abrégé I.Q.V. — on entend des problèmes du type suivant: soit V un espace de Hilbert sur $\boldsymbol{R}$, $K(v)$ une famille d'ensembles convexes fermés non vides dépendant de $v \in V$; soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue sur V, coercive (ce qui peut être affaibli dans les applications); on cherche alors u telle que

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} u \in K(u)\,, \\ a(u, v-u) \geqq (f, v-u)\,, \qquad \forall v \in K(u) \end{cases}$$

où $v \to (f, v)$ est une forme linéaire continue sur V.

Ces I.Q.V. ont été introduites dans Bensoussan-Lions [1] pour l'étude de problèmes de *contrôle impulsionnel.* Si $K(v) = K$ ne dépend pas de v on retrouve la notion d'*Inéquation Variationnelle* (I.V.) (cf. Stampacchia [1], Lions-Stampacchia [1]).

Pour le cas où $a(u, v)$ correspond à un opérateur elliptique du *2-ème ordre*, on connait (Bensoussan-Goursat-Lions [1], L. Tartar [1]) des résultats généraux d'*existence* de solution, un résultat d'unicité ayant été donné par Th. Laetsch [1].

On n'a, pour l'instant, que des résultats partiels sur la régularité de la solution (cf. en particulier Hanouzet-Joly [1]) (¹) et, semble-t-il, aucun résultat du type de ceux de Lewy-Stampacchia [1], Kinderlehrer [1] sur la

(*) Université Paris Dauphine.
(**) Collège de France.
(¹) Pour la régularité dans le cas des I.V. cf. Brézis-Stampacchia [1], Brézis [1].
Pervenuto alla Redazione il 1° Giugno 1976.

régularité de la surface libre liée aux I.Q.V. (les I.Q.V. correspondent en effet, dans le cas des problèmes de contrôle impulsionnel, à des problèmes à frontière libre et par àilleurs Baiocchi [1] a montré que certains problèmes à frontière libre de l'hydraulique peuvent se transformer en I.Q.V.; cf. aussi un problème de la physique des plasmas se ramenant à une I.Q.V. dans J. Mossino [1]).

Nous abordons ici les problèmes suivants:

1) supposant que l'on ait une famille de formes bilinéaires $a(\lambda; u, v)$ dépendant continûment (dans un sens convenable) du paramètre λ, et $u(\lambda)$ désignant la solution de l'I.Q.V. correspondante, $u(\lambda)$ dépend-elle continûment de λ?

Nous donnons au n. 1 une réponse positive dans le cas d'I.Q.V. correspondant à des problèmes de contrôle impulsionnel (la démonstration ainsi obtenue est donc *indirecte*) et au n. 2 nous donnons, pour un système particulier, une autre réponse positive, dans un problème où l'on a des résultats de régularité;

2) nous considérons ensuite une famille d'opérateurs A^ε (ou A^λ, si $\lambda = \varepsilon$) convergents en un sens très faible (la G-convergence; cf. de Giorgi-Spagnolo [1], Spagnolo [1], Sbordone [1]) vers $\mathcal{A}$ et nous montrons au n. 3 pour le même système que celui considéré au n. 2, que la solution de l'I.Q.V. relative à A^ε converge vers la solution relative à $\mathcal{A}$. Pour le cas d'I.V. un phénomène analogue avait été observé par Bensoussan-Lions-Papanicolaou [1] [2], Boccardo et Capuzzo-Dolcetta [1], Boccardo-Marcellini [1], Attouch et Konishi [1], Murat [1] et, pour d'autres propriétés dans ces directions, L. Carbone [1] ainsi que des résultats (non publiés) de L. Tartar. Nous terminons par un problème général ouvert dans ces directions.

On peut donner, par l'usage des I.Q.V. d'évolution (cf. Bensoussan-Lions [2], [3], [4], Mignot-Puel [1]) des extensions des résultats qui suivent à des I.Q.V. d'évolution avec paramètre. On n'explicite pas cela ici — cf. Bensoussan-Lions [5].

1. – I.Q.V. du contrôle impulsionnel.

1.1. *Hypothèses. Notations. Enoncés des résultats.*

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné de R^n, de frontière Γ régulière. On se donne des fonctions $g_\lambda\colon R^n \to R^n$, $\sigma_\lambda\colon R^n \to \mathcal{L}(R^n; R^n)$ où $\lambda \in [0, 1]$, vérifiant:

$$(1.1) \qquad |g_\lambda(x) - g_\lambda(x')| + |\sigma_\lambda(x) - \sigma_\lambda(x')|\,(^1) \leq K|x - x'|\,,$$

(1) La norme de σ_λ est $\operatorname{tr} \sigma_\lambda \sigma_\lambda^*$, où tr = trace.

$$|g_\lambda(x)| + |\sigma_\lambda(x)| \leqq K_0 \text{ (}^1\text{)}, \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} \lambda \to g_\lambda(x)\big(\text{resp. } \sigma_\lambda(x)\big) \text{ est continue de } [0, 1] \text{ dans} \\ C^0(R^n; R^n)\big(\text{resp. } C^0(\boldsymbol{R}^n; \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^n; \boldsymbol{R}^n))\big)\,. \end{cases} \tag{1.3}$$

On note

$$a_\lambda(x) = \tfrac{1}{2}\sigma_\lambda\sigma_\lambda^*(x)\,; \qquad a_\lambda = a_{ij}^\lambda \tag{1.4}$$

et on suppose que l'on a

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}^\lambda(x)\xi_i\xi_j \geqq \beta \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\,, \qquad \forall \xi_1, \ldots, \xi_n \in R,\ \beta > 0\,. \tag{1.5}$$

On se donne aussi

$$f \in C^0(\boldsymbol{R}^n)\,, \qquad f \geqq 0\,. \tag{1.6}$$

Soit $k > 0$, $\alpha > 0$ et $c(\xi)\colon R^n \to R$ vérifiant

$$\begin{cases} c(\xi) \to +\infty \text{ lorsque } |\xi| \to +\infty;\ c \text{ continue } \geqq 0\,, \\ c(\xi_1 + \xi_2) \leqq c(\xi_1) + c(\xi_2) \text{ si } \xi_1,\ \xi_2 \geqq 0\,; \\ c(o) = 0\,; \quad c(\xi_1) \leqq c(\xi_2) \quad \text{si } \xi_1 \leqq \xi_2 \text{ et } \xi_1 \geqq 0\,. \end{cases} \tag{1.7}$$

On définit maintenant un problème de contrôle impulsionnel. Tout d'abord à g_λ, σ_λ est associée une equation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dy_\lambda = g_\lambda(y_\lambda)\,dt + \sigma_\lambda(y_\lambda)\,dw\,, \\ y_\lambda(0) = x \end{cases} \tag{1.8}$$

où $w(t)$ est un processus de Wiener dans R^n, normalisé, construit sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On se donne une famille $\mathcal{F}^t$ croissante de sous σ-algèbres de $\mathcal{A}$, continue à droite pour laquelle $w(t)$ est une $\mathcal{F}^t$ martingale.

Un contrôle impulsionnel est un ensemble

$$\mathcal{V} = \{\theta^1, \xi^1; \theta^2, \xi^2; \ldots; \theta^n, \xi^n; \ldots\} \tag{1.9}$$

où les θ^i forment une suite croissante de temps d'arrêt de $\mathcal{F}^t$ telle que

(1) Seules les valeurs sur $\mathcal{O}$ interviendront, de sorte que (1.2) n'est pas restrictif.

$\theta^i \to +\infty$, lorsque $i \to +\infty$, et où

$$\xi^i \text{ est } \mathcal{F}^{\theta^i} \text{ mesurable}, \quad \xi^i \geqq 0 . \tag{1.10}$$

A tout contrôle $\mathcal{V}$ correspond la trajectoire $y_\lambda = y_{x\lambda}(t)$

$$\begin{cases} dy_\lambda = g_\lambda(y_\lambda)\,dt + \sigma_\lambda(y_\lambda)\,dw + \sum_i \xi_i \delta(t-\theta_i)dt \\ y_\lambda(0) = x . \end{cases} \tag{1.11}$$

On note $\tau_\lambda = \tau_{x\lambda}$ le temps de sortie de $y_\lambda(t)$ de l'ouvert $\mathcal{O}$. On pose

$$J_x^\lambda(\mathcal{V}) = E\Big(\int_0^{\tau_\lambda} \exp[-\alpha t] f(y_\lambda(t))\,dt + \sum_i \big(k + c(\xi_i)\big)\exp[-\alpha\theta_i]\Big) \tag{1.12}$$

et

$$u_\lambda(x) = \operatorname*{Inf}_{\mathcal{V}} J_x^\lambda(\mathcal{V}) . \tag{1.13}$$

On rappelle le résultat suivant (Bensoussan-Lions [4], [5]):

$$\begin{cases} u_\lambda \text{ appartient à } C_0(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O}) \text{ et est la solution maximum de l'I.Q.V.} \\ u_\lambda \leqq M(u_\lambda) p \cdot p , \\ a_\lambda(u_\lambda, v - u_\lambda) \geqq (f, v - u_\lambda) , \quad \forall v \in H_0^1,\ v \leqq M u_\lambda\, p \cdot p , \end{cases} \tag{1.14}$$

avec les notations suivantes:

$$M\varphi(x) = \operatorname*{Inf}_{\substack{x+\xi \in \bar{\mathcal{O}} \\ \xi \geqq 0}} [\varphi(x+\xi) + c(\xi)] , \tag{1.15}$$

$$a_\lambda(u, v) = \sum_{ij} \int_{\mathcal{O}} a_{ij}^\lambda(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \sum_i \int_{\mathcal{O}} a_i^\lambda(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v\,dx + \alpha \int_{\mathcal{O}} uv\,dx \tag{1.16}$$

où l'on a posé

$$a_i^\lambda(x) = -g_{\lambda,i}(x) + \sum_j \frac{\partial a_{i,j}^\lambda}{\partial x_j} . \tag{1.17}$$

Notre but est de démontrer le

THÉORÈME 1.1. *Sous les hypothèses* (1.1), (1.2), (1.3), (1.5), (1.6), (1.7), *on a*

$$\lambda \to u_\lambda \quad \textit{est continue de} \quad [0,1] \to C^0(\bar{\mathcal{O}}) . \tag{1.18}$$

1.2. *Démonstration du Théorème* 1.1.

Nous allons utiliser la formule de représentation (1.13).

Soit $T>0$, qui sera choisi ultérieurement et $\delta>0$. Soit

$$\mathcal{O}_\delta=\{\xi\in\mathcal{O}\,|\,d(\xi,\partial\mathcal{O})>\delta\}\,. \tag{1.19}$$

On pose

$$\begin{cases} \Lambda_\lambda^\delta=\Lambda_{x\lambda}^\delta=\inf\{s\geqq 0\,|\,y_\lambda(s-0)\notin\mathcal{O}_\delta\}\\ \tau_\lambda\;=\tau_{x\lambda}=\inf\{s\geqq 0\,|\,y_\lambda(s)\notin\mathcal{O}\}\\ \tau_\lambda^\delta\;=\tau_{x\lambda}^\delta=\inf\{s\geqq 0\,|\,y_\lambda(s)\notin\mathcal{O}_\delta\}\,. \end{cases} \tag{1.20}$$

Soit $\mathcal{V}_{x\lambda}^{\delta,T}$ l'ensemble des contrôles impulsionnels vérifiant les propriétés suivantes:

$$0\leqq\theta_i<\theta_{i+1}\quad \text{si } \theta_i<+\infty\,, \tag{1.21}$$

$$\operatorname{Max}\{i\,|\,\theta_i<T\}<+\infty\,;\quad \theta_i\geqq T\Rightarrow\theta_i=+\infty\,, \tag{1.22}$$

$$\theta_i\leqq\tau_\lambda^\delta=\Lambda_\lambda^\delta\quad \text{si } \theta_i<+\infty\,, \tag{1.23}$$

$$y_\lambda(\theta_i-0)\in\mathcal{O}_\delta\quad \text{si } \theta_i<+\infty\,, \tag{1.24}$$

$$y_\lambda(\tau_\lambda^\delta)\in\partial\mathcal{O}_\lambda^\delta\,. \tag{1.25}$$

Soit ψ_λ la solution de

$$\begin{cases} A_\lambda\psi_\lambda=1\,,\qquad \psi_\lambda|_\Gamma=0\,,\\ \text{avec}\\ A_\lambda=-\sum\limits_{ij}\dfrac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}^\lambda\dfrac{\partial}{\partial x_j}+\sum\limits_i a_i^\lambda\dfrac{\partial}{\partial x_i}\,, \end{cases} \tag{1.26}$$

qui possède une solution régulière vérifiant en particulier

$$\begin{cases} |\psi_\lambda(\xi)-\psi_\lambda(\xi')|\leqq C|\xi-\xi'|^\gamma\,,\qquad \gamma\in]0,1[\\ \text{où les constantes } C \text{ et } \gamma \text{ ne dépendent pas de } \lambda\,. \end{cases} \tag{1.27}$$

On va démontrer que l'on a

$$\Big|\inf_{\mathcal{V}\in\mathcal{V}_{x\lambda}^{\delta,T}} J_x^\lambda(\mathcal{V})-u_\lambda(x)\Big|\leqq C(\delta^\gamma+\exp[-\alpha T])) \tag{1.28}$$

où la constante C ne dépend ni de x, ni de λ, ni de δ, ni de T. Naturellement, on a

$$\inf_{\mathcal{V}\in\mathcal{V}_{x\lambda}^{\delta,T}} J_x^\lambda(\mathcal{V}) \geqq u_\lambda(x)\,. \tag{1.29}$$

Soit $\mathcal{V}$ un contrôle impulsionnel quelconque; on va construire un contrôle

$$\tilde{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}_{x\lambda}^{\delta,T}$$

tel que

$$J_x^\lambda(\tilde{\mathcal{V}}) \leqq J_x^\lambda(\mathcal{V}) + C(\delta^\gamma + \exp[-\alpha T]) \tag{1.30}$$

d'où l'on déduira aisément (1.28).

On peut sans perte de généralité supposer que le contrôle impulsionnel satisfait (1.21).

En effet, si plusieurs impulsions ont lieu en même temps, on les remplace par une seule impulsion dont l'intensité est la somme des intensités (c'est loisible). La trajectoire est inchangée. On obtient un contrôle impulsionnel dont le coût est plus bas, grâce à la sous linéarité de c et au fait que l'on ne paye qu'un seul coût fixe.

Soit

$$N = \operatorname{Max}\{i|\theta_i < T\}\,.$$

Si sur un ensemble de mesure non nulle $N = +\infty$, alors

$$\int_0^{\tau_\lambda} \exp[-\alpha t] f(y_\lambda(t))\,dt + \sum_i \big(k + c(\xi_i)\big)\exp[-\alpha\theta_i] \geqq Nk\exp[-\alpha T] = \infty$$

et donc $J_x^\lambda(\mathcal{V}) = +\infty$. On peut donc encore sans perte de généralité supposer que la première partie de (1.22) est vraie.

A partir de $\mathcal{V}$, on construit $\tilde{\mathcal{V}}$ de la manière suivante [1]:

$$\tilde\theta_i = \theta_i\,, \quad \tilde\xi_i = \xi_i \quad \text{si } \theta_i < \Lambda^\delta \wedge T \tag{1.31}$$

$$\tilde\theta_i = +\infty\ ^{(2)}\,, \quad \text{si } y(\theta_i - 0) \notin \mathcal{O}_\delta \quad \text{et } \theta_i = \Lambda^\delta < T \tag{1.32}$$

$$\tilde\theta_i = +\infty\,, \quad \text{si } \theta_i \geqq T\,, \quad \text{ou } \theta_i > \Lambda^\delta\,, \tag{1.33}$$

$$\begin{cases} \tilde\theta_i = \theta_i\,, \quad \tilde\xi_i = \lambda_i\xi_i\,, \quad \text{si } \theta_i = \Lambda^\delta \text{ et } \Lambda^\delta < T\,, \\ y(\theta_i - 0) \in \mathcal{O}_\delta\,, \quad \text{et } \lambda_i \in [0,1] \text{ est tel que } y(\theta_i - 0) + \lambda_i\xi_i \in \partial\mathcal{O}_\delta\,. \end{cases} \tag{1.34}$$

[1] On omet d'écrire l'indice λ.

[2] Lorsque $\tilde\theta_i = +\infty$, $\tilde\xi_i$ a une valeur arbitraire.

Dans le dernier cas, on notera que si $y(\theta_i - 0) \in \mathcal{O}_\delta$ et $\theta_i = \Lambda^\delta$, alors il y a un saut en θ_i qui fait sortir le processus de $\mathcal{O}_\delta$, donc il existe λ_i vérifiant (1.34). On définit bien par (1.31), ..., (1.34) un nouveau contrôle impulsionnel admissible. Remarquons que, au moins si (1.21) est vérifiée, alors

$$\Lambda^\delta \leqq \tau^\delta . \tag{1.35}$$

En effet (1.35) est évident si τ^δ est un point de continuité de la trajectoire y. Si τ^δ est un point de discontinuité, alors $y(\tau^\delta) \notin \mathcal{O}$ et la trajectoire se comporte comme une diffusion pendant un petit intervalle de temps après τ^δ, et donc sort de $\overline{\mathcal{O}}$, ce qui fait que $\forall \varepsilon$ on peut trouver s tel que $\tau^\delta < s \leqq \tau^\delta + \varepsilon$ et $y(s-0) \notin \mathcal{O}_\delta$, d'où $\Lambda^\delta \leqq s$, et donc (1.35). La trajectoire $\tilde{y}(s)$ coïncide avec $y(s)$ sur $[0, \Lambda^\delta \wedge T[$; de plus

$$\tilde{\tau}^\delta \wedge T = \Lambda^\delta \wedge T . \tag{1.36}$$

En effet si $\Lambda^\delta < T$ et si Λ^δ est un point de continuité de la trajectoire $y(s)$, alors d'après (1.32), $\tilde{y}(s)$ coïncide avec $y(s)$ sur $[0, \Lambda^\delta]$, et $\tau^\delta = \Lambda^\delta$, donc, d'après (1.33), $\tilde{y}(s)$ évolue librement après Λ^δ, d'où $\tilde{\tau}^\delta = \Lambda^\delta$. Si Λ^δ est un instant de saut de $y(s)$, alors ou bien $y(\Lambda^\delta - 0) \in \partial\mathcal{O}_\delta$ et alors d'après (1.32) $\tilde{y}(\Lambda^\delta) = y(\Lambda^\delta - 0)$, ou bien $y(\Lambda^\delta - 0) \in \mathcal{O}_\delta$ et alors $\Lambda^\delta = \tau^\delta$ et d'après (1.34) $\tilde{y}(\Lambda^\delta) \in \partial\mathcal{O}_\delta$. Donc encore $\tilde{\tau}^\delta = \Lambda^\delta$. Si $\Lambda^\delta \geqq T$, alors $\tilde{\tau}^\delta \geqq T$, d'où (1.36).

On vérifie par ailleurs que $\tilde{\mathcal{V}}$ satisfait (1.21), ..., (1.25). Comparons $J_x(\tilde{\mathcal{V}})$ et $J_x(\mathcal{V})$. Comme de $\mathcal{V}$ à $\tilde{\mathcal{V}}$ on diminue éventuellement le nombre d'impulsions et la taille des sauts, on a

$$J_x(\tilde{\mathcal{V}}) - J_x(\mathcal{V}) \leqq E\int_0^{\tilde{\tau}} f(\tilde{y}_x(t)) \exp[-\alpha t]dt - E\int_0^{\tau} f(y_x(t)) \exp[-\alpha t]dt = I . \tag{1.37}$$

Or

$$\begin{aligned} \mathrm{I} = E\int_0^{T\wedge\tilde{\tau}_\delta} f(\tilde{y}_x(t)) \exp[-\alpha t]\,dt + E\int_{T\wedge\tilde{\tau}_\delta}^{\tilde{\tau}} f(\tilde{y}_x(t)) \exp[-\alpha t]\,dt - \\ - E\int_0^{T\wedge\tau_\delta} f(y_x(t)) \exp[-\alpha t]\,dt - E\int_{T\wedge\tau_\delta}^{\tau} f(y_x(t)) \exp[-\alpha t]\,dt . \end{aligned}$$

Comme $T\wedge\tilde{\tau}_\delta = T\wedge\Lambda^\delta \leqq T\wedge\tau^\delta$, on obtient (puisque $f \geqq 0$),

$$\begin{aligned} \mathrm{I} \leqq E\int_{T\wedge\tilde{\tau}_\delta}^{\tilde{\tau}} f(\tilde{y}_x(t)) \exp[-\alpha t]\,dt - E\int_{T\wedge\tau_\delta}^{\tau} f(y_x(t)) \exp[-\alpha t]\,dt \leqq \\ \leqq E\int_{T\wedge\tilde{\tau}_\delta}^{\tilde{\tau}} f(\tilde{y}_x(t)) \exp[-\alpha t]\,dt = \mathrm{II} . \end{aligned}$$

Or

$$\mathrm{II} = E\int_{T\wedge\tilde\tau_\delta}^{T\wedge\tilde\tau} f(\tilde y_x(t))\exp[-\alpha t]\,dt + E\int_{T\wedge\tilde\tau}^{\tilde\tau} f(\tilde y_x(t))\exp[-\alpha t]\,dt = \mathrm{II}_1 + \mathrm{II}_2$$

et

$$\mathrm{II}_2 \leqq \Big(\int_T^{+\infty}\exp[-\alpha t]\,dt\Big)\max_{\bar{\mathcal{O}}} f \leqq C\exp[-\alpha T]\,.$$

Par ailleurs

$$\mathrm{II}_1 \leqq CE(T\wedge\tilde\tau - T\wedge\tilde\tau_\delta) \leqq CE(\tilde\tau - \tilde\tau_\delta)\,.$$

D'après (1.26) et la formule de Ito, on a

$$E\psi(\tilde y_x(\tilde\tau)) = E\psi(\tilde y_x(\tilde\tau_\delta)) - E(\tilde\tau - \tilde\tau_\delta)$$

soit, puisque $y_x(\tilde\tau)\in\partial\mathcal{O}$,

$$E(\tilde\tau - \tilde\tau_\delta) = E\psi(\tilde y_x(\tilde\tau_\delta))\,.$$

Or $\tilde y_x(\tilde\tau_\delta)\in\partial\mathcal{O}_\delta$, donc $\exists\xi_0\in\partial\mathcal{O}$ tel que

$$|\tilde y_x(\tilde\tau_\delta) - \xi_0| = d(\tilde y_x(\tilde\tau_\delta), \partial\mathcal{O}) = \delta\,.$$

Comme $\psi(\xi_0) = 0$, on obtient

$$E(\tilde\tau - \tilde\tau_\delta) = E\big(\psi(\tilde y_x(\tilde\tau_\delta)) - \psi(\xi_0)\big) \leqq C\delta^\gamma\,, \qquad \text{d'après (1.28)}\,.$$

On a bien démontré (1.30), d'où (1.28).

Soit $\mathcal{V}_\lambda$ un contrôle $\in\mathcal{V}_{x\lambda}^{\delta,T}$. On note y_λ la trajectoire correspondante, et $y_{\lambda'\lambda}$ la trajectoire correspondant au *même contrôle* $\mathcal{V}_\lambda$, mais avec les coefficients $g_{\lambda'}$, $\sigma_{\lambda'}$. On notera $\tau_{\lambda'\lambda}$, $\tau_{\lambda'\lambda}^\delta$ les quantités analogues à τ_λ, τ_λ^δ pour la trajectoire $y_{\lambda'\lambda}(t)$. Comme

$$\begin{aligned} dy_\lambda &= g_\lambda(y_\lambda)\,dt + \sigma_\lambda(y_\lambda)\,dw + \sum\delta(t-\theta_i)\xi_i\,dt,\\ dy_{\lambda'\lambda} &= g_{\lambda'}(y_{\lambda'\lambda})\,dt + \sigma_{\lambda'}(y_{\lambda'\lambda})\,dw + \sum\delta(t-\theta_i)\xi_i\,dt,\\ y_\lambda(0) &= y_{\lambda'\lambda}(0) = x\,, \end{aligned}$$

on a donc

$$d(y_{\lambda'\lambda} - y_\lambda) = \big(g_{\lambda'}(y_{\lambda'\lambda}) - g_\lambda(y_\lambda)\big)\,dt + \big(\sigma_{\lambda'}(y_{\lambda'\lambda}) - \sigma_\lambda(y_\lambda)\big)\,dw$$

d'où

$$\tag{1.38} \tfrac{1}{2}|y_{\lambda'\lambda}(t)-y_\lambda(t)|^2=\int_0^t\big(g_{\lambda'}(y_{\lambda'\lambda})-g_\lambda(y_\lambda)\big)\cdot(y_{\lambda'\lambda}-y_\lambda)\,ds+$$

$$+\int_0^t(y_{\lambda'\lambda}-y_\lambda)\cdot\big(\sigma_{\lambda'}(y_{\lambda'\lambda})-\sigma_\lambda(y_\lambda)\big)\,dw+$$

$$+\tfrac{1}{2}\int_0^t\operatorname{tr}\big(\sigma_{\lambda'}(y_{\lambda'\lambda})-\sigma_\lambda(y_\lambda)\big)\big(\sigma_{\lambda'}(y_{\lambda'\lambda})-\sigma_\lambda(y_\lambda)\big)^*\,ds\,.$$

D'où

$$\tag{1.39} E|y_{\lambda'\lambda}(t)-y_\lambda(t)|^2\leqq C_1\int_0^t E|y_{\lambda'\lambda}(s)-y_\lambda(s)|^2ds+$$

$$+\,C_2\Big[E\int_0^t|g_{\lambda,}(y_\lambda)-g_\lambda(y_\lambda)|^2ds+E\int_0^t|\sigma_{\lambda'}(y_\lambda)-\sigma_\lambda(y_\lambda)|^2ds\Big]\,.$$

Posons

$$\tag{1.40} \varphi_{\lambda'\lambda}=\sup_x|g_{\lambda'}(x)-g_\lambda(x)|^2+\sup_x|\sigma_{\lambda'}(x)-\sigma_\lambda(x)|^2\,.$$

D'après (1.3) on a

$$\tag{1.41} \varphi_{\lambda'\lambda}\to 0\quad\text{lorsque } \lambda'\to\lambda\,.$$

Donc

$$E|y_{\lambda'\lambda}(t)-y_\lambda(t)|^2\leqq C_1\int_0^t E|y_{\lambda'\lambda}(s)-y_\lambda(s)|^2ds+C_2t\varphi_{\lambda'\lambda}\,.$$

D'après l'inégalité de Gronwall, on voit que

$$\tag{1.42} \sup_{0\leqq t\leqq T}E|y_{\lambda'\lambda}(t)-y_\lambda(t)|^2\leqq C(T)\varphi_{\lambda'\lambda}\,.$$

Reprenant (1.38), on a

$$E\sup_{0\leqq t\leqq T}|y_{\lambda'\lambda}(t)-y_\lambda(t)|^2\leqq C_1E\int_0^T|y_{\lambda'\lambda}(s)-y_\lambda(s)|^2ds+C_2T\varphi_{\lambda'\lambda}$$

d'où

$$\tag{1.43} E\sup_{0\leqq t\leqq T}|y_{\lambda'\lambda}(t)-y_\lambda(t)|^2\leqq C(T)\varphi_{\lambda'\lambda}\,.$$

On déduit de (1.43)

$$P\left\{\sup_{0\leq t\leq T}|y_{\lambda'\lambda}(t)-y_\lambda(t)|>\frac{\delta}{2}\right\}\leq\frac{C(T)\delta_{\lambda'\lambda}}{\delta^2}. \tag{1.44}$$

On peut toujours supposer $x\in\mathcal{O}$ $\big($car si $x\in\partial\mathcal{O}$, alors $u_\lambda(x)=u_{\lambda'}(x)=0\big)$, et en prenant δ assez petit, que $x\in\mathcal{O}_\delta$.

Pour un évènement ω tel que

$$\sup_{0\leq t\leq T}|y_{\lambda'\lambda}(t)-y_\lambda(t)|\leq\frac{\delta}{2} \tag{1.45}$$

on a nécessairement

$$\Lambda_\lambda^\delta\wedge T\leq\tau_{\lambda'\lambda}\wedge T. \tag{1.46}$$

En effet pour $s\in[0,\Lambda_\lambda^\delta\wedge T[$, on a $y_\lambda(s)\in\mathcal{O}_\delta$, donc, d'après (1.45)

$$d\big(y_{\lambda'\lambda}(s),\partial\mathcal{O}\big)\geq d\big(y_\lambda(s),\partial\mathcal{O}\big)-|y_\lambda(s)-y_{\lambda'\lambda}(s)|\geq\delta-\frac{\delta}{2}$$

et donc $y_{\lambda'\lambda}(s)\in\mathcal{O}$ pour $s\in[0,\Lambda_\lambda^\delta\wedge T[$, d'où

$$T_{\lambda'\lambda}\geq\Lambda_\lambda^\delta\wedge T,\qquad \text{i.e. } (1.46).$$

Par conséquent, on a

$$P\{\Lambda_\lambda^\delta\wedge T>\tau_{\lambda'\lambda}\wedge T\}\leq\frac{C(T)\varphi_{\lambda'\lambda}}{\delta^2}. \tag{1.47}$$

Si $\Lambda_\lambda^\delta\wedge T<\tau_{\lambda'\lambda}\wedge T$, alors $\Lambda_\lambda^\delta<T$ et $\Lambda_\lambda^\delta<\tau_{\lambda'\lambda}$, donc $y_{\lambda'\lambda}(\Lambda_\lambda^\delta)\in\mathcal{O}$. Comme Λ_λ^δ est le dernier instant éventuel de saut $\big($cf. (1.23)$\big)$, alors $y_{\lambda'\lambda}$ est une diffusion après Λ_λ^δ, donc

$$\left\{\begin{array}{l}\text{si } \Lambda_\lambda^\delta\wedge T<\tau_{\lambda'\lambda}\wedge T, \quad \text{alors } y_{\lambda'\lambda}(\Lambda_\delta^\lambda\wedge T)\in\mathcal{O},\\ \text{et } y_{\lambda'\lambda}(s) \quad \text{est une diffusion après } \Lambda_\lambda^\delta\wedge T.\end{array}\right. \tag{1.48}$$

Posons

$$M=(\Lambda_\lambda^\delta\wedge T)\wedge(\tau_{\lambda'\lambda}\wedge T).$$

On utilise maintenant la fonction $\psi_\lambda(x,t)$ solution de

$$\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{\partial\psi_\lambda}{\partial t}+A_\lambda\psi_\lambda=1,\\ \psi_{\lambda|\Gamma}=0,\quad \psi_\lambda(x,T)=0.\end{array}\right. \tag{1.49}$$

On a, de manière analogue à (1.28)

$$(1.50)\qquad |\psi_\lambda(\xi, t) - \psi_\lambda(\xi', t)| \leqq C(T)|\xi - \xi'|^{\gamma_T}, \qquad \forall \xi, \xi' \in \bar{\mathcal{O}}$$

où $\gamma_T \in]0, 1[$, et $C(T)$ sont indépendants de λ.
Or

$$(1.51)\qquad E(\tau_{\lambda'\lambda} \wedge T - M) = E\psi_{\lambda'}(y_{\lambda'\lambda}(M), M) = E\psi_{\lambda'}(y_\lambda(\Lambda \wedge T), \Lambda \wedge T) + \\ + E(\psi_{\lambda'}(y_{\lambda'\lambda}(M)) - \psi_{\lambda'}(y_\lambda(M))) + E(\psi_{\lambda'}(y_\lambda(M)) - \psi_{\lambda'}(y_\lambda(\Lambda_\lambda^\delta \wedge T))) .$$

Mais

$$E\psi_{\lambda'}(y_\lambda(\Lambda_\lambda^\delta \wedge T), \Lambda_\lambda^\delta \wedge T) = E\psi_{\lambda'}(y_\lambda(\Lambda_\lambda^\delta), \Lambda_\lambda^\delta)\, \chi_{\Lambda_\lambda^\delta < T} .$$

Or $\Lambda_\lambda^\delta = \tau_\lambda^\delta$ et d'après (1.25) $y_\lambda(\Lambda_\lambda^\delta) \in \partial\mathcal{O}_\delta$ donc $\exists \xi_0 \in \partial\mathcal{O}$ tel que

$$|y_\lambda(\Lambda_\delta^\lambda) - \xi_0| = \delta$$

d'où

$$\chi_{\Lambda_\lambda^\delta < T}\psi_{\lambda'}(y_\lambda(\Lambda_\lambda^\delta), \Lambda_\lambda^\delta) = [\psi_{\lambda'}(y_\lambda(\Lambda_\lambda^\delta), \Lambda_\delta^\lambda) - \psi(\xi_0, \Lambda_\lambda^\delta)]\, \chi_{\Lambda_\lambda^\delta < T} \leqq C(T)\, \delta^{\gamma_T} .$$

Puis

$$E(\psi_{\lambda'}(y_\lambda(M)) - \psi_{\lambda'}(y_\lambda(\Lambda_\lambda^\delta \wedge T))) = E(\psi_\lambda(y_\lambda(M)) - \psi_{\lambda'}(y_\lambda(\Lambda_\lambda^\delta \wedge T)))\, \chi_{\Lambda_\lambda^\delta \wedge T > \tau_{\lambda'\lambda} \wedge T}$$

et d'après (1.47) cette quantité est majorée par $C(T)\varphi_{\lambda'\lambda}/\delta^2$.
Enfin, d'après (1.43)

$$E(\psi_{\lambda'}(y_{\lambda'\lambda}(M)) - \psi_{\lambda'}(y_\lambda(M))) \leqq C(T)\varphi_{\lambda'\lambda} .$$

Donc finalement

$$(1.52)\qquad E(\tau_{\lambda'\lambda} \wedge T - M) \leqq C(T)\left\{\delta^{\gamma_T} + \frac{\varphi_{\lambda'\lambda}}{\delta^2} + \varphi_{\lambda'\lambda}\right\}.$$

Alors

$$(1.53)\qquad E|\tau_{\lambda'\lambda} \wedge T - \tau_\lambda \wedge T| \leqq E(\tau_{\lambda'\lambda} \wedge T - M) + \\ + E|M - \Lambda_\lambda^\delta \wedge T| + E(\tau_\lambda \wedge T - \Lambda_\lambda^\delta \wedge T) \leqq C(T)\left\{\delta^{\gamma_T} + \frac{\varphi_{\lambda'\lambda}}{\delta^2} + \varphi_{\lambda'\lambda}\right\}.$$

On calcule alors

$$J_x^\lambda(\mathcal{V}_\lambda) - J_x^{\lambda'}(\mathcal{V}_\lambda) = E\int_0^{\tau_\lambda} f(y_\lambda(t)) \exp[-\alpha t]\,dt -$$

$$- E\int_0^{\tau_{\lambda'\lambda}} f(y_{\lambda'\lambda}(t)) \exp[-\alpha t]\,dt = E\int_0^{\tau_\lambda\wedge T}\big(f(y_\lambda(t)) - f(y_{\lambda'\lambda}(t))\big) \exp[-\alpha t]\,dt +$$

$$+ E\int_{\tau_\lambda\wedge T}^{\tau_\lambda} f(y_\lambda(t)) \exp[-\alpha t]\,dt - E\int_{\tau_{\lambda'\lambda}\wedge T}^{\tau_{\lambda'\lambda}} f(y_{\lambda'\lambda}(t)) \exp[-\alpha t]\,dt +$$

$$+ E\int_0^{\tau_\lambda\wedge T} f(y_{\lambda'\lambda}(t)) \exp[-\alpha t]\,dt - E\int_0^{\tau_{\lambda'\lambda}\wedge T} f(y_{\lambda'\lambda}(t)) \exp[-\alpha t]\,dt = \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}\,.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que f est uniformément continue et bornée sur R^n; si l'on pose

$$h(\varrho) = \sup_{|\xi-\xi'|\leq\varrho} |f(\xi) - f(\xi')|$$

alors $h(\varrho)\to 0$ lorsque $\varrho\to 0$. Donc, puisque h est croissante et bornée

$$|\mathrm{I}| \leq CEh\Big(\sup_{|\xi-\xi'|\leq\varrho} |y_{\lambda'\lambda}(t) - y_\lambda(t)|^2\Big) \leq C\left\{h\left(\frac{\delta}{2}\right) + \frac{C(T)\varphi_{\lambda'\lambda}}{\delta^2}\right\}.$$

Puis

$$|\mathrm{II}| \leq C\exp[-\alpha T]\,,$$

$$\mathrm{III} = E\int_{(\tau_\lambda\wedge T)\wedge(\tau_{\lambda'\lambda}\wedge T)}^{\tau_\lambda\wedge T} f(y_{\lambda'\lambda}(t)) \exp[-\alpha t]\,dt - E\int_{(\tau_\lambda\wedge T)\wedge(\tau_{\lambda'\lambda}\wedge T)}^{\tau_{\lambda'\lambda}\wedge T} f(y_{\lambda'\lambda}(t)) \exp[-\alpha t]\,dt$$

et d'après (1.53)

$$|\mathrm{III}| \leq C(T)\left\{\delta\gamma_T + \frac{\varphi_{\lambda'\lambda}}{\delta^2} + \varphi_{\lambda'\lambda}\right\}.$$

Donc finalement

$$(1.54)\qquad |J_y^\lambda(\mathcal{V}_\lambda) - J_x^{\lambda'}(\mathcal{V}_\lambda)| \leq C\left\{h\left(\frac{\delta}{2}\right) + \frac{C(T)\varphi_{\lambda'\lambda}}{\delta^2} + \right.$$

$$\left. + \exp[-\alpha T] + C(T)\left(\delta\gamma_T + \frac{\varphi_{\lambda'\lambda}}{\delta^2} + \varphi_{\lambda'\lambda}\right)\right\}.$$

On en déduit

$$u_{\lambda'}(x) \leq \inf_{\mathcal{V}_\lambda\in\mathcal{V}_{x\lambda}^{\delta,T}} J_x^\lambda(\mathcal{V}) + C\{\ \}$$

et d'après (1.28)

$$(1.55)\qquad u_{\lambda'}(x) - u_\lambda(x) \leqq C(\delta^\gamma + \exp[-\alpha T]) + C\{\ \}.$$

Mais échangeant les rôles de λ et λ', on obtient le même second membre. Donc

$$(1.56)\qquad \sup_{x\in\bar{\mathcal{O}}} |u_{\lambda'}(x) - u_\lambda(x)| \leqq C(\delta^\lambda + \exp[-\alpha T]) + C\left\{h\left(\frac{\delta}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{C(T)\varphi_{\lambda'\lambda}}{\delta^2} + \exp[-\alpha T] + C(T)\left(\delta^{\gamma_T} + \frac{\varphi_{\lambda'\lambda}}{\delta^2} + \varphi_{\lambda'\lambda}\right)\right\}.$$

En faisant tendre successivement $\lambda' \to \lambda$, puis $\delta \to 0$, puis $T \to +\infty$, on en déduit

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} \sup_{x\in\bar{\mathcal{O}}} |u_\lambda(x) - u_\lambda(x)| = 0$$

ce qui achève la démonstration du Théorème 1.1. ∎

REMARQUE 1.1. Des résultats analogues peuvent s'établir dans les cas non stationnaires, ou pour d'autres I.Q.V. susceptibles d'interprétation du type contrôle impulsionnel.

2. – Un système d'I.Q.V. avec paramètre.

2.1. *Enoncés des résultats.*

Dans l'ouvert borné $\mathcal{O}$ de frontière régulière Γ, on considère l'opérateur $A(\lambda)$ donné par

$$(2.1)\qquad A(\lambda)\varphi = -\sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,\lambda)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) + \sum a_j(x,\lambda)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + a_0(x,\lambda)\varphi\,;$$

pour chaque $\lambda \in [0, 1]$, on suppose que

$$(2.2)\qquad \begin{cases} a_{ij}(\cdot,\lambda), \quad a_j(\cdot,\lambda), \quad a_0(\cdot,\lambda) \in L^\infty(\mathcal{O}), \\ \sum a_{ij}(x,\lambda)\xi_i\xi_j \geqq \alpha \sum \xi_i^2, \quad \alpha > 0, \text{ p.p.} \\ \alpha \text{ indépendant de } \lambda \in [0,1]\,; \end{cases}$$

On suppose que $A(\lambda)$ *dépend continûment de* λ au sens suivant

$$(2.3)\qquad \begin{cases} \lambda \to a_{ij}(\cdot,\lambda),\ a_j(\cdot,\lambda),\ a_0(\cdot,\lambda) \text{ est continue de } [0,1] \to L^\infty(\mathcal{O}) \\ \text{faible étoile}. \end{cases}$$

On se donne par ailleurs

$$(2.4)\qquad k_i \geqq 0\,, \quad i = 1, 2\,, \quad k_1 + k_2 > 0\,;$$

$$(2.5)\qquad f_i \in L^\infty(\mathcal{O})\,, \quad f_i \geqq 0\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Pour λ fixé dans $[0, 1]$ on considère le système d'I.Q.V. que voici — qui correspond à un problème de contrôle impulsionnel (de tels systèmes ont été introduits dans Bensoussan-Lions [3]):

$$(2.6)\qquad \begin{cases} Au_1(\lambda) - f_1 \leqq 0\,, \quad u_1(\lambda) - k_2 - u_2(\lambda) \leqq 0\,, \\ \big(Au_1(\lambda) - f_1\big)\big(u_1(\lambda) - k_2 - u_2(\lambda)\big) = 0 \end{cases}$$

$$(2.7)\qquad \begin{cases} Au_2(\lambda) - f_2 \leqq 0\,, \quad u_2(\lambda) - k_1 - u_1(\lambda) \leqq 0\,, \\ \big(Au_2(\lambda) - f_2\big)\big(u_2(\lambda) - k_1 - u_1(\lambda)\big) = 0 \end{cases}$$

$$(2.8)\qquad u_1(\lambda) = u_2(\lambda) = 0 \quad \text{sur } \Gamma\,.$$

REMARQUE 2.1. Ce qui suit est valable, avec des changements mineurs, si l'on remplace les conditions de Dirichlet (2.8) par celles de Neumann

$$(2.9)\qquad \frac{\partial u_i}{\partial \nu_A}(\lambda) = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \qquad i = 1, 2\,. \ \blacksquare$$

On commencera par rappeler l'essentiel de la démonstration du résultat suivant, pour A fixé:

THÉORÈME 2.1. *On suppose que* (2.2), (2.4), (2.5) *ont lieu et que*

$$(2.10)\qquad a_{ij}(\cdot,\lambda) \in C^1(\overline{\mathcal{O}})\,.$$

Alors le problème (2.6), (2.7), (2.8) *admet une solution unique telle que*

$$(2.11)\qquad u_i(\lambda) \in W^{2,p}(\mathcal{O})\,, \quad \forall p \text{ fini},\ i = 1, 2\ (^1)\,.$$

(¹) $W^{2,p}(\mathcal{O}) = \left\{\varphi \middle| \varphi, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} \in L^p(\mathcal{O})\right\}$.

REMARQUE 2.2. On a également, sans l'hypothèse (2.10), existence et unicité d'une solution faible. ■

On démontrera ensuite le résultat suivant, exprimant la dépendance continue de la solution en λ:

THÉORÈME 2.2. *On suppose que* (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) *ont lieu et que* (*complément à* (2.10)) $\lambda \to a_{ij}(\cdot, \lambda)$ *est continue de* $[0,1] \to C^1(\mathcal{O})$. *Alors, lorsque* $\lambda \to \lambda_0$, *on a*:

$$u_i(\lambda) \to u_i(\lambda_0) \quad \textit{dans } W^{2,p}(\mathcal{O}) \textit{ faible}, \qquad i = 1, 2. \tag{2.12}$$

2.2. *Démonstration de l'unicité dans le Théorème* 2.1.

On va en fait démontrer *l'unicité de la solution faible*, par une adaptation de la méthode de Th. Laetsh [1]

Pour $u, v \in H^1(\mathcal{O})$ posons (¹)

$$a(\lambda; u, v) = a(u, v) = \sum \int_{\mathcal{O}} a_{ij}(x, \lambda) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \sum \int_{\mathcal{O}} a_j(x, \lambda) \frac{\partial u}{\partial x_j} v\, dx + \int_{\mathcal{O}} a_0(x, \lambda)\, u(x) v(x)\, dx\,; \tag{2.13}$$

alors la solution éventuelle du problème (2.6), (2.7), (2.8) satisfait à

$$\begin{cases} a(u_1, v_1 - u_1) \geqq (f_1, v_1 - u_1), & \forall v_1 \leqq k_2 + u_2,\ v_1 \in H_0^1(\mathcal{O}), \\ u_1 \in H_0^1(\mathcal{O}), \quad u_1 \leqq k_2 + u_2, & \\ a(u_2, v_2 - u_2) \geqq (f_2, v_2 - u_2), & \forall v_2 \leqq k_1 + u_1,\ v_2 \in H_0^1(\mathcal{O}), \\ u_2 \in H_0^1(\mathcal{O}), \quad u_2 \leqq k_1 + u_1. & \end{cases} \tag{2.14}$$

D'après la théorie des I.Q.V. stationnaires (Bensoussan-Goursat-Lions [1], L. Tartar [1]) on sait qu'il existe une solution maximum u_1, u_2 i.e. telle que, si w_1, w_2 est une autre solution éventuelle, on a:

$$w_i \leqq u_i, \qquad i = 1, 2. \tag{2.15}$$

Le théorème de Laetsch, loc. cit., donne *l'unicité* si

$$k_i > 0 \quad \text{pour } i = 1 \text{ et } 2.$$

(¹) On va supprimer l'indice λ dans cette démonstration, ainsi qu'au point 2.3, puisque λ est fixé.

L'adaptation suivante du raisonnement de Laetsch conduit à l'unicité sans l'hypothèse (2.4), donc avec l'un des k_i pouvant être nul. Nous ne restreignons pas la généralité en supposant que

$$k_1 > 0\,, \quad k_2 \geqq 0\,. \tag{2.16}$$

Suit α_i le plus grand réel $\geqq 0$ tel que

$$\alpha_i u_i \leqq w_i\,, \quad i = 1, 2\,; \tag{2.17}$$

α_i existe et d'après (2.15), $0 \leqq \alpha_i \leqq 1$.

Vérifions que l'on a nécessairement

$$\alpha_1 = \alpha_2\,. \tag{2.18}$$

On déduit de la 2-ème I.Q.V. (2.14) que

$$\begin{cases} a(\alpha_1 u_2, \alpha_1 v_2 - \alpha_1 u_2) \geqq (\alpha_1 f_2, \alpha_1 v_2 - \alpha_1 u_2)\,, \\ \alpha_1 v_2, \alpha_1 u_2 \leqq \alpha_1 k_1 + \alpha_1 u_1 \leqq k_1 + w_1 \end{cases} \tag{2.19}$$

et par définition

$$\begin{cases} a(w_2, v_2 - w_2) \geqq (f_2, w_2 - w_2)\,, \\ v_2, w_2 \leqq k_1 + w_1\,. \end{cases} \tag{2.20}$$

Comparant (2.19), (2.20), comme $\alpha_1 f_2 \leqq f_2$, on en déduit que $\alpha_1 u_2 \leqq w_2$ et donc d'après la définition de α_2: $\alpha_1 \leqq \alpha_2$.

Mais l'on peut échanger les rôles de u_1 et u_2 (le raisonnement précédent étant valable même si $k_1 = 0$), donc $\alpha_2 \leqq \alpha_1$ donc on a (2.18).

Montrons maintenant que $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ce qui montre que $u_i = w_i$.

Supposons par l'absurde que

$$0 \leqq \alpha_1 = \alpha_2 < 1\,.$$

On introduit alors β tel que

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 < \beta < 1\,, \\ \beta(k_1 + u_1) \leqq k_1 + \alpha_1 u_1\,, \quad \text{p.p.} \end{cases} \tag{2.21}$$

(ce qui est possible grâce au fait que $k_1 > 0$).

On a alors, d'après la 2-ème I.Q.V. (2.14):

$$a(\beta u_2, \beta v_2 - \beta u_2) \geqq (\beta f_2, \beta v_2 - \beta u_2),$$

$$\beta v_2, \ \beta u_2 \leqq \beta(k_1 + u_1) \leqq k_1 + \alpha_1 u_1 \leqq k_1 + w_1$$

et donc $\beta u_2 \leqq w_2$ donc $\alpha_2 < \beta$ ce qui contredit la définition de α_2. Donc $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. ■

2.3. *Démonstration de l'existence dans le Théorème* 2.1.

En supprimant toujours l'indice λ dans l'écriture — mais nous vérifierons dans ce qui suit que les estimations a priori obtenues sont *indépendantes* de λ — on introduit le *problème pénalisé* suivant: on désigne par $w_{1,\varepsilon}$, $w_{2\varepsilon}$ la solution de

$$\left\{\begin{aligned} &A w_{1\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\beta_{1\varepsilon}^{+} = f_1, \\ &A w_{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\beta_{2\varepsilon}^{+} = f_2, \qquad w_{i\varepsilon} = 0 \ \text{sur } \Gamma, \qquad i = 1, 2 \end{aligned}\right. \tag{2.22}$$

où

$$\beta_{1\varepsilon} = w_{1\varepsilon} - k_2 - w_{2\varepsilon}, \qquad \beta_{2\varepsilon} = w_{2\varepsilon} - k_1 - w_{1\varepsilon} \tag{2.23}$$

et où, comme d'ordinaire, $\varphi^+ = \sup(\varphi, 0)$.

Le problème (2.22) admet une solution unique par application du principe du maximum. On voit facilement que

$$0 \leqq w_{i\varepsilon} \leqq \Phi_i, \qquad i = 1, 2 \tag{2.24}$$

où Φ_i est la solution du problème de Dirichlet

$$A\Phi_i = f_i, \qquad \Phi_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \qquad \blacksquare \tag{2.25}$$

On note maintenant que, grâce à (2.4),

$$\beta_{1\varepsilon}^{+}\beta_{2\varepsilon}^{+} = 0. \tag{2.26}$$

On déduit de (2.22) que

$$A(w_{1\varepsilon} - w_{2\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta_{1\varepsilon}^{+} - \beta_{2\varepsilon}^{+}) = f_1 - f_2, \qquad w_{1\varepsilon} - w_{2\varepsilon} = 0 \ \text{sur } \Gamma, \tag{2.27}$$

et on multiplie scalairement (2.27) par $(\beta_{1\varepsilon}^{+})^{p-1}$, $p > 1$.

Comme $\beta_{1\varepsilon}^{+} = 0$ au bord de $\mathcal{O}$, on en déduit

$$a\big(w_{1\varepsilon} - w_{2\varepsilon}, (\beta_{1\varepsilon}^{+})^{p-1}\big) + \frac{1}{\varepsilon}\|\beta_{1\varepsilon}^{+}\|_{L^p(\mathcal{O})}^{p} = \big(f_1 - f_2, (\beta_{1\varepsilon}^{+})^{p-1}\big)$$

d'où, μ désignant un nombre > 0 quelconque

$$(2.28)\qquad a\big(\beta_{1\varepsilon}, (\beta_{1\varepsilon}^{+})^{p-1}\big) + \big(a_0 k_2 + \mu\beta_{1\varepsilon}, (\beta_{1\varepsilon}^{+})^{p-1}\big) + \\ + \frac{1}{\varepsilon}\|\beta_{1\varepsilon}^{+}\|_{L^p(\mathcal{O})}^{p} = \big(f_1 - f_2 + \mu\beta_{1\varepsilon}, (\beta_{1\varepsilon}^{+})^{p-1}\big)\,.$$

Mais $a\big(\varphi, (\varphi^{+})^{p-1}\big) = a\big(\varphi^{+}, (\varphi^{+})^{p-1}\big)$ et l'on peut choisir μ de façon que

$$a\big(\varphi^{+}, (\varphi^{+})^{p-1}\big) + \mu\big(\varphi^{+}, (\varphi^{+})^{p-1}\big) \geqq 0\,;$$

comme $\big(a_0 k_2, (\beta_{1\varepsilon}^{+})^{p-1}\big) \geqq 0$, on déduit donc de (2.28) que

$$(2.29)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}\|\beta_{1,\varepsilon}^{+}\|_{L^p(\mathcal{O})}^{p} \leqq \big(f_1 - f_2 + \mu\beta_{1\varepsilon}, (\beta_{1\varepsilon}^{+})^{p-1}\big)\,, \\ \mu \text{ fixé (indépendant de } \lambda) \end{cases}$$

D'après (2.24) et (2.5), on a:

$$\|f_1 - f_2 + \mu\beta_{1\varepsilon}\|_{L^{p'}(\mathcal{O})} \leqq C \qquad (\text{indépendant de } \lambda)$$

et (2.29) donne donc

$$(2.30)\qquad \left\|\frac{1}{\varepsilon}\beta_{1\varepsilon}^{+}\right\|_{L^p(\mathcal{O})} \leqq C = \text{constante indépendente de } \varepsilon \text{ et de } \lambda\,.$$

Echangeant, ce qui est loisible, les rôles de $w_{1\varepsilon}$ et $w_{2\varepsilon}$, on a aussi

$$(2.31)\qquad \left\|\frac{1}{\varepsilon}\beta_{2\varepsilon}^{+}\right\|_{L^p(\mathcal{O})} \leqq C\,.$$

Mais alors (2.22) donne

$$(2.32)\qquad \|Aw_{1\varepsilon}\|_{L^p(\mathcal{O})} + \|Aw_{2\varepsilon}\|_{L^p(\mathcal{O})} \leqq C\,.$$

Mais si $Aw_{i\varepsilon} \in L^p(\mathcal{O})$, $w_{i\varepsilon} = 0$ sur Γ alors, d'après la théorie classique des problèmes de Dirichlet dans $L^p(\mathcal{O})$, on a:

$$(2.33)\qquad \begin{cases} w_{i\varepsilon} \in W^{2,p}(\mathcal{O})\,, \quad \|w_{i\varepsilon}\|_{W^{2,p}(\mathcal{O})} \leqq C\,, \quad i = 1, 2\,, \\ \lambda \text{ fixé}\,. \end{cases}$$

Si en outre, comme dans le Théorème 2.2, on suppose que $\lambda \to a_{ij}(\cdot, \lambda)$ est continue de $[0, 1] \to C^1(\bar{\mathcal{O}})$, *alors* (2.33) *est uniforme en* λ. ∎

On sait par ailleurs que, lorsque $\varepsilon \to 0$, $w_{i\varepsilon} \to u_i$ dans $H^1(\mathcal{O})$ faible, u_i solution faible de l'I.Q.V. Cela, joint à (2.33) montre que la solution $u_i = u_i(\lambda)$ vérifie (2.11), ce qui achève la démonstration du Théorème 2.1 et montre en outre que, sous les hypothèses du Théorème 2.2 on a:

$$\|u_i(\lambda)\|_{W^{2,p}(\mathcal{O})} \leqq C\,, \qquad i = 1, 2,\ \lambda \in [0, 1]\,. \tag{2.34}$$

2.4. *Démonstration du Théorème* 2.2.

D'après (2.34) on peut extraire de $u_i(\lambda)$, lorsque $\lambda \to \lambda_0$, une suite encore notée $u_i(\lambda)$ telle que

$$u_i(\lambda) \to \psi_i \quad \text{dans } W^{2,p}(\mathcal{O}) \text{ faible}\,.$$

On a alors

$$A(\lambda) u_i(\lambda) \to A(\lambda_0) \psi_i \quad \text{dans } L^p(\mathcal{O}) \text{ faible}\,. \tag{2.35}$$

En effet, $A(\lambda)u_i(\lambda)$ demeure dans un borné de $L^p(\mathcal{O})$, et on peut donc supposer que pour une sous suite, $A(\lambda)u_i(\lambda) \to \chi_i$ dans $L^p(\mathcal{O})$ faible. Reste à voir que $\chi_i = A(\lambda_0)\psi_i$. Prenant $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$, il suffit donc de vérifier que

$$a\big(\lambda; u_i(\lambda), \varphi\big) \to a(\lambda_0; \psi_i, \varphi) \tag{2.36}$$

i.e. que, par exemple,

$$\int_{\mathcal{O}} a_{ij}(x, \lambda) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x, \lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx \to \int_{\mathcal{O}} a_{ij}(x, \lambda_0) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx\,. \tag{2.37}$$

Mais $(\partial u_i/\partial x_j)(x, \lambda) \to \partial\psi_i/\partial x_j$ dans $L^p(\mathcal{O})$ *fort*, d'où (2.37) et (2.35).

Donc $A(\lambda)u_1(\lambda) - f_1 \to A(\lambda_0)\psi_1 - f_1$ dans $L^p(\mathcal{O})$ faible et

$$u_1(\lambda) - k_2 - u_2(\lambda) \to \psi_1 - k_2 - \psi_2 \quad \text{dans } L^p(\mathcal{O}) \text{ fort}\,;$$

comme on peut prendre $p > 2$, on a donc

$$O = \big(A(\lambda)u_1(\lambda) - f_1\big)\big(u_1(\lambda) - k_2 - u_2(\lambda)\big) \to \big(A(\lambda_0)\psi_1 - f_1\big)(\psi_1 - k_2 - \psi_2)$$

dans $L^{p/2}(\mathcal{O})$ faible et même chose en échangeant les indices 1 et 2.

Donc on vérifie que ψ_1, ψ_2 est solution de l'I.Q.V. relative à λ_0, donc $\psi_i = u_i(\lambda_0)$ et (2.34) démontre alors le Théorème 2.2. ∎

3. – Homogénéisation d'I.Q.V.

3.1. *Position du problème.*

On considère $Y = \Pi]0, y_i^0[$ dans $\boldsymbol{R}^n$; une fonction $\in L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ est dite Y-périodique si elle est de période y_i^0 en y_i. On se donne

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{ij} \in L^\infty(\boldsymbol{R}^n)\,, & Y \text{ périodique}\,, \\ \sum a_{ij}(y)\xi_i\xi_j \geqq \alpha \sum \xi_i^2\,, & \alpha > 0, \text{ p.p. dans } Y\,. \end{array}\right. \tag{3.1}$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$ on considère alors l'opérateur A^ε donné par

$$A^\varepsilon \varphi = -\sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right). \tag{3.2}$$

REMARQUE 3.1. On pourrait aussi considérer un opérateur A^ε avec des termes du 1-er ordre et d'ordre 0, $a_j(x/\varepsilon)$, $a_0(x/\varepsilon)$, a_j et $a_0 \in L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, Y-périodiques, $a_0 \geqq 0$. ■

On se donne par ailleurs k_i, f_i comme au n. 2 et l'on désigne par $u_{i\varepsilon}$ *la* solution de l'I.Q.V.

$$\left|\begin{array}{l} A^\varepsilon u_{1\varepsilon} - f_1 \leqq 0\,, \quad u_{1\varepsilon} - k_2 - u_{2\varepsilon} \leqq 0\,, \\ (A^\varepsilon u_{1\varepsilon} - f_1)(u_{1\varepsilon} - k_2 - u_{2\varepsilon}) = 0\,, \\ A^\varepsilon u_{2\varepsilon} - f_2 \leqq 0\,, \quad u_{2\varepsilon} - k_1 - u_{1\varepsilon} \leqq 0\,, \\ (A^\varepsilon u_{2\varepsilon} - f_2)(u_{2\varepsilon} - k_1 - u_{1\varepsilon}) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}\,, \\ u_{i\varepsilon} = 0 \quad \text{sur } \Gamma\,. \end{array}\right. \tag{3.3}$$

On veut étudier le comportement de $u_{i\varepsilon}$ lorsque $\varepsilon \to 0$. ■

3.2. *Opérateur $\mathcal{A}$ homogénéisé de A^ε.*

On introduit (cf. De Giorgi-Spagnolo [1], Bensoussan-Lions-Papanicolaou [1]) *l'opérateur homogénéisé $\mathcal{A}$* associé à A^ε. Pour cela, posons

$$A_1 = -\sum \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \tag{3.4}$$

et soit χ^j la solution — définie à une constante additive près — de

$$(3.5)\quad \begin{cases} A_1(\chi^j - y_j) = 0\,, \quad (j = 1, \dots, n) \text{ dans } Y \\ \chi^j\ Y\text{-périodique (i.e. } \chi^j \text{ prend des valeurs égales sur les faces opposées de } Y). \end{cases}$$

On pose

$$(3.6)\quad a_1(\varphi, \psi) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_Y a_{ij}(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy\,,$$

et l'on définit

$$(3.7)\quad q_{ij} = \frac{1}{|Y|} a_1(\chi^j - y_j, \chi^i - y_i)\,, \qquad |Y| = \text{mesure de } Y\,.$$

Alors

$$(3.8)\quad \mathcal{A}\varphi = -\sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\,,$$

ce qui définit un opérateur *elliptique*.

On sait alors que si u^ε (resp. u) désigne la solution dans $H_0^1(\mathcal{O})$ de

$$(3.9)\quad A^\varepsilon u_\varepsilon = f$$

(resp. de

$$(3.10)\quad \mathcal{A}u = f)$$

on a

$$(3.11)\quad u^\varepsilon \to u \quad \text{dans } H_0^1(\mathcal{O}) \text{ faible lorsque } \varepsilon \to 0\,.$$

3.3. *Résultat sur l'homogénéisation de l'I.Q.V.* (3.3).

On va démontrer le

THÉORÈME 3.1. *On suppose que* (3.1) *a lieu et que* A^ε *et* $\mathcal{A}$ *sont définis par* (3.2) *et* (3.8). *Soit* $u_{1\varepsilon}$, $u_{2\varepsilon}$ *la solution dans* $H_0^1(\mathcal{O})$ *de* l'I.Q.V. (3.3) *satisfaisant à*

$$(3.12)\quad A^\varepsilon u_{i\varepsilon} \in L^2(\mathcal{O})\,.$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, *on a*:

$$(3.13)\quad \begin{cases} u_{i\varepsilon} \to u_i & \text{dans } H_0^1(\mathcal{O}) \text{ faible}\,, \\ A^\varepsilon u_{i\varepsilon} \to \mathcal{A}u_i & \text{dans } L^2(\mathcal{O}) \text{ faible} \end{cases}$$

où u_1, u_2 est la solution dans $H_0^1(\mathcal{O})$ avec $\mathcal{A}u_i \in L^2(\mathcal{O})$ de l'I.Q.V. « homogénéisée »

$$
(3.14)\qquad \begin{cases}
\mathcal{A}u_1 - f_1 \leqq 0\,, \quad u_1 - k_2 - u_2 \leqq 0\,,\\
(\mathcal{A}u_1 - f_1)(u_1 - k_2 - u_1) = 0\,,\\
\mathcal{A}u_2 - f_2 \leqq 0\,, \quad u_2 - k_1 - u_1 \leqq 0\,,\\
(\mathcal{A}u_2 - f_2)(u_2 - k_1 - u_1) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}\,,\\
u_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma\,.
\end{cases}
$$

3.4. *Démonstration du Théorème* 3.1.

D'après l'analogue des estimations (2.30), (2.31) avec $p = 2$ (et où ε joue évidemment un rôle différent!), on a:

$$
(3.15)\qquad \|u_{i\varepsilon}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqq C\,, \qquad i = 1, 2\,,
$$

$$
(3.16)\qquad |A^\varepsilon u_{i\varepsilon}| \leqq C\,, \qquad i = 1, 2\,,
$$

(où $|\ | =$ norme dans $L^2(\mathcal{O})$).

On peut alors extraire une sous suite, encore notée $u_{i\varepsilon}$, telle que

$$
(3.17)\qquad u_{i\varepsilon} \to \psi_i \quad \text{dans } H_0^1(\mathcal{O}) \text{ faible, } i = 1, 2
$$

$$
(3.18)\qquad A^\varepsilon u_{i\varepsilon} = g_{i\varepsilon} \to g_i \quad \text{dans } L^2(\mathcal{O}) \text{ faible}\,.
$$

Comme $u_{i\varepsilon} \to \psi_i$ dans $L^2(\mathcal{O})$ fort, on voit que, par exemple

$$
O = (A^\varepsilon u_{2\varepsilon} - f_1)(u_{1\varepsilon} - k_2 - u_{2\varepsilon}) \to (g_1 - f_1)(\psi_1 - k_2 - \psi_2)
$$

dans $L^1(\mathcal{O})$ faible, et par conséquent

$$
(3.19)\qquad \begin{cases}
g_1 - f_1 \leqq 0\,, \quad \psi_1 - k_2 - \psi_2 \leqq 0\,,\\
(g_1 - f_1)(\psi_1 - k_2 - \psi_2) = 0\,,\\
g_2 - f_2 \leqq 0\,, \quad \psi_2 - k_1 - \psi_1 \leqq 0\,,\\
(g_2 - f_2)(\psi_2 - k_1 - \psi_1) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}\,,\\
\psi_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma\,.
\end{cases}
$$

On aura alors $\psi_i = u_i$ et le Théorème si l'on montre que

$$
(3.20)\qquad g_i = \mathcal{A}\psi_i\,, \quad i = 1, 2\,.
$$

Mais si l'on définit $\theta_{i\varepsilon}$ par

$$A^{\varepsilon}\,\theta_{i\varepsilon}=g_{i\varepsilon}-g_i\,,\qquad \theta_{i\varepsilon}\in H_0^1(\mathcal{O}) \tag{3.21}$$

on a, d'après l'uniforme coercivité en ε de A^{ε}:

$$\|\theta_{i\varepsilon}\|_{H_0^1(\mathcal{O})}\leqq C\|g_{i\varepsilon}-g_i\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}\,. \tag{3.22}$$

Mais d'après (3.18), $g_{i\varepsilon}\to g_i$ dans $H^{-1}(\mathcal{O})$ *fort,* donc

$$\theta_{i\varepsilon}\to 0\qquad \text{dans } H_0^1(\mathcal{O}) \text{ fort, } i=1,2\,. \tag{3.23}$$

Alors

$$A^{\varepsilon}(u_{i\varepsilon}-\theta_{i\varepsilon})=g_i\,,\qquad u_{i\varepsilon}-\theta_{i\varepsilon}\in H_0^1(\mathcal{O}) \tag{3.24}$$

et d'après (3.11) on a:

$$\begin{cases} u_{i\varepsilon}-\theta_{i\varepsilon}\to \hat{u}_i & \text{dans } H_0^1(\mathcal{O}) \text{ faible}\,,\\ \mathcal{A}\hat{u}_i=g_i\,. \end{cases} \tag{3.25}$$

Mais d'après (3.17) et (3.23) $u_{i\varepsilon}\to\psi_i=\hat{u}_i$ et (3.25) montre (3.20).

3.5. *Problème ouvert.*

Soit $M(v)$ un opérateur comme au numéro 1

$$Mv(x)=\inf_{\xi\in\mathcal{U},\,x+\xi\in\mathcal{O}}[k+v(x+\xi)]\,. \tag{3.26}$$

Supposons $k>0$; soit u_ε *la* solution de

$$\begin{cases} A^{\varepsilon}u_\varepsilon-f\leqq 0\,, & u_\varepsilon-M(u_\varepsilon)\leqq 0\,,\\ (A^{\varepsilon}u_\varepsilon-f)\big(u_\varepsilon-M(u_\varepsilon)\big)=0 & \text{dans } \mathcal{O} \end{cases} \tag{3.27}$$

avec

$$u-M(u)\leqq 0\,,\frac{\partial u}{\partial\nu_{A^{\varepsilon}}}\leqq 0\,,\qquad (u-M(u))\,\frac{\partial u}{\partial\nu_{A^{\varepsilon}}}=0\quad \text{sur } \Gamma\,. \tag{3.28}$$

Soit par ailleurs $\mathcal{A}$ l'homogénéisé de A^ε et u la solution de l'I.Q.V.

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{A}u-f\leqq 0\,, \qquad u-M(u)\leqq 0\,, \\ (\mathcal{A}u-f)\big(u-M(u)\big)=0 \qquad \text{dans } \mathcal{O}\,, \end{array}\right. \tag{3.29}$$

$$u-M(u)\leqq 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}\leqq 0\,, \quad \big(u-M(u)\big)\frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}=0 \quad \text{sur } \Gamma\,. \tag{3.30}$$

A-t-on $u_\varepsilon \to u$ *dans* $H^1(\mathcal{O})$ *faible lorsque* $\varepsilon \to 0$?

BIBLIOGRAPHIE

H. Attouch - Y. Konishi:

[1] C.R.A.S., Paris, 1975.

C. Baiocchi:

[1] *I.Q.V. dans les problèmes à frontière libre en hydraulique,* Colloque I.M.U.-IUTAM, Marseille, Septembre 1975.

A. Bensoussan - J.-L. Lions:

[1] *Nouvelle formulation de problèmes de contrôle impulsionnel et applications,* C.R.A.S., **276** (1973), pp. 1189-1192.

[2] *Contrôle impulsionnel et inéquations quasi variationnelles d'évolution,* C.R.A.S., **276** (1973), pp. 1333-1338.

[3] *Contrôle impulsionnel et systèmes d'I.Q.V.*, C.R.A.S., **278** (1974), pp. 747-751.

[4] *Nouvelles méthodes en contrôle impulsionnel,* Applied Math. and Optimization, **1** (4) (1975), pp. 289-312.

[5] *Temps d'arrêt optimaux et Contrôle impulsionnel,* vol. 2 en préparation.

A. Bensoussan - M. Goursat - J.-L. Lions:

[1] *Contrôle impulsionnel et I.Q.V. stationnaires,* C.R.A.S., **276** (1973), pp. 1279-84.

A. Bensoussan - J.-L. Lions - G. Papanicolaou:

[1] *Sur quelques phénomènes asymptotiques stationnaires,* C.R.A.S., **281** (1975), pp. 89-94.

[2] *Sur quelques phénomènes asymptotiques d'évolution,* C.R.A.S., **281** (1975), pp. 317-322.

L. Boccardo - I. Capuzzo-Dolcetta:

[1] *G-convergenza e problema di Dirichlet unilaterale,* Boll. U.M.I.

L. Boccardo - P. Marcellini:

[1] *Sulla convergenza delle soluzioni di disequazioni variazionali,* Annali Mat. Pura ed Appl.

H. Brézis:

[1] *Problèmes unilatéraux,* J.M.P.A., 1972.

H. BRÉZIS - G. STAMPACCHIA:

[1] *Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques*, Bull. S.M.F., **96** (1968), pp 153-180.

L. CARBONE:

[1] *Sur la Γ-convergence ...*, J.M.P.A., 1976.

E. DE GIORGI - S. SPAGNOLO:

[1] *Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del 2° ordine*, Boll. U.M.I., **8** (1973), pp. 391-411.

B. HANOUZET - J.-L. JOLY:

[1] *Un résultat de régularité pour une I.Q.V. du type de Neumann intervenant dans un problème de contrôle impulsionnel*, C.R.A.S., 1975.

D. KINDERLEHRER:

[1] Conférence Congrès Int. Math., Vancouver, 1974, vol. 2, pp. 269-273.

TH. LAETSCH:

[1] *J. F. Analysis*, 1974.

H. LEWY - G. STAMPACCHIA:

[1] *On the regularity of the solution of a variational inequality*, C.P.A.M., **22** (1969), pp. 153-188.

J.-L. LIONS - G. STAMPACCHIA:

[1] *Variational inequalities*, Comm. Pure Applied Math., **20** (1967), pp. 493-519.

F. MIGNOT - J.-P. PUEL:

[1] Archive Rat. Mech. Anal., 1976.

J. MOSSINO:

[1] *Sur certaines I.Q.V. apparaissant en Physique*, C.R.A.S. (1975).

F. MURAT:

[1] *Homogénéisation d'inéquations ...*, à paraître.

C. SBORDONE:

[1] *Sulla G-convergenza di equazioni ellittiche e paraboliche*, Ric. di Mat., **24** (1975), pp. 76-136.

S. SPAGNOLO:

[1] *Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **22** (1968), pp. 571-597.

G. STAMPACCHIA:

[1] *Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes*, C.R.A.S., **258** (1964), pp. 4413-4416.

L. TARTAR:

[1] *I.Q.V. abstraites*, C.R.A.S., **278** (1974), pp. 1193-1196.