ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

O. A. LADYZHENSKAYA
A. M. VERSHIK

Sur l'évolution des mesures déterminées par les équations de Navier-Stokes et la résolution du problème de Cauchy pour l'équation statistique de E. Hopf

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 4, nº 2 (1977), p. 209-230
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1977_4_4_2_209_0>

Sur l'évolution des mesures détérminées par les équations de Navier-Stokes et la résolution du problème de Cauchy pour l'équation statistique de E. Hopf (*).

O. A. LADYZHENSKAYA - A. M. VERSHIK (**)

dédié à Jean Leray

Introduction.

Le but de notre travail est de construire les solutions de l'équation de Hopf, correspondant aux équations de Navier-Stokes avec conditions initiales et aux limites dans un domaine borné tridimensionel $\Omega \subset E^3$, le champs extérieur $f(x)$ étant arbitrairement fixé. Pour ce problème la question « générale » de l'existence d'une solution unique reste ouverte; d'autre part le théorème d'unicité des solutions faibles (qui existent) n'est pas vrai dans toutes les situations (voir le contre-exemple construit par l'un des auteurs [1], [2] pour les équations de Navier-Stokes avec des conditions aux limites légèrement différentes des conditions d'adhérence). Vu ces considérations il semble plus naturel de ne pas attaquer ce problème « directement », en construisant ses solutions à partir des conditions initiales concrètes, mais de le faire de manière « statistique », en étudiant l'évolution des mesures de probabilité données sur l'ensemble des conditions initiales. C'est cette approche que E. Hopf a utilisé dans son travail [3]. L'équation de Hopf est l'équation aux dérivées partielles qui exprime l'évolution de ces mesures de probabilité. C'est sur ces mesures que repose l'espoir de construire une théorie de la turbulence ([3], [4], [5]).

Les principaux résultats de notre travail sont les suivants: nous démontrons qu'à l'aide des solutions faibles on peut construire une application univoque W_t, $t \in [0, T]$, définie sur l'ensemble Y_R des données initiales et

(*) Ce travail a été présenté dans le cadre de l'école d'été d'Azerbaidjan (19-31 mai 1975). Un résumé est publié dans Doklady Akad. Nauk, 226, 1976, 1.
Traduit du russe par Madame Doina Cioranescu.

(**) Leningradskoie Otdeleine - Mat. Inst. AN SSSR, Leningrad.

Pervenuto alla Redazione il 21 Maggio 1976.

ayant la propriété de décrire l'évolution d'une mesure de probabilité μ, donnée sur la σ-algèbre minimale $\Sigma(Y_R)$ qui contient tous les ensembles analytiques de Y_R; cette description est faite par la formule habituelle $\mu_t(\omega) = \mu(W_t^{-1}(\omega))$ pour tout $\omega \subset \Sigma(Y_R)$ (théorème 1 est ses conséquences). Ensuite nous montrons que la fonction caractéristique de la mesure μ_t est solution du problème de Cauchy pour l'équation de Hopf et coïncide pour $t = 0$ avec la fonction caractéristique de la mesure μ (théorème 2).

Pour démontrer ces théorèmes on utilise diverses propriétés des solutions faibles des équations de Navier-Stokes, un théorème de section mesurable qui permet d'extraire de l'ensemble des solutions faibles un ensemble de solutions dépendant continuement des données initiales, ainsi que plusieurs résultats connus de la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

Dans le § 3 nous obtenons l'expression de l'équation de Hopf dans un repère de coordonées lié aux valeurs propres d'un problème spectral introduit auparavant.

1. – Préliminaries.

On considère un fluide visqueux incompressible remplissant un récipient Ω-domaine borné de l'espace euclidien tridimensionel E^3. La dynamique de ce fluide est régie par le système d'équations:

$$(1)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{v}_t - \nu\Delta\boldsymbol{v} + \sum_{k=1}^{3} v_k \boldsymbol{v}_{x_k} + \nabla\varrho = \boldsymbol{f}\ (^*) \\ \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0,\ \boldsymbol{v}/\partial\Omega = 0 \end{cases}$$

où $\boldsymbol{f} = \big(f_1(x), f_2(x), f_2(x), f_3(x)\big)$ est la force extérieure donnée. Les inconnues sont $\boldsymbol{v} = \big(v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t)\big)$ le vecteur vitesse et $\varrho(x,t)$ la pression.

On sait (voir [1]) que l'espace de Hilbert $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ des fonctions vecteurielles $\boldsymbol{u}(x) = \big(u_1(x), u_2(x), u_3(x)\big)$ telles que u_k, $k = 1, 2, 3 \in L_2(\Omega)$, est la somme orthogonale des expaces $Y \equiv J(\Omega)$ et $G(\Omega)$ où Y est la fermeture de $J^\infty(\Omega) = \{u | u \in \mathfrak{D}(\Omega),\ \operatorname{div} u = 0\}$ et où

$$G(\Omega) = \Big\{\nabla\varphi | \varphi \in W_2^1(\Omega), \int_\Omega \varphi\, dx = 0\Big\}.$$

Le produit scalaire et la norme dans $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ et Y sont définis par

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{u}(x)\boldsymbol{v}(x)\, dx$$

$$\|\boldsymbol{u}\|_{2,\Omega}^2 = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})^2.$$

(*) Ici et partout ailleurs le symbole $(\ )_{x_j}$ signifie la dérivation par rapport à x_j.

On utilisera également (cf. [1]) l'espace de Hilbert $H(\Omega)$ le complété de $J^{\infty}(\Omega)$ pour la norme:

$$\|\boldsymbol{u}\|_H \equiv \|\boldsymbol{u}_x\|_{2,\Omega} = \left(\int_\Omega \boldsymbol{u}_x^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \equiv \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} u_{ix_j}^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On désignera par $(\cdot,\cdot)_H$ le produit scalaire de H:

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_H = \int_\Omega \boldsymbol{u}_x \boldsymbol{v}_x\, dx \equiv \int_\Omega \sum_{i,j=1} u_{ix} v_{ix}\, dx\,.$$

Les espaces $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$, Y et $H(\Omega)$ sont complets et séparables.

On considére maintenant le problème spectral suivant:

$$\begin{cases} -\Delta\boldsymbol{\varphi} + \nabla q = \lambda\boldsymbol{\varphi} \\ \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} = 0 \\ \boldsymbol{\varphi}/\partial\Omega = 0\,. \end{cases}$$

Dans [1] on a démontré que le spèctre de ce problème est constitué des nombres positifs $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots$, $\lambda_k \to \infty$ pour $k \to \infty$ et que les fonctions propres correspondantes $\{\boldsymbol{\varphi}^k(\cdot)\}$ peuvent être choisies de manière à définir une base orthonormale dans Y. Alors $\{\boldsymbol{\varphi}^k\}$ est une base orthonormale dans $H(\Omega)$ et

$$(\boldsymbol{\varphi}^k, \boldsymbol{\varphi}^l) = \lambda_k \delta_k^l\,.$$

Donc tout élément $\boldsymbol{u} \in Y$ peut être écrit comme une série:

$$\boldsymbol{u}(\cdot) = \sum_{k=1}^{\infty} (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}^k)\boldsymbol{\varphi}^k(\cdot)$$

convergente vers $\boldsymbol{u}$ dans Y et l'on a:

$$\|\boldsymbol{u}\|_Y = \left[\sum_{k=1}^{\infty} (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Si $\boldsymbol{u} \in H(\Omega)$, cette série converge vers $\boldsymbol{u}$ dans la norme de $H(\Omega)$ et $\|\boldsymbol{u}\|_H = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}^k)^2\right]^{\frac{1}{2}}$. On peut, par conséquent, identifier $\boldsymbol{u} \in Y$ avec la suite numérique $\{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}^1), (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}^2), \dots\}$ telle que $\sum_{k=1}^{\infty} (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}^k)^2 < \infty$, et tout élément $\boldsymbol{u} \in H(\Omega)$ avec la suite numérique $\{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}^1), (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}^2), \dots\}$ vérifiant $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}^k)^2 < \infty$; dans les deux situations on écrira: $\boldsymbol{u} = \{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}^1), (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}^2), \dots\}$.

Si $f \in \boldsymbol{L}_2(\Omega)$, on peut considérer, sans perte de généralité, que $\boldsymbol{f} \in Y$ (on ajoute la partie gradient à $\nabla \varrho$).

Par la suite on considèrera donc $\boldsymbol{f}$ fixé dans Y.

On appelle *solution faible* (solution de Hopf) du problème (1) une fonction vectorielle $\boldsymbol{v}(x, t) \in L_2([0, T]; \boldsymbol{H}(\Omega))$ appartenant pour $\forall t \in [0, T]$ à l'espace Y, continue en t dans la topologie faible de Y, vérifiant pour $\forall t \in [0, T]$ l'inégalité:

$$\text{(2)} \qquad \|\boldsymbol{v}(\cdot, t)\|_Y^2 + 2\nu \int_0^t \|\boldsymbol{v}(\cdot, \tau)\|_H^2 \, d\tau \leqslant \|\boldsymbol{v}(\cdot, 0)\|_Y^2 + 2\int_0^t \big(\boldsymbol{f}(\cdot), \boldsymbol{v}(\cdot, \tau)\big) d\tau$$

et pour $\forall t \in [0, T]$ et $\forall \boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ l'équation intégrale:

$$\text{(3)} \qquad \big(\boldsymbol{v}(\cdot, t), \boldsymbol{\eta}(\cdot)\big) + \int_0^t \big[\nu\big(\boldsymbol{v}(\cdot, \tau), \boldsymbol{\eta}(\cdot)\big)_H - \big(v_k(\cdot, \tau)\boldsymbol{v}(\cdot, \tau), \boldsymbol{\eta}_{x_k}(\cdot)\big)\big] d\tau = \\ = \big(\boldsymbol{v}(\cdot, 0), \boldsymbol{\eta}(\cdot)\big) + t\big(\boldsymbol{f}(\cdot), \boldsymbol{\eta}(\cdot)\big)\,.$$

E. Hopf a démontré que pour tout $\boldsymbol{a} \in Y$ le système (1) a au moins une telle solution, égale à $\boldsymbol{a}$ pour $t = 0$ (voir [1]). De plus, la solution faible $\boldsymbol{v}(x, t)$ construite par E. Hopf (par la méthode de Faedo-Galerkin) vérifie la propriété suivante:

si $\boldsymbol{v}(x, 0)$ appartient à la boule

$$Y_R = \{\boldsymbol{a}\colon \boldsymbol{a} \in Y,\ \|\boldsymbol{a}\|_Y \leqslant R\}$$

avec $R \geqslant R_0 = (\nu\lambda_1)^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_Y$, alors $\boldsymbol{v}(\cdot, t) \in Y_R$ pour tout $t \in [0, T]$. En effet, cette solution est obtenue comme limite des solutions approchées $\{\boldsymbol{v}^N(x, t)\}_{N=1}^{\infty}$ qui vérifient la « relation de l'énergie »

$$\text{(4)} \qquad \frac{d}{dt}\|\boldsymbol{v}^N\|_Y^2 + 2\nu\|\boldsymbol{v}^N\|_H^2 = 2(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}^N) \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{v}^N(\cdot, t) \in \boldsymbol{H}(\Omega)\,.$$

Puisque pour tout $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ on a $\|\boldsymbol{u}\|_H^2 \geqslant \lambda_1\|\boldsymbol{u}\|_Y^2$ de (4) il résulte:

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{v}^N\|_Y^2 + 2\nu\lambda_1\|\boldsymbol{v}^N\|_Y^2 \leqslant 2\|\boldsymbol{f}\|_Y\|\boldsymbol{v}^N\|_Y$$

et ensuite:

$$\|\boldsymbol{v}^N\|_Y \left[\frac{d}{dt}\big(\|\boldsymbol{v}^N(\cdot, t)\|_Y \exp[\nu\lambda_1 t]\big) - \|\boldsymbol{f}\|_Y \exp[\nu\lambda_1 t]\right] \leqslant 0$$

d'où on obtient facilement que

$$\text{(5)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \|\boldsymbol{v}^N(\cdot, t)\|_Y \leqslant R \ \text{si} \\ \|\boldsymbol{v}^N(\cdot, 0)\|_Y \leqslant R \quad \text{et} \ \|\boldsymbol{f}\| \leqslant \nu\lambda_1 R\,. \end{array} \right.$$

La solution de Hopf $\boldsymbol{v}(\cdot, t)$ pour $\forall t \in [0, T]$ est la limite dans la topologie faible de Y d'une sous-suite $\{\boldsymbol{v}^{N_k}(\cdot, t)\}_{k=1}^{\infty}$ telle que $\boldsymbol{v}^{N_k}(\cdot, 0)$ converge vers la donnée initiale $\boldsymbol{v}(\cdot, 0)$ dans la norme de Y. La propriété (5) est conservée par le passage à la limite.

2. – Construction de l'ensemble mesurable des solutions.

Soit $V(\boldsymbol{a})$ l'ensemble de toutes les solutions faibles $\boldsymbol{v}(\cdot,\cdot)$ du système (1), égales à $\boldsymbol{a} \in Y_R$ pour $t = 0$ et contenues dans la boule Y_R (une telle solution $\boldsymbol{v}(\cdot, t)$ converge fortement vers $\boldsymbol{a}$ pour $t \to +0$ et $\|\boldsymbol{v}(\cdot, t)\|_Y \leqslant R$ pour $\forall t \in [0, T]$). On introduit dans la boule Y_R la métrique suivante:

$$\varrho_Y(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}') = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}', \boldsymbol{h}_k)| \big(1 + |(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}', \boldsymbol{h}_k)|\big)^{-1}$$

où $\{\boldsymbol{h}_k\}_{k=1,2,\dots}$, $\boldsymbol{h}_k \in Y_R$, est un ensemble dénombrable, dense dans Y_R.

La topologie définie par cette métrique (la ϱ-topologie de Y_R), équivalente à la topologie faible de Y, est bornée sur Y_R. On désignera par $\sigma(x)$ — la σ-algèbre des ensembles boreliens de l'espace métrique X et par $\Sigma(X)$ — son extension i.e. la σ-algèbre minimale contenant tous les ensembles analytiques de l'ensemble X (pour des détails voir § 39 [6]).*

On introduit un autre espace métrique Z_R, défini de la manière suivante:

$$Z_R = \{\boldsymbol{z}(t) \colon [0, T] \to Y_R,\ \boldsymbol{z} \text{ continue sur } [0, T] \text{ dans la } \varrho\text{-topologie de } Y_R\}.$$

Sur Z_R on définit une distance ϱ_Z par

$$\varrho_Z\big(\boldsymbol{z}(\cdot), \boldsymbol{z}'(\cdot)\big) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \varrho_Y\big(\boldsymbol{z}(t), \boldsymbol{z}'(t)\big) + \|\boldsymbol{z}(0) - \boldsymbol{z}'(0)\|_Y .$$

L'espace Z_R, comme d'ailleurs Y_R, est métrique complet et séparable. Toute solution faible de $V(\boldsymbol{a})$ est un élement de Z_R si $\boldsymbol{a} \in Y_R$. On a le résultat:

LEMME 1. *La famille des solutions faibles appartenant à $V(\boldsymbol{a})$ où $\boldsymbol{a}$ est un élement quelconque fixé de Y_R, est un ensemble fermé de l'espace Z_R. La famille des fonctions*

$$\{\boldsymbol{v}(\cdot, t) | \boldsymbol{v} \colon [0, T] \to Y_R,\ \boldsymbol{v}(\cdot,\cdot) \in V(\boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{a} \in Y_R\}$$

est uniformément continue en $t \in [0, T]$ dans la ϱ-topologie de Y_R. ■

(*) On rappelle que les ensembles analytiques sont les images continues des ensembles boreliens.

DÉMONSTRATION. On sait que pour tout $\boldsymbol{v}(\cdot,\cdot)\in V(\boldsymbol{a})$ on a $\|\boldsymbol{v}(\cdot,t)\|_Y\leqslant R$. Alors par (2) on a:

$$2\nu\int_0^T\|\boldsymbol{v}(\cdot,t)\|_H^2\,dt\leqslant R^2+2RT\|\boldsymbol{f}\|_Y\equiv C\,. \tag{6}$$

De (6) et de l'inégalité suivante:

$$\|u\|_{4,\Omega}\leqslant(\tfrac{4}{3})^{\frac{3}{8}}\|u\|_{2,\Omega}^{\frac{1}{4}}\|u\|_{2,\Omega}^{\frac{3}{4}} \tag{7}$$

vérifiée pour tout $u(x)\in\mathring{W}_2^1(\Omega)$ (voir l'inégalité (3) § 1 de [1]) il résulte:

$$\|\boldsymbol{v}\|_{4,\frac{8}{3},Q_T}\leqslant C_1 \tag{8}$$

où $\|\boldsymbol{v}\|_{q,r,Q_T}$ est la norme de l'espace de Banach $\boldsymbol{L}_{q,r}(Q_T)\big(Q_T=\Omega\times(0,T)\big)$ i.e.

$$\|\boldsymbol{v}\|_{q,r,Q_T}\equiv\Big(\int_0^T\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{v}(x,t)|^q\,dx\Big)^{r/q}dt\Big)^{1/r}\equiv\Big(\int_0^T\|\boldsymbol{v}(\cdot,t)\|_{q,\Omega}^r\,dt\Big)^{1/r}.$$

Pour démontrer là continuité uniforme de $\boldsymbol{v}(\cdot,t)$ par rapport à t on fait la différence des équations (3) écrites au point t et au point $t+\Delta t$:

$$\begin{aligned}&\big(\boldsymbol{v}(\cdot,t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(\cdot,t),\boldsymbol{\eta}(\cdot)\big)=\\&\quad=-\int_t^{t+\Delta t}\big[\nu\big(\boldsymbol{v}(\cdot,\tau),\boldsymbol{\eta}(\cdot)\big)_H-\big(v_k(\cdot,\tau)\boldsymbol{v}(\cdot,\tau),\boldsymbol{\eta}_{x_k}(\cdot)\big)\big]\,dt+\Delta t\big(\boldsymbol{f}(\cdot),\boldsymbol{\eta}(\cdot)\big)\end{aligned}$$

d'où, par l'inégalité de Hölder et des inégalités (6) et (7), on a, $\forall\boldsymbol{\eta}\in\boldsymbol{H}(\Omega)$ et $\forall\boldsymbol{v}\in V(\boldsymbol{a})$:

$$\begin{aligned}&\big|\big(\boldsymbol{v}(\cdot,t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(\cdot,t),\boldsymbol{\eta}(\cdot)\big)\big|\leqslant\nu\Big|\int_t^{t+\Delta t}\|\boldsymbol{v}(\cdot,\tau)\|_H\,d\tau\Big|\|\boldsymbol{\eta}\|_H+\\&+\Big|\int_t^{t+\Delta t}\|\boldsymbol{v}(\cdot,\tau)\|_{4,\Omega}^2\,d\tau\Big|\|\boldsymbol{\eta}\|_H+|\Delta t|\,\|\boldsymbol{f}\|_Y\|\boldsymbol{\eta}\|_Y\leqslant\\&\leqslant\|\boldsymbol{\eta}\|_H\Big[\nu|\Delta t|^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T\|\boldsymbol{v}(\cdot,\tau)\|_H^2\,d\tau\Big)^{\frac{1}{2}}+|\Delta t|^{\frac{1}{4}}\Big(\int_0^T\|\boldsymbol{v}(\cdot,\tau)\|_{4,\Omega}^{\frac{8}{3}}\,d\tau\Big)^{\frac{3}{4}}+\lambda_1^{-1}|\Delta t|\,\|\boldsymbol{f}\|_Y\Big]\leqslant\\&\leqslant C_2\|\boldsymbol{\eta}\|_H\cdot|\Delta t|^{\frac{1}{4}}.\end{aligned} \tag{9}$$

On estime maintenant $\varrho_Y\big(\boldsymbol{v}(\cdot,t+\Delta t),\boldsymbol{v}(\cdot,t)\big)$ en considerant, sans que cela entraîne une perte de généralité, que chaque $\boldsymbol{h}_k$ appartient à $\boldsymbol{H}(\Omega)$:

$$\varrho_Y\big(\boldsymbol{v}(\cdot,t+\Delta t),\boldsymbol{v}(\cdot,t)\big)=\sum_{k=1}^N\ldots+\sum_{k=N+1}^\infty\ldots\leqslant c_2|\Delta t|^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^N\|\boldsymbol{h}_k\|_H+2^{-N}.$$

Cette inégalité prouve la continuité uniforme en t de tous les $\boldsymbol{v}$ de $V(\boldsymbol{a})$ et même de tous les $\boldsymbol{v}$ de tout espace $V(\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{a} \in Y_R$ puisque les constantes c, c_1 et c_2 dépendent uniquement de R, T et Ω et sont les mêmes pour toutes les solutions faibles que nous avons introduites ici.

Nous allons maintenant démontrer que l'ensemble $V(\boldsymbol{a})$ est fermé dans Z_R. Soit $\{\boldsymbol{v}^{(m)}(\cdot,\cdot)\}_{m=1}^{\infty}$ une suite de $V(\boldsymbol{a})$, convergente dans la ϱ-topologie de Z_R vers un élément $\boldsymbol{z}(\cdot) \in Z_R$. Grâce à (6) on peut extraire de $\{\boldsymbol{v}^{(m)}(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ une sous-suite $\{\boldsymbol{v}^{(m_k)}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ dont les dérivées $\{\boldsymbol{v}_{x_l}^{(m_k)}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$, $l=1,2,3$ convergent faiblement dans $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$ vers $\boldsymbol{z}_{x_l}(x,t)$, $l=1,2,3$ resp. (*) On va prouver que $\{\boldsymbol{v}^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ converge fortement dans $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$. Dans ce but on utilisera une variante d'un lemme de Friedrichs (voir [7] pag. 529): pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre N_ε tel que pour $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ on ait:

$$\|u\|_{2,\Omega}^2 \leqslant \sum_{l=1}^{N_\varepsilon} (u, \psi^l)^2 + \varepsilon \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \tag{11}$$

où $\{\psi^l\}_{l=1}^{\infty}$ est une base quelconque fixée de $L_2(\Omega)$. Cette inégalité est vraie aussi pour les fonctions $\boldsymbol{u}$ de $H(\Omega)$; de plus on peut prendre comme base (dans Y) par exemple, les fonctions $\{\boldsymbol{\varphi}^l(x)\}_{l=1}^{\infty}$. Il resulte alors, puisque $\boldsymbol{v}^{(m)}(\cdot,\cdot) \in L_2([0,T]; H(\Omega))$ que pour tout m et pour tout ϱ on a:

$$\|\boldsymbol{v}^{(m)} - \boldsymbol{v}^{(\varrho)}\|_{2,Q_T}^2 \leqslant \sum_{l=1}^{N_\varepsilon} \int_0^T (\boldsymbol{v}^{(m)}(\cdot,t) - \boldsymbol{v}^{(\varrho)}(\cdot,t), \boldsymbol{\varphi}^l(\cdot))^2\, dt +$$
$$+ \varepsilon \|\boldsymbol{v}_x^{(m)} - \boldsymbol{v}_x^{(\varrho)}\|_{2,Q_T}^2 \leqslant \sum_{l=1}^{N_\varepsilon} \int_0^T (\boldsymbol{v}^{(m)}(\cdot,t) - \boldsymbol{v}^{(\varrho)}(\cdot,t), \boldsymbol{\varphi}^l(\cdot))^2\, dt + c\nu^{-1}\varepsilon\,.$$

Grâce à la $\varrho_{\boldsymbol{z}}$-convergence de $\{\boldsymbol{v}^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ le membre de droite de l'inégalité devient suffisamment petit pour m et r suffisamment grands et, par conséquent $\{\boldsymbol{v}^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ converge fortement vers $\boldsymbol{z}$ dans $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$. Tout élément de $\{\boldsymbol{v}^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$ vérifie l'inégalité (3) avec $\boldsymbol{v}(\cdot,0) = \boldsymbol{a}$. En passant à la limité dans cette inégalité on voit que la fonction limite $\boldsymbol{z}(x,t)$ la vérifié aussi avec $\boldsymbol{v}(\cdot,0) = \boldsymbol{a}$. Le seul terme qui pose un problème dans ce passage à la limite est $\int_0^t \int_\Omega v_l^{(m_k)} \boldsymbol{v}^{(m_k)} \boldsymbol{\eta}_{x_l}\, dx\, dt$. Or on a, en employant (7):

$$\left| \int_0^t \int_\Omega (v_l^{(m_k)} \boldsymbol{v}^{(m_k)} - z_l \boldsymbol{z}) \boldsymbol{\eta}_{x_l}\, dx\, dt \right| =$$
$$= \left| \int_0^t \int_\Omega [(v_l^{(m_k)} - z_l) \boldsymbol{v}^{(m_k)} \boldsymbol{\eta}_{x_l} + z_l (\boldsymbol{v}^{(m_k)} - \boldsymbol{z}) \boldsymbol{\eta}_{x_l}]\, dx\, dt \right| \leqslant$$

(*) On voit facilement que toute la suite $\{\boldsymbol{v}_{x_l}^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ converge faiblement dans $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$ vers $\boldsymbol{z}_{x_l}$.

$$\leqslant \int_0^T [\|v^{(m_k)} - z\|_{4,\Omega}\|v^{(m_k)}\|_{4,\Omega)} + \|z\|_{4,\Omega}\|v^{(m_k)} - z\|_{4,\Omega}]\, dt \|\eta\|_H \leqslant$$

$$\leqslant c_3 \int_0^T \|v^{(m_k)} - z\|^{\frac{1}{2}}_{2,\Omega}\|v^{(m_k)}_x - z_x\|^{\frac{1}{2}}_{2,\Omega}(\|v^{(m_k)}\|_{4,\Omega} + \|z\|_{4,\Omega})\, dt \|\eta\|_H \leqslant$$

$$\leqslant c_3 \|v^{(m_k)} - z\|^{\frac{1}{2}}_{2,2,Q_T}\|v^{(m_k)}_x - z_x\|^{\frac{1}{2}}_{2,2,Q_T}(\|v^{(m_k)}\|_{4,2,Q_T} + \|z\|_{4,2,Q_T})\|\eta\|_H \leqslant$$

$$\leqslant c_4 \|v^{(m_k)} - z\|^{\frac{1}{2}}_{2,2,Q_T}\|\eta\|_H \to 0 \qquad \text{pour } k \to \infty .$$

On a successivement utilisé (6), (7) et l'inégalité de Hölder.

On a donc démontré que la fonction $z(x, t)$ vérifie (3) avec $v(\cdot, 0) = a$. Il est evident que l'inégalité (2) est aussi vérifiée. Il résulte alors que $z \in V(a)$ et donc $V(a)$ est fermé dans Z_R. c.q.f.d.

Considerons maintenant l'application $V\colon Y_R \to \sigma(z_k)$ qui associe à tout $a \in Y_R$ l'ensemble fermé $V(a)$ de l'espace Z_R (V est une application multivoque de Y_R dans Z_R).

On a le résultat suivant:

LEMME 2. *L'ensemble* $\hat{A} = \{a \in Y_R | V(a) \cap A \neq \emptyset\}$ *appartient à* $\Sigma(Y_R)$ *pour* A *quelconque fermé de* Z_R. ■

DÉMONSTRATION. On observe d'abord que l'ensemble Z^0_R de tous les $V(a)$, $a \in Y_R$ est fermé dans Z_R. La démonstration est la même que celle du lemme 1 ($V(a)$ est fermé pour a fixé). En effet toutes les constants c, c_1, c_2 dans les inégalités établies au cours de la démonstration du lemme 1, ne dépendaient pas de a (si $a \in Y_R$). La seule différence intervient dans la démonstration de l'inégalité (2) pour la fonction $z(\cdot, \cdot)$ qui est la ϱ_Z-limite de $v^{(m)}(\cdot, \cdot)$ avec $v^{(m)}(\cdot, 0) = a^{(m)}$. Cette inégalité est vraie grâce à la définition même de la ϱ_Z-convergence qui assure la convergence forte de $a^{(m)}$ vers $z(\cdot, 0)$ dans Y_R, et, par conséquent la convergence de $\|a^{(m)}\|_Y$ vers $\|z(\cdot, 0)\|_Y$. Les convergences faibles de $v^{(m)}(\cdot, t)$ vers $z(\cdot, t)$ dans Y_R et de $v^{(m)}_{x_i}(x, t)$ (ou bien $v^{(m_k)}_{x_i}(x, t)$) vers $z_x(x, t)$ dans $L_2(Q_T)$ donnent respectivement:

$$\|z(\cdot, t)\|^2_Y \leqslant \varliminf_{m \to \infty} \|v^{(m)}(\cdot, t)\|^2_Y$$

et

$$\|z_{x_i}\|_{2,2,Q_T} \leqslant \varliminf_{m \to \infty} \|v^{(m)}_{x_i}\|_{2,2,Q_T}$$

On a donc prouvé que Z^0_R est fermé dans Z_R.

Considérons maintenant l'application $F_0\colon Z_R \to Y_R$ associant à $z(\cdot) \in Z_R$ sa « trace » $z(0)$. Il est clair que c'est une application continue dans les ϱ-topologies de Z_R et Y_R. L'ensemble qui nous interesse, $\hat{A}$, est évidemment $= F_0(Z_R^0 \cap A)$, donc est une image continue de l'ensemble $Z_R^0 \cap A$. On en déduit que $\hat{A} \subset \Sigma(Y_R)$. c.q.f.d.

Les lemmes 1 et 2 prouvent qu'on se trouve dans les conditions d'application des théorèmes de section mesurable pour l'application multivoque V de Y_R dans Z_R (*). En utilisant par exemple, le théorème de CASTAING [10] (voir aussi [8] et [10]) on obtient le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Il existe au plus une famille dénombrable de sections mesurables* $W^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (**) *de l'application* V; *tout* $W^{(n)}$ *est une application univoque mesurable de* $(Y_R, \Sigma(Y_R))$ *dans* $(Z_R, \Sigma(Z_R))$, $W^n(\boldsymbol{a}) \in V(\boldsymbol{a})$ *et* $\overline{\{W^{(n)}(\boldsymbol{a})\}_{n=1}^{\infty}} = V(\boldsymbol{a})$ ■

De cette manière, à tout $\boldsymbol{a}$ de Y_R on associe une trajectoire unique $W^{(n)}(\boldsymbol{a})$ (pour n fixe) qui est solution faible du système (1) et coincide avec $\boldsymbol{a}$ pour $t = 0$. Soit F_τ l'application de Z_R dans Y_R qui fait correspondre à tout élément $\boldsymbol{z}(\cdot) \in Z_R$ sa trace $\boldsymbol{z}(\tau)$. F_τ est une application continue. Il en résulte que l'application

$$W_t^{(n)} = F_t \circ W^{(n)} \colon \big(Y_R, \Sigma(Y_R)\big) \to \big(Y_R, \Sigma(Y_R)\big)$$

est mesurable pour tout $t \in [0, T]$, comme produit de deux applications mesurables par rapport à la σ-algèbre $\Sigma(Y_R)$ (on observe qu'en remplaçant $\Sigma(Y_R)$ par $\sigma(Y_R)$ on ne peut pas avoir des conclusions semblables; en effet, on ne sait pas si l'image d'un ensemble fermé par F_t est borelienne. Ceci explique l'introduction des σ-algèbres $\Sigma(Y_R)$).

Dire que la famille $\{W^{(n)}, n = 1, 2, \ldots\}$ est dense signifie que l'ensemble des trajectoires $\{W(\boldsymbol{a}); n = 1, 2, \ldots\}$ avec $\boldsymbol{a}$ fixé, est dense dans l'ensemble $V(\boldsymbol{a})$. Il en découle la densité de l'ensemble $\{W_t^{(n)}(\boldsymbol{a}), n = 1, \ldots\}$ d'éléments de Y_R dans $V_t(\boldsymbol{a}) = F_t \circ V(\boldsymbol{a})$ pour $\forall t \in [0, T]$.

3. – Evolution des mesures et obtention de l'équation de Hopf.

Soit $W^{(n)}$ un espace quelconque de la famille construite au § 2; nous allons le désigner par la suite par W. On se donne sur Y_R une mesure borelienne de probabilité μ (i.e. une mesure sur $(Y_R, \sigma(Y_R))$ et $\mu(Y_R) = 1$).

(*) L'origine des théorèmes de section mesurable est le théorème bien connu de Lusin-Iankov. Dans certaines situations ce théorème n'est pas suffisant. Une de ses variantes concerne les espaces mesurés [8] (pour une forme plus concise voir le travail récent [9]).

Nous utilisons un théorème s'appliquant à des espaces mesurables.

(**) Le cas échéant n peut prendre un nombre fini de valeurs ou même une seule (si la solution faible est unique).

On sait que μ s'étend d'une manière unique à une mesure de probabilité sur $\Sigma(Y_R)$ (voir, par exemple, [6]). Les applications W_t définissent l'evolution des mesures:

$$\mu_t(\omega) = \mu\big(W_t^{-1}(\omega)\big) \tag{12}$$

où ω est un ensemble arbitraire de $\Sigma(Y_R)$ et $W_t^{-1}(\omega)$ est l'image reciproque de ω par l'application continue mesurable W_t.

Cette famille de mesures $\{\mu_t\}$ vérifie une certaine équation différentielle d'évolution. Cette équation, linéaire dans l'espace des mesures, est obtenue formellement à partir des équations de Navier-Stokes. Un tel passage d'un système dynamique à un système dynamique pour les mesures est une chose bienconnue dans la théorie des systèmes de dimension finie (*). Cependant dans la théorie des systèmes dynamiques de dimension infinie surgissent de nouvelles difficultés et de nouveaux problèmes. N'ayant pas l'intention de les détailler (voir S. V. Fomin [12]) nous allons seulement rappeler que les équations pour les mesures sont intéressantes surtout dans le cas où on connaît certaines estimations à priori de la régularité des systèmes dynamiques initiaux. En gros, les mesures ne peuvent être dérivées que dans certaines directions « régulières ».

Il est commode de passer des mesures à leurs transformées de Fourier, i.e. d'écrire l'équation conjuguée de l'équation en mesures. C'est cette équation qui s'appelle équation de Hopf. Les mêmes difficultés dont on a parlé ci-dessus apparaissent et conduisent en fait à un problème concrét: quel sens faut-il donner aux opérateurs différentiels comprenant des dérivées partielles? C'est à cette question qu'on va repondre par la suite en montrant que la transformation de Fourier de la famille de mesures construites dans ce chapitre vérifie de façon correcte l'équation de Hopf.

Considérons maintenant la fonction caractéristique de la mesure μ:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}) = \int_{Y_R} \exp\,[i(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\theta})]\, d\mu(\boldsymbol{a}) \tag{13}$$

où $\boldsymbol{\theta} \in Y$; $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire dans Y. On s'intéresse à son évolution en temps, correspondant à l'évolution (12) de la mesure μ, i.e. à la fonction:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t) = \int_{Y_R} \exp\,[i(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\theta})]\, d\mu_t(\boldsymbol{a}) = \int_{Y_R} \exp\,[i(W_t(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{\theta}]\, d\mu(\boldsymbol{a})\,. \tag{14}$$

(*) Comparer avec la théorie des distributions de Gibbs, avec les équations des caractéristiques etc. Pour les systèmes de dimension infinie un tel passage est utilisé souvent en physique statistique.

E. Hopf a démontré (formellement, sans hypothèses supplémentaires) que $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)$ vérifie une certaine équation linéaire aux dérivées partielles. Nous allons l'écrire dans un repère de coordonées. Pour cela on utilisera l'écriture des éléments $\boldsymbol{\theta}$ de l'espace $Y = J(\Omega)$ et $H \equiv H(\Omega)$ sous la forme des suites numériques: $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots)$ où $\theta_k = (\boldsymbol{\theta}(\cdot), \boldsymbol{\varphi}^k(\cdot))$.

Précedemment (voir § 1) nous avons énoncé les propriétés de cette identification. La solution faible $W_t(\boldsymbol{a})$ sera par la suite représentée par:

$$W_t(\boldsymbol{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(t, \boldsymbol{a}) \boldsymbol{\varphi}^m(\cdot) . \tag{15}$$

Lemme 3. *La fonction $w_m(t, \boldsymbol{a})$ admet une dérivée généralisée par rapport à t, appartenant à $L_{\frac{4}{3}}([0, T])$ et vérifiant $p \cdot p$ en $t \in [0, T]$:*

$$\frac{dw_m(t, \boldsymbol{a})}{dt} = -\nu\lambda_m w_m(t, \boldsymbol{a}) + \sum_{j,k=1}^{\infty} a^{jk,m} w_j(t, \boldsymbol{a}) w_k(t, \boldsymbol{a}) + \hat{f}_m \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{16}$$

(les séries du membre de droite de (16) *convergent en ces points t). Si la frontière de Ω est une surface de classe C^2, les egalités* (16) *sont vraies sur un ensemble $\mathcal{T}'_a \subset [0, T]$ de mesure T; cet ensemble peut dépendre de $\boldsymbol{a}$, de plus il est la somme d'une famille dénombrable d'intervalles disjoints. Les fonctions $dw_m(t, \boldsymbol{a})/dt$ sont bornées sur $\mathcal{T}'_a$.* ∎

Démonstration. Pour m fixé la famille de fonctions $\{w_m(t, \boldsymbol{a})\}$ $\boldsymbol{a} \in Y_R$ est uniformément continue en $t \in [0, T]$. Grâce aux propriétés de $W_t(\boldsymbol{a})$ et $\{\boldsymbol{\varphi}^m(\cdot)\}$ la suite (15) converge (vers $W_t(\boldsymbol{a})$) pour $\forall t \in [0, T)$ dans la norme de Y et pour t appartenant à un ensemble $\mathcal{T}_a \subset [0, T]$ de mesure T, dans la norme H; de plus:

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_m^2(t, \boldsymbol{a}) = \|W_t(\boldsymbol{a})\|_Y^2 \leqslant R$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m w_m^2(t, \boldsymbol{a}) = \|W_t(\boldsymbol{a})\|_H^2 \in L_1([0, T]) .$$

L'ensemble $\mathcal{T}_a$ est constitué par tous les t pour lesquels $\|W_t(\boldsymbol{a})\|_H < \infty$; il dépend, en général, de $\boldsymbol{a}$. En plus, la suite (15) converge (vers $W_t(\boldsymbol{a})$) dans les normes de $L_2([0, T]; Y)$ et $L_2([0, T]; H)$, d'où, en utilisant aussi (7), résulte la convergence de (15) dans la norme de $\boldsymbol{L}_{4,8/3}(Q_T)$. Il en découle que pour $t \in \mathcal{T}_a$ et $m \geqslant 1$ on a:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sum_{s=1}^{3} \left(W_t(\boldsymbol{a})\right)_s W_t(\boldsymbol{a}) \boldsymbol{\varphi}^m_{x_s} dx = \\ = \int_\Omega \sum_{s=1}^{3} \sum_{j=1}^{\infty} w_j(t, \boldsymbol{a}) \varphi^j_s(x) \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t, \boldsymbol{a}) \boldsymbol{\varphi}^k(x) \boldsymbol{\varphi}^m_{x_s}(x)\, dx = \\ = \sum_{j,k=1}^{\infty} a^{jk,m} w_j(t, \boldsymbol{a}) w_k(t, \boldsymbol{a}) \end{aligned} \tag{17}$$

où

$$a^{jk,m} = \int_{\Omega} \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s^j(x) \boldsymbol{\varphi}^k(x) \boldsymbol{\varphi}_{x_s}^m(x)\, dx\,;$$

donc la serie infinie double converge vers l'expression du membre de gauche de (17). De plus, la convergence de la série (15) dans $\boldsymbol{L}_{4,8/3}(Q_T)$ assure la convergence de la serie (17) dans la norme de l'espace $L_{4/3}([0,T])$. Tous ces faits ainsi que l'identité (3) (où on a remplacé $\boldsymbol{\eta}(\cdot)$ par $\boldsymbol{\varphi}^m(\cdot)$) permettent d'écrire le système d'équations intégrales vérifié par $\{w_m(t, \boldsymbol{a})\}_{m=1}^{\infty}$:

$$\text{(18)} \qquad w_m(t, \boldsymbol{a}) = w_m(0, \boldsymbol{a}) + \\ + \int_0^t \left[-\nu \lambda_m w_m(\tau, \boldsymbol{a}) + \sum_{j,k=1}^{\infty} a^{jk,m} w_j(\tau, \boldsymbol{a}) w_k(\tau, \boldsymbol{a}) \right] d\tau + t\hat{f}_m$$

où $\hat{f}_m = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi}_m)$. De ces équations on déduit que $w_m(t, \boldsymbol{a})$ sont des fonctions absolument continues en t et qu'elles vérifient $p \cdot p$ en $t \in [0, T]$ le système (16). Si la frontière de Ω est une surface de classe C^2, alors le système (1) a les propriétés suivantes: i) si la donnée initiale $\boldsymbol{a}$ du système (1) appartient à $\boldsymbol{H}(\Omega)$, alors il existe une solution $\boldsymbol{v}(\cdot,\cdot)$ sur un intervalle $[0, \tau_a)$, qui appartient à $\boldsymbol{H}(\Omega)$ pour tout $t \in [0, \tau_a)$. Cette solution dépend continument de t dans la norme $\boldsymbol{H}(\Omega)$; de plus $\boldsymbol{v}_t$ et $\boldsymbol{v}_{x_i x_j} \in L_2([0, \tau_a - \varepsilon]; \boldsymbol{L}_2(\Omega))$ pour tout $\varepsilon \in (0, \tau_a)$ (voir th. 9, § 4, Chap. VI, [1]). ii) si la norme $\|\boldsymbol{v}(\cdot, t)\|_{\boldsymbol{H}}$ de cette solution $\boldsymbol{v}(\cdot,\cdot)$ ne dépasse pas une constante quelconque pour $t \uparrow \tau_a$, alors $\boldsymbol{v}(\cdot,\cdot)$ peut être prolongée (en gardant les mêmes propriétés de régularité) à un intervalle plus grand $[0, \tau_a + \varepsilon]$. Autrement dit, $[0, \tau_a)$ est un intervalle propre d'existence pour cette solution $\boldsymbol{v}(\cdot,\cdot)$ si $\|\boldsymbol{v}(\cdot, t_n)\|_H \to \infty$ pour une sous-suite quelconque $t_n \uparrow \tau_a$, iii) toute solution faible $W_t(\boldsymbol{a})$ du système (1) coïncide avec la solution $\boldsymbol{v}(\cdot,\cdot)$, décrite dans § 1 (voir (13)).

Dans la suite on supposera que $\partial\Omega$ est de classe C^2. Alors il résulte des propriétés i-iii) que l'ensemble $\mathcal{C}_a$ est une somme dénombrable d'intervalles du type $[\tau, \tau + \varepsilon)$; aux points $t \in (\tau, \tau + \varepsilon)$ $W_t(\boldsymbol{a})$ est continue en t dans la norme de $\boldsymbol{H}(\Omega)$, aux points $t = \tau$ (les extrémités de gauche des intervalles) $W_t(\boldsymbol{a})$ est continue à droite dans la norme de $\boldsymbol{H}(\Omega)$. Par contre, en faisant tendre à gauche t vers τ $\|W_t(\boldsymbol{a})\|$ n'est plus bornées. On désignera par $\mathcal{C}'_a$ l'ensemble ouvert des points t, obtenu à partir de $\mathcal{C}_a$ en enlevant les extrémités de gauche des intervalles $[\tau, \tau + \varepsilon)$. Il est évident que les égalités (16) sont vraies aux points $t \in \mathcal{C}'_a$ (puisque les membres de droite des systèmes (16) sont des fonctions continues en t). La dérivée à droite $\partial w_m(t, \boldsymbol{a})/\partial t$ existe aux points $t \in \partial\mathcal{C}_a = \mathcal{C}_a - \mathcal{C}'_a$ et elle est égale au membre de droite de (16). On a déjà démontré (voir [17] et ses conséquences) que les membres de droite de (16) sont des fonctions de $L_{\frac{4}{3}}((0, T))$. Dans le cas où $\partial\Omega$ est de classe C^2 ces fonctions sont bornées sur $[0, T]$. En effet, si Ω a une telle frontière, les fonctions propres $\boldsymbol{\varphi}^m(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ (voir th. 6, § 5, Chap. III, [1]). On a par conséquent:

$$(19) \qquad \left| \int_\Omega \sum_{s=1}^{3} (W_t(\boldsymbol{a}))_s W_t(\boldsymbol{a}) \boldsymbol{\varphi}^m_{x_s} dx \right| \leqslant c_m \| W_t(\boldsymbol{a}) \| \leqslant c_m R^2$$

et le module de la partie droite de (16) ne dépasse pas

$$\nu \lambda_m R + c_m R^2 + \| \boldsymbol{f} \|_Y \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Ecrivons l'égalité (14) sous la forme:

$$(14)_\mathrm{I} \qquad \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t) = \int_{Y_R}^{t} \exp\left[i \sum_{m=1}^{\infty} w_m(t, \boldsymbol{a}) \theta_m \right] d\mu(\boldsymbol{a}) \,.$$

En calculant formellement les dérivées

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \theta_m}, \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \theta_j \, \partial \theta_k}$$

et en utilisant le système (16) on obtient l'équation suivante pour $\mathcal{F}$:

$$(20) \qquad \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} = -\nu \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \theta_m \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \theta_m} - i \sum_{j,k,m=1}^{\infty} a^{jk,m} \theta_m \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \theta_j \, \partial \theta_k} + i \sum_{m=1}^{\infty} f_m \theta_m \mathcal{F}.$$

Cette équation est l'équation statistique de Hopf écrite dans un repère de coordonées.

On étudiera par la suite le problème de Cauchy pour cette équation avec une donnée initiale du type:

$$(21) \qquad \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)|_{t=0} = \int_{Y_R} \exp\left[i \sum_{m=1}^{\infty} a_m \theta_m \right] d\mu(\boldsymbol{a})$$

où $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots)$ est un élément de Y_R. La solution naturelle de cette équation paraît être la fonction $(14)_\mathrm{I}$. Cette fonction est définie pour tout $\boldsymbol{\theta} \in Y$. Pourtant, nous allons prendre $\boldsymbol{\theta}$ seulement dans H, dont les éléments sont identifiés à des suites numériques $(\theta_1, \theta_2, \ldots)$ telles que $\|\boldsymbol{\theta}\|_H = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \theta_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ (voir § 1). Donc, par la suite on considère $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)$ uniquement pour $(\boldsymbol{\theta}, t) \in H \times [0, T]$.

On a le résultat suivant:

THÉORÈME 2. *La fonction* $\mathcal{F}(\cdot,\cdot)$ *définie par* $(14)_{\mathrm{I}}$ *est continue en* $(\boldsymbol{\theta}, t)$ *dans* $H\times[0, T]$ *et vérifie*:

$$|\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)|\leqslant 1\,, \qquad \mathcal{F}(0, t) = 1\,.$$

Elle admet des dérivées partielles par rapport à θ_k, $k = 1, 2, \dots$ *continues en* $(\boldsymbol{\theta}, t)$; *ces dérivées sont des fonctions bornées dans* $H\times[0, T]$. *De plus, pour tout* $\boldsymbol{\theta}\in H$ *la fonction* $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta},\cdot)$ *est absolument continue en* $t\in[0, T]$ *et vérifie la condition* (21). *La dérivée* $\partial\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)/\partial t$ *existe sur un ensemble* $\mathcal{C}\subset[0, T]$ *tel que mes* $\mathcal{C} = T$ *pour tout* $\boldsymbol{\theta}\in H$, *et elle est égale à la partie droite de* (20) *où toutes les séries convergent* (*pour* $t\in\mathcal{C}$). *Enfin, pour tout* $\boldsymbol{\theta}\in H$ *la dérivée* $\partial\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta},\cdot)/\partial t$ *appartient à* $L_{\frac{4}{3}}([0, T])$. ■

DÉMONSTRATION. Nous allons faire la démonstration en plusieurs étapes. Dans ce qui suit par intégrabilité et mésurabilité d'une fonction (ou d'un ensemble) on entendra la mésurabilité par rapport aux mesures $\Lambda\times\mu$ dans $[0, T]\times Y_R$ où Λ est la mesure de Lebesgue sur $[0, T]$. A cet égard on considèrera que la σ-algèbre initiale est étendue à la σ-algèbre contenant tous les ensembles de mesure nulle. Sans le rappeler à chaque fois, on utilisera le théorème de passage à la limite sous le signe intégrale pour les suites monotones convergentes de fonctions, le théorème de Fubini etc.

1. – Les fonctions $w_m(\cdot,\cdot)$ sont intégrables puisqu'elles sont bornées et continues en t pour $\forall\boldsymbol{a}\in Y_R$ et mesurables pour $\forall t\in[0, T]$ (il est connu que de ces deux dernières propriétés découle la mesurabilité de $w_m(\cdot,\cdot)$ par rapport à $\Lambda\times\mu$). Par conséquent, $w_m(t, \boldsymbol{a})$ vérifie le théorème de Fubini.

2. – Les fonctions ψ: $\psi(t, \boldsymbol{a}) = \|W_t(\boldsymbol{a})\|_Y^2$ et ϕ: $\phi(t, \boldsymbol{a}) = \|W_t(\boldsymbol{a})\|_H^2$ sont mesurables par rapport à $\Lambda\times\mu$, car elles sont les limites des suites monotones croissantes des fonctions $\sum_{m=1}^{N} w_m^2(t, \boldsymbol{a})$ et resp. $\sum_{m=1}^{N}\lambda_m w_m^2(t, \boldsymbol{a})$ (*).

La fonction $\psi(\cdot,\cdot)$ est bornée sur $[0, T]\times Y_R$. En ce qui concerne la fonction ϕ, grâce à (6) l'integrale $\int_{Y_R} d\mu(a)\int_0^T \|W_t(\boldsymbol{a})\|_H^2 dt$ est finie. En conséquence, $\psi(\cdot,\cdot)$ et $\phi(\cdot,\cdot)$ sont $\Lambda\times\mu$ intégrables et on peut leur appliquer le théorème de Fubini.

3. – Les fonctions ψ_m: $\psi_m(t, \boldsymbol{a}) = \sum_{j,k=1}^{\infty} a^{jk,m} w_j(t, \boldsymbol{a}) w_k(t, \boldsymbol{a})$ sont bornées sur $[0, T]\times Y_R$ et sont mésurables. En effet, pour $\forall(t, \boldsymbol{a})\in[0, T]\times Y_R$ ces fonctions

(*) Ici on autorise la function $\phi(\cdot, \cdot)$ à prendre des valeurs infinies. Plus tard on demontrera que la mesure de l'ensemble où cette fonction est infinie, est nulle.

sont les limites des sommes uniformément bornées $\sum_{j,k=1}^{N} a^{jk,m} w_j(t, \boldsymbol{a}) w_k(t, \boldsymbol{a})$.

4. – L'ensemble $\mathcal{T}$. L'égalité (16), comme on a vu auparavant, a lieu en tous les points $(t, \boldsymbol{a}) \in (\mathcal{T}'_a \times Y_R)$.

L'ensemble $M_\phi = \{(t, \boldsymbol{a}) : t \in \mathcal{T}_a, \boldsymbol{a} \in Y_R\}$ est mesurable et est de masse totale. Cela découle du fait que M_ϕ est l'ensemble de tous les points de $[0, T] \times Y_R$ où la fonction mesurable $\phi(t, \boldsymbol{a}) = \|W_t(\boldsymbol{a})\|_H^2$ est finie. L'ensemble $\partial M_\phi = \{(t, \boldsymbol{a}) : t \in \partial\mathcal{T}_a, \boldsymbol{a} \in Y_R\}$ est également mesurable et sa $\Lambda \times \mu$-mesure est nulle. En effet:

$$\partial M_\phi = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{(t, \boldsymbol{a}) | \exists \varepsilon_n(t, \boldsymbol{a}) \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \ni : \| W_{t-\varepsilon_n(t,\boldsymbol{a})}(\boldsymbol{a}) \|_H \geqslant n\right\} =$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k>n}^{\infty} \{(t, \boldsymbol{a}) | \| W_{t-1/k}(\boldsymbol{a}) \|_H \geqslant n\}$$

et les ensembles situés entre les accolades sont mesurables. Il en résulte que ∂M_ϕ est mesurable. D'autre part, pour chaque $\boldsymbol{a}$, ∂M_ϕ est un ensemble dénombrable de points de $[0, T]$. Par conséquent sa $\Lambda \times \mu$-mesure est nulle.

On a aussi une autre conséquence: l'ensemble $M'_\phi = M_\phi \setminus \partial M_\phi = \{(t, \boldsymbol{a}) : t \in \mathcal{T}'_a, \boldsymbol{a} \in Y_R\}$ est mesurable et a une $\Lambda \times \mu$-masse totale égale à T. Il résulte qu'on peut extraire de $[0, T]$ un ensemble $\mathcal{T}$ de masse totale T dont les points sont caractérisés par les propriétés suivantes:

I) pour $\tau \in \mathcal{T}$, l'ensemble $M'_\phi(\tau) = \{\boldsymbol{a} : (\tau, \boldsymbol{a}) \in M'_\phi\}$ a une μ-mesure totale dans Y_R.

II) $\hat{\phi}(\tau) \equiv \int_{v} \phi(t, \boldsymbol{a})\, d\mu(\boldsymbol{a}) < \infty$.

III) ces points sont points de Lebesque de la fonction $\hat{\phi}(\cdot)$.

On demontrera plus tard que la fonction $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)$ a une dérivée

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} \quad \text{pour } \forall \boldsymbol{\theta} \in H \text{ et } t \in \mathcal{T},$$

que toutes les sommes du membre de droite de l'égalité (20) convergent et que l'égalité (20) est vérifiée.

5. – L'existence des dérivées partielles de $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)$ par rapport à θ_k, leur continuité. Demonstration du fait que ces dérivées sont bornées sur tout l'ensemble $H \times [0, T]$.

Dans la démonstration de 5. il faut se rappeler l'inégalité (9) ou bien, ce qui est la même chose, l'inégalité:

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty}\big(w_m(t+\Delta t, \boldsymbol{a})-w_m(t, \boldsymbol{a})\big)\theta_m\right| \leqslant c_2\|\boldsymbol{\theta}\|_H|\Delta t|^{\frac{1}{2}} \tag{22}$$

où c_2 ne dépend que de $\boldsymbol{a}$, t et $\boldsymbol{\theta}$. On a aussi

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} w_m(t, \boldsymbol{a})(\theta_m-\theta'_m)\right| \leqslant \|W_t(\boldsymbol{a})\|_Y\|\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}'\|_Y \leqslant R\|\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}'\|_Y\,. \tag{23}$$

Ces relations assurent la continuité de $\mathcal{F}(\cdot,\cdot)$ en $(\boldsymbol{\theta}, t)$ et il est evident qu'on a $|\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)| \leqslant 1$ et $\mathcal{F}(0, t)=1$. L'existence des dérivées partielles de $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)$ de θ_k en découle d'une manière élémentaire. Par exemple:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\theta_1+\Delta\theta_1, \theta_2, \ldots, t)-\mathcal{F}(\theta_1, \theta_2, \ldots, t) &= \\
=\int_{Y_R}\left[\exp\left(iw_1(t, \boldsymbol{a})\Delta\theta_1\right)-1\right]&\exp\left(i\sum_{m=1}^{\infty} w_m(t, \boldsymbol{a})\theta_m\right)d\mu(\boldsymbol{a}) = \\
&=\int_{Y_R}\left[iw_1(t, \boldsymbol{a})\Delta\theta_1+r(t, \boldsymbol{a}, \Delta\theta_1)\right]\exp\left(i\sum_{m=1}^{\infty} w_m(t, \boldsymbol{a})\theta_m\right)d\mu(\boldsymbol{a})
\end{aligned}$$

où $r(t, \boldsymbol{a}, \Delta\theta_1)$ vérifie

$$|r(t, \boldsymbol{a}, \Delta\theta_1)| \leqslant \tfrac{1}{2}|w_1(t, \boldsymbol{a})\Delta\theta_1|^2\exp|w_1(t, \boldsymbol{a})\Delta\theta_1| \leqslant \tfrac{1}{2}R^2|\Delta\theta_1|^2\exp\left(R|\Delta\theta_1|\right).$$

Il en résulte que $\partial\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)/\partial\theta_1$ existe et est égale à:

$$\frac{\partial\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)}{\partial\theta_1} = i\int_{Y_R} w_1(t, \boldsymbol{a})\exp\left(i\sum_{m=1}^{\infty} w_m(t, \boldsymbol{a})\theta_m\right)d\mu(\boldsymbol{a})\,.$$

De la même façon on obtient

$$\frac{\partial^l\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)}{\partial\theta_{k_1}\ldots\partial\theta_{k_l}} = i^l\int_{Y_R} w_{k_1}(t, \boldsymbol{a})\ldots w_{k_l}(t, \boldsymbol{a})\exp\left(i\sum_{m=1}^{\infty} w_m(t, \boldsymbol{a})\theta_m\right)d\mu(\boldsymbol{a}) \tag{24}$$

et

$$\left|\frac{\partial^l\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)}{\partial\theta_{k_1}\ldots\partial\theta_{k_l}}\right| \leqslant \int|w_{k_1}(t, \boldsymbol{a})|\ldots|w_{k_l}(t, \boldsymbol{a})|d\mu(\boldsymbol{a}) \leqslant R^l\,. \tag{25}$$

La continuité de $\partial^l\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)/\partial\theta_{k_1}\ldots\partial\theta_{k_l}$ est une conséquence directe de son expression (24) et des inégalités (22) et (23). Pour les différentes séries du membre droite de (20) on a les majorations suivantes:

$$(26)\qquad \left|\sum_{m=N}^{N+M}\lambda_m\theta_m\frac{\partial\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta},t)}{\partial\theta_m}\right|\leqslant\int_{Y_R}\left|\sum_{m=N}^{N+M}\lambda_m\theta_m w_m(t,\boldsymbol{a})\right|d\mu(\boldsymbol{a})\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{m=N}^{N+M}\lambda_m\theta_m^2\right)^{\frac12}\int_{Y_R}\left(\sum_{m=N}^{N+M}\lambda_m w_m^2(t,\boldsymbol{a})\right)^{\frac12}d\mu(\boldsymbol{a})\leqslant\left(\sum_{m=N}^{N+M}\lambda_m\theta_m^2\right)^{\frac12}\hat{\phi}^{\frac12}(t)\to 0$$

pour $N\to\infty$ et $\forall M\geqslant 1$. On a aussi:

$$(27)\qquad \left|\sum_{j=N_1}^{N_1+M_1}\sum_{k=N_2}^{N_2+M_2}\sum_{m=N_3}^{N_3+M_3}a^{jk,m}\theta_m\frac{\partial^2\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta},t)}{\partial\theta_j\,\partial\theta_k}\right|=$$

$$=\left|\sum\sum\sum\int_{Y_R}a^{jk,m}w_j(t,\boldsymbol{a})w_k(t,\boldsymbol{a})\theta_m\exp\left(i\sum_{l=1}^{\infty}w_l(t,\boldsymbol{a})\theta_l\right)d\mu(\boldsymbol{a})\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{Y_R}\left|\left(\sum_{p=1}^{3}(W_t^{N_1,M_1}(\boldsymbol{a}))_p\,W_t^{N_2,M_2}(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{\theta}_{x_p}^{N_3,M_3}\right)\right|d\mu(\boldsymbol{a})\leqslant$$

$$\leqslant\int_{Y_R}\|W_t^{N_1,M_1}(\boldsymbol{a})\|_{4,\Omega}\|W_t^{N_2,M_2}(\boldsymbol{a})\|_{4,\Omega}\,d\mu(\boldsymbol{a})\,\|\boldsymbol{\theta}^{N_3,M_3}\|_H\leqslant$$

$$\leqslant c\int_{Y}\|W_t^{N_1,M_1}(\boldsymbol{a})\|_H\|W_t^{N_2,M_2}(\boldsymbol{a})\|_H\,d\mu(\boldsymbol{a})\,\|\boldsymbol{\theta}^{N_3,M_3}\|_H\,.$$

Ici $W_t^{N,M}(\boldsymbol{a})=\sum_{j=N}^{N+M}w_j(t,\boldsymbol{a})\boldsymbol{\theta}^j(\cdot)$ et $\boldsymbol{\theta}_{(\cdot)}^{N,M}=\sum_{m=N}^{N+M}\theta_m\boldsymbol{\varphi}^m(\cdot)$.

On sait que la fonction $\phi(t,\boldsymbol{a})=\|W_t(\boldsymbol{a})\|_H^2$ est sommable par rapport à la mesure μ dans Y_R pour tout $t\in\mathcal{T}$. D'autre part $W_t^{1,M}(\boldsymbol{a})$ converge pour $M\to\infty$ vers $W_t(\boldsymbol{a})$ dans la norme de H pour les $\boldsymbol{a}$ vérifiant $\phi(t,\boldsymbol{a})<\infty$. Il en résulte que pour ces t et $\boldsymbol{a}$ on a $\|W_t^{N,M}(\boldsymbol{a})\|_H\to 0$ pour $N\to\infty$ uniformément en $M\geqslant 1$ et $\|W_t^{N,M}(\boldsymbol{a})\|_H\leqslant\|W_t(\boldsymbol{a})\|_H$. De même $\boldsymbol{\theta}^{1,M}(\cdot)$ converge vers $\boldsymbol{\theta}(\cdot)$ pour $M\to\infty$ dans la norme de H, donc $\|\boldsymbol{\theta}^{N_3,M_3}\|_H\to 0$ pour $N_3\to\infty$ uniformément en $M_3\geqslant 1$. Grâce à ces faits la somme

$$\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_2}\sum_{m=1}^{N_3}a^{jk,m}\theta_m\frac{\partial^2\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta},t)}{\partial\theta_j\,\partial\theta_k}$$

à une limite pour $N_2, N_2, N_3\to\infty$ pour $t\in\mathcal{T}$ et $\forall\boldsymbol{\theta}\in H$ (i.e. la série triple converge). Aux mêmes t et $\boldsymbol{\theta}$ la série

$$\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m\theta_m\frac{\partial\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta},t)}{\partial\theta_m}$$

converge également. De plus, des inégalités ci-dessus et de l'inégalité (7) il résulte que la partie de droite de (20), qu'on notera $j(\boldsymbol{\theta}, t)$, vérifie l'estimation:

$$(28) \qquad |j(\boldsymbol{\theta}, t)| \leqslant \|\boldsymbol{\theta}\|_H \Big[\hat{\phi}^{\frac{1}{2}}(t) + \int_{Y_R} \|W_t(a)\|^2_{4,\Omega}\, d\mu(a)\Big] \leqslant$$
$$\leqslant \|\boldsymbol{\theta}\|_H \Big[\hat{\phi}^{\frac{1}{2}}(t) + (\tfrac{4}{3})^{\frac{3}{4}} \int_{Y_R} \|W_t(a)\|^{\frac{1}{2}}_Y \|W_t(a)\|^{\frac{3}{2}}_H d\mu(a)\Big] \leqslant \|\boldsymbol{\theta}\|_H [\hat{\phi}^{\frac{1}{2}}(t) + (\tfrac{4}{3})^{\frac{3}{4}} R^{\frac{1}{2}} \hat{\phi}^{\frac{3}{4}}(t)]$$

le dernier terme appartenant à $L_{4/3}([0, T])$.

6. – Il nous reste à demontrer que $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)$ a une dérivée par rapport à t pour $t \in \mathcal{T}$ et que cette dérivée est égale à $j(\boldsymbol{\theta}, t)$. Nous allons prouver que pour tout $\boldsymbol{\theta} \in H$ la fonction $\mathcal{F}$ a une dérivée généralisée en t appartenant à $L_{4/3}([0, T]$ et coïncidant avec $j(\boldsymbol{\theta}, t)$ aux points de Lebesgue de $\hat{\phi}(\cdot)$. On se souvient que les points de $\mathcal{T}$ sont les points de Lebesgue de $\hat{\phi}(\cdot) \in \in L_1([0, T])$. Des majorations (26) et (27) et de la continuité de $\partial\mathcal{F}/\partial\theta_m$ et $\partial^2\mathcal{F}/(\partial\theta_j\, \partial\theta_k)$ en t on déduit facilement que $t \in \mathcal{T}$ sont points de Lebesgue de $j(\boldsymbol{\theta}, t)$. Par exemple

$$(29) \qquad \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \theta_m \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, \tau)}{\partial \theta_m}\, d\tau = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} \sum_{m=1}^{N} \ldots + \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} \sum_{N+1}^{\infty} \ldots = I'_N + I''_N .$$

Par (26) on a

$$|I''_N| \leqslant \left|\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} \hat{\phi}^{\frac{1}{2}}(\tau)\, d\tau\right| \Big(\sum_{m=N+1}^{\infty} \lambda_m \theta_m^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \left|\int_t^{t+\Delta t} \hat{\phi}(\tau)\, d\tau\right|^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{m=N+1}^{\infty} \lambda_m \theta_m^2\Big)^{\frac{1}{2}} \to 0$$

pour $N \to \infty$, uniformément par rapport à $|\Delta t| \leqslant \delta$ si $t \in \mathcal{T}$. L'intégrale $I'_N \to \sum_{m=1}^{N} \lambda_m \theta_m \mathcal{F}_{\theta_m}(\boldsymbol{\theta}, t)$ pour $\Delta t \to 0$. Il en résulte alors que les points $t \in \mathcal{T}$ sont des points de Lebesgue pour $j'(\boldsymbol{\theta}, t) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \theta_m \mathcal{F}_{\theta_m}(\boldsymbol{\theta}, t)$. De même ils sont points de Lebesgue pour $j''(\boldsymbol{\theta}, t) = j(\boldsymbol{\theta}, t) - j'(\boldsymbol{\theta}, t)$. Pour le démontrer on procède de manière analogue en utilisant (27)

Commençons par étudier $\mathcal{F}$ aux points $\boldsymbol{\theta}^m(\cdot) = \theta_m \boldsymbol{\varphi}^m(\cdot)$. La continuité absolue de $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^m, t)$ en t, l'existence de la limite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} [\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^m, t + \Delta t) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^m, t)] = \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^m, t)}{\partial t}$$

aux points $t \in \mathcal{T}$ et l'égalité de cette limite avec

$$i \int_{Y_R} \frac{dw_m(t, \boldsymbol{a})}{dt} \theta_m \exp[iw_m(t, \boldsymbol{a})] d\mu(a) =$$
$$= -\nu\lambda_m \theta_m \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^m, t)}{\partial \theta_m} - i \sum_{j,k=1}^{\infty} a^{jk,m} \theta_m \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \theta_j \partial \theta_k} + i\hat{f}_m \theta_m \mathcal{F}$$

découlent facilement des faits établis ci-dessus et des observations suivantes: *a*) l'égalité (16) est vraie aux points de Lebesgue de la partie de droite de (16) et par conséquent pour tout $t \in \mathcal{T}$ et $p \cdot p$ en $\boldsymbol{a}$ (par rapport à la mesure μ) dans Y_R. *b*) En ces points on a:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} [w_m(t + \Delta t, \boldsymbol{a}) - w_m(t, \boldsymbol{a})] = \frac{dw_m(t, \boldsymbol{a})}{dt}$$

c) En utilisant (16) et (19) on voit que

$$\left| \frac{1}{\Delta t} [w_m(t + \Delta t, \boldsymbol{a}) - w_m(t, \boldsymbol{a})] \right| = \left| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{dw_m(\tau, \boldsymbol{a})}{d\tau} d\tau \right| < \nu\lambda_m R + c_m R^2 + \|\boldsymbol{f}\|_Y .$$

Cette majoration ne dépend pas de $\boldsymbol{a}$.

Les mêmes affirmations sont vraies aux points $\boldsymbol{\theta}$ du type $\boldsymbol{\theta} = \sum_{m=1}^{N} \boldsymbol{\theta}^m$ et pour les demontrer on procède comme pour $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^m$. Soit $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots)$ arbitraire dans H et $\boldsymbol{\theta}^{1,N} = (\theta_1, \ldots, \theta_N, 0, \ldots)$; $\{\boldsymbol{\theta}^{1,N}\}$ converge vers $\boldsymbol{\theta}$ dans la norme de H. On sait que $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^{1,N}, t) \to \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)$ pour $N \to \infty$ uniformément en $t \in [0, T]$. De plus, puisque

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^{1,N}, t)}{\partial t} \quad N = 1, 2, \ldots$$

vérifie (20) (pour $t \in \mathcal{T}$), la majoration (28) montre que ces fonctions sont uniformément bornées dans la norme de l'espace $L_{4/3}([0, T])$. Il en résulte que la fonction $\mathcal{F}(\cdot, \cdot)$ a une dérivée généralisée $\partial \mathcal{F}/\partial t$, appartenant à $L_{4/3}([0, T])$ et que la suite $\{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^{1,N}, t)/\partial t\}_{N=1}^{\infty}$ converge faiblement dans $L_{4/3}([0, T])$ vers $\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)/\partial t$. D'autre part, les fonctions $I^N(t)$, $N = 1, 2, \ldots$ égales à la partie de droite de (20) calculée pour la fonction $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^{1,N}, t)$ respectivement, ont comme limite, $I^\infty(t) = j(\boldsymbol{\theta}, t)$, la partie de droite de (20) calculée pour la fonction $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)$ si $t \in \mathcal{T}$. En effet, les termes des séries I^N ont comme limite les termes correspondants dans la série $I^\infty(t)$ (puisque $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)$ et ses dérivées partielles en θ_k sont continues en $\boldsymbol{\theta}$). Les restes de ces séries sont uniformément petits (en N), puisque $\boldsymbol{\theta}^{1,N}$ converge vers $\boldsymbol{\theta}$ dans la norme de H et $t \in \mathcal{T}$.

De cette façon, nous avons démontré que $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)$ a une dérivée généralisée $\partial\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)/\partial t$ dans $L_{4/3}([0, T])$ (et, en même temps, qu'elle s'obtient par la formule de Newton-Leibnitz) et vérifie l'équation (20) $p \cdot p$ en $t \in [0, T]$. Il en résulte que l'équation (20) doit évidemment avoir lieu aux points t qui sont points de Lebesgue de la partie de droite de (20) (en ces points la limite $\lim_{\Delta t \to 0} (\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t + \Delta t) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t))/\Delta t$ existe). Mais on a précedemment démontré que tous les points $\in \mathcal{C}$ ont cette propriété. Donc l'équation (20) a lieu pour $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)$ pour $t \in \mathcal{C}$ et tout $\boldsymbol{\theta} \in H$. c.q.f.d.

4. – Conclusion.

Tous les résultats obtenus ici pour le cas tridimensionel sont vrais aussi dans le cas plan $x \in E^2$. Dans cette situation le système (1) a une solution faible unique $V(\boldsymbol{a})$ pour tout $\boldsymbol{a} \in Y$ et il n'y a plus à faire de choix de $W(\boldsymbol{a})$. Grâce à cela, on a, pour le problème (20), (21), unicité dans la classe des fonctions caractéristiques des mesures de probabilité vérifiant les mêmes propriétés que notre solution $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)$. Du reste ce résultat, dans toute sa généralité, découle du travail [5] de C. Foias.

L'équation de Hopf a été écrite d'une manière differente de (20) (voir [3], [4], [5] et autres). Dans le travail de Foias [5], (20) est remplacé par certaines équations intégrales (∗) (voir (9.6) de § 9 de [5]). Il est naturel d'appeler les fonctions vérifiant (∗) solutions généralisées du problème (20), (21).

C. Foias a démontré l'existence d'au moins une telle solution généralisée, en utilisant ses résultats sur l'éxistence d'une famille de mesures $\{\mu_t, t \in [0, T]\}$, vérifiant une autre équation intégrale (∗∗), qu'on obtient formellement en transformant l'identité

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \int_Y \phi(t, W_t(\boldsymbol{a}))\, d\mu(\boldsymbol{a}) = -\int_Y \phi(0, \boldsymbol{a})\, d\mu(\boldsymbol{a}) \tag{30}$$

et en utilisant le système (1) pour $\boldsymbol{v} = W_t(\boldsymbol{a})$ et l'egalité

$$\mu_t(\omega) = \mu(W_t^{-1}(\omega)) \qquad \forall \omega \in \sigma(Y)\,. \tag{31}$$

Nous ne citons pas ici toutes les propriétés des fonctions « admissibles » $\phi(t, \boldsymbol{u})$; observons seulement qu'elles sont différentiables et $\phi(T, \boldsymbol{u}) = 0$. C. Foias, différemment de nous, ne construit pas l'opérateur d'évolution W_t (et donc n'utilise pas les égalités (30) et (31)), mais travaille avec l'identité (∗∗). Il nous semble que notre méthode d'étude est plus simple et plus courte que celle utilisé dans [5]. Elle nous donne plus d'informations sur la mesure d'évolution μ et sur les solutions de l'équation de Hopf. Pourtant, même cette information a besoin d'autres compléments et constitue seulement une première étape dans l'étude des équations du type (20). Il faut attirer l'attention sur le fait que notre méthode d'étude statistique des équations de Navier-Stokes s'applique également dans le cas où non seulement la donnée initiale mais aussi la force extérieure $\boldsymbol{f}$ ou bien la valeur $\boldsymbol{v}$ sur la frontière du domaine Ω sont aléatoires.

Dans l'article [14] A. A. Arsenev obtient des résultats (dans l'esprit du travail [5]) quand la donnée aléatoire est f. Après avoir écrit notre travail nous avons eu connaissance de l'article de A. Bensoussan et R. Temam [15] où les données aléatoires sont la force extérieure et la donnée initiale. Ils établissent l'existence d'au moins une famille de mesures $\{\mu_t\}$, définies $p\cdot p$ en $t\in[0, T]$ et vérifiant une identité intégrale du type (∗∗) de Foias. La différence avec Foias est que les resultats sont obtenus à l'aide d'un théorème de section mesurable, comme nous l'avons fait pour choisir la section mesurable $W(\boldsymbol{a})$ de l'application multivoque $V(\boldsymbol{a})$. Par contre, dans le travail [15] on n'extrait pas ensuite la famille mesurable d'applications W_t, pour laquelle serait vraie l'égalité (31).

Il n'y a, pas non plus de démonstration du fait que la fonction caractéristique $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, t)$ de la mesure μ est différentiable et qu'elle vérifie l'équation de Hopf correspondante.

Citons, enfin, le travail [16] de M. I. Visik. Il y étudie l'équation statistique de Hopf, correspondant à une certaine classe d'équations paraboliques quasi-linéaires pour lequel le problème avec conditions initiales et aux limites a une solution unique qui dépend de façon continue des données initiales. L'écriture de l'équation de Hopf dans ce travail est différente de celle donnée par (20).

BIBLIOGRAPHIE

[1] O. A. Ladyzhenskaya, *La théorie mathématique des fluides visqueux incompressibles*, Moscou 1961. Trad. anglaise, Gordon-Breach, New York, 1963, 2e ed. 1969.

[2] O. A. Ladyzhenskaya, *Un exemple de non-unicité dans la classe des solutions faibles de Hopf pour l'équation de Navier-Stokes*, Isvestia Akad. Nauk, **33** (1969), pp. 240-247.

[3] E. Hopf, *Statistical hydromechanics and functional calculus*, J. Rat. Mech. Anal., **1** (1952), pp. 87-123.

[4] A. S. Monin - A. M. Iaglom, *Hydromécanique statistique*, 2: partie, Moscou, 1967.

[5] C. FOIAS, *Statistical study of Navier-Stokes equations*, Rend. Sem. Mat. Padova, I, **48** (1973), pp. 219-349; II: **49** (1973), pp. 9-123.
[6] S. KURATOVSKI, *Topologie*, Vol. I, Moscou, 1966.
[7] O. A. LADYZHENSKAYA - V. A. SOLONNIKOV - N. N. URALTSEVA, *Equations paraboliques linéaires et quasi linéaires*, Moscou, 1967.
[8] V. A. ROHLIN, *Problèmes choisis de la théorie métrique des systèmes dynamiques*, Ouspechi Mat. Nauk, **4** (1949), pp. 57-128. Trad. anglaise American Math. Soc. Transl. (2), **49** (1966), pp. 171-240.
[9] R. T. ROCKAFELLAR, *Convex integral functionals and duality*, Contributions to Non-linear Functional Analysis, Zarantonello ed., Acad. Press, New York, 1971.
[10] C. CASTAING, *Le théoréme de Duford-Pettis généralisé*, C. R. Acad. Sci. (Paris), **258** (1969), pp. 327-329.
[11] V. I. ARKIN - V. L. LEVIN, *Convexité des valeurs des intégrales vectorielles, théorèmes de section mesurable et problèmes variationnels*, Ouspechi Mat. Nauk, XXVII, 3 (165) (1972), pp. 21-77. Trad. anglaise Math. Surveys, **27** (1972), pp. 21-85.
[12] S. V. FOMIN, *Quelques nouveaux problèmes et résultats de l'analyse fonctionnelle non linéaire*, Vestnik Mosc. Univ., **2** (1970), pp. 57-65.
[13] J. SERRIN, *The initial value problem for the Navier-Stokes equations*, Nonlinear Problems Univ. of Wisconsin, Press (R. E. Langer ed.) (1963), pp. 69-98.
[14] A. A. ARSENEV, *Construction des mesures turbulentes pour les équations de Navier-Stokes*, Doklady Akad. Nauk, **225** (1975), pp. 18-20. Trad. anglaise, Soviet Math. Dokl., **16** (1975), pp. 1422-1424.
[15] A. BENSOUSSAN - R. TEMAM, *Equations stochastiques du type Navier-Stokes*, J. Funct. Analysis, **13** (1973), 2, pp. 195-222.
[16] M. I. VISIK, *Le problème de Cauchy pour l'équation de Hopf correspondant aux équations paraboliques quasi linéaires*, Doklady Akad. Nauk, **224** (1975), 1, pp. 23-26. Trad. anglaise, Soviet Math. Dokl., **16** (1975), pp. 1126-1130.