ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

M. GALBIATI

**Sur l'image d'un morphisme analytique réel propre**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série*, tome 3, nº 2 (1976), p. 311-319

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1976_4_3_2_311_0>

# Sur l'image d'un morphisme analytique réel propre.

M. GALBIATI (*)

**1.** – Soient $X$, $Y$ deux espaces analytiques réels, et soit $f: X \to Y$ un morphisme analytique réel propre. Il est bien connu que, sans autres hypothèses, l'image de $f$ est un sous-ensemble sous-analytique en $Y$, au sens de Hironaka ([1]), mais elle n'est pas, en général, semi-analytique en $Y$. On veut démontrer le théorème suivant

THÉORÈME (1.1). *Soit $f: X \to Y$ un morphisme propre d'espaces analytiques réels. Soit $Z$ un sous-espace analytique réel fermé de $X$.*
*Supposons qu'il existe*

(*a*) *un espace analytique complexe $\tilde{X}$, muni d'une auto-conjugaison $\sigma_{\tilde{X}}$, tel que $|X|$ soit une réunion de composantes connexes de la partie réelle de $\tilde{X}$.*

(*b*) *un sous-espace analytique complexe fermé $\tilde{Z}$ de $\tilde{X}$, tel que $|Z|$ soit une réunion de composantes connexes de la partie réelle de $\tilde{Z}$ par rapport à l'auto-conjugaison induite par celle de $\tilde{X}$.*

(*c*) *un espace analytique complexe $\tilde{Y}$, avec auto-conjugaison $\sigma_{\tilde{Y}}$, qui soit une complexification de $Y$.*

(*d*) *un morphisme analytique complexe propre $\tilde{f}: \tilde{X} \to \tilde{Y}$, tel que $\tilde{f} \circ \sigma_{\tilde{X}} = \sigma_{\tilde{Y}} \circ \tilde{f}$ et $\tilde{f}_{|X} = f$.*
*Alors, $f(X - Z)$ est un sous-ensemble semi-analytique en $Y$.*

De ce résultat on déduira le théorème de Tarski-Seidenberg-Łojasiewicz.
Je veux remercier le professeur Hironaka, qui m'a proposé ce problème, pour l'encouragement et les suggestions qu'il a voulu me donner.

(*) L'auteur est associé au groupe G.N.S.A.G.A. du C.N.R.
Istituto di Matematica « Leonida Tonelli » dell'Università di Pisa.
Pervenuto alla Redazione l'8 Luglio 1975.

**2.** – Rappelons d'abord que un *espace analytique réel* $X$ est un espace annelé en $\boldsymbol{R}$-algèbres locales qui est localement isomorphe à un modèle local $(S, \mathcal{A}_{\boldsymbol{R}^n|\Omega}/I_{|S})$ où $S$ est un fermé dans un ouvert $\Omega$ de $\boldsymbol{R}^n$, $S$ défini par $f_1 = \ldots = f_K = 0$, avec $f_i \in \Gamma(\Omega, \mathcal{A}_{\boldsymbol{R}^n})$, pour $i = 1, \ldots, K$; $\mathcal{A}_{\boldsymbol{R}^n}$ est le faisceau des germes des fonctions analytiques réelles sur $\boldsymbol{R}^n$ et $I$ est l'Idéal engendré par les $f_i$.

Rappelons encore que une *complexification* d'un espace analytique réel $X$ est un espace analytique complexe $\tilde{X}$, muni d'une auto-conjugaison $\sigma_{\tilde{X}}$, tel que la partie fixe par rapport à $\sigma_{\tilde{X}}$ soit isomorphe à l'espace analytique rèel $X$.

Pour la théorie des espaces analytiques réels on renvoie à [2], [3].

Les remarques suivantes nous permettent de préciser mieux le problème.

Remarque (2.1). $\tilde{Z}$ étant fermé dans $\tilde{X}$, le morphisme $\tilde{f}_{|\tilde{Z}}: \tilde{Z} \to \tilde{Y}$ est encore un morphisme propre. Si $Z = \emptyset$, on obtient du théorème (1.1) que $f(X)$ est semi-analytique en $Y$.

Remarque (2.2). On ne suppose pas que $\tilde{X}$ soit une complexification de $X$, définie comme avant; en fait, il peut arriver qu'il existe une extension propre du morphisme $f$ à un espace complexe dont la partie réelle contient $X$ comme sous-ensemble ouvert et fermé, mais que cette extension ne soit pas propre sur tout sous-espace analytique complexe dont la partie réelle contient seulement $|X|$. Mais, pour notre problème, une fois $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ données, on peut les remplacer par les plus petits sous-espaces analytiques complexes fermés de $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ qui contiennent $|X|$ et $|Y|$ respectivement. On peut donc supposer que $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ soient réduits et que chacune des composantes irréductibles (globales) de $\tilde{X}$, ainsi que de $\tilde{Y}$, soit invariante par l'auto-conjugaison respective. En effet, soit $\tilde{X} = \bigcup \tilde{X}_i$ la décomposition de $\tilde{X}$ en composantes irréductibles; alors, ou $\sigma_{\tilde{X}}(\tilde{X}_j) = \tilde{X}_j$ (donc $\tilde{X}_j$ est invariante par auto-conjugaison) ou $\sigma_{\tilde{X}}(\tilde{X}_j) = \tilde{X}_k$ pour un indice $k \neq j$; en ce cas, sans changer la partie réelle, en peut remplacer dans $\tilde{X}$ les composantes $\tilde{X}_j$ et $\tilde{X}_k$ par le sous-espace fermé $\tilde{X}_j \cap \tilde{X}_k$ (qui en général ne sera pas irréductible). On procède de la même façon pour les composantes irréductibles de $\tilde{X}_j \cap \tilde{X}_k$ et ainsi de suite pour toutes les composantes irréductibles de $\tilde{X}$ qui ne sont pas invariantes par auto-conjugaison.

Remarquons que localement ce processus s'arrête après un nombre fini de pas, parce que (théorème de Cartan) toute suite décroissante de sous-espaces analytiques complexes fermés est localement stationnaire.

On peut répéter le même raisonnement pour $\tilde{Y}$; on a donc remplacé $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ par des espaces analytiques complexes dont les composantes irréductibles sont invariantes par auto-conjugaison.

REMARQUE (2.3). Rappelons que, si $g\colon T \to W$ est un morphisme propre d'espaces analytiques complexes, $g(T)$ est un sous-espace analytique complexe fermé de $W$. Dans notre situation, donc, on peut supposer que le morphisme $\tilde{f}$ soit surjectif.

REMARQUE (2.4). Soit $\tilde{X}$ irréductible et réduit. Si l'on démontre que $f(X-Z)$ est un sous-ensemble semi-analytique en $Y$ sous cette autre hypothèse, on obtient le résultat aussi dans le cas général.

Il suffit, pour ça, de se rappeler que l'ensemble des composantes irréductibles d'un espace analytique complexe est localement fini. Si $\tilde{X}$ n'est pas irréductible, on applique le théorème à chaque composante irréductible et $f(X-Z)$ sera alors une réunion localement finie de sous-ensembles semi-analytiques en $Y$, donc $f(X-Z)$ est semi-analytique en $Y$. Si l'on suppose alors que $\tilde{X}$ est irréductible, $\tilde{Y}$ est aussi irréductible, parce que $\tilde{f}$ est supposé surjectif. En plus, $\tilde{Z}$ étant fermé dans $\tilde{X}$, on peut supposer que $\dim_{\mathbf{C}}\tilde{Z} \lneqq \dim_{\mathbf{C}}\tilde{X}$, parce que, si $\dim_{\mathbf{C}}\tilde{Z} = \dim_{\mathbf{C}}\tilde{X}$, $\tilde{Z} = \tilde{X}$ est le théorème est évidemment vrai.

Pour démontrer le théorème (1.1) on procède par récurrence soit sur la dimension de $\tilde{X}$ soit sur celle de $\tilde{Y}$.

Le théorème est en fait vrai pour $\dim_{\mathbf{C}}\tilde{X} = 0$ et $\dim_{\mathbf{C}}\tilde{Y}$ quelconque, et aussi pour $\dim_{\mathbf{C}}\tilde{X}$ quelconque, $\dim_{\mathbf{C}}\tilde{Y} = 0$ (sans hypothèse sur la dimension de $\tilde{Z}$).

**3.** – Il nous sera utile de considérer une résolution des singularités de $\tilde{X}$: soit $\tilde{\pi}\colon \tilde{X}' \to \tilde{X}$. Rappelons que $\tilde{X}'$ est un espace lisse, $\tilde{\pi}$ un morphisme surjectif propre, et qu'il est un isomorphisme en dehors de la partie singulière de $\tilde{X}$, qui est un fermé analytique complexe rare en $\tilde{X}$. En plus, on peut exiger que $\tilde{X}'$ ait une autoconjugaison $\sigma_{\tilde{X}'}$ induite par celle de $\tilde{X}$, de telle façon que $\tilde{\pi}$ définit un morphisme (propre) d'espaces analytiques réels $\pi\colon X' \to X$, où $X'$ est la réunion des composantes connexes de la partie réelle de $\tilde{X}'$ qui sont contenues dans $\tilde{\pi}^{-1}(X)$. Soit enfin $\tilde{Z}' = \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{Z})$.

On veut construire un sous-ensemble $\tilde{S}$ analytique complexe fermé et rare en $\tilde{Y}$, tel que le morphisme $\tilde{f}\tilde{\pi}\colon \tilde{X}' \to \tilde{Y}$ soit lisse au dessus de $\tilde{Y}-\tilde{S}$ et $\tilde{f}\tilde{\pi}_{|\tilde{Z}'}\colon \tilde{Z}' \to \tilde{Y}$ soit plat partout au dessus de $Y-\tilde{S}$. Dans cette situation, alors, on démontrera que $f\pi(X'-Z')-\tilde{S}$ est un sous-ensemble semi-analytique en $Y$. Pour démontrer que $f(X-Z)-\big(f\pi(X'-Z')-\tilde{S}\big)$ est aussi un sous-ensemble semi-analytique en $Y$, on raisonnera par récurrence.

Pour construire ce sous-ensemble $\tilde{S}$, il nous faut rappeler deux théorèmes et démontrer un lemme général.

THÉORÈME (3.1). (Frisch [4]). *Soient $T$, $W$ deux espaces analytiques complexes, $W$ réduit, et soit $g\colon T \to W$ un morphisme analytique complexe propre.*

*Alors, il existe un fermé analytique complexe rare en $W$, soit $L$, tel que*

$$g|_{T-g^{-1}(L)}: T - g^{-1}(L) \to W - L$$

*est un morphisme plat.*

THÉORÈME (3.2) (Bertini). *Soit $T$ un espace analitique complexe lisse et soit $V \subset T$ un ouvert relativement compact quelconque. Soit $\varphi$ une fonction analytique complexe définie dans un voisinage de $\overline{V}$ en $T$. Alors, il existe un ensemble fini $N_V \subset \mathbf{C}$, tel que, pour tout $a \in \mathbf{C} - N_{V'}$, le sous-espace défini par l'idéal $(\varphi - a)$ est lisse en $V$.*

LEMME (3.3). *Soit $T$ un espace analytique complexe lisse et $W$ un espace analytique complexe réduit. Soit $h: T \to W$ un morphisme analytique complexe propre.*

*Alors, il existe un sous-ensemble analytique complexe fermé et rare en $W$, soit $F$, tel que $W - F$ est lisse, et le morphisme*

$$d|_{T-h^{-1}(F)}: T \to h^{-1}(F) \to W - F$$

*est lisse.*

DÉMONSTRATION. Soit $F = \operatorname{Sing} W \cup \operatorname{Im}(\operatorname{Sing} h)$; on veut démontrer que ce sous-ensemble analytique complexe de $W$ est fermé et rare en $W$. L'espace $W$ étant réduit, $\operatorname{Sing} W$, qui est évidemment fermé, est rare en $W$. Le morphisme $h$ étant propre, donc fermé, $\operatorname{Im}(\operatorname{Sing} h)$ est aussi fermé dans $W$. Il faut démontrer qu'il est rare en $W$. Du theorème (3.1), il existe un fermé analytique complexe $L$, rare en $W$ tel que le morphime $h$ est plat sur $W_0 = W - L$. On commence par démontrer que Im $(\operatorname{Sing} h)$ est rare en $W_0$; il nous faut donc démontrer que pour tout point $w \in W_0$, et pour tout voisinage ouvert $U$ de $w$ en $W_0$, il existe un point $a \in U$ tel que $h^{-1}(a)$ est lisse.

Mais, après avoir démontré ça, le morphisme $h$ étant plat en a, $h$ est aussi lisse en $a$; on pourra donc conclure que $\operatorname{Im}(\operatorname{Sing} h)$ est rare en $W_0$. Soit donc $w \in W_0$ et soient $f_1, \ldots, f_s$ les equations locales de $w$. Soit $U$ un voisinage ouvert de $w$ en $W_0$, relativement compact en $W_0$. On peut supposer que $U = B(w, r)$ (la boule ouverte de centre $w$ et rayon $r$ arbitrairement fixé). Soit $V = h^{-1}(U)$, qui est un voisinage ouvert, relativement compact en $T$, de $h^{-1}(w)$. Soient $f_1^*, \ldots, f_s^*$ les équations locales de $h^{-1}(w)$ en $T$, induites par les $f_1, \ldots, f_s$. Pour la fonction analytique $f_1^*$, que l'on peut supposer définie dans un voisinage ouvert de $\overline{V}$ (quitte à restraindre $U$), on peut appliquer le théorème de Bertini; on trouve donc un nombre complexe $a_1$, tel que le sous-espace $T_1$, défini par l'idéal $(f_1^* - a_1)$ soit lisse en $V$. On peut aussi choisir $a_1$ tel que l'ensemble $W_1$ défini par $(f_1 - a_1)$ soit tel que $W_1 \cap U \neq \emptyset$.

(Il suffit pour ça de choisir $a_1$ tel que $|a_1| \leqslant \frac{1}{2}r$).

On peut répéter le raisonnement pour $f_2^*$, définie dans un voisinage de $\overline{V \cap T_1}$, ($V \cap T_1$ est relativement compact en $T_1$). Les hypothèses du théorème de Bertini étant satisfaites, on trouve $a_2 \in \boldsymbol{C}$ tel que l'espace

$$T_2 = \{t \in T_1 | f_2^*(t) - a_2 = 0\}$$

est lisse en $T_1$. Comme avant, on peut supposer que

$$W_2 = \{w \in W_1 | f_1 - a_1 = 0, f_2 - a_2 = 0\} \cap U \neq \emptyset\,.$$

On peut continuer de la même façon pour $f_3^*, \ldots, f_s^*$. On obtient donc un point $a = (a_1, \ldots, a_s) \in U$ et les $a_i$ sont tels que, pour tout $i = 1, \ldots, s$

$$T_i = \{t \in T_{i-1} | f_i^*(t) - a_i = 0\}$$

est lisse en $T_{i-1} \cap V$. Donc l'ensemble $T_s = h^{-1}(a)$ est lisse en $V$. On peut conclure que $\operatorname{Im}(\operatorname{Sing} h)$ est rare en $W_0$: Il suffit maintenant de remarquer que $\operatorname{Im}(\operatorname{Sing} h)$ est rare en $W$: en fait, soit $w \in W$, et soit $U$ un voisinage ouvert quelconque de $w$ en $W$. $L$ étant rare en $W$, il existe un point $w_1$, $w_1 \in U$, tel que $w_1 \notin L$; alors pour tout voisinage de $w_1$ en $W_0$, en particulier pour $U \cap W_0$, il existe $\zeta \in U \cap W_0$, $\zeta \notin \operatorname{Im}(\operatorname{Sing} h)$.

Donc, $F = \operatorname{Sing} W \cup \operatorname{Im}(\operatorname{Sing} h)$ est rare en $W$ et le Lemme est démontré.

Revenons à notre situation: il existe un sous-ensemble analytique complexe fermé et rare en $\tilde{Y}$, disons $\tilde{S}_1$, qui a les propriétés de l'ensemble $F$ du Lemme précédent, par rapport au morphisme $\tilde{f}\tilde{\pi}\colon \tilde{X}' \to \tilde{Y}$. Soit $S_1$ l'ensemble (muni de sa structure analytique complexe réduite):

$$\tilde{S}_1 = \operatorname{Sing} \tilde{Y} \cup \tilde{f}\tilde{\pi}(\operatorname{Sing} \tilde{f}\tilde{\pi})\,.$$

Remarquons que $\tilde{S}_1$ est invariant par l'auto-conjugaison de $\tilde{Y}$.

Considérons maintenant le morphisme $\tilde{f}\tilde{\pi}|_{\tilde{Z}}\colon \tilde{Z}' \to \tilde{Y}$; le morphisme $\tilde{f}\tilde{\pi}|_{\tilde{Z}}$ est propre. Par rapport à $\tilde{f}\tilde{\pi}|_{\tilde{Z}}$ on peut trouver un sous-ensemble analytique complexe fermé et rare en $\tilde{Y}$, soit $\tilde{S}_2$, tel que $\tilde{f}\tilde{\pi}|_{\tilde{Z}}$ est plat sur $\tilde{Y} - \tilde{S}_2$: $\tilde{S}_2$ est aussi invariant par auto-conjugaison, si non, on le remplace par $\tilde{S}_2 \cap \sigma_{\tilde{Y}}(\tilde{S}_2)$, qui est invariant.

Soit enfin $\tilde{S} = \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2$.

REMARQUE (3.4). Soit $\tilde{X}'_y = (\tilde{f}\tilde{\pi})^{-1}(y)$, pour $y \in \tilde{Y} - \tilde{S}$. Alors, $\tilde{Z}'$ est rare en $\tilde{X}'_y$.

En fait, soit $\tilde{Z}'_y = \tilde{X}'_y \cap \tilde{Z}' = (\tilde{f}\tilde{\pi}|_{\tilde{Z}'})^{-1}(y)$.

Soit $y_0 \in \tilde{Y} - \tilde{S}$, tel que $\tilde{Z}'_{y_0}$ n'est pas rare en $\tilde{X}'_{y_0}$; alors, $\dim_{\boldsymbol{C}} \tilde{Z}'_{y_0} = \dim_{\boldsymbol{C}} \tilde{X}'_{y_0}$. En $\tilde{Y} - \tilde{S}$, le morphisme $\tilde{f}\tilde{\pi}$, ainsi que le morphisme $\tilde{f}\tilde{\pi}|_{\tilde{Z}}$, est plat. Donc la dimension de $\tilde{Z}'_y$ est constante, pour tout $y \in \tilde{Y} - \tilde{S}$ et, de même, la dimension de $\tilde{X}'_y$. Alors, $\dim_{\boldsymbol{C}} \tilde{X}' = \dim_{\boldsymbol{C}} \tilde{Z}'$ (en fait, $\dim_{\boldsymbol{C}} \tilde{Z}' = \dim_{\boldsymbol{C}} \tilde{Y} + \dim_{\boldsymbol{C}} \tilde{Z}'_{y_0}$ et $\dim_{\boldsymbol{C}} \tilde{X}' = \dim_{\boldsymbol{C}} \tilde{Y} + \dim_{\boldsymbol{C}} \tilde{X}'_{y_0}$, pour $y_0 \in \tilde{Y} - \tilde{S}$) mais on sait que $\dim_{\boldsymbol{C}} \tilde{Z}' \lneqq \dim_{\boldsymbol{C}} \tilde{X}'$, parce que, par hypothèse, $\dim_{\boldsymbol{C}} \tilde{Z} \lneqq \dim_{\boldsymbol{C}} \tilde{X}$.

Alors on a le résultat cherché.

REMARQUE (3.5). $\tilde{X}'_y$ est lisse, pour $y \in \tilde{Y} - \tilde{S}$; si $\tilde{X}'_y \cap X' \neq \emptyset$, $\dim_{\boldsymbol{C}} \tilde{X}'_y = \dim_{\boldsymbol{R}} \tilde{X}'_y \cap X'$. Mais

$$\dim_{\boldsymbol{C}} \tilde{X}'_y \gneqq \dim_{\boldsymbol{C}} \tilde{Z}'_y \geqq \dim_{\boldsymbol{R}} Z'_y \qquad (\text{où } Z'_y = \tilde{Z}'_y \cap Z')\,;$$

on conclut que

$$\dim_{\boldsymbol{R}} X'_y \gneqq \dim_{\boldsymbol{R}} Z'_y\,.$$

Donc $Z'_y$ est rare en $X'_y$, pour tout $y \in Y - \tilde{S}$.

LEMME (3.6). *Soit* $Y_1 = Y - \tilde{S}$. *Soit* $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *la famille des composantes connexes de* $Y_1$. *Alors,*

$$H = f\pi(X' - Z') - \tilde{S} = \bigcup_{\alpha \in A'} V_\alpha \qquad (A' \subset A)\,,$$

($H$ *est donc un sous-ensemble semi-analytique de* $Y$).

DÉMONSTRATION. Le morphisme $f\pi$, restraint à $X' - (\tilde{f}\tilde{\pi})^{-1}(\tilde{S})$ est lisse et propre; il est donc ouvert et fermé, et $f\pi(X') - \tilde{S}$ est une réunion de composantes connexes de $Y_1$. Mais, de la remarque précedente, $Y_1 \cap f\pi(X' - Z') = Y_1 \cap f\pi(X')$ et le lemme est démontré.

LEMME (3.7). *Soit* $V_{\alpha_0}$ *une composante connexe de* $Y_1$, $V_{\alpha_0} \not\subset H$. *Alors,* $f^{-1}(V_{\alpha_0}) \subset \operatorname{Sing}\tilde{f}$.

DÉMONSTRATION. Soit $x \in f^{-1}(V_{\alpha_0}) - \operatorname{Sing}\tilde{f}$. Alors, le morphisme $\tilde{f}$ est lisse en $x$. En plus, $\tilde{Y}$ est lisse en $f(x)$, parce que, par hypothèse, $f(x) \notin \tilde{S}$; donc, $\tilde{X}$ est lisse en $x$; en fait, $\tilde{X}$ est, localement en $x$, produit d'espaces lisses. Alors, toujours localement en $x$, le morphisme $\tilde{\pi}$ est un isomorphisme, et on aurait $f(x) \in \operatorname{Im} f\pi - \tilde{S}$, contrairement à l'hypothèse.

**4.** – On peut maintenant compléter la démonstration du théorème (1.1). Soit $X_1 = X \cap \operatorname{Sing}\tilde{f}$. $X_1$ est un sous-espace analytique réel fermé de $X$. Soit $f_1 = f|_{X_1}: X_1 \to Y$; $f_1$ est un morphisme propre qui vérifie la propriété ($d$) du théorème (1.1), par rapport au morphisme propre $\tilde{f}_1 = \tilde{f}|_{\operatorname{Sing}\tilde{f}}\,.\ \operatorname{Sing}\tilde{f} \to \tilde{Y}$.

Soit $Z_1 = Z \cap X_1$, et $\tilde{Z}_1 = \operatorname{Sing}\tilde{f} \cap \tilde{Z}$. Soit encore $X_2 = X \cap \tilde{f}^{-1}(\tilde{S})$. $X_2$ est aussi un sous-espace analytique réel fermé de $X$, et le morphisme $f_2 = f_{|X_2}: X_2 \to \tilde{S} \cap Y$ est un morphisme propre qui vérifie la propriété ($d$) du théorème (1.1) par rapport au morphisme propre $\tilde{f}_2 = \tilde{f}|_{\tilde{f}^{-1}(\tilde{S})}: \tilde{f}^{-1}(\tilde{S}) \to \tilde{S}$. Soit $Z_2 = Z \cap X_2$ et $\tilde{Z}_2 = \tilde{Z} \cap \tilde{f}^{-1}(\tilde{S})$. Alors,

$$f(X - Z) = \big(f\pi(X' - Z') - \tilde{S}\big) \cup f_1(X_1 - Z_1) \cup f_2(X_2 - Z_2)\,.$$

On veut démontrer que l'on peut appliquer les hypothèses de récurrence aux morphismes $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$.

Pour le morphisme $\tilde{f}_2$, on a déjà vu que $\tilde{S}$ est rare en $\tilde{Y}$, donc $\dim_C \tilde{Y} \gneqq \dim_C \tilde{S}$. Il suffit donc d'appliquer l'hypothèse de récurrence sur la dimension de l'espace but pour obtenir que $f_2(X_2 - Z_2)$ est un sous-ensemble semi-analytique en $\tilde{S} \cap Y$. Mais $\tilde{S} \cap Y$ est fermé dans $Y$, donc $f_2(X_2 - Z_2)$ est semi-analytique dans $Y$.

Pour le morphisme $\tilde{f}_1$, il faut démontrer que $\operatorname{Sing}\tilde{f}$ est rare en $\tilde{X}$. En fait, soit $L$ le sous-ensemble analytique complexe fermé, rare, de $\tilde{Y}$ tel que le morphisme $\tilde{f}$ soit plat sur $\tilde{Y} - L$.

Soit

$$\tilde{X}_0 = \tilde{X} - \tilde{f}^{-1}(L) - \operatorname{Sing}\tilde{X} - \tilde{f}^{-1}(\operatorname{Sing}\tilde{Y})\,.$$

$$\tilde{Y}_0 = \tilde{Y} - L - \operatorname{Sing}\tilde{Y}\,.$$

Le morphisme $\tilde{f}|_{\tilde{X}_0}: \tilde{X}_0 \to \tilde{Y}_0$ est alors un morphisme plat d'espaces lisses.

Le théorème de Bertini implique qu'il existe un sous-ensemble analytique complexe fermé et rare en $\tilde{X}_0$, soit $L_1$, tel que

$$\tilde{f}|_{\tilde{X}_0 - L_1}: \tilde{X}_0 - L_1 \to \tilde{Y}_0 - \tilde{f}(L_1)$$

est un morphisme lisse. Donc $\operatorname{Sing}\tilde{f}$ est rare en $\tilde{X}$, et l'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence sur l'espace source; $f_1(X_1 - Z_1)$ est alors semi-analytique en $Y$.

Le théorème (1.1) est donc complètement démontré.

**5.** – Comme conséquence du théorème (1.1) on obtient le théorème de Tarski-Seidenberg-Łojasiewicz ([5]).

Corollaire (5.1). *Soit $A$ un sous ensemble semi-analytique en $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$, défini par des équations polynomiales ($=0$ ou $\neq 0$) dans les coordonnées $x=(x_1, \dots, x_m)$ de $\boldsymbol{R}^m$, avec coéfficients fonctions analytiques sur $\boldsymbol{R}^n$ (de coordonnées $y=(y_1, \dots, y_n)$). Alors, si $p\colon \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ est la projection $p(y,x)=y$, $p(A)$ est un sous-ensemble semi-analytique en $\boldsymbol{R}^n$.*

Démonstration. Par définition de sous-ensemble semi-analytique, et par les hypothèses, $A$ sera une réunion finie de sous-ensembles

$$B=\{\zeta \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m \mid f_1(\zeta)=\dots=f_\alpha(\zeta)=0,\ g_1(\zeta)>0 \dots g_\beta(\zeta)>0\}\,,$$

où $f_i$, $g_j$ sont polynômes en $x$, à coéfficients dans $\mathcal{A}_{\boldsymbol{R}^n}(\boldsymbol{R}^n)$.

Pour démontrer (5.1) il suffit de le vérifier pour $A=B$.

Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m \arrow[r, hook, "h"'] \arrow[d, "p"'] & \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{P}^m(R) \arrow[dl, "p_1"] & \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{P}^1_1(\boldsymbol{R}) \times \dots \times \boldsymbol{P}^1_\beta(\boldsymbol{R}) \arrow[l, "q"'] \arrow[dll, "\hat{p}"] \\
\boldsymbol{R}^n & &
\end{tikzcd}$$

où $h$ est l'immersion définie en considérant $\boldsymbol{R}^m$ comme carte affine de $\boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{R})$, $p_1$, $\hat{p}$, $q$ sont les projections naturelles. Les coordonnées homogènes de $\boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{R})$ soient $(x_0, x)$, et de $\boldsymbol{P}^1_j(\boldsymbol{R})$ soient $(t_{0j}, t_{1j})$ $(j=1, \dots, \beta)$. Dans $\Delta=\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{R}) \times \dots \times \boldsymbol{P}^1_\beta(\boldsymbol{R})$, soient

$$X=\{P \in \Delta \mid \hat{f}_i(y, x_0, x)=0,\ t_{0j}^2 \hat{g}_j(y, x_0, x)-x_0^{n_j} t_{1j}^2=0\ \forall i=1, \dots, \alpha,\ \forall j=1, \dots, \beta\}\,.$$

(où $\hat{f}_i$, $\hat{g}_j$ sont les polynômes homogénes obtenus des $f_i$, $g_j$ en passant aux coordonnées homogènes $(x_0, x)$ de $\boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{R})$, et $n_j$ est le degré de $g_j$, pour $j=1, \dots, \beta$),

$$Z=\{P \in \Delta \mid x_0=0\}\left(\bigcup_{j=1}^{\beta}\{t_{1j}=0\}\right).$$

Soit enfin $\hat{A}=X-Z$.

Démontrons que $q(\hat{A})=A$. En fait si $P \in \hat{A}$, alors $x_0 \neq 0$ et $\hat{f}_i(y, x_0, x)=0$ en $P$, donc $f_i(y, x)=0$. En plus, en $P$, $t_{0j}^2 \hat{g}_j(y, x_0, x)-t_{1j}^2 x_0^{n_j}=0$, avec $x_0 \neq 0$, $t_{1j} \neq 0$, donc $q(P) \notin \{x_0=0\}$ et $g_j(y, x)>0$. Alors, $q(\hat{A})=A \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{R})$. Remarquons maintenant que $\hat{p}$ est un morphisme propre d'espaces analytiques réels, dont la restriction soit à $X$, soit à $Z$ est encore propre.

$$\tilde{\Delta}=\boldsymbol{C}^n \times \boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{P}^1_1(\boldsymbol{C}) \times \dots \times \boldsymbol{P}^1_\beta(\boldsymbol{C})$$

est une complexification de

$$\Delta = \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{P}^1_1(\boldsymbol{R}) \times \ldots \times \boldsymbol{P}^1_\beta(\boldsymbol{R})\ ;$$

considérons la projection $\tilde{\hat{p}}\colon \boldsymbol{C}^n \times \boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{P}^1_1(\boldsymbol{C}) \times \ldots \times \boldsymbol{P}^1_\beta(\boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{C}^n$; ce morphisme est propre, et la partie reelle $\tilde{\hat{p}}$ coincide avec $\hat{p}$. $X$ admet une complexification $\tilde{X}$, définie de façon évidente, qui est un sous-espace analytique complexe fermé de $\tilde{\Delta}$; de même pour $Z$. On peut donc appliquer le théorème (1.1), et l'on obtient que $\hat{p}(\hat{A}) = \hat{p}(X - Z)$ est semi-analytique en $\boldsymbol{R}^n$. Mais $\hat{p}(X - Z) = p(A)$, et le corollaire est démontré.

## RÉFÉRENCES

[1] H. Hironaka, *Subanalytic sets*, in Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Volume in honour of Y. Akizuki, Kinokunya Pub., 1973.

[2] H. Hironaka, *Introduction to real analytic sets and real analytic maps*, Quaderno del C.N.R., Istituto Matematico dell'Università di Pisa (1973).

[3] A. Tognoli, *Introduzione alla teoria degli spazi analitici reali* (Centro Linceo Interdisciplinare di Scienze Matematiche e loro applicazioni).

[4] J. Frisch, *Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes*, Inventiones math., **4** (1967), pp. 118-138.

[5] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, Lecture note (1965), I.H.E.S., Bures sur Yvette; reproduit N. A66.765, Ecole Polytechnique, Paris.