ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

E. DE GIORGI
G. LETTA

Une notion générale de convergence faible pour des fonctions croissantes d'ensemble

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 4, nº 1 (1977), p. 61-99
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1977_4_4_1_61_0>

Une notion générale de convergence faible pour des fonctions croissantes d'ensemble.

E. DE GIORGI (*) - G. LETTA (**)

dédié à Jean Leray

0. – Introduction.

Il est bien connu qu'il y a plusieurs manières intéressantes d'introduire une topologie faible dans l'espace vectoriel des mesures (ou des mesures bornées) sur un espace donné, suivant la classe de fonctions que l'on choisit pour établir la dualité entre « mesures » et « fonctions » (voir, p. ex., [8], p. 196-197). On obtient en correspondance, dans l'espace des mesures, plusieurs notions de convergence faible, dont les plus importantes sont celles de *convergence vague* (voir, p. ex., [5], [8], [12]) et de *convergence étroite* (voir, p. ex., [2], [14], [12]). Si l'on se borne aux mesures positives, et si l'on regarde une telle mesure en tant que fonction croissante et additive d'ensemble, on peut caractériser la convergence vague (aussi bien que la convergence étroite) comme étant la convergence simple sur une classe spéciale d'ensembles. Ayant présent à l'esprit cette caractérisation, on se propose dans cet article de formuler, en terms « ensemblistes », une notion générale de convergence faible, englobant à la fois la convergence vague et la convergence étroite. Cette notion sera définie dans une classe de fonctions croissantes d'ensemble, bien plus étendue que la classe des mesures positives. Elle sera aussi susceptible, dans certaines conditions, d'une caractérisation « fonctionnelle », grâce à la possibilité de définir une notion d'intégrale par rapport à une fonction croissante d'ensemble (et de démontrer, pour cette intégrale, une sorte de théorème de Riesz-Markov).

De façon précise, on se donne une classe $\mathcal{U}$ de parties d'un ensemble abstrait X, avec $\emptyset \in \mathcal{U}$, et on considère l'ensemble Λ constitué par toutes les

(*) Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri, I 56100 Pisa.
(**) Istituto di Matematica « L. Tonelli », via Derna 1, I 56100 Pisa.
Pervenuto alla Redazione il 7 Aprile 1976.

fonctions d'ensemble λ définies dans $\mathcal{U}$, croissantes et satisfaisant à la condition $\lambda(\emptyset)=0$. Si λ est un élément de Λ, on pose

$$\int f\,d\lambda=\int_0^{+\infty}\lambda(\{f>t\})\,dt$$

pour toute fonction f définie dans X, positive et telle que l'ensemble $\{f>t\}$ appartienne à $\mathcal{U}$ pour tout nombre réel t strictement positif.

On se donne ensuite une classe supplémentaire $\mathcal{K}$ de parties de X (avec $\emptyset\in\mathcal{K}$) et on associe à tout élément λ de Λ la fonction λ_- (appartenant, elle aussi, à Λ) définie par

$$\lambda_-(U)=\sup\{\lambda^*(K)\colon K\subset U,\ K\in\mathcal{K}\},$$

où

$$\lambda^*(K)=\inf\ \{\lambda(V)\colon\ K\subset V,\ V\in\mathcal{U}\}.$$

On dit que la fonction λ est intérieurement régulière (par rapport à la classe $\mathcal{K}$) si l'on a $\lambda_-=\lambda$. Dans l'ensemble Λ_- constitué par les fonctions λ intérieurement régulières on introduit une notion de « convergence faible », dépendant de la classe $\mathcal{K}$: on dit qu'une famille filtrée (λ_h) converge faiblement vers λ si, pour les deux fonctions λ', λ'' définies par

$$\lambda'=\liminf_h \lambda_h\,,\qquad \lambda''=\limsup_h \lambda_h\,,$$

on a $\lambda'_-=\lambda''_-=\lambda$.

On considère en outre une classe spéciale $\mathcal{C}$ de fonctions positives sur X, et on caractérise les fonctionnelles J sur $\mathcal{C}$ susceptibles d'une représentation intégrale de la forme

$$J(f)=\int f\,d\lambda$$

(avec λ élément de Λ). On montre enfin que, dans certaines conditions, la convergence faible de (λ_h) vers λ équivaut à la relation:

$$\int f\,d\lambda=\lim_h\int f\,d\lambda_h\qquad\text{pour tout élément } f \text{ de } \mathcal{C}.$$

Dans le cas particulier où X est un espace localement compact et où les classes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{K}$ sont constituées respectivement par les ensembles ouverts et par les ensembles compacts de X, la notion générale de convergence faible dans l'espace des fonctions croissantes sur $\mathcal{U}$ se réduit, sur le sous-espace constitué par les mesures de Radon positives, à la notion de convergence vague.

De façon analogue, lorsque X est un espace métrisable et que les classes $\mathcal{U}$, $\mathcal{K}$ sont constituées par les ensembles ouverts et par les ensembles fermés, la notion de convergence faible dans l'espace des fonctions croissantes sur $\mathcal{U}$ se réduit, sur le sous-espace constitué par les mesures de Borel bornées et positives, à la notion de convergence étroite.

1. – La classe d'ensembles $\mathcal{U}$ et la classe de fonctions $\mathcal{I}$.

Dans toute la suite on désignera par X un ensemble non vide et par $\mathcal{U}$ une classe de parties de X, jouissant des propriétés suivantes:

(1.1) $\emptyset \in \mathcal{U}$.

(1.2) *La réunion et l'intersection de deux éléments de* $\mathcal{U}$ *appartiennent à* $\mathcal{U}$.

(1.3) *La réunion d'une suite d'éléments de* $\mathcal{U}$ *contenus dans un même élément de* $\mathcal{U}$ *appartient à* $\mathcal{U}$.

Pour toute partie A de X on désignera par A^c son complémentaire $X \setminus A$ et par 1_A sa fonction indicatrice. Le terme « fonction » désignera (sauf mention expresse du contraire) une fonction *numérique* (c'est-à-dire à valeurs dans la droite numérique achevée $\overline{\boldsymbol{R}}$). Conformément aux conventions habituelles en théorie de l'intégration, on posera $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$. Si f est une fonction définie dans X, et si t est un nombre réel, on désignera par $\{f > t\}$ l'ensemble constitué par les éléments x de X vérifiant la relation $f(x) > t$. Une signification analogue auront des notations telles que $\{f \geqslant t\}$, $\{f < t\}$ etc. On désignera par $\mathcal{I}(\mathcal{U})$, ou simplement par $\mathcal{I}$, la classe constituée par les fonctions positives f, définies dans X et telles que l'ensemble $\{f > t\}$ appartienne à $\mathcal{U}$ pour tout nombre réel t strictement positif.

(1.4) PROPOSITION. *Pour tout couple f, g de fonctions de la classe $\mathcal{I}$ et pour tout nombre réel c positif, les fonctions cf, $f+g$, $f \vee g$, $f \wedge g$, $f \wedge c$ et $f - f \wedge c = (f-c)^+$ appartiennent à la classe $\mathcal{I}$.*

DÉMONSTRATION. En ce qui concerne $f+g$, il suffit de remarquer que, pour tout nombre réel t strictement positif, l'ensemble $\{f+g > t\}$ est contenu dans $\{f > t/2\} \cup \{g > t/2\}$ et identique à l'ensemble

$$\{f > t\} \cup \{g > t\} \cup \bigcup_{0<r<t,\, r \in \mathbf{Q}} (\{f > r\} \cup \{g > t-r\}) \, .$$

(1.5) PROPOSITION. *L'enveloppe supérieure d'une suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{I}$ majorés par un même élément g de $\mathcal{I}$ appartient à $\mathcal{I}$.*

DÉMONSTRATION. On a en effet

$$\left\{\sup_n f_n > t\right\} = \bigcup_n \{f_n > t\} \subset \{g > t\}.$$

On dira qu'une fonction est *simple* si l'ensemble des ses valeurs est une partie finie de $\boldsymbol{R}$.

(1.6) PROPOSITION. *Les fonctions simples de la classe $\mathfrak{J}$ sont les fonctions f admettant une représentation de la forme*

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i 1_{U_i},$$

où $(U_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une suite finie décroissante d'éléments de $\mathfrak{U}$ et où les c_i sont des coefficients réels positifs.

2. – Intégration par rapport à une fonction croissante sur $\mathfrak{U}$.

On désignera par $\Lambda(\mathfrak{U})$, ou simplement par Λ, l'ensemble constitué par les fonctions positives λ définies dans $\mathfrak{U}$, croissantes (c'est-à-dire telles que l'on ait $\lambda(U) \leqslant \lambda(V)$ pour $U \subset V$) et satisfaisant à la condition $\lambda(\emptyset) = 0$. Pour tout élément λ de Λ, et pour toute fonction f de la classe $\mathfrak{J}$, on appellera *intégrale* de f par rapport à λ le nombre $\int f\,d\lambda$ défini par

$$\int f\,d\lambda = \int_0^{+\infty} \lambda(\{f > t\})\,dt. \tag{2.1}$$

On remarquera que le deuxième membre de cette relation est l'intégrale, au sens ordinarie, de la fonction u (positive et décroissante) ainsi définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$:

$$u(t) = \lambda(\{f > t\}). \tag{2.2}$$

(2.3) PROPOSITION. *Soient λ un élément de Λ, f, g deux fonctions de la classe $\mathfrak{J}$, c un nombre réel positif. On a alors*

(*a*) $\int f\,d\lambda \leqslant \int g\,d\lambda$ *si* $f \leqslant g$;

(*b*) $\int (cf)\,d\lambda = c\int f\,d\lambda$;

(*c*) $\int f\,d\lambda = \int (f\wedge c)\,d\lambda + \int (f - f\wedge c)\,d\lambda$;

(*d*) $\int f\,d\lambda = \sup_{n\in\mathbf{N}} \int (f\wedge n)\,d\lambda$.

DÉMONSTRATION. En ce qui concerne la propriété (c), il suffit de remarquer que l'on a

$$\int (f \wedge c)\, d\lambda = \int_0^c \lambda(\{f > t\})\, dt\,,$$

$$\int (f - f \wedge c)\, d\lambda = \int_0^{+\infty} \lambda(\{f > t + c\})\, dt = \int_c^{+\infty} \lambda(\{f > s\})\, ds\,.$$

Les autres propriétés sont immédiates.

Il est évident que l'on a

$$\int 1_U\, d\lambda = \lambda(U)$$

pour tout élément U de $\mathfrak{U}$. Plus généralement:

(2.4) PROPOSITION. *Soit*

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i 1_{U_i}\,,$$

où $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est une suite finie décroissante d'éléments de* $\mathfrak{U}$ *et où les* c_i *sont des coefficients réels positifs. On a alors (pour tout élément* λ *de* Λ*)*

$$\int f\, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \lambda(U_i)\,.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que la fonction u définie par (2.2) prend la valeur $\lambda(U_i)$ pour tout t vérifiant la relation

$$\sum_{j=1}^{i-1} c_j \leqslant t < \sum_{j=1}^{i} c_j$$

et qu'elle s'annule pour $t \geqslant \sum_{j=1}^{n} c_j$.

(2.5) PROPOSITION. *Soit* λ *un élément de* Λ. *Pour toute fonction* f *de la classe* $\mathfrak{J}$, *le nombre* $\int f\, d\lambda$ *est égal à la borne supérieure des nombres de la forme* $\int g\, d\lambda$, *où* g *parcourt l'ensemble des fonctions simples de la classe* $\mathfrak{J}$ *qui minorent* f.

DÉMONSTRATION. La fonction u définie par (2.2) est positive et décroissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Par conséquent le nombre

$$\int f\, d\lambda = \int_0^{+\infty} u(t)\, dt$$

est égal à la borne supérieure des nombres de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) u(t_i),$$

où $(t_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ parcourt l'ensemble des suites finies de nombres réels satisfaisant à la condition

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n .$$

Soit $(t_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une telle suite, et posons

$$U_i = \{f > t_i\} \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad g = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) 1_{U_i}.$$

On a alors (voir (2.4))

$$\int g\, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \lambda(U_i) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) u(t_i).$$

Puisque g est une fonction simple minorant f et appartenant à la classe $\mathfrak{J}$, l'assertion est démontrée.

De façon analogue on démontre la proposition suivante.

(2.6) PROPOSITION. *Soient λ un élément de Λ, f une fonction de la classe $\mathfrak{J}$. On suppose que f est bornée et qu'elle s'annule en dehors d'un élément U de $\mathfrak{U}$ tel que $\lambda(U)$ soit fini. Le nombre $\int f\, d\lambda$ est alors égal à la borne inférieure des nombres de la forme $\int g\, d\lambda$, où g parcourt l'ensemble des fonctions simples de la classe $\mathfrak{J}$ qui majorent f.*

Pour que l'intégrale définie ci-dessus par rapport à la fonction croissante λ possède la propriété de Beppo Levi (concernant le passage à la limite sur les suites croissantes), il faut et il suffit qu'une propriété analogue ait lieu pour la fonction d'ensemble λ:

(2.7) PROPOSITION. *Pour tout élément λ de Λ les conditions suivantes sont équivalentes:*

(*a*) *On a*

$$\int f\, d\lambda = \sup_n \int f_n\, d\lambda$$

pour tout élément f de $\mathfrak{J}$ et pour toute suite croissante (f_n) d'éléments de $\mathfrak{J}$ telle que l'on ait $f = \sup_n f_n$.

(*b*) *On a*

$$\lambda(U) = \sup_n \lambda(U_n)$$

pour tout élément U *de* $\mathfrak{U}$ *et pour toute suite croissante* (U_n) *d'éléments de* $\mathfrak{U}$ *telle que l'on ait* $U = \bigcup_n U_n$. (*En d'autres termes,* λ *est « continue sur les suites croissantes ».*)

Démonstration.

(*a*) $\Rightarrow$ (*b*): La condition (*b*) est en effet un cas particulier de la condition (*a*) (obtenu en prenant $f_n = 1_{U_n}$).

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*): Soient f un élément de $\mathfrak{J}$ et (f_n) une suite croissante d'éléments de $\mathfrak{J}$ telle que l'on ait $f = \sup_n f_n$. Pour tout nombre réel t strictement positif, les ensembles $\{f_n > t\}$ forment alors une suite croissante d'éléments de $\mathfrak{U}$, dont la réunion est égale à l'ensemble $\{f > t\}$. Il en résulte, d'après l'hypothèse (*b*),

$$\lambda(\{f > t\}) = \sup_n \lambda(\{f_n > t\})$$

et par suite

$$\int_0^{+\infty} \lambda(\{f > t\})\, dt = \sup_n \int_0^{+\infty} \lambda(\{f_n > t\})\, dt\,.$$

Contrairement à la propriété précédente, la propriété qui suit est valable sans aucune hypothèse supplémentaire sur la fonction d'ensemble λ.

(2.8) Proposition. *Soient* H *un ensemble d'indices,* $\mathfrak{F}$ *un filtre sur* H, $(f_h)_{h\in H}$ *une famille de fonctions de la classe* $\mathfrak{J}$, $(c_h)_{h\in H}$ *une famille de nombres réels positifs, tendant vers zéro suivant le filtre* $\mathfrak{F}$, f *une fonction de la classe* $\mathfrak{J}$, *telle que l'on ait*

$$f \leqslant f_h + c_h$$

pour tout h. *On a alors, quel que soit l'élément* λ *de* Λ,

$$\int f\, d\lambda \leqslant \liminf_{h\,\mathfrak{F}} \int f_h\, d\lambda$$

(*et par conséquent* $\int f\, d\lambda = \lim_{h\,\mathfrak{F}} \int f_h\, d\lambda$ *si chacune des fonction* f_h *est majorée par* f).

DÉMONSTRATION. On a pour tout h

$$\int_{c_h}^{+\infty} \lambda(\{f > t\})\, dt \leq \int_{c_h}^{+\infty} \lambda(\{f_h > t - c_h\})\, dt = \int_0^{+\infty} \lambda(\{f_h > s\})\, ds\,.$$

Il en résulte immédiatement, par passage à la limite, l'inégalité de l'énoncé.

Enfin la proposition suivante fournit une condition suffisante pour que l'intégrale par rapport à λ possède la propriété additive.

(2.9) PROPOSITION. *Soit λ un élément de Λ. On suppose qu'il existe une fonction additive d'ensemble, prolongeant λ et définie dans l'anneau* (*) *engendré par $\mathcal{U}$. On a alors*

$$\int (f+g)\, d\lambda = \int f\, d\lambda + \int g\, d\lambda$$

pour tout couple f, g d'éléments de $\mathfrak{J}$.

DÉMONTRATION. On pourra supposer que chacun des nombres $\int f\, d\lambda$, $\int g\, d\lambda$ soit fini. Désignons par $\mathcal{U}_0$ l'ensemble constitué par les éléments U de $\mathcal{U}$ tels que $\lambda(U)$ soit fini, et par $\mathfrak{L}$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions indicatrices des éléments de $\mathcal{U}_0$. On sait qu'il existe une forme linéaire L sur $\mathfrak{L}$, satisfaisant à la condition $L(1_U) = \lambda(U)$ pour tout élément U de $\mathcal{U}_0$ (voir [5], chap. 4, § 4, N. 8, Prop. 15). Pour qu'une fonction simple f de la classe $\mathfrak{J}$ appartienne à $\mathfrak{L}$, il faut et il suffit que son intégrale soit finie, et on a alors, d'après (1.6), (2.4), $\int f\, d\lambda = L(f)$. La linéarité de L montre donc que la relation à démontrer est vraie si les fonctions f, g sont simples. Il en résulte dans le cas général (compte tenu de (2.5)) l'inégalité

$$\int f\, d\lambda + \int g\, d\lambda \leq \int (f+g)\, d\lambda\,.$$

Pour démontrer l'inégalité opposée, supposons d'abord les fonctions f, g bornées, et posons, pour tout entier n,

$$f_n = 2^{-n} \sum_{k \geq 1} 1_{\{f > k2^{-n}\}}\,, \qquad g_n = 2^{-n} \sum_{k \geq 1} 1_{\{g > k2^{-n}\}}\,.$$

On a alors

$$f_n \leq f \leq f_n + 2^{-n}\,, \qquad g_n \leq g \leq g_n + 2^{-n}\,,$$

(*) Pour les notions d'*anneau* (ou *clan*) et de fonction additive sur un anneau, voir [5], chap. 4, § 4, n. 8.

et f_n, g_n sont des fonctions simples de la classe $\mathcal{J}$. (On remarquera que, pour tout n fixé, les ensembles $\{f > k2^{-n}\}$, $\{g > k2^{-n}\}$ sont vides dès que k est assez grand.)

Il en résulte

$$\int (f_n + g_n)\, d\lambda = \int f_n\, d\lambda + \int g_n\, d\lambda$$

et par conséquent (voir (2.8))

$$\int (f + g)\, d\lambda = \int f\, d\lambda + \int g\, d\lambda\,.$$

Passons au cas général. On a pour tout n

$$\int [(f+g)\wedge n]\, d\lambda \leqslant \int [(f\wedge n) + (g\wedge n)]\, d\lambda = \int (f\wedge n)\, d\lambda + \int (g\wedge n)\, d\lambda\,.$$

Il suffit alors d'appliquer la propriété (2.3), (d) pour aboutir à l'inégalité

$$\int (f + g)\, d\lambda \leqslant \int f\, d\lambda + \int g\, d\lambda\,.$$

3. – La classe d'ensembles $\mathcal{K}$ et la classe de fonctions $\mathcal{S}$.

Tout en gardant les hypothèses fixées au § 1, on introduira maintenant des données supplémentaires. On supposera précisément que $\mathcal{K}$ est une classe de parties de X, possédant les propriétés suivantes:

(3.1) $\emptyset \in \mathcal{K}$.

(3.2) *La réunion et l'intersection de deux éléments de $\mathcal{K}$ appartiennent à $\mathcal{K}$.*

(3.3) *L'intersection d'une suite d'éléments de $\mathcal{K}$ appartient à $\mathcal{K}$.*

On supposera en outre que la classe $\mathcal{K}$ soit liée à la classe $\mathcal{U}$ par les axiomes suivants:

(3.4) *Pour tout élément K de $\mathcal{K}$ et pour tout élément U de $\mathcal{U}$, on a*

$$K \cap U^c \in \mathcal{K}\,, \qquad U \cap K^c \in \mathcal{U}\,.$$

(3.5) *Pour tout élément K de $\mathcal{K}$, il existe un élément U de $\mathcal{U}$ tel que l'on ait $K \subset U$.*

(3.6) *Pour tout couple (K, U) tel que l'on ait $K \in \mathcal{K}$, $U \in \mathcal{U}$, $K \subset U$, il existe un couple (K', U') tel que l'on ait*

$$K' \in \mathcal{K}\,, \qquad U' \in \mathcal{U}\,, \qquad K \subset U' \subset K' \subset U\,.$$

(3.7) REMARQUE. Les axiomes imposés aux classes $\mathcal{K}$, $\mathcal{U}$ sont notamment vérifiés dans chacun des deux cas particuliers suivants.

1er Cas: Soient X un espace topologique séparé, localement compact; $\mathcal{K}$ la classe des ensembles compacts de X; $\mathcal{U}$ la classe des ensembles ouverts de X ou, de façon plus générale, une classe d'ensembles ouverts stable par réunion finie, formant une base pour la topologie de X et telle que tout ensemble ouvert contenu dans un élément de $\mathcal{U}$ appartienne à $\mathcal{U}$.

2e Cas: Soient X un espace métrisable (ou, plus généralement, normal); $\mathcal{U}$ comme dans le cas précédent; $\mathcal{K}$ la classe constituée par les ensembles fermés F tels qu'il existe un élément U de $\mathcal{U}$ avec $U \supset F$.

Revenons au cas général. On vérifie aisément les propriétés suivantes du couple $(\mathcal{K}, \mathcal{U})$.

(3.8) PROPOSITION. *Pour tout couple K_1, K_2 d'ensembles disjoints appartenant à $\mathcal{K}$, il existe un couple U_1, U_2 d'ensembles disjoints appartenant à $\mathcal{U}$, tel que l'on ait $K_1 \subset U_1$, $K_2 \subset U_2$.*

DÉMONSTRATION. Il existe, d'après (3.5), un couple V_1, V_2 d'éléments de $\mathcal{U}$ avec $V_1 \supset K_1$, $V_2 \supset K_2$. Quitte à remplacer V_1 par $V_1 \cap K_2^c$, on pourra supposer V_1 disjoint de K_2. En vertu de (3.6) il existe un élément U_1 de $\mathcal{U}$ et un élément H_1 de $\mathcal{K}$, tels que l'on ait

$$K_1 \subset U_1 \subset H_1 \subset V_1 .$$

Il suffit alors de poser $U_2 = V_2 \cap H_1^c$ pour avoir un couple U_1, U_2 possédant les propriétés voulues.

(3.9) PROPOSITION. *Soient U_1, U_2 deux éléments de $\mathcal{U}$, et soit K un élément de $\mathcal{K}$ contenu dans $U_1 \cup U_2$. Il existe alors un couple K_1, K_2 d'éléments de $\mathcal{K}$ tel que l'on ait*

$$K \subset K_1 \cup K_2 , \quad K_1 \subset U_1 , \quad K_2 \subset U_2 .$$

DÉMONSTRATION. Les ensembles $H_1 = K \cap U_2^c$, $H_2 = K \cap U_1^c$ sont disjoints et appartiennent à $\mathcal{K}$. Il existe donc, d'après (3.8), un couple V_1, V_2 d'ensembles disjoints appartenant à $\mathcal{U}$, tel que l'on ait $H_1 \subset V_1$, $H_2 \subset V_2$. Il suffit alors de poser

$$K_1 = K \cap V_2^c , \quad K_2 = K \cap V_1^c .$$

On désignera par $\mathcal{S}(\mathcal{K})$, ou simplement par $\mathcal{S}$, la classe constituée par les fonctions positives f définies dans X et telles que l'ensemble $\{f \geq t\}$ appartienne à $\mathcal{K}$ pour tout nombre réel t strictement positif.

Les propriétés suivantes de la classe $\mathcal{S}$ sont immédiates.

(3.10) PROPOSITION. *Pour tout couple f, g de fonctions de la classe $\mathcal{S}$ et pour tout nombre réel c positif, les fonctions cf, $f+g$, $f\vee g$, $f\wedge g$, $f\wedge c$ et $f-f\wedge c=(f-c)^+$ appartiennent à la classe $\mathcal{S}$.*

DÉMONSTRATION. En ce qui concerne $f+g$, il suffit de remarquer que l'on a (pour tout nombre réel t strictement positif)

$$\{f+g<t\}=\bigcup_{0<r<t,\,r\in\mathbf{Q}}(\{f<r\}\cap\{g<t-r\})$$

et par conséquent

$$\{f+g\geqslant t\}=\bigcap_{0<r<t,\,r\in\mathbf{Q}}(\{f\geqslant r\}\cup\{g\geqslant t-r\})\,.$$

(3.11) PROPOSITION. *Soient f une fonction finie de la classe $\mathcal{S}$, g une fonction finie de la classe $\mathcal{I}$. On a alors $(g-f)^+\in\mathcal{I}$ et $(f-g)^+\in\mathcal{S}$.*

DÉMONSTRATION. Pour tout nombre réel t strictement positif, l'ensemble $\{(g-f)^+>t\}$ (identique à $\{g-f>t\}$) est contenu dans $\{g>t\}$ et coïncide avec

$$\bigcup_{r>t,\,r\in\mathbf{Q}}(\{g>r\}\cap\{f\geqslant r-t\}^c)\,.$$

De façon analogue on traite la fonction $(f-g)^+$.

(3.12) DÉFINITION. On dira qu'une classe $\mathcal{H}$ de parties de X est *dense* (par rapport au couple $\mathcal{K}$, $\mathcal{U}$) si, pour tout couple K, U avec $K\in\mathcal{K}$, $U\in\mathcal{U}$, $K\subset U$, il existe un élément H de $\mathcal{H}$ tel que l'on ait $K\subset H\subset U$.

Plus généralement, on dira qu'une classe $\mathcal{H}$ de fonctions définies dans X est *dense* (par rapport au couple $\mathcal{K}$, $\mathcal{U}$) si, pour tout couple K, U avec $K\in\mathcal{K}$, $U\in\mathcal{U}$, $K\subset U$, il existe un élément h de $\mathcal{H}$ tel que l'on ait $1_K\leqslant h\leqslant 1_U$.

(3.13) PROPOSITION. *La classe $\mathcal{I}\cap\mathcal{S}$ est dense.*

DÉMONSTRATION. Comme dans [10], p. 130, il suffit d'adapter convenablement le raisonnement classique qui permet de démontrer le théorème de Urysohn dans un espace normal (voir [3], § 4, n. 1, Th. 1). Précisément, étant donné un couple K, U avec $K\in\mathcal{K}$, $U\in\mathcal{U}$, $K\subset U$, on construit (en s'appuyant sur l'hypothèse (3.6)) une famille $(U_r, K_r)_{r\in D}$ de couples d'ensembles, ayant pour ensemble des indices l'ensemble D des nombres rationnels dyadiques de l'intervalle $[0, 1]$, et jouissant des propriétés suivantes:

(a) $U_0 = U$, $K_0 = X$; $U_1 = \emptyset$, $K_1 = K$;

(b) $U_r \subset K_r \subset U_s$ pour $r > s$;

(c) $U_r \in \mathcal{U}$ pour tout r; $K_r \in \mathcal{K}$ pour $r \neq 0$.

On pose ensuite

$$f = \sup_{r \in D} r 1_{K_r}.$$

On a alors $0 \leqslant f \leqslant 1$. En outre la fonction f, qui est égale à 1 sur l'ensemble $K_1 = K$ et à 0 sur le complémentaire de l'ensemble $U_0 = U$, appartient à $\mathcal{J} \cap \mathcal{S}$ grâce aux relations suivantes:

$$\{f > t\} = \begin{cases} \emptyset & \text{pour } t \geqslant 1\,, \\ \bigcup\limits_{r>t} K_r = \bigcup\limits_{r>t} U_r & \text{pour } 0 < t < 1\,, \end{cases}$$

$$\{f \geqslant t\} = \begin{cases} \emptyset & \text{pour } t > 1\,, \\ \bigcap\limits_{r<t} K_r & \text{pour } 0 < t \leqslant 1\,. \end{cases}$$

4. – La version intérieurement régulière d'une fonction croissante sur $\mathcal{U}$.

Soit λ un élément de Λ. On posera, pour toute partie E de X,

$$\lambda^*(E) = \inf\{\lambda(V) : E \subset V,\ V \in \mathcal{U}\} \tag{4.1}$$

(avec la convention habituelle: $\inf \emptyset = +\infty$). On désignera en outre par λ_-, λ_+ les éléments de Λ ainsi définis:

$$\lambda_-(U) = \sup\{\lambda^*(K) : K \subset U,\ K \in \mathcal{K}\}\,,$$

$$\lambda_+(U) = \inf\ \{\lambda^*(K) : U \subset K,\ K \in \mathcal{K}\}\,.$$

Etant donné un couple U, V d'éléments de $\mathcal{U}$, on dira que U est *fortement contenu* dans V (par rapport à la classe $\mathcal{K}$) s'il existe un élément K de $\mathcal{K}$ tel que l'on ait $U \subset K \subset V$. On écrira alors

$$U \subset\subset V\,.$$

En employant cette notation, et en tenant compte de l'hypothèse (3.6), on voit facilement qu'on peut donner aux deux fonctions λ_-, λ_+ des expressions plus maniables, à savoir:

$$\lambda_-(U) = \sup \{\lambda(V): V \subset\subset U,\ V \in \mathfrak{U}\},$$
$$\lambda_+(U) = \inf \{\lambda(V): U \subset\subset V,\ V \in \mathfrak{U}\}.$$

On a évidemment

$$\lambda_- \leqslant \lambda \leqslant \lambda_+ .$$

Si, pour un certain élément U de $\mathfrak{U}$, on a $\lambda_-(U) = \lambda(U)$(resp. $\lambda_+(U) = \lambda(U)$), on dira que la fonction λ est *intérieurement* (resp. *extérieurement*) *régulière sur* U (par rapport à la classe $\mathfrak{K}$). On dira que λ est *régulière sur* U si λ est, à la fois, intérieurement régulière et extérieurement régulière su U, c'est-à-dire si l'on a $\lambda_-(U) = \lambda_+(U)$. On dira aussi, dans ce cas, que U est un *ensemble de régularité* pour λ. On dira enfin que la fonction λ est intérieurement (resp. extérieurement) régulière si elle est intérieurement (resp. extérieurement) régulière sur tout élément de $\mathfrak{U}$.

On voit facilement que l'on a

$$\lambda_{--} = \lambda_- , \qquad \lambda_{++} = \lambda_+ .$$

En d'autres termes: λ_- est intérieurement régulière et λ_+ est extérieurement régulière.

On appellera λ_- la *version intérieurement régulière*, et λ_+ la *version extérieurement régulière*, de la fonction λ. On désignera par $\Lambda_-(\mathfrak{U}, \mathfrak{K})$, ou simplement par Λ_-, l'ensemble constitué par les fonctions appartenant à $\Lambda(\mathfrak{U})$ et intérieurement régulières par rapport à la classe $\mathfrak{K}$. En d'autres termes, Λ_- est constitué par les fonctions de la forme λ_-, où λ parcourt Λ.

(4.2) PROPOSITION. *Soient λ, μ deux éléments de Λ. On a alors*

$$(\lambda + \mu)_- = \lambda_- + \mu_- , \qquad (\lambda + \mu)_+ = \lambda_+ + \mu_+ .$$

Par conséquent, pour que la fonction $\lambda + \mu$ soit finie et intérieurement (*resp. extérieurement*) *régulière sur un élément donné de $\mathfrak{U}$, il faut et il suffit que ces conditions soient réalisées pour chacune des deux fonctions λ, μ.*

(4.3) PROPOSITION. *Soit λ un élément de Λ, et soit $\mathfrak{V}$ une partie dense de $\mathfrak{U}$* (voir Déf. (3.12)). *On a alors, pour tout élément U de $\mathfrak{U}$,*

$$\lambda_-(U) = \sup \{\lambda(V): V \subset\subset U,\ V \in \mathfrak{V}\},$$
$$\lambda_+(U) = \inf \{\lambda(V): U \subset\subset V,\ V \in \mathfrak{V}\}.$$

(4.4) DÉFINITION. On dira qu'une partie $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ est *riche* (par rapport à la classe $\mathcal{K}$) si, pour toute fonction f de la classe $\mathcal{I} \cap \mathcal{S}$, les nombres réels t strictement positifs pour lesquels l'ensemble $\{f > t\}$ n'appartient pas à $\mathcal{V}$ forment un ensemble au plus dénombrable.

Par exemple, $\mathcal{U} \cap \mathcal{K}_\sigma$ (où $\mathcal{K}_\sigma$ désigne l'ensemble constitué par les réunions dénombrables d'éléments de $\mathcal{K}$) est une partie riche de $\mathcal{U}$.

(4.5) PROPOSITION. *L'intersection d'une famille dénombrable de parties riches de $\mathcal{U}$ est encore une partie riche de $\mathcal{U}$.*

(Démonstration évidente).

(4.6) PROPOSITION. *Toute partie riche de $\mathcal{U}$ est dense* (voir Déf. (3.12)).

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{V}$ une partie riche de $\mathcal{U}$. Etant donné un couple d'ensembles K, U avec $K \in \mathcal{K}$, $U \in \mathcal{U}$, $K \subset U$, il existe, d'après (3.13), un élément f de $\mathcal{I} \cap \mathcal{S}$ vérifiant la relation $1_K \leqslant f \leqslant 1_U$. Pour tout élément t de l'intervalle $]0, 1[$, l'ensemble

$$U_t = \{f > t\}$$

est un élément de $\mathcal{U}$ compris entre K et U. On a d'autre part $U_t \in \mathcal{V}$, sauf peut-être pour un ensemble dénombrable de valeurs de t. Cela montre que la classe $\mathcal{V}$ est dense.

L'utilité de la notion de partie riche de $\mathcal{U}$ est liée aux deux propositions suivantes.

(4.7) PROPOSITION. *Soit λ un élément de Λ. Les éléments de $\mathcal{U}$ sur lesquels λ est régulière* (*c'est-à-dire sur lesquels λ_- coïncide avec λ_+*) *forment une partie riche de $\mathcal{U}$.*

DÉMONTRATION. Etant donné l'élément f de $\mathcal{I} \cap \mathcal{S}$, considérons la fonction décroissante $t \mapsto \lambda(\{f > t\})$ définie dans l'intervalle $]0, +\infty[$. Si t_0 est un point de continuité pour cette fonction, $\{f > t_0\}$ est un ensenble de régularité pour λ.

(4.8) PROPOSITION. *Pour tout couple λ, μ d'éléments de Λ, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *λ et μ admettent les mêmes ensembles de régularité, et coïncident sur chacun de ces ensembles.*

(2) *λ coïncide avec μ sur tout ensemble qui est un ensemble de régularité pour μ.*

(3) *λ et μ coïncident sur une partie riche de $\mathcal{U}$.*

(4) *λ et μ coïncident sur une partie dense de $\mathcal{U}$.*

(5) $\lambda_- = \mu_-$.

(6) $\lambda_+ = \mu_+$.

DÉMONSTRATION.

(1) $\Rightarrow$ (2): implication évidente.

(2) $\Rightarrow$ (3): en effet les ensembles sur lesquels μ est régulière forment une partie riche de $\mathcal{U}$ (voir (4.7)).

(3) $\Rightarrow$ (4): toute partie riche de $\mathcal{U}$ est dense (voir (4.6)).

(4) $\Rightarrow$ ((5) et (6)): c'est une conséquence immédiate de (4.3).

((5) et (6)) $\Rightarrow$ (1): les ensembles sur lesquels λ (resp. μ) est régulière sont les ensembles sur lesquels λ_- coïncide avec λ_+ (resp. μ_- coïncide avec μ_+). Par conséquent, si les conditions (5) et (6) sonto satisfaites, les fonctions λ et μ admettent les mêmes ensembles de régularité. En outre, si U est un de ces ensembles, on a $\lambda(U) = \lambda_-(U)$, $\mu(U) = \mu_-(U)$, donc aussi, d'après l'hypothèse (5), $\lambda(U) = \mu(U)$.

(5) $\Rightarrow$ (3): la condition (5) étant supposée vérifiée, désignons par $\mathcal{V}$ la partie de $\mathcal{U}$ constituée par les ensembles qui sont de régularité, à la fois, pour λ et pour μ. En vertu de (4.7), (4.5), $\mathcal{V}$ est une partie riche de $\mathcal{U}$. En outre, pour tout élément U de $\mathcal{V}$, on a $\lambda(U) = \lambda_-(U)$, $\mu(U) = \mu_-(U)$, donc aussi, d'après l'hypothèse (5), $\lambda(U) = \mu(U)$.

(6) $\Rightarrow$ (3): cette dernière implication se démontre comme la précédente.

(4.9) DÉFINITION. On dira que deux éléments λ, μ de Λ sont *équivalents* (par rapport à la classe $\mathcal{K}$) s'ils vérifient les conditions équivalentes (1)-(6) de la proposizion précédente.

Par exemple, tout élément λ de Λ est équivalent, en même temps, à sa version intérieurement régulière λ_- et à sa version extérieurement régulière λ_+.

(4.10) DÉFINITION. Soit $\mathcal{H}$ un ensemble de parties de X, vérifiant la condition $\emptyset \in \mathcal{H}$ (mais non nécessairement stable par réunion finie), et soit α une fonction définie dans $\mathcal{H}$, croissante, avec $\alpha(\emptyset) = 0$. On dira que α est *sous-additive* si, quels que soient les éléments A_1, A_2, A de $\mathcal{H}$ vérifiant la relation $A \subset A_1 \cup A_2$, on a $\alpha(A) \leqslant \alpha(A_1) + \alpha(A_2)$.

On dira que α est *additive* si, quels que soient les éléments A_1, A_2, A de $\mathcal{H}$ vérifiant les relations

$$A \subset A_1 \cup A_2\,, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad (\text{resp. } A \supset A_1 \cup A_2,\ A_1 \cap A_2 = \emptyset)\,,$$

on a

$$\alpha(A) \leqslant \alpha(A_1) + \alpha(A_2) \qquad\qquad (\text{resp. } \alpha(A) \geqslant \alpha(A_1) + \alpha(A_2))$$

Les définitions précédentes se réduisent évidemment aux définitions habituelles d'additivité et de sous-additivité dans le cas particulier où la classe $\mathcal{K}$ est stable par réunion finie.

(4.11) PROPOSITION. *Pour toute fonction λ appartenant à Λ, les conditions suivantes sont équivalentes*:

(*a*) *λ_- est sous-additive* (*resp. additive*).

(*b*) *Il existe une partie riche $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$, telle que la restriction de λ à $\mathcal{V}$ soit sous-additive* (*resp. additive*).

(*c*) *Il existe une partie dense $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$, telle que la restriction de λ à $\mathcal{V}$ soit sous-additive* (*resp. additive*).

DÉMONSTRATION. Traitons, par exemple, le cas de la sous-additivité.

(*a*) $\Rightarrow$ (*b*): il suffit de poser $\mathcal{V} = \{U \colon \lambda(U) = \lambda_-(U)\}$.

(*b*) $\Rightarrow$ (*c*): en effet toute partie riche de $\mathcal{U}$ est dense (voir (4.6)).

(*c*) $\Rightarrow$ (*a*): soit $\mathcal{V}$ une partie dense de $\mathcal{U}$, telle que la restriction de λ à $\mathcal{V}$ soit sous-additive, et soit U_1, U_2 un couple quelconque d'éléments de $\mathcal{U}$. Pour tout élément V de $\mathcal{V}$ fortement contenu dans $U_1 \cup U_2$, il existe, en vertu de (3.9), un couple V_1, V_2 d'éléments de $\mathcal{V}$ tel que l'on ait

$$V \subset V_1 \cup V_2 , \qquad V_1 \subset\subset U_1 , \qquad V_2 \subset\subset U_2 .$$

Il en résulte

$$\lambda(V) \leqslant \lambda(V_1) + \lambda(V_2) \leqslant \lambda_-(U_1) + \lambda_-(U_2) .$$

En vertu de (4.3), cela démontre l'inégalité

$$\lambda_-(U_1 \cup U_2) \leqslant \lambda_-(U_1) + \lambda_-(U_2) .$$

5. – Conditions pour qu'une fonction croissante sur $\mathcal{U}$ puisse être prolongée en une mesure.

On se propose maintenant de rechercher des conditions suffisantes pour qu'une fonction λ de la classe Λ soit la restriction à $\mathcal{U}$ d'une mesure, c'est-à-dire d'une fonction dénombrablement additive définie dans un anneau d'ensembles. On s'occupera d'abord du problème de l'existence d'un prolongement de λ qui soit additif, au sens fini, dans l'anneau engendré par $\mathcal{U}$.

(5.1) THÉORÈME. *Soit λ une fonction de la classe Λ_- (c'est-à-dire une fonction appartenant à la classe Λ et intérieurement régulière). Désignons par λ^* la fonction définie par* (4.1) *dans l'ensemble de toutes les parties de X, et par $\mathcal{A}$ l'anneau engendré par $\mathcal{U}$. Les conditions suivantes sont équivalentes* (*):

(1) *Il existe une fonction additive définie dans $\mathcal{A}$ et prolongeant λ.*

(2) *Pour tout couple U, V d'éléments de $\mathcal{U}$, on a*

$$\lambda(U \cap V) + \lambda(U \cup V) = \lambda(U) + \lambda(V)\,.$$

(3) *λ est additive et sous-additive.*

(4) *Pour tout couple U, V d'éléments de $\mathcal{U}$, avec $U \subset V$, on a*

$$\lambda(V) = \lambda(U) + \lambda^*(V \setminus U)\,.$$

(5) *Tout élément U de $\mathcal{U}$ est mesurable, au sens de Carathéodory, par rapport à λ^*, c'est à dire vérifie la relation*

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap U) + \lambda^*(E \cap U^c)$$

pour toute partie E de X.

(6) *La restriction de λ^* à l'anneau $\mathcal{A}$ est additive.*

DÉMONSTRATION. Les implications (1) $\Rightarrow$ (2) et (2) $\Rightarrow$ (3) sont évidentes.

(3) $\Rightarrow$ (4): la fonction λ étant supposée additive et sous-additive, fixons les éléments U, V de $\mathcal{U}$ avec $U \subset V$. Grâce à l'hypothèse de sous-additivité, il suffit de démontrer l'inégalité

$$\lambda(V) \geqslant \lambda(U) + \lambda^*(V \setminus U)\,.$$

A cet effet, puisque λ est intérieurement régulière, il suffit de vérifier l'inégalité

$$\lambda(V) \geqslant \lambda(T) + \lambda^*(V \setminus U)$$

pour tout élément T de $\mathcal{U}$ fortement contenu dans U.

(*) Pour l'équivalence entre (1) et (2), voir [15], Th. 1.2 (où l'on suppose λ finie) et [9], Th. 1.9 et 1.22 (où l'on suppose $X \in \mathcal{U}$ et $\lambda(X) = 1$). Pour l'équivalence entre (4) et (5), voir [11], Prop. 2.2. Pour l'implication (3) $\Rightarrow$ (4), voir [11], Prop. 4.3.

Or, si K est un élément de $\mathcal{K}$ compris entre T et U, les ensembles T et $V \setminus K$ sont disjoints, appartiennent à $\mathcal{U}$ et sont contenus dans V; on a en outre $V \setminus K \supset V \setminus U$. En tenant compte de l'additivité de λ et de la définition de λ^*, on obtient donc

$$\lambda(V) \geqslant \lambda(T) + \lambda(V \setminus K) \geqslant \lambda(T) + \lambda^*(V \setminus U) .$$

(4) $\Rightarrow$ (5): l'hypothèse (4) entraîne, tout d'abord, la sous-additivité de λ, donc aussi de λ^*. Il suffit donc de démontrer que, dans l'hypothèse (4), on a l'inégalité

$$\lambda^*(E) \geqslant \lambda^*(E \cap U) + \lambda^*(E \cap U^c)$$

pour tout élément U de $\mathcal{U}$ et pour toute partie E de X.

Or, si V est un élément qualconque de $\mathcal{U}$ contenant E, on trouve, en appliquant l'hypothèse (4) aux ensembles V et $V \cap U$,

$$\lambda(V) = \lambda(V \cap U) + \lambda^*(V \cap U^c) \geqslant \lambda^*(E \cap U) + \lambda^*(E \cap U^c) .$$

D'après la définition de $\lambda^*(E)$, cela prouve l'inégalité à démontrer.

(5) $\Rightarrow$ (6): Désignons par $\mathcal{M}$ la classe constituée par les ensembles mesurables par rapport à λ^*. Il est bien connu (voir, p. ex., [1], 8.3.3.1) que $\mathcal{M}$ est un anneau et que la restriction de λ^* à $\mathcal{M}$ est additive; si donc $\mathcal{U}$ est contenue dans $\mathcal{M}$, il en est de même de $\mathcal{A}$, et la restriction de λ^* à $\mathcal{A}$ est additive.

Enfin l'implication (6) $\Rightarrow$ (1) est évidente.

(5.4) COROLLAIRE. *Soit λ une fonction de la classe Λ. On suppose λ additive et sous-additive, et on désigne par $\mathcal{V}$ l'ensemble constitué par les éléments de $\mathcal{U}$ sur lesquels λ est finie et régulière. Si V_1, V_2 sont des éléments de $\mathcal{V}$, il en est de même de $V_1 \cap V_2$ et de $V_1 \cup V_2$.*

DÉMONSTRATION. Quitte à remplacer λ per λ_-, on pourra supposer λ intérieurement régulière. Le théorème précédent montre alors que λ est la restriction à $\mathcal{U}$ d'une fonction additive μ, définie dans l'anneau engendré par $\mathcal{U}$. Etant donnés les éléments V_1, V_2 de $\mathcal{V}$ et le nombre réel ε strictement positif, il existe un couple U_1, U_2 d'éléments de $\mathcal{U}$ satisfaisant aux conditions

$$V_i \subset\subset U_i , \quad \mu(U_i \setminus V_i) = \lambda(U_i) - \lambda(V_i) < \varepsilon \qquad \text{pour } i = 1, 2 .$$

On a alors

$$V_1 \cup V_2 \subset\subset U_1 \cup U_2 , \quad \lambda(U_1 \cup U_2) - \lambda(V_1 \cup V_2) = \mu((U_1 \cup U_2) \setminus (V_1 \cup V_2)) < 2\varepsilon ,$$

de sorte que $V_1 \cup V_2$ appartient à $\mathcal{V}$.

De façon analogue on démontre l'assertion concernant $V_1 \cap V_2$.

On désignera par $\mathcal{K}_\sigma$ (resp. $\mathcal{U}_\delta$) la classe constituée par les réunions dénombrables d'éléments de $\mathcal{K}$ (resp. par les intersections dénombrables d'éléments de $\mathcal{U}$). Suivant la terminologie de [13], [16], on dira que la classe $\mathcal{K}$ est *compacte* (ou *dénombrablement compacte*) si toute famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{K}$ dont l'intersection est vide admet une sous-famille finie d'intersection vide.

(5.5) PROPOSITION. *Soit λ une fonction de la classe Λ.*

a) Si λ est intérieurement régulière, et si la classe $\mathcal{K}$ est compacte, λ est continue sur les suites croissantes.

b) Si λ est continue sur les suites croissantes, et si on a $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}_\sigma$, λ est intérieurement régulière.

DÉMONSTRATION. *a*) Soit U un élément de $\mathcal{U}$ et soit (U_n) une suite croissante d'éléments de $\mathcal{U}$ avec $\lim_n U_n = U$. Si V est un élément de $\mathcal{U}$ fortement contenu dans U, on a $V \subset U_n$ dès que n est assez grand, et par conséquent $\lambda(V) \leqslant \sup_n \lambda(U_n)$. Il en résulte $\lambda_-(U) \leqslant \sup_n \lambda(U_n)$, c'est-à-dire $\lambda(U) \leqslant \sup_n \lambda(U_n)$. L'inégalité opposée est évidente.

b) En vertu de (3.6), l'hypothèse $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}_\sigma$ entraîne, pour tout élément U de $\mathcal{U}$, l'existence de deux suites (U_n), (K_n) vérifiant les relations

$$U_n \subset K_n \subset U_{n+1} , \qquad \lim_n U_n = U , \qquad U_n \in \mathcal{U},\ K_n \in \mathcal{K} .$$

Il en résulte immédiatement que λ est intérieurement régulière, dès qu'elle est continue sur les suites croissantes.

Le théorème suivant fournit des conditions pour qu'une fonction λ de la classe Λ_- puisse être prolongée en une mesure. Il est démontré dans [6] dans l'hypothèse supplémentaire que l'on ait $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}_\sigma$ et que λ soit finie. (Voir aussi [7], chap. IV (§ 1, N. 4, Th. 9; § 2, N. 3, Th. 5) et [11], Prop. 4.4.)

(5.6) THÉORÈME. *Soit λ une fonction de la classe Λ_-. On suppose λ additive et sous-additive, et on désigne par λ^* la fonction définie par* (4.1) *dans l'ensemble de toutes les parties de X. Les conditions suivantes sont* *équivalentes*:

(1) *Il existe une mesure qui prolonge λ.*

(2) *λ est continue sur les suites croissantes.*

(3) *λ est dénombrablement sous-additive.*

(4) *La restriction de λ^* à la classe constituée par les éléments de $\mathcal{U}$ et par leurs sous-ensembles est dénombrablement sous-additive.*

(5) *La restriction de λ^* à l'anneau engendré par $\mathcal{U}$ est dénombrablement additive.*

DÉMONSTRATION.

(1) $\Rightarrow$ (2): implication évidente.

(2) $\Rightarrow$ (3): la sous-additivité et la continuité sur les suites croissantes entrainent évidemment la sous-additivité dénombrable.

(3) $\Rightarrow$ (4): λ étant supposée dénombrablement sous-additive, soit E une partie de X contenue dans un élément V de $\mathcal{U}$, et soit (E_n) une suite de parties de E avec $\bigcup_n E_n = E$. Etant donné ε strictement positif, il existe, pour tout n, un élément U_n de $\mathcal{U}$ tel que l'on ait

$$E_n \subset U_n\,, \qquad \lambda(U_n) \leqslant \lambda^*(E_n) + \varepsilon 2^{-n}\,.$$

Posons

$$U = V \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\Big)\,.$$

L'ensemble U contient alors E et appartient à $\mathcal{U}$, de sorte qu'on a

$$\lambda^*(E) \leqslant \lambda(U) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(U_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n) + \varepsilon\,.$$

(4) $\Rightarrow$ (5): en vertu de (5.1) la restriction de λ^* à l'anneau engendré par $\mathcal{U}$ est additive; si la condition (4) est satisfaite, cette restriction est un même temps dénombrablement sous-additive, donc aussi dénombrablement additive.

(5) $\Rightarrow$ (1): cette dernière implication est évidente.

Un autre critère utile, permettant de reconnaître qu'une fonction donnée de la classe Λ est la restriction à $\mathcal{U}$ d'une mesure, est fourni par le théorème suivant. (A la mise en forme définitive de ce théorème a contribué M. Maurizio Pratelli.)

(5.7) THÉORÈME. *Soient λ, μ deux fonctions additives de la classe Λ. Si la fonction $\nu = \lambda + \mu$ est finie, intérieurement régulière et prolongeable en une mesure, il en est de même de λ et de μ.*

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, les fonctions λ et μ sont finies et intérieurement régulières (voir (4.2)). Elles sont en outre continues sur les suites croissantes, car dans le cas contraire on aurait l'existence d'un élément U de $\mathfrak{U}$ et d'une suite croissante (U_n) d'éléments de $\mathfrak{U}$ vérifiant les relations

$$\bigcup_n U_n = U\,, \qquad \sup_n \nu(U_n) < \nu(U)\,.$$

Grâce à (5.6), il suffit alors de vérifier la sous-additivité de λ et de μ. Etant donné un couple U, V d'éléments de $\mathfrak{U}$, on peut choisir (en raison de la régularité intérieure de λ et de μ) deux suites (U_n), (K_n) de parties de U, telles que l'on ait

$$U_n \in \mathfrak{U}\,, \qquad K_n \in \mathcal{K}\,, \qquad U_n \subset K_n \subset U_{n+1}\,,$$
$$\lambda(U) = \lim_n \lambda(U_n)\,, \qquad \mu(U) = \lim_n \mu(U_n)\,.$$

Posons

$$T = \lim_n U_n = \lim_n K_n\,.$$

On a alors

$$T \subset U\,, \qquad \nu(T) = \lim_n \nu(U_n) = \nu(U)\,. \tag{5.8}$$

D'autre part les ensembles U_n et $V_n = V \cap K_n^c$ sont disjoints et contenus dans U, V respectivement, de sorte qu'on a

$$\lambda(U_n) + \lambda(V_n) = \lambda(U_n \cup V_n) \leqslant \lambda(U \cup V)\,,$$

et par conséquent

$$\lim_n \left(\lambda(U_n) + \lambda(V_n)\right) \leqslant \lambda(U \cup V)\,. \tag{5.9}$$

La même inégalité a lieu, naturellement, pour la fonction μ:

$$\lim_n \left(\mu(U_n) + \mu(V_n)\right) \leqslant \mu(U \cup V)\,. \tag{5.10}$$

Or, la suite (U_n) est croissante et a T pour limite, tandis que la suite (V_n) est décroissante et a pour limite l'ensemble

$$V \cap \lim_n K_n^c = V \cap T^c\,.$$

Par conséquent la suite $(U_n \cup V_n)$ admet comme limite l'ensemble $T \cup V$.

Puisque ν est finie et prolongeable en une mesure, il en résulte, compte tenu de (5.8),

$$\lim_n (\nu(U_n) + \nu(V_n)) = \nu(T \cup V) = \nu(U \cup V). \tag{5.11}$$

En comparant cette égalité avec les inégalités (5.9), (5.10), on voit que ces inégalités sont en effet, elles aussi, des égalités. Il en résulte la relation

$$\lambda(U \cup V) = \lim_n (\lambda(U_n) + \lambda(V_n)) \leqslant \lambda(U) + \lambda(V),$$

ainsi qu'une relation analogue pour μ.

6. – L'intégrale dans la classe $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{S}$.

Nous nous proposons maintenant de montrer que plusieurs propriétés d'une fonction d'ensemble de la classe Λ se traduisent par des propriétés de l'intégrale correspondante, considérée comme une fonctionnelle sur la classe $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{S}$ ou sur une partie dense de cette classe (voir Déf. (3.12)).

Voilà tout d'abord deux propositions immédiates.

(6.1) PROPOSITION. *Soient λ, μ deux fonctions de la classe Λ, équivalentes au sens de* (4.9). *On a alors*

$$\int f\, d\lambda = \int f\, d\mu$$

pour tout élément f de $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{S}$.

DÉMONSTRATION. Puisque les fonctions λ et μ sont équivalentes, elles coïncident sur une partie riche de $\mathfrak{U}$. Cela signifie que, pour tout élément f de $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{S}$, l'ensemble constitué par les nombres réels t strictement positifs tels que la relation

$$\lambda(\{f > t\}) = \mu(\{f > t\})$$

ne soit pas vraie est au plus dénombrable. La conclusion résulte alors directement de la définition (2.1) de l'intégrale.

(6.2) PROPOSITION. *Soit $\mathfrak{C}$ une partie dense de $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{S}$. Pour tout élément λ de Λ et pour tout élément U de $\mathfrak{U}$, on a*

$$\lambda_-(U) = \sup\left\{\int f\, d\lambda : f \leqslant 1_U,\ f \in \mathfrak{C}\right\},$$

$$\lambda_+(U) = \inf\left\{\int f\, d\lambda : 1_U \leqslant f,\ f \in \mathfrak{C}\right\}.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout élément f de $\mathcal{C}$, la relation $f \leqslant 1_U$ entraîne, d'après (6.1),

$$\int f\,d\lambda = \int f\,d\lambda_- \leqslant \int 1_U\,d\lambda_- = \lambda_-(U)\,.$$

Soit maintenant V un élément de $\mathcal{U}$ fortement contenu dans U. Il existe alors un élément f de $\mathcal{C}$ tel que l'on ait $1_V \leqslant f \leqslant 1_U$. Il en résulte

$$\lambda(V) = \int 1_V\,d\lambda \leqslant \int f\,d\lambda\,.$$

Cela prouve la première des égalités de l'énoncé. De façon analogue on démontre l'autre égalité.

(6.3) COROLLAIRE. *Soit* $\mathcal{C}$ *une partie dense de* $\mathcal{I} \cap \mathcal{S}$. *Pour que deux éléments* λ, μ *de* Λ *soient équivalents au sens de* (4.9), *il faut et il suffit que l'on ait*

$$\int f\,d\lambda = \int f\,d\mu$$

pour tout élément f *de* $\mathcal{C}$.

Le théorème suivant concerne la représentation intégrale d'une fonctionnelle définie dans une partie dense de $\mathcal{I} \cap \mathcal{S}$. Il contient en germe le théorème classique de Riesz-Markov.

(6.4) THÉORÈME. *Soit* $\mathcal{C}$ *une partie dense de* $\mathcal{I} \cap \mathcal{S}$, *possédant les propriétés suivantes*:

(*a*) *toute fonction appartenant à* $\mathcal{C}$ *est nulle sur le complémentaire d'un élément de* $\mathcal{K}$;

(*b*) *pour tout élément* f *de* $\mathcal{C}$ *et pour tout nombre réel* c *positif, les fonctions* cf, $f \wedge c$ *et* $f - f \wedge c = (f-c)^+$ *appartiennent à* $\mathcal{C}$.

Soit J *une application croissante de* $\mathcal{C}$ *dans* $\mathbf{R}_+$, *telle que, pour tout élément* f *de* $\mathcal{C}$ *et pour tout nombre réel* c *positif, on ait*

(1) $J(cf) = cJ(f)$;

(2) $J(f) = J(f \wedge c) + J(f - f \wedge c)$;

(3) $J(f) = \sup\limits_{n \in \mathbf{N}} J(f \wedge n)$ (*).

(*) On remarquera que cette dernière condition est automatiquement remplie si les fonctions de la classe $\mathcal{C}$ sont bornées.

Il existe alors une fonction λ de la classe Λ, telle que l'on ait

$$J(f)=\int f\,d\lambda$$

pour tout élément f de $\mathcal{C}$. On peut aussi faire en sorte que la fonction λ appartienne à Λ_- (c'est-à-dire qu'elle soit intérieurement régulière): elle est alors univoquement déterminée.

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer la première assertion, car l'autre en est une conséquence immédiate en vertu de (6.3).

Désignons par λ, μ les éléments de Λ ainsi définis:

$$\lambda(U)=\sup\{J(g)\colon g\leqslant 1_U,\ g\in\mathcal{C}\}\,,$$

$$\mu(U)=\inf\ \{J(g)\colon 1_U\leqslant g,\ g\in\mathcal{C}\}\,.$$

On a évidemment $\lambda\leqslant\mu$. Montrons que l'on a aussi $\mu\leqslant\lambda_+$. En effet, étant donné un élément U de $\mathcal{U}$, si V est un élément de $\mathcal{U}$ tel que l'on ait $U\subset\subset V$, il existe une fonction g de la classe $\mathcal{C}$ vérifiant la relation

$$1_U\leqslant g\leqslant 1_V\,.$$

Il en résulte

$$\mu(U)\leqslant J(g)\leqslant\lambda(V)\,,$$

ce qui prouve l'assertion.

Remarquons maintenant que la relation $\lambda\leqslant\mu\leqslant\lambda_+$ entraîne l'équivalence des deux fonctions λ, μ (au sens de (4.9)). Il suffira donc de prouver, pour tout élément f de $\mathcal{C}$, les deux inégalités

$$\int f\,d\lambda\leqslant J(f)\leqslant\int f\,d\mu\,. \tag{6.5}$$

Il résulte de (2.4), (2.5) que, pour démontrer la première de ces inégalités, il suffit de vérifier qu'étant donné une suite finie décroissante $(U_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'éléments de $\mathcal{U}$, et des coefficients réels positifs c_i tels que la fonction simple (cf. (1.6))

$$g=\sum_{i=1}^{n}c_i 1_{U_i}$$

soit majorée par f, on a

$$\sum_{i=1}^{n}c_i\lambda(U_i)\leqslant J(f)\,. \tag{6.6}$$

Or, pour $n=1$, cela résulte immédiatement de l'homogénéite positive de J et de la définition de λ. La conclusion étant supposée vraie pour $n-1$, démontrons qu'elle est vraie pour n. Remarquons, à cet effet, que l'on a

$$\begin{cases} c_1 1_{U_1} = g \wedge c_1 \leqslant f \wedge c_1 \,, \\ \sum_{i=2}^{n} c_i 1_{U_i} = (g-c_1)^+ \leqslant (f-c_1)^+ \,, \end{cases}$$

donc aussi, grâce à l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{cases} c_1 \lambda(U_1) \leqslant J(f \wedge c_1) \,, \\ \sum_{i=2}^{n} c_i \lambda(U_i) \leqslant J\big((f-c_1)^+\big) \,. \end{cases}$$

En sommant ces deux inégalités, et en tenant compte de l'hypothèse (2), on trouve la relation (6.6).

On a ainsi démontré la première des inégalités (6.5). Pour démontrer l'autre inégalité, on pourra supposer, grâce à l'hypothèse (3), que la fonction f soit bornée. Il existe en outre, d'après l'hypothèse (a), un élément K de $\mathcal{K}$ tel que f soit nulle sur le complémentaire de K.

Grâce à la densité de $\mathcal{C}$, on peut d'autre part déterminer un élément V de $\mathcal{U}$ et un élément g de $\mathcal{C}$, tels que l'on ait $K \subset V$, $1_V \leqslant g$ et par suite $\mu(V) \leqslant J(g) < +\infty$. Cela montre qu'on peut appliquer à f la proposition (2.6). Un raisonnement par récurrence, tout à fait analogue au précédent, permet alors d'aboutir à la conclusion.

La proposition suivante montre en particulier que, pour une fonction λ de la classe Λ_-, la proposition (2.9) admet une réciproque.

(6.7) PROPOSITION. *Soit $\mathcal{C}$ une partie dense de $\mathcal{J} \cap \mathcal{S}$. Pour toute fonction λ de la classe Λ_-, les conditions suivantes sont équivalentes*:

(a) *λ est additive et sous-additive*;

(b) *λ peut être prolongée en une fonction additive, définie dans l'anneau engendré par $\mathcal{U}$*;

(c) *la relation*

$$\int (f+g)\, d\lambda = \int f\, d\lambda + \int g\, d\lambda$$

a lieu pour tout couple f, g d'éléments de $\mathcal{J}$;

(d) *la relation précédente a lieu pour tout couple f, g d'éléments de $\mathcal{C}$.*

DÉMONSTRATION.

$(a) \Rightarrow (b)$: voir (5.1).

$(b) \Rightarrow (c)$: voir (2.9).

$(c) \Rightarrow (d)$: implication évidente.

$(d) \Rightarrow (a)$: la condition (d) étant supposée satisfaite, désignons par $\mathcal{V}$ la partie de $\mathcal{U}$ constituée par les éléments sur lesquels λ est régulière. D'après (4.7), $\mathcal{V}$ est une partie riche de $\mathcal{U}$. En vertu de (4.11), il suffit donc de démontrer que la restriction de λ à $\mathcal{V}$ est additive et sous-additive (voir Déf. (4.10)).

Soient V_1, V_2, V des éléments de $\mathcal{V}$ tels que l'on ait $V \subset V_1 \cup V_2$. Pour tout couple f_1, f_2 d'éléments de $\mathcal{C}$ vérifiant les relations $f_1 \geqslant 1_{V_1}$, $f_2 \geqslant 1_{V_2}$, on a alors $f_1 + f_2 \geqslant 1_V$ et par conséquent

$$\lambda(V) \leqslant \int (f_1 + f_2)\, d\lambda = \int f_1\, d\lambda + \int f_2\, d\lambda .$$

Il en résulte, grâce à (6.2),

$$\lambda(V) \leqslant \lambda_+(V_1) + \lambda_+(V_2) = \lambda(V_1) + \lambda(V_2) .$$

Soient maintenant V_1, V_2, V des éléments de $\mathcal{V}$ tels que l'on ait

$$V_1 \cup V_2 \subset V , \qquad V_1 \cap V_2 = \emptyset .$$

Pour tout couple f_1, f_2 d'éléments de $\mathcal{C}$ vérifiant les relations $f_1 \leqslant 1_{V_1}$, $f_2 \leqslant 1_{V_2}$, on a alors $1_V \geqslant f_1 + f_2$ et par conséquent

$$\lambda(V) \geqslant \int (f_1 + f_2)\, d\lambda = \int f_1\, d\lambda + \int f_2\, d\lambda .$$

Il en résulte, grâce à (6.2),

$$\lambda(V) \geqslant \lambda_-(V_1) + \lambda_-(V_2) = \lambda(V_1) + \lambda(V_2) .$$

On dira qu'une suite (U_n) d'éléments de $\mathcal{U}$ est *fortement croissante* si, pour tout n, U_n est fortement contenu dans U_{n+1}. On dira qu'une fonction λ de la classe Λ est *continue sur les suites fortement croissantes* si on a $\lambda(U) = \sup\limits_n \lambda(U_n)$ pour tout élément U de $\mathcal{U}$ et pour toute suite fortement croissante (U_n) d'éléments de $\mathcal{U}$, telle que l'on ait $U = \bigcup\limits_n U_n$.

La proposition suivante, analogue à la proposition (2.7), concerne le comportement de l'intégrale sur la classe $\mathfrak{I} \cap \mathfrak{S}$ (ou sur une partie dense de cette classe).

(6.8) PROPOSITION. *Soit $\mathcal{C}$ une partie dense de $\mathfrak{I} \cap \mathfrak{S}$, telle que, pour tout couple f, g d'éléments de $\mathcal{C}$, la fonction $f \wedge g$ appartienne elle aussi à $\mathcal{C}$. Pour toute fonction λ de la classe Λ_-, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(*a*) *on a $\int f\,d\lambda = \sup_n \int f_n\,d\lambda$ pour tout élément f de $\mathcal{C}$ et pour toute suite croissante (f_n) d'éléments de $\mathcal{C}$, telle que l'on ait $f = \sup_n f_n$;*

(*b*) *λ est continue sur les suites fortement croissantes;*

(*c*) *la restriction de λ à $\mathcal{U} \cap \mathcal{K}_\sigma$ est continue sur les suites croissantes.*

DÉMONSTRATION.

(*a*) $\Rightarrow$ (*b*): Soient U un élément de $\mathcal{U}$ et (U_n) une suite fortement croissante d'éléments de $\mathcal{U}$, telle que l'on ait $U = \bigcup_n U_n$. Pour tout n, il existe un élément g_n de $\mathcal{C}$ vérifiant la relation

$$1_{U_n} \leqslant g_n \leqslant 1_{U_{n+1}}.$$

Soit f un élément de $\mathcal{C}$ majoré par 1_U. La fonction f est alors égale à l'enveloppe supérieure de la suite croissante $(f \wedge g_n)$ d'éléments de $\mathcal{C}$, de sorte que l'on a, grâce à l'hypothèse (*a*),

$$\int f\,d\lambda = \sup_n \int (f \wedge g_n)\,d\lambda \leqslant \sup_n \int g_n\,d\lambda = \sup_n \lambda(U_n).$$

Il en résulte (cf. (6.2)) l'inégalité

$$\lambda(U) \leqslant \sup_n \lambda(U_n),$$

et donc l'égalité voulue.

(*b*) $\Rightarrow$ (*c*): Soient U un élément de $\mathcal{U} \cap \mathcal{K}_\sigma$ et (U_n) une suite croissante d'éléments de $\mathcal{U} \cap \mathcal{K}_\sigma$, dont la réunion soit égale à U. Pour tout n, on peut trouver une suite fortement croissante $(U_{n,m})_{m \geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{U}$, dont la réunion soit égale à U_n. Posons

$$V_n = U_{1,n} \cup \ldots \cup U_{n,n}.$$

La suite (V_n) est alors fortement croissante et admet U comme réunion.

Il en résulte (compte tenu de l'hypothèse (*b*) et de la relation $V_n \subset U_n$)

$$\lambda(U) = \sup_n \lambda(V_n) \leqslant \sup_n \lambda(U_n) \leqslant \lambda(U)\,.$$

(*c*) $\Rightarrow$ (*a*): Il suffit de répéter le raisonnement employé dans la démonstration de (2.7), en remarquant que, pour tout élément f de $\mathcal{C}$ et pour tout nombre réel t strictement positif, l'ensemble $\{f > t\}$ appartient à $\mathcal{U} \cap \mathcal{K}_\sigma$ grâce à la relation

$$\{f > t\} = \bigcup_n \{f \geqslant t + 1/n\}\,.$$

Le théorème suivant (analogue à la première partie de la proposition (5.5)) met en évidence le rôle de la notion de classe compacte dans la théorie des fonctions additives d'ensemble.

(6.9) THÉORÈME. *Pour le couple* $(\mathcal{K}, \mathcal{U})$ *les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) *la classe* $\mathcal{K} \cap \mathcal{U}_\delta$ *est compacte*;

(2) *toute fonction* λ *de la classe* Λ_- *vérifie les conditions équivalentes* (*b*), (*c*) *de* (6.8);

(3) *toute fonction* λ *additive et sous-additive de la classe* Λ_- *vérifies les conditions équivalentes* (*b*), (*c*) *de* (6.8).

DÉMONSTRATION.

(1) $\Rightarrow$ (2): la démonstration de cette implication est analogue à celle de la première partie de (5.5). Il suffit en effet de remarquer que, dans l'hypothèse (1), si U est un élément de $\mathcal{U} \cap \mathcal{K}_\sigma$ et si (U_n) est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{U} \cap \mathcal{K}_\sigma$ telle que l'on ait $U = \bigcup_n U_n$, tout élément V de $\mathcal{U}$ fortement contenu dans U est contenu dans U_n dès que n est assez grand.

(2) $\Rightarrow$ (3): implication évidente.

(3) $\Rightarrow$ (1): désignons par $\mathcal{C}$ la classe (dense) constituée par les fonctions bornées de $\mathcal{I} \cap \mathcal{S}$ qui s'annulent en dehors d'un ensemble de $\mathcal{K}$. La condition (3) étant supposée vérifiée, supposons, en raisonnant par l'absurde, qu'il existe une suite décroissante (K_n) d'éléments non vides de $\mathcal{K} \cap \mathcal{U}_\delta$, dont l'intersection soit vide. Choisissons, pour tout n, une suite décroissante $(U_{n,m})_{m\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{U}$, dont l'intersection soit égale à K_n, et posons

$$V_n = U_{1,n} \cap \ldots \cap U_{n,n}\,.$$

On a alors

$$K_n \subset V_n, \qquad \bigcap_n V_n = \emptyset.$$

Choisissons en outre, pour tout n, un élément f_n de $\mathcal{C}$ tel que l'on ait

$$1_{K_n} \leqslant f_n \leqslant 1_{V_n}.$$

On a évidemment $\inf\limits_n f_n = 0$. Quitte à remplacer f_n par $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n$, on pourra aussi supposer que la suite (f_n) soit décroissante.

Désignons par $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel constitué par les fonctions réelles bornées, définies dans X, dont la restriction à K_n soit constante pour n assez grand. Si f est une telle fonction, désignons par $L(f)$ la valeur constante qu'elle finit par prendre sur K_n. On définit ainsi une forme linéaire croissante L sur $\mathcal{L}$. Cette forme linéaire peut être prolongée en une forme linéaire croissante J sur l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions réelles bornées définies dans X. (Voir [4], § 3, n. 1, Prop. 1). En vertu de (6.4), il existe un élément (unique) λ de Λ_-, tel que l'on ait $J(f) = \int f\,d\lambda$ pour tout élément f de $\mathcal{C}$. La fonction λ est en outre additive et sous-additive (voir (6.7)).

On a, pour tout n,

$$\int f_n\,d\lambda = J(f_n) = L(f_n) = 1.$$

Il résulte d'autre part de (3.11) que la fonction $f_1 - f_n$ appartient à $\mathcal{C}$, de sorte que la relation $J(f_1 - f_n) = 0$ peut s'écrire

$$\int (f_1 - f_n)\,d\lambda = 0.$$

Puisque $(f_1 - f_n)$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{C}$, dont l'enveloppe supérieure est égale à f_1, cela montre que λ ne vérifie pas les conditions équivalentes (a), (b), (c) de (6.8).

7. – Convergence faible dans l'ensemble des fonctions croissantes et intérieurement régulières.

Nous nous proposons maintenant d'introduire dans l'ensemble Λ_- (constitué par les fonctions λ appartenant à Λ et intérieurement régulières) une notion de « convergence faible » dépendant de la classe $\mathcal{K}$.

Soient λ un élément de Λ_-, $(\lambda_h)_{h\in H}$ une famille d'éléments de Λ_-, $\mathfrak{F}$ un filtre sur l'ensemble H des indices. Si l'on pose, pour tout élément U de $\mathcal{U}$,

$$(7.1) \qquad \lambda'(U) = \liminf_{h} {}_{\mathfrak{F}}\, \lambda_h(U)\,, \qquad \lambda''(U) = \limsup_{h} {}_{\mathfrak{F}}\, \lambda_h(U)\,,$$

on définit deux fonctions λ', λ'' appartenant à Λ (mais pas forcement à Λ_-). Il résulte en outre de (4.8) que les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) la fonction (intérieurement régulière) λ est équivalente, au sens de (4.9), à chacune des deux fonctions λ', λ'' (en d'autres termes, ces deux fonctions admettent une même version intérieurement régulière, qui est la fonction λ);

(b) la relation

$$(7.2) \qquad \lambda(U) = \lim_{h} {}_{\mathfrak{F}}\, \lambda_h(U)$$

(c'est-à-dire $\lambda'(U) = \lambda''(U) = \lambda(U)$) a lieu pour tout élément U de $\mathcal{U}$ sur lequel λ soit régulière;

(c) la relation (7.2) a lieu pour tout ensemble U appartenant à une partie riche convenable de $\mathcal{U}$;

(d) la relation (7.2) a lieu pour tout ensemble U appartenant a une partie dense convenable de $\mathcal{U}$.

(7.3) Définition. Etant donné un élément λ de Λ_-, une famille $(\lambda_h)_{h\in H}$ d'éléments de Λ_- et un filtre $\mathfrak{F}$ sur l'ensemble H des indices, on dira que $(\lambda_h)_{h\in H}$ *converge faiblement vers* λ (suivant le filtre $\mathfrak{F}$) si l'une quelconque des conditions équivalentes (a), (b), (c), (d) ci-dessus est remplie. On dira aussi, dans ce cas, que λ est une *limite faible* de $(\lambda_h)_{h\in H}$ (suivant le filtre $\mathfrak{F}$).

Etant donné une famille $(\lambda_h)_{h\in H}$ d'éléments de Λ_- et un filtre $\mathfrak{F}$ sur l'ensemble H des indices, pour que (λ_h) converge faiblement (i.e. pour qu'il existe un élément de Λ_- qui soit une limite faible de (λ_h)) il faut et il suffit que les deux fonctions λ', λ'' définies par (7.1) soient équivalentes au sens de (4.9), c'est-à-dire que $(\lambda_h(U))_{h\in H}$ admette une limite (finie ou non) suivant le filtre $\mathfrak{F}$ pour tout ensemble U appartenant à une partie riche (resp. dense) convenable de $\mathcal{U}$. En outre, si cette condition est remplie, le seul élément de Λ_- qui soit une limite faible de $(\lambda_h)_{h\in H}$ est la valeur commune de la version intérieurement régulière de λ' et de λ''.

Lorque une famille filtrée $(\lambda_h)_{h\in H}$ d'éléments de Λ_- converge faiblement vers un élément λ de Λ_-, la relation (7.2) n'est pas forcement vérifiée pour *tout* élément U de $\mathfrak{U}$: en d'autres termes, on n'a pas forcement convergence *simple* de $(\lambda_h)_{h\in H}$ vers λ. On a toutefois la proposition suivante:

(7.4) PROPOSITION. *Soient $(\lambda_h)_{h\in H}$, $(\mu_h)_{h\in H}$ deux familles d'éléments de Λ_-, admettant un même ensemble H comme ensemble des indices, et soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur H. On suppose que la famille $(\nu_h)_{h\in H}$ définie par*

$$\nu_h = \lambda_h + \mu_h$$

converge simplement vers un élément ν de Λ_- partout fini.

Dans ces conditions, si l'une des familles (λ_h), (μ_h) converge faiblement, il en est de même de l'autre, et les deux familles convergent alors simplement vers leurs limites faibles.

DÉMONSTRATION. Soient λ', λ'' les fonctions définies par (7.1), et μ', μ'' les fonctions définies de façon analogue par rapport à (μ_h). On a alors

$$\lambda' + \mu'' = \nu = \lambda'' + \mu' .$$

Puisque la fonction ν est finie et intérieurement régulière, il en est de même des quatre fonctions λ', λ'', μ', μ'' (cf. (4.2)). Par conséquent, si (λ_h) converge faiblement, on a $\lambda' = \lambda''$, donc aussi $\mu' = \mu''$.

La proposition suivante montre que les propriétés d'additivité et de sous-additivité « passent à la limite » par rapport à la convergence faible.

(7.5) PROPOSITION. *Soit $(\lambda_h)_{h\in H}$ une famille d'éléments de Λ_-, qui converge faiblement vers un élément λ de Λ_- (suivant un filtre $\mathfrak{F}$ fixé sur H). Si chacune des fonctions λ_h est additive (resp. sous-additive), il en est de même de λ.*

DÉMONSTRATION. Désignons par $\mathfrak{V}$ la partie (riche) de $\mathfrak{U}$ constituée par les éléments U qui vérifient la relation (7.2). Si chacune des fonctions λ_h est additive (resp. sous-additive), il en est de même de la restriction de λ à $\mathfrak{V}$ (cf. Déf. (4.10)). La conclusion résulte alors de (4.11).

8. – Relations avec la convergence vague et la convergence étroite des mesures.

Nous allons maintenant étudier l'aspect « fonctionnel » de la convergence faible, c'est-à-dire les relations entre la convergence faible d'une famille filtrée d'éléments de Λ_- et la convergence des intégrales correspondantes, considérées comme des fonctionnelles sur des classes particulières de fonctions.

Remarquons tout d'abord que le lemme de Fatou, dans le cas particulier où les fonctions qui y figurent sont des fonctions croissantes définies dans un intervalle de $\boldsymbol{R}$ (intégrées par rapport à une mesure diffuse), peut être énoncé pour une famille filtrée quelconque:

(8.1) LEMME. *Soient T un intervalle de $\mathbf{R}$, μ une mesure de Radon positive et diffuse sur T, $(u_h)_{h\in H}$ une famille de fonctions croissantes (resp. décroissantes) définies dans T, $\mathfrak{F}$ un filtre sur l'ensemble H des indices. Si les fonctions u_h sont minorées par une même fonction q μ-intégrable, on a*

$$\int (\liminf_{h} {}_{\mathfrak{F}}\, u_h)\, d\mu \leqslant \liminf_{h} {}_{\mathfrak{F}} \int u_h\, d\mu \, .$$

DÉMONSTRATION. Supposons les fonctions u_h, p. ex., croissantes. Pour tout élément F du filtre $\mathfrak{F}$, la fonction

$$v^F = \inf_{h\in F} u_h$$

est alors croissante (et minorée par la fonction intégrable q).

La fonction

$$v = \sup_{F\in\mathfrak{F}} v^F = \liminf_{h} {}_{\mathfrak{F}}\, u_h$$

est elle aussi croissante. Par conséquent la fonction v_- définie par

$$v_-(t) = \sup\{v(s) : s \in T,\, s < t\}$$

(ainsi que la fonction v_-^F définie de façon analogue) est croissante et continue à gauche, donc semi-continue inférieurement.

La relation

$$v_- = \sup_{F\in\mathfrak{F}} v_-^F$$

entraîne alors (cf. [5], chap. IV, § 4, N. 4, Remarque):

$$\int v\, d\mu = \int v_-\, d\mu = \sup_{F\in\mathfrak{F}} \int v_-^F\, d\mu = \sup_{F\in\mathfrak{F}} \int v^F\, d\mu \leqslant \sup_{F\in\mathfrak{F}} \inf_{h\in F} \int u_h\, d\mu \, ,$$

c'est-à-dire l'inégalité de l'énoncé.

Dans le cas où les fonctions u_h sont décroissantes, on raisonne de façon analogue, en considérant v_+ et v_+^F au lieu de v_- et de v_-^F.

On a un énoncé analogue en remplaçant la limite inférieure par la limite supérieure:

(8.2) LEMME. *Soient T un intervalle de $\mathbf{R}$, μ une mesure de Radon positive et diffuse sur T, $(u_h)_{h\in H}$ une famille de fonctions croissantes (resp. décroissantes) définies dans T, $\mathfrak{F}$ un filtre sur l'ensemble H des indices. Si les fonctions u_h sont majorées par une même fonction q μ-intégrable, on a*

$$\int(\limsup_h{}_{\mathfrak{F}}\, u_h)\, d\mu \geqslant \limsup_h{}_{\mathfrak{F}}\int u_h\, d\mu\,.$$

En appliquant les deux lemmes précédents, on obtient la proposition suivante.

(8.3) PROPOSITION. *Soient $(\lambda_h)_{h\in H}$ une famille d'éléments de Λ_-, $\mathfrak{F}$ un filtre sur l'ensemble H des indices, λ', λ'' les deux fonctions définies par* (7.1), *f une fonction de la classe $\mathfrak{J}$. On a alors*

$$\int f\, d\lambda' \leqslant \liminf_h{}_{\mathfrak{F}}\int f\, d\lambda_h\,. \tag{8.4}$$

Si en outre la fonction f est bornée et s'annule sur le complémentaire d'un ensemble V de la classe $\mathfrak{U}$ tel que $\lambda''(V)$ soit fini, on a aussi

$$\int f\, d\lambda'' \geqslant \limsup_h{}_{\mathfrak{F}}\int f\, d\lambda_h\,. \tag{8.5}$$

DÉMONSTRATION. Désignons par u_h, v, w les fonctions décroissantes et positives ainsi définies dans l'intervalle $]0, +\infty[$:

$$u_h(t) = \lambda_h(\{f>t\})\,, \qquad v(t) = \lambda'(\{f>t\})\,, \qquad w(t) = \lambda''(\{f>t\})\,.$$

On a alors

$$v = \liminf_h{}_{\mathfrak{F}}\, u_h\,, \qquad w = \limsup_h{}_{\mathfrak{F}}\, u_h\,.$$

En appliquant le lemme (8.1), on trouve donc

$$\int_0^{+\infty} v(t)\, dt \leqslant \liminf_h{}_{\mathfrak{F}}\int_0^{+\infty} u_h(t)\, dt\,,$$

c'est-à-dire la relation (8.4).

Supposons maintenant que la fonction f soit majorée par la constante réelle c, et qu'elle soit nulle sur le complémentaire d'un ensemble V de la classe $\mathfrak{U}$, tel que l'on ait $\lambda''(V) < +\infty$. Dans ces conditions, chacune des fonctions décroissantes u_h est nulle sur l'intervalle $[c, +\infty[$. Il existe en outre un élément F du filtre $\mathfrak{F}$, tel que, pour tout élément h de F, on ait

$$u_h \leqslant \lambda_h(V) \leqslant \lambda''(V) + 1\,.$$

On peut donc appliquer le lemme (8.2), et l'on trouve ainsi

$$\int_0^{+\infty} w(t)\,dt \geqslant \limsup_{h}{}_{\mathfrak{F}} \int_0^{+\infty} u_h(t)\,dt\,,$$

c'est-à-dire la relation (8.5).

(8.6) COROLLAIRE. *Dans les hypothèses de la proposition précédente, supposons que* (λ_h) *converge faiblement vers un élément* λ *de* Λ_-. *On a alors*

$$\int f\,d\lambda = \lim_{h}{}_{\mathfrak{F}} \int f\,d\lambda_h$$

pour toute fonction bornée f *de la classe* $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}$, *qui s'annule en dehors d'un ensemble* V *de* $\mathfrak{U}$ *avec* $\lambda''(V) < +\infty$.

DÉMONSTRATION. On a, d'après la proposition précédente,

$$\int f\,d\lambda' \leqslant \liminf_{h}{}_{\mathfrak{F}} \int f\,d\lambda_h \leqslant \limsup_{h}{}_{\mathfrak{F}} \int f\,d\lambda_h \leqslant \int f\,d\lambda''\,.$$

Il suffit donc de remarquer que l'équivalence des trois fo nctions λ', λ'', λ entraîne, en vertu de (6.1),

$$\int f\,d\lambda' = \int f\,d\lambda'' = \int f\,d\lambda\,.$$

On dira qu'une fonction λ de la classe Λ est *modérée* (par rapport à la classe $\mathfrak{K}$) si elle prend une valeur finie sur tout élément de $\mathfrak{U}$ qui soit contenu dans un élément de $\mathfrak{K}$. On désignera par Λ_0 la partie de Λ_- constituée par les fonctions λ modérées et intérieurement régulières.

Voilà un autre corollaire utile de la proposition (8.3):

(8.7) COROLLAIRE. *Dans les hypothèses de* (8.3), *supposons que* (λ_h) *converge faiblement vers un élément* λ *de* Λ_0 *additif et sous-additif. On a alors*

$$\int f 1_U\,d\lambda = \lim_{h}{}_{\mathfrak{F}} \int f 1_U\,d\lambda_h$$

pour toute fonction f *de* $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{S}$ *et pour tout ensemble* U *de* $\mathfrak{U}$ *tel que la restriction de* f *à* U *soit bornée et que* λ *soit finie et régulière sur* U.

DÉMONSTRATION. On a $\lambda''(U) = \lambda(U) < +\infty$. En outre la fonction $f 1_U$ appartient à $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{S}$, est bornée et s'annule sur U^c. Il en résulte, d'après (8.3),

$$\int f 1_U\,d\lambda' \leqslant \liminf_{h}{}_{\mathfrak{F}} \int f 1_U\,d\lambda_h \leqslant \limsup_{h}{}_{\mathfrak{F}} \int f 1_U\,d\lambda_h \leqslant \int f 1_U\,d\lambda''\,.$$

D'autre part, pour tout nombre réel t strictement positif, la relation

$$\{f1_U > t\} = U \cap \{f > t\}$$

montre que, si $\{f > t\}$ est un ensemble de régularité pour λ, il en est de même de $\{f1_U > t\}$ (cf. (5.4)). L'équivalence des trois fonctions λ', λ'', λ entraîne donc leur coïncidence sur l'ensemble $\{f1_U > t\}$ pour presque toute valeur de t dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

Il en résulte

$$\int f1_U \, d\lambda' = \int f1_U \, d\lambda'' = \int f1_U \, d\lambda ,$$

d'où la conclusion.

La proposition suivante fournit un critère « fonctionnel » de convergence faible.

(8.8) PROPOSITION. *Soient λ un élément de Λ_-, $(\lambda_h)_{h\in H}$ une famille d'éléments de Λ_-, $\mathfrak{F}$ un filtre sur l'ensemble H des indices, $\mathcal{C}$ une partie dense de $\mathfrak{I} \cap \mathcal{S}$.*

a) Si, pour tout élément f de $\mathcal{C}$, on a

$$\int f\,d\lambda \leqslant \liminf_{h} {}_{\mathfrak{F}} \int f\,d\lambda_h \quad \left(\text{resp. } \int f\,d\lambda \geqslant \limsup_{h} {}_{\mathfrak{F}} \int f\,d\lambda_h\right), \tag{8.9}$$

alors, pour tout élément U de $\mathcal{U}$, on a

$$\lambda(U) \leqslant \liminf_{h} {}_{\mathfrak{F}}\, \lambda_h(U) \quad (\text{resp. } \lambda_+(U) \geqslant \limsup_{h} {}_{\mathfrak{F}}\, \lambda_h(U)) . \tag{8.10}$$

b) Si, en particulier, on a la relation

$$\int f\,d\lambda = \lim_{h} {}_{\mathfrak{F}} \int f\,d\lambda_h \tag{8.11}$$

pour tout élément f de $\mathcal{C}$, alors (λ_h) converge faiblement vers λ.

DÉMONSTRATION. *a*) Traitons, par exemple, le cas de la limite inférieure. Supposons donc vérifiée, pour tout élément f de $\mathcal{C}$, la première des relations (8.9). On a alors, pour tout élément f de $\mathcal{C}$ majoré par 1_U,

$$\int f\,d\lambda \leqslant \liminf_{h} {}_{\mathfrak{F}} \int f\,d\lambda_h \leqslant \liminf_{h} {}_{\mathfrak{F}}\, \lambda_h(U) .$$

D'après (6.2), cela prouve la première des relations (8.10).

b) Supposons maintenant vérifiée, pour tout élément f de $\mathcal{C}$, l'égalité (8.11), c'est-à-dire chacune des deux inégalités (8.9). On a alors, avec les notations (7.1),

$$\lambda \leqslant \lambda' \leqslant \lambda'' \leqslant \lambda_+ .$$

Cela signifie que les trois fonctions λ', λ'', λ sont équivalentes, c'est-à-dire que (λ_h) converge faiblement vers λ.

Il est facile de démontrer, à partir des propositions (8.6), (8.8), le théorème suivant, qui traduit en termes fonctionnels la convergence faible dans l'ensemble Λ_0 des fonctions modérées et intérieurement régulières.

(8.12) THÉORÈME. *Soit $\mathcal{C}$ une partie dense de $\mathfrak{J} \cap \mathcal{S}$, telle que toute fonction appartenant à $\mathcal{C}$ soit bornée et s'annule en dehors d'un ensemble de la classe $\mathcal{K}$. Soient en outre λ un élément de Λ_0, $(\lambda_h)_{h\in H}$ une famille d'éléments de Λ_0, $\mathfrak{F}$ un filtre sur l'ensemble H des indices.*

Pour que (λ_h) converge faiblement vers λ, il faut et il suffit que la relation

$$\int f\,d\lambda = \lim_{h}{}_{\mathfrak{F}} \int f\,d\lambda_h$$

ait lieu pour tout élément f de $\mathcal{C}$.

(8.13) REMARQUE. Dans les hypothèses du théorème précédent, associons, à tout élément λ de Λ_0, la fonctionnelle J_λ ainsi définie dans $\mathcal{C}$:

$$J_\lambda(f) = \int f\,d\lambda .$$

D'après (6.3), l'application $\lambda \mapsto J_\lambda$ est alors injective. Elle permet donc d'identifier Λ_0 à une partie de l'espace $\boldsymbol{R}^{\mathcal{C}}$. Si l'on muni cet espace de la topologie produit (ou topologie de la convergence simple), le théorème précédent affirme que la convergence faible dans Λ_0 coïncide avec la convergence au sens de la topologie de Λ_0 *en tant que sous-espace de* $\boldsymbol{R}^{\mathcal{C}}$.

Le théorème précédent, si l'on tient compte du théorème (6.4) concernant la représentation intégrale d'une fonctionnelle, admet le corollaire suivant.

(8.14) COROLLAIRE. *Soit $\mathcal{C}$ une partie dense de $\mathfrak{J} \cap \mathcal{S}$ possédant les propriétés suivantes*:

(*a*) *toute fonction de $\mathcal{C}$ est bornée, et s'annule en dehors d'un ensemble de la classe $\mathcal{K}$;*

(b) *pour tout élément f de $\mathcal{C}$ et pour tout nombre réel c positif, les fonctions, cf, $f \wedge c$ et $f - f \wedge c = (f-c)^+$ appartiennent à $\mathcal{C}$.*

Soit en outre $(\lambda_h)_{h \in H}$ une famille d'éléments de Λ_0, et soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur l'ensemble H des indices.

Dans ces conditions, pour qu'il existe un élément λ de Λ_0 tel que (λ_h) converge faiblement vers λ, il faut et il suffit que, pour tout élément f de $\mathcal{C}$, la limite

$$\lim_{h}{}_{\mathfrak{F}} \int f \, d\lambda_h$$

existe et soit finie.

Démonstration. En effet, la condition étant supposée satisfaite, posons, pour tout élément f de $\mathcal{C}$,

$$J(f) = \lim_{h}{}_{\mathfrak{F}} \int f \, d\lambda_h .$$

La fonctionnelle J ainsi définie vérifie toutes les conditions du théorème (6.4), de sorte qu'elle peut être représentée sous la forme

$$J(f) = \int f \, d\lambda ,$$

où λ est une fonction de la classe Λ_- (univoquement déterminée).

On voit aisément que λ est modérée. Il en résulte, d'après (8.12), que λ est la limite faible de (λ_h).

Lorsque, en particulier, X est un espace localement compact, et que les classes $\mathcal{K}$, $\mathcal{U}$ sont constituées respectivement par les ensembles compacts et par les ensembles ouverts de X (cf. (3.7)), on peut prendre la classe $\mathcal{C}$ de (8.12) égale à la classe $\mathcal{C}_c^+(X)$ des fonctions réelles, continues dans X, positives et à support compact. En outre une mesure de Radon positive μ sur X est complètement déterminée par la fonction d'ensemble $U \mapsto \mu(U)$ définie dans $\mathcal{U}$: cette fonction appartient à Λ_0, et la notion correspondante d'intégrale (au sens défini dans le § 2) coïncide avec la notion ordinaire d'intégrale par rapport à la mesure de Radon μ. Par conséquent, si on identifie l'espace des mesures de Radon positives sur X à un sous-espace de Λ_0, le théorème (8.12) montre que, sur ce sous-espace, la convergence faible se réduit à la *convergence vague* (cf. [5], [8], [12]).

De même, lorsque X est un espace métrisable, et que les classes $\mathcal{K}$, $\mathcal{U}$ sont constituées respectivement par les ensembles fermés et par les ensembles ouverts de X, on peut prendre la classe $\mathcal{C}$ de (8.12) égale à la classe $\mathcal{C}_b^+(X)$ des fonctions continues dans X, bornées et positives; en outre une mesure de Borel positive et bornée sur X peut être identifié à sa restriction à $\mathcal{U}$, qui est un élément particulier de Λ_0. Le théorème (8.12) montre alors que la convergence faible dans l'espace Λ_0 se réduit, sur le sous-espace constitué par les mesures de Borel positives et bornées, à la *convergence étroite* (cf. [2], [14], [12]).

Plusieurs résultats concernant la convergence vague ou étroite des mesures sont susceptibles d'extension à la convergence faible des fonctions croissantes d'ensemble. Voilà deux exemples immédiats.

(8.15) THÉORÈME. *Supposons qu'il existe une partie dense dénombrable de $\mathcal{U}$. Toute suite d'éléments de Λ_- admet alors une suite partielle faiblement convergente.*

(La démonstration s'obtient immédiatement par le procédé diagonal habituel.)

(8.16) THÉORÈME. *Supposons que toute partie de X réduite à un point appartienne à $\mathcal{K}$. Alors, pour tout point x de X, la fonction ε_x définie dans $\mathcal{U}$ par*

$$\varepsilon_x(U) = 1_U(x)$$

appartient à Λ_-.

Supposons en outre que l'on ait $X \in \mathcal{U}$ et qu'il existe une partie $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ dense et dénombrable. Dans ces conditions, toute fonction λ additive et sous-additive appartenant à Λ_- est la limite faible d'une suite (λ_n) telle que, pour tout n, λ_n soit une combinaison linéaire finie, à coefficients positifs, de fonctions de la forme ε_x.

DÉMONSTRATION. La première assertion étant immédiate, démontrons l'autre assertion. Il résulte de (5.1) que la fonction λ peut être prolongée en une fonction μ additive, définie dans l'anneau $\mathcal{A}$ engendré par $\mathcal{U}$. On voit aisément qu'on peut construire une suite $(\mathcal{T}_n)$ de partitions finies de X, constituées d'éléments de $\mathcal{A}$, de telle façon que tout élément V de $\mathcal{V}$ soit égal, pour n assez grand, à la réunion des éléments de $\mathcal{T}_n$ contenus dans V. Choisissons, pour tout n et pour tout élément A de $\mathcal{T}_n$, un point $x(n, A)$ appartenant à A, et posons

$$\lambda_n = \sum_{A \in \mathcal{T}_n} \mu(A)\, \varepsilon_{x(n,A)} .$$

Etant donné un élément V de $\mathcal{V}$, on a alors, dès que n est assez grand, $\lambda_n(V) = \lambda(V)$. Cela montre que (λ_n) converge faiblement vers λ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. AUMANN, *Reelle Funktionen*, Springer, Berlin (1954).
[2] P. BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures*, Wiley, New York (1968).
[3] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, Chap. 9, 2. éd., Hermann, Paris (1958).

[4] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, Chap. 1 et 2, 2. éd., Hermann, Paris (1966).

[5] N. BOURBAKI, *Intégration*, Chap. 1-4, Hermann, Paris (1952).

[6] F. CAFIERO, *Teoremi di prolungamento per le misure in particolari reticoli di insiemi*, Ric. di Mat., **5** (1956), pp. 273-312.

[7] F. CAFIERO, *Misura e integrazione*, Cremonese, Roma (1959).

[8] J. DIEUDONNÉ, *Eléments d'analyse*, vol. 2, Gauthier-Villars, Paris (1968).

[9] A. HORN - A. TARSKI, *Measures in Boolean algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **64** (1948), pp. 467-97.

[10] G. LETTA, *Il problema di Vitali-Lusin negli spazi perfettamente normali*, Ric. di Mat., **8** (1959), pp. 128-137.

[11] G. LETTA, *Teoremi di prolungamento per misure in reticoli algebrici*, Ric. di Mat., **8** (1959), pp. 300-319.

[12] G. LETTA, *Teoria elementare dell'integrazione*, Boringhieri, Torino (1976).

[13] J. NEVEU, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, Paris (1964).

[14] K. R. PARTHASARATHY, *Probability measures on metric spaces*, Acad. Press, New York (1967).

[15] B. J. PETTIS, *On the extension of measures*, Ann. of Math., **54** (1951), pp. 187-197.

[16] J. PFANZAGL - W. PIERLO, *Compact systems of sets*, Springer Lect. Notes, **16**, Berlin (1966).