

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

J. P. PUEL

**Existence, comportement à l'infini et stabilité dans certains problèmes
quasilinéaires elliptiques et paraboliques d'ordre 2**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 3, n° 1
(1976), p. 89-119

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1976_4_3_1_89_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Existence, comportement à l'infini et stabilité dans certains problèmes quasilineaires elliptiques et paraboliques d'ordre 2 (*).

J. P. PUEL (**)

dedié à Jean Leray

1. – Introduction.

On se propose d'étudier ici des problèmes du type

$$\begin{cases} Au + f(u, \text{grad } u) = 0 & \text{dans } \Omega \text{ ouvert de } R^n \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

où A est un opérateur différentiel linéaire à partie principale elliptique du 2ème ordre, et les problèmes d'évolution associés. Plus précisément on va établir des conditions suffisantes d'existence d'une solution comprise entre deux fonctions φ et ψ données (c'est à dire appartenant à l'intervalle $[\varphi, \psi]$ de $L^2(\Omega)$ ou de $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ par exemple). On étudiera ensuite le comportement à l'infini des solutions des problèmes paraboliques et la stabilité des solutions stationnaires.

Les problèmes ont été étudiés, à l'aide de méthodes itératives, dans le cas où f ne dépend que de l'argument u , par divers auteurs, en particulier Courant-Hilbert [4], Sattinger [8], Amann [0].

Dans le cas elliptique, le problème a été étudié dans Choquet-Bruhat-Leray [3] en utilisant des majorations ponctuelles de f en fonction de ses arguments, et des techniques du type Ladyzenskaja-Uralceva [5].

Ici on utilisera des majorations globales de f en fonction de ses arguments, et une méthode qui semble nouvelle pour aborder le problème. Celle-ci comporte deux étapes:

(*) Ce travail doit faire partie d'une thèse présentée à l'Université, Paris VI.

(**) Université Paris VI, Laboratoire Analyse Numérique.

Pervenuto alla Redazione l'11 Marzo 1975.

1) Existence d'une solution pour l'inéquation variationnelle associée, relative au convexe $[\varphi, \psi]$.

2) Remarque du fait que si φ est « sous solution » et ψ « sur-solution » (dans un sens qui sera précisé plus loin), toute solution de l'inéquation variationnelle considérée est en fait solution de l'équation.

Ceci nécessitera la connaissance d'une régularité assez forte sur les solutions de l'inéquation variationnelle. Cette méthode, a priori très artificielle, semble être une généralisation somme toute assez naturelle des méthodes itératives citées ci-dessus.

L'étude du comportement à l'infini et de la stabilité s'inspire largement de celle de Sattinger [8]. On se limitera, pour simplifier l'exposé, à des conditions de Dirichlet. Les résultats peuvent être étendus à des problèmes de Neumann, ainsi qu'à certains systèmes quasilineaires.

Soit donc Ω un ouvert borné régulier de R^n et Γ sa frontière. Nous noterons $\|\cdot\|_s$ la norme dans $H^s(\Omega)$, $|\cdot|$ la norme dans $L^2(\Omega)$ et (\cdot, \cdot) le produit scalaire correspondant (que l'on utilisera aussi pour noter la dualité L^p, L^p').

Considérons la forme bilinéaire :

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v(x) dx + \int_{\Omega} a_0(x) u(x) v(x) dx$$

où $b_i, a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $a_{ij} \in B^1(\bar{\Omega})$ (fonctions $C^1(\bar{\Omega})$ bornées ainsi que leurs dérivées premières), $a_{ij} = a_{ji}$.

Soit A l'opérateur différentiel associé à $a(\cdot, \cdot)$.

On sait alors que

$$(1.1) \quad \exists M_1 > 0 : |a(u, v)| \leq M_1 \|u\|_1 \|v\|_1, \quad \forall (u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$$

et on suppose que :

$$(1.2) \quad \exists \lambda \geq 0, \exists \alpha > 0 \text{ tels que : } \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(v, v) + \lambda |v|^2 \geq \alpha \|v\|_1^2.$$

2. - Problèmes elliptiques.

Soient φ et ψ deux fonctions de $H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ telles que $\varphi|_{\Gamma} < 0 < \psi|_{\Gamma}$, et $\varphi < \psi$ p.p. dans Ω .

Soit $K = \{v | v \in L^2(\Omega), \varphi \leq v \leq \psi \text{ p.p. dans } \Omega\}$.

Soit f une application qui satisfait aux hypothèses suivantes:

(f.1): f est bornée de $K \cap H_0^1(\Omega)$ dans $L^{1+\eta}(\Omega)$ (avec $\eta > 0$) (c'est à dire envoie les bornés de $H_0^1(\Omega)$ dans les bornés de $L^{1+\eta}(\Omega)$).

(f.2): f est continue de $K \cap H_0^1(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$ et vérifie:

$$(2.1) \quad \exists \varepsilon, M_2, M_3 > 0: \forall v \in K \cap H_0^1(\Omega), \quad |f(v)|_{L^1(\Omega)} \leq M_2 \|v\|_1^{2-\varepsilon} + M_3$$

(f.3): $f = f_0 + f_1$ où f_0 est locale et f_1 vérifie:

$$(2.2) \quad \exists \mu > 0, \forall u, v \in K \cap H^1(\Omega), \quad u < v \text{ p.p.} \Rightarrow f_1(u) - \mu u \geq f_1(v) - \mu v$$

($f_1 - \mu I$ est « décroissante »).

On se propose d'étudier le problème suivant:

$$(2.3) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in K \cap H_0^1(\Omega) & \text{solution de} \\ Au + f(u) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

DÉFINITION. Une fonction $\varphi \in H^2(\Omega)$ est appelée sous solution du problème (2.3) si $f(\varphi) \in L^1(\Omega)$ et si

$$(2.4) \quad \begin{cases} A\varphi + f(\varphi) \leq 0 & \text{p.p. dans } \Omega, \\ \varphi|_r \leq 0. \end{cases}$$

Une fonction $\psi \in H^2(\Omega)$ est appelée sur solution du problème (2.3) si $f(\psi) \in L^1(\Omega)$ et si

$$(2.5) \quad \begin{cases} A\psi + f(\psi) \geq 0 & \text{p.p. dans } \Omega, \\ \psi|_r \geq 0. \end{cases}$$

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2.1. *S'il existe une sous solution φ et une sur solution ψ du problème (2.3), avec φ et ψ dans $L^\infty(\Omega)$ et $\varphi \leq \psi$ p.p. dans Ω ; si f vérifie les hypothèses précédentes (avec ce choix de φ et ψ), alors le problème (2.3) admet une solution.*

REMARQUE. En remplaçant au besoin f par $\tilde{f} = f - \text{Sup}(\lambda, \mu)I$ on pourra toujours supposer que (1.2) a lieu avec $\lambda = 0$ et que f_1 est « décroissante ». Bien évidemment, \tilde{f} vérifiera les mêmes propriétés que f .

LEMME 1. Si $g \in L^1(\Omega)$, $\exists u$ unique, telle que:

$$(2.6) \quad \begin{cases} u \in K \cap H_0^1(\Omega) \\ a(u, v - u) \geq (g, v - u) \quad \forall v \in K \cap H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

De plus, l'application $g \rightarrow u$ (de $L^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$) est Höldérienne d'ordre $\frac{1}{2}$.

DÉMONSTRATION. Remarquons qu'en général, $g \notin H^{-1}(\Omega)$. Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $g_n \in L^2(\Omega)$, $g_n \rightarrow g$ dans $L^1(\Omega)$.

On sait que: $\exists u_n \in K \cap H_0^1(\Omega)$ telle que

$$a(u_n, v - u_n) \geq (g_n, v - u_n) \quad \forall v \in K \cap H_0^1(\Omega).$$

On a:

$$\begin{cases} a(u_n, v - u_n) \geq (g_n, v - u_n) \\ a(u_m, v - u_m) \geq (g_m, v - u_m) \end{cases}$$

Donc

$$a(u_n - u_m, u_m - u_n) \geq (g_n - g_m, u_m - u_n).$$

d'où

$$a(u_n - u_m, u_n - u_m) \leq \int_{\Omega} (g_n - g_m)(u_n - u_m) dx \Rightarrow \alpha \|u_n - u_m\|_1^2 \leq M |g_n - g_m|_{L^1(\Omega)}$$

car K est borné dans $L^\infty(\Omega)$.

Comme (g_n) est une suite de Cauchy dans $L^1(\Omega)$, (u_n) est une suite de Cauchy dans $H_0^1(\Omega)$. Donc $\exists u \in H_0^1(\Omega)$ telle que:

$$u_n \rightarrow u \quad \text{dans } H_0^1(\Omega). \text{ De plus } u \in K, \text{ et}$$

$$u_n \rightarrow u \quad \text{dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible } *.$$

Donc u vérifie: $a(u, v - u) \geq (g, v - u) \quad \forall v \in K \cap H_0^1(\Omega)$ et si u et \hat{u} correspondent à g et \hat{g} on a, bien sûr,

$$\|u - \hat{u}\|_1^2 \leq \frac{M}{\alpha} |g - \hat{g}|_{L^1(\Omega)}, \quad \text{d'où le lemme.}$$

LEMME 2. L'application $g \rightarrow u$ (solution de (2.6)) est complètement continue de $L^{1+\varepsilon}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ (avec $\varepsilon > 0$).

DÉMONSTRATION. Soit T cette application. On a vu (Lemme 1) que

$$T: L^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \text{ et } T \text{ est Hölderienne d'ordre } \frac{1}{2}.$$

On sait que

$$T: L^2(\Omega) \rightarrow H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ de manière bornée.}$$

D'après la compacité de l'injection de $H^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, et d'après un théorème d'interpolation non linéaire (Cf Tartar [10]) on sait que T envoie $L^{1+\eta}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ de manière complètement continue, d'où le lemme.

PROPOSITION 2.2. Il existe une solution u au problème

$$(2.7) \quad \begin{cases} u \in K \cap H_0^1(\Omega) \\ a(u, v - u) + (f(u), v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K \cap H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

De plus, $u \in W^{2,1+\eta}(\Omega)$.

REMARQUE. Cette proposition n'utilise pas l'hypothèse (f.3) ni le fait que φ et ψ vérifient (2.4) et (2.5).

DÉMONSTRATION. Soit B_ϱ la boule fermée dans $H_0^1(\Omega)$ de rayon ϱ .

On notera $K_\varrho = K \cap B_\varrho$.

Soit $v \in K_\varrho$, $f(v) \in L^{1+\eta}(\Omega)$. On définit $S(v) = T(-f(v))$. On a donc, si $u = S(v)$

$$\begin{cases} a(u, w - u) + (f(v), w - u) \geq 0 \quad \forall w \in K \cap H_0^1(\Omega) \\ u \in K \cap H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

LEMME 3. Si $\varrho \geq \varrho_0$, S envoie K_ϱ dans K_ϱ .

DÉMONSTRATION. En effet on a, si $u = S(v)$, $v \in K_\varrho$

$$\|u\|_1^2 \leq C_1 \|f(v)\|_{L^1(\Omega)} + C_2 \leq C_3 \|v\|_1^{2-\varepsilon} + C_4 \leq C_3 \varrho^{2-\varepsilon} + C_4.$$

Pour ϱ assez grand ($\varrho \geq \varrho_0$) on a: $C_3 \varrho^{2-\varepsilon} + C_4 - \varrho^2 \leq 0$ d'où le lemme.

Donc l'application S envoie K_{ϱ_0} dans K_{ϱ_0} . Elle est continue. De plus K_{ϱ_0} est borné dans $H_0^1(\Omega)$, donc $f(K_{\varrho_0})$ est borné dans $L^{1+\eta}(\Omega)$. Par suite $S(K_{\varrho_0})$ est relativement compact dans $H_0^1(\Omega)$.

D'après le théorème de Leray-Schauder, S possède un point fixe dans K_{ϱ_0} . Soit u un point fixe, u vérifie (2.7).

On sait que $f(u) \in L^{1+\eta}(\Omega)$. Donc d'après un résultat de régularité adapté de celui de Brézis-Strauss [2] $u \in W^{2,1+\eta}(\Omega)$, d'où la proposition 2.2.

PROPOSITION 2.3. Sous l'hypothèse (f.3) et si φ et ψ vérifient (2.4) et (2.5), alors u solution de (2.7) et en fait solution de (2.3).

DÉMONSTRATION. Soit donc u solution de (2.7). La régularité de u permet d'écrire :

$$\int_{\Omega} (Au + f(u)) \cdot (v - u) dx \geq 0 \quad \forall v \in K \cap H_0^1(\Omega),$$

d'où par passage à l'adhérence dans $L^{(1+\eta)'(\Omega)}$:

$$(2.8) \quad \int_{\Omega} (Au + f(u))(v - u) dx \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

Soit $G = Au + f(u)$. On a $G \in L^{1+\eta}(\Omega)$.

LEMME 4. Sauf peut-être pour x dans un ensemble Z de mesure nulle de Ω , on a

$$\forall \lambda \in [\varphi(x), \psi(x)], \quad G(x)(\lambda - u(x)) \geq 0 \quad (\text{Inégalité ponctuelle}).$$

DÉMONSTRATION. Si $x \in \Omega$, soit $(0j)_{j \in \mathbb{N}}$ une famille de voisinages de x , $0j \subset \Omega$ pour tout j .

Soit

$$w_j(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \notin 0j, \\ (1 - \theta)\varphi(x) + \theta\psi(x) & \text{sur } 0j, \end{cases} \quad \text{avec } 0 \leq \theta \leq 1.$$

Alors $w_j \in K$. Dans (2.8) prenons $v = w_j$.

$$\frac{1}{\text{mes } 0j} \int_{0j} G(x)[(1 - \theta)\varphi(x) + \theta\psi(x) - u(x)] dx \geq 0.$$

D'après un théorème de Lebesgue, si $\text{mes } 0j \rightarrow 0$, on obtient : sauf peut-être pour x dans un ensemble de mesure nulle Z de Ω , on a

$$G(x)[(1 - \theta)\varphi(x) + \theta\psi(x) - u(x)] \geq 0,$$

ceci étant vrai pour tout $\theta \in [0, 1]$, d'où le lemme.

Considérons alors les ensembles suivants, définis à des ensembles de

mesure nulle près :

$$\begin{aligned} E_0 &= \{x \in \Omega, \varphi(x) = \psi(x)\}, \\ E_1 &= \{x \in \Omega - E_0, u(x) = \varphi(x)\}, \\ E_2 &= \{x \in \Omega - E_0, u(x) = \psi(x)\}, \\ E_3 &= \{x \in \Omega - E_0, \varphi(x) < u(x) < \psi(x)\}. \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{cases} G(x) \geq 0 & \text{p.p. sur } E_1, \\ G(x) \leq 0 & \text{p.p. sur } E_2, \\ G(x) = 0 & \text{p.p. sur } E_3. \end{cases}$$

D'autre part on sait (c.f. par exemple Stampacchia [9]) que si $u \in W^{2,1+\eta}(\Omega)$, $v \in W^{2,1+\eta}(\Omega)$, si $u = v$ sur E on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \text{p.p. sur } E \text{ pour } i = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{p.p. sur } E \text{ pour } i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

De plus on sait d'après l'hypothèse (f.3) et la remarque du théorème 2.1 que: $f_1(\psi) \leq f_1(u) \leq f_1(\varphi)$ p.p. sur Ω .

Par suite:

$$\begin{aligned} \text{p.p. sur } E_0: \quad & 0 \leq A\psi + f(\psi) \leq Au + f(u) \leq A\varphi + f(\varphi) \leq 0, \\ \text{p.p. sur } E_1: \quad & 0 \leq Au + f(u) \leq A\varphi + f(\varphi) \leq 0, \\ \text{p.p. sur } E_2: \quad & 0 \leq A\psi + f(\psi) \leq Au + f(u) \leq 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} Au + f(u) = 0 & \text{p.p. sur } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

d'où la proposition 2.3.

Ceci termine également la démonstration du théorème 2.1.

REMARQUES.

1) On peut affaiblir légèrement les hypothèses sur φ et ψ en les supposant seulement dans $W^{2,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ mais ceci complique la rédaction assez sensiblement.

2) Si f envoie $K \cap H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ de manière continue, avec $|f(v)| \leq M_2 \|v\|_1^{2-\varepsilon} + M_3$, $\forall v \in K \cap H_0^1(\Omega)$ alors on peut se passer de l'hypothèse: φ et $\psi \in L^\infty(\Omega)$.

De plus le raisonnement conduisant à la proposition 2.2 peut se faire directement en montrant que l'opérateur $u \rightarrow Au + f(u)$ est pseudomonotone (Cf. Puel [7]).

3. - Problèmes paraboliques.

Soit T un nombre réel positif. Soit $Q = \Omega \times]0, T[$, et $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$.

Etant données deux fonctions φ et ψ de $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ telles que: $\varphi \leq \psi$ p.p. dans Q et $\varphi|_\Sigma \leq 0 \leq \psi|_\Sigma$, nous noterons:

$$K = \{v | v \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \varphi \leq v \leq \psi \text{ p.p. dans } Q\}$$

et

$$K(t) = \{v | v \in L^2(\Omega), \varphi(t) \leq v \leq \psi(t) \text{ p.p. dans } \Omega\}$$

($K(t)$ est défini pour presque tout t)

Soit f une application qui satisfait aux hypothèses suivantes:

(f_1): f est bornée de $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap K$ dans $L^{1+\eta}(Q)$, avec $\eta > 0$ (c'est à dire envoie les bornés de $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ dans les bornés de $L^{1+\eta}(Q)$)

(f_2): f est continue de $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap K$ dans $L^1(Q)$ et vérifie:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \exists \varepsilon, M_2, M_3 > 0: & \forall v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap K \\ |f(v)|_{L^1(Q)} \leq M_2 \|v\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^{2-\varepsilon} + M_3 \end{cases}$$

(f_3): $f = f_0 + f_1$ où f_0 est locale et f_1 vérifie:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \exists \mu > 0, \quad \forall u, v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap K, \\ u \leq v \text{ p.p. dans } Q \Rightarrow f_1(u) - \mu u \geq f_1(v) - \mu v \end{aligned}$$

(c'est à dire $f_1 - \mu I$ est « décroissante »).

On se propose d'étudier le problème suivant:

$$(3.3) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in K \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ solution de:} \\ \frac{du}{dt} + Au + f(u) = 0 \quad \text{dans } Q, \\ u(0) = u_0 \quad \text{où } u_0 \in L^\infty(\Omega). \end{cases}$$

DÉFINITION. Une fonction $\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ est appelée sous solution du problème (3.3) si $\partial\varphi/\partial t + A\varphi \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $\varphi(0) \in L^2(\Omega)$, $\varphi(0) \leq u_0$, $f(\varphi) \in L^1(Q)$, avec

$$(3.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + A\varphi + f(\varphi) \leq 0 & \text{p.p. dans } Q, \\ \varphi|_{\Sigma} \leq 0 & \text{p.p.} \end{cases}$$

Une fonction $\psi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ est appelée sur solution du problème (3.3) si $\partial\psi/\partial t + A\psi \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $\psi(0) \in L^2(\Omega)$, $\psi(0) \geq u_0$, $f(\psi) \in L^1(Q)$, avec

$$(3.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial t} + A\psi + f(\psi) \geq 0 & \text{p.p. dans } Q, \\ \psi|_{\Sigma} \geq 0 & \text{p.p.} \end{cases}$$

Nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 3.1. *S'il existe une sous solution φ et une sur solution ψ du problème (3.3) telles que φ et $\psi \in L^\infty(Q)$ et $\varphi \leq \psi$ p.p. dans Q ; si f vérifie des hypothèses précédentes (avec ce choix de φ et ψ) alors le problème (3.3) admet une solution.*

La démonstration de ce théorème va nécessiter quelques résultats préliminaires d'existence et de régularité pour des inéquations variationnelles d'évolution avec contraintes dépendant du temps, résultats pour lesquels n'interviendront pas les hypothèses (f.3), (3.4), (3.5).

Notons d'abord que nous pouvons nous ramener au cas où la donnée initiale est nulle.

Si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, soit v tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + Av = 0, \\ v|_{\Sigma} = 0, \\ v(0) = u_0. \end{cases}$$

On a

$$v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q), \quad \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

De plus:

$$\left. \begin{aligned} v &\in L^2(\delta, T; H^2(\Omega)) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &\in L^2(\delta, T; L^2(\Omega)) \end{aligned} \right\} \forall \delta > 0.$$

En posant $\tilde{u} = u - v$ et $\tilde{f}(\tilde{u}) = f(\tilde{u} + v)$, le problème revient à chercher \tilde{u} tel que

$$(3.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + A\tilde{u} + \tilde{f}(\tilde{u}) = 0 \\ \tilde{u}|_{\Sigma} = 0 \\ \tilde{u}(0) = 0 \end{cases} \quad \text{avec } \tilde{\varphi} \leq \tilde{u} \leq \tilde{\psi}.$$

Si on a posé $\tilde{\varphi} = \varphi - v$ et $\tilde{\psi} = \psi - v$

\tilde{f} vérifie bien sur les mêmes hypothèses que f .

$\tilde{\varphi}$ est une sous solution du problème (3.6) et $\tilde{\varphi} \in L^\infty(Q)$.

$\tilde{\psi}$ est une sur solution du problème (3.6) et $\tilde{\psi} \in L^\infty(Q)$.

On pourra donc toujours supposer dans la suite de ce chapitre, que $u_0 = 0$

THÉORÈME 3.2. *Si $g \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, il existe u unique tel que:*

$$u \in L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

et

$$(3.7) \quad \begin{cases} \int_0^T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v - u \right) + a(u, v - u) - (g, v - u) \right] dt \geq 0, \\ u \in K, \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad \forall v \in K \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

DÉMONSTRATION. Elle reprend le plan de la démonstration de Brezis [1]. L'unicité se montre aisément.

Si $P(t)$ est la projection dans $L^2(\Omega)$, sur $K(t)$, soit pour $\varepsilon > 0$, u_ε solution de l'équation

$$(3.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + Au_\varepsilon + \left(\frac{I - P(t)}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon = g, \\ u_\varepsilon|_{\Sigma} = 0, \\ u_\varepsilon(0) = 0. \end{cases}$$

(3.8) admet une solution unique

$$u_\varepsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Comme

$$\frac{u_\varepsilon - P(t)u_\varepsilon}{\varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

on a

$$u_\varepsilon \in L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

avec

$$(3.9) \quad \begin{cases} \|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq \varrho_1 \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \varrho_2 \left\| \frac{u_\varepsilon - P(t)u_\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \varrho_3, \\ \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \varrho_1 \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \varrho_2 \left\| \frac{u_\varepsilon - P(t)u_\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \varrho_3, \end{cases}$$

où $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ sont indépendants de ε .

Estimations sur $\|(u_\varepsilon - P(t)u_\varepsilon)/\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$:

On multiplie (3.8) par $(u_\varepsilon - P(t)u_\varepsilon)/\varepsilon$ scalairement dans $L^2(\Omega)$.

On obtient:

$$(3.10) \quad \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, \frac{u_\varepsilon - P(t)u_\varepsilon}{\varepsilon} \right) + a \left(u_\varepsilon, \frac{u_\varepsilon - P(t)u_\varepsilon}{\varepsilon} \right) + \left\| \frac{u_\varepsilon - P(t)u_\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \\ = \left(g, \frac{u_\varepsilon - P(t)u_\varepsilon}{\varepsilon} \right).$$

LEMME 1.

$$\int_0^T \left[\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, \frac{u_\varepsilon - P(t)u_\varepsilon}{\varepsilon} \right) + a \left(u_\varepsilon, \frac{u_\varepsilon - P(t)u_\varepsilon}{\varepsilon} \right) \right] dt \geq \varrho \left\| \frac{u_\varepsilon - P(t)u_\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$$

où ϱ peut être négatif mais ne dépend que de φ et ψ .

DÉMONSTRATION. On sait que

$$\begin{aligned} \varphi &\in L^2(\delta, T; H^2(\Omega)) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &\in L^2(\delta, T; L^2(\Omega)) \quad \forall \delta > 0, \end{aligned}$$

et de même pour ψ .

De plus $\partial \varphi / \partial t + A\varphi \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et de même pour ψ .

On a, presque partout en $t \in [\delta, T]$: (on notera $P(t) = P$)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, \frac{u_\varepsilon - Pu_\varepsilon}{\varepsilon} \right) + a \left(u_\varepsilon, \frac{u_\varepsilon - Pu_\varepsilon}{\varepsilon} \right) &= \frac{1}{2\varepsilon} \frac{d}{dt} |u_\varepsilon - Pu_\varepsilon|^2 + \\ &+ a \left(u_\varepsilon - Pu_\varepsilon, \frac{u_\varepsilon - Pu_\varepsilon}{\varepsilon} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} Pu_\varepsilon, \frac{u_\varepsilon - Pu_\varepsilon}{\varepsilon} \right) + a \left(Pu_\varepsilon, \frac{u_\varepsilon - Pu_\varepsilon}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Or $Pu_\varepsilon = u_\varepsilon + (\varphi - u_\varepsilon)^+ - (\psi - u_\varepsilon)^-$. Donc

$$\begin{aligned} \int_\delta^T \left[\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, \frac{u_\varepsilon - Pu_\varepsilon}{\varepsilon} \right) + a \left(u_\varepsilon, \frac{u_\varepsilon - Pu_\varepsilon}{\varepsilon} \right) \right] dt &= \frac{1}{2\varepsilon} |u_\varepsilon(T) - Pu_\varepsilon(T)|^2 - \\ &- \frac{1}{2\varepsilon} |u_\varepsilon(\delta) - Pu_\varepsilon(\delta)|^2 + \int_\delta^T a \left(u_\varepsilon - Pu_\varepsilon, \frac{u_\varepsilon - Pu_\varepsilon}{\varepsilon} \right) dt - \int_\delta^T \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{(\varphi - u_\varepsilon)^+}{\varepsilon} \right) + \right. \\ &+ a \left(\varphi, \frac{(\varphi - u_\varepsilon)^+}{\varepsilon} \right) \left. \right] dt + \int_\delta^T \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{(\psi - u_\varepsilon)^-}{\varepsilon} \right) + a \left(\psi, \frac{(\psi - u_\varepsilon)^-}{\varepsilon} \right) \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} |u_\varepsilon(T) - Pu_\varepsilon(T)|^2 - \frac{1}{2\varepsilon} |u_\varepsilon(\delta) - Pu_\varepsilon(\delta)|^2 + \int_\delta^T a \left(u_\varepsilon - Pu_\varepsilon, \frac{u_\varepsilon - Pu_\varepsilon}{\varepsilon} \right) - dt \\ &\quad - \int_\delta^T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi, \frac{(\varphi - u_\varepsilon)^+}{\varepsilon} \right) dt + \int_\delta^T \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + A\psi, \frac{(\psi - u_\varepsilon)^-}{\varepsilon} \right) dt. \end{aligned}$$

En prenant maintenant une suite $\delta_n \rightarrow 0$:

$$|u_\varepsilon(\delta_n) - Pu_\varepsilon(\delta_n)|^2 \rightarrow |u_\varepsilon(0) - Pu_\varepsilon(0)|^2 = 0.$$

D'autre part

$$\|u_\varepsilon - Pu_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 = \|(\varphi - u_\varepsilon)^+\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|(\psi - u_\varepsilon)^-\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2.$$

On en déduit alors le lemme avec

$$\varrho = -\text{Sup} \left[\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi \right\|_{L^2(Q)}, \left\| \frac{\partial \psi}{\partial t} + A\psi \right\|_{L^2(Q)} \right].$$

D'après le lemme 1, de (3.10) on obtient que

$$\left\| \frac{u_\varepsilon - Pu_\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \text{ est borné indépendamment de } \varepsilon .$$

Donc

$$\begin{cases} u_\varepsilon & \text{est borné dans } L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \text{ indépendamment de } \varepsilon , \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} & \text{est borné dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ indépendamment de } \varepsilon . \end{cases}$$

Convergence de u_ε . Au besoin après extraction d'une sous suite, on peut supposer que :

$$\begin{cases} u_\varepsilon \rightharpoonup u & \text{dans } L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \text{ faible si } \varepsilon \rightarrow 0 , \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} & \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible si } \varepsilon \rightarrow 0 , \end{cases}$$

et donc (cf. Lions [6]) $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ fort si $\varepsilon \rightarrow 0$.

Comme $\|(u_\varepsilon - Pu_\varepsilon)/\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ est borné, $\|u - Pu\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = 0$, donc $u(t) \in K(t)$ pour tout t .

Il est maintenant aisé, par passage à la limite, de voir que u est solution de (3.7), d'où le théorème 3.2.

PROPOSITION 3.3. Si $g \in L^1(Q)$, il existe u unique tel que

$$u \in K \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T], L^2(\Omega)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + Au \in L^1(Q) ,$$

avec :

$$(3.11) \quad \begin{cases} \int_0^T \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}, v - u \right) + a(u, v - u) - (g, v - u) \right] dt \geq 0 \\ \forall v \in K \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ \text{avec } \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \quad \text{et} \quad v(0) = 0 . \end{cases}$$

De plus, l'application T qui, à g associe u est Höldérienne d'ordre $\frac{1}{2}$ de $L^1(Q)$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

DÉMONSTRATION. Remarquons que le convexe K est borné dans $L^\infty(Q)$. Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^2(Q)$ qui converge dans $L^1(Q)$ vers g .

Soit u_n la solution de (3.7) associée à g_n . On a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^t \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial s}, u_m - u_n \right) + a(u_n, u_m - u_n) - (g_n, u_m - u_n) \right] ds \geq 0 \quad \text{si } t \in [0, T], \\ \int_0^t \left[\left(\frac{\partial u_m}{\partial s}, u_n - u_m \right) + a(u_m, u_n - u_m) - (g_m, u_n - u_m) \right] ds \geq 0 \quad \text{si } t \in [0, T], \\ u_n(0) - u_m(0) = 0. \end{array} \right.$$

Soit après addition:

$$\int_0^t \frac{1}{2} \frac{d}{ds} |u_n - u_m|^2 ds + \int_0^t a(u_n - u_m, u_n - u_m) ds \leq \int_0^t (g_n - g_m, u_n - u_m) ds,$$

d'où:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \|u_n - u_m\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq C \|g_n - g_m\|_{L^1(Q)}, \\ \sup_{t \in [0, T]} |u_n(t) - u_m(t)|^2 \leq C \|g_n - g_m\|_{L^1(Q)}. \end{array} \right.$$

Puisque g_n est une suite de Cauchy dans $L^1(Q)$, u_n est une suite de Cauchy dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ et dans $C([0, T]; L^2(\Omega))$.

Donc il existe $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T], L^2(\Omega))$ tel que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

$$u_n \rightarrow u \quad \text{dans } C([0, T], L^2(\Omega)).$$

Par suite $u \in K$ et il est maintenant aisé de voir que u est solution de (3.11).

Il est immédiat de voir que l'application T , qui, à $g \in L^1(Q)$ associe $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ est Höldérienne d'ordre $\frac{1}{2}$.

Montrons maintenant que $\partial u / \partial t + Au \in L^1(Q)$. Nous noterons $B = \partial / \partial t + A$.

On sait que $u_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon, n}$ où $u_{\varepsilon, n}$ est la solution de (3.8) correspondant à g_n . On a

$$(Bu_{\varepsilon, n} - Bu_{\varepsilon, m}) + \left(\frac{u_{\varepsilon, n} - Pu_{\varepsilon, n}}{\varepsilon} \right) - \left(\frac{u_{\varepsilon, m} - Pu_{\varepsilon, m}}{\varepsilon} \right) = g_n - g_m.$$

En multipliant cette équation par une section de $\text{Sgn}(u_{\varepsilon, n} - u_{\varepsilon, m})$ et en uti-

lisant un résultat de Brezis-Strauss [2], on obtient :

$$\left\| \left(\frac{u_{\varepsilon,n} - Pu_{\varepsilon,n}}{\varepsilon} \right) - \left(\frac{u_{\varepsilon,m} - Pu_{\varepsilon,m}}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^1(Q)} \leq \|g_n - g_m\|_{L^1(Q)}$$

d'où

$$\|Bu_{\varepsilon,n} - Bu_{\varepsilon,m}\| \leq 2 \|g_n - g_m\| .$$

Par suite, puisque $Bu_{\varepsilon,n} \rightarrow Bu_n$ dans $L^2(Q)$ faible

$$\|Bu_n - Bu_m\|_{L^1(Q)} \leq 2 \|g_n - g_m\|_{L^1(Q)} .$$

Ceci montre que Bu_n est une suite de Cauchy dans $L^1(Q)$, donc converge dans $L^1(Q)$ vers un élément χ . On a bien sur $\chi = Bu$ d'où $Bu \in L^1(Q)$.

On peut maintenant montrer par intégration par partie puis par passage à l'adhérence de $K \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ dans $L^\infty(Q)$ faible \star que u vérifie :

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Au - g, v - u \right) dt \geq 0 \quad \forall v \in K, \\ u \in K, \\ u(0) = 0 . \end{array} \right.$$

L'unicité d'un tel u s'en déduit immédiatement.

Ceci termine la démonstration de la proposition 3.1.

PROPOSITION 3.4. Si $0 < \eta \leq 1$ l'application T (qui à g associe de (3.11)) est complètement continue de $L^{1+\eta}(Q)$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

De plus, si $g \in L^{1+\eta}(Q)$, $\partial u / \partial t + Au \in L^{1+\eta}(Q)$.

DÉMONSTRATION. T envoie $L^1(Q)$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ et est Höldérienne d'ordre $\frac{1}{2}$. T envoie $L^2(Q)$ dans $W(0, T)$ et est bornée, avec

$$W(0, T) = \left\{ v \mid v \in L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)); \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \right\} .$$

$W(0, T)$ s'injecte de manière compacte dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

D'après un théorème d'interpolation non linéaire (cf. Tartar [10]) T est complètement continue de $L^{1+\eta}(Q)$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Pour montrer la deuxième assertion de la proposition, considérons l'ap-

plication \mathfrak{T} qui, à g associe $\partial u/\partial t + Au$. On a vu que :

$$\begin{cases} \mathfrak{T} \text{ envoie } L^1(Q) \text{ dans } L^1(Q) \text{ et est lipschitzienne} \\ \mathfrak{T} \text{ envoie } L^2(Q) \text{ dans } L^2(Q) \text{ et est bornée.} \end{cases}$$

Donc \mathfrak{T} envoie $L^{1+\eta}(Q)$ dans $L^{1+\eta}(Q)$, d'après un théorème d'interpolation non linéaire.

THÉORÈME 3.5. *Il existe $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap K$ solution de*

$$(3.13) \quad \int_0^T \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}, v - u \right) + a(u, v - u) + (f(u), v - u) \right] dt \geq 0$$

$$\forall v \in K \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

tel que

$$\frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \quad \text{et} \quad v(0) = 0.$$

De plus $\partial u/\partial t \in L^{1+\eta}(Q)$, $Au \in L^{1+\eta}(Q)$ et u vérifie

$$(3.14) \quad \begin{cases} \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Au + f(u), v - u \right) dt \geq 0 & \forall v \in K, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Soit B_ρ la boule fermée de $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ de rayon ρ . On notera $K_\rho = K \cap B_\rho$.

Si $v \in K_\rho$, $f(v) \in L^{1+\eta}(Q)$. On définit $S(v) = T(-f(v))$ où T est l'application définie précédemment.

Si $u = S(v)$, u vérifie :

$$\int_0^T \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}, w - u \right) + a(u, w - u) + (f(v), w - u) \right] dt \geq 0$$

$$u \in K \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad \forall w \in K \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

tel que $\frac{\partial w}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ et $w(0) = 0$.

LEMME 2. Si $\rho \geq \rho_0$, S envoie K_ρ dans K_ρ .

DÉMONSTRATION. En effet si $u = S(v)$, $v \in K_\rho$ on a

$$\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \leq C_1 \|f(v)\|_{L^1(Q)} + C_2 \leq C_3 \|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^{2-\varepsilon} + C_4 \quad \text{d'après (3.1)}.$$

Si $\rho \geq \rho_0$ on a: $C_3 \rho^{2-\varepsilon} + C_4 - \rho^2 \leq 0$ d'où le lemme.

L'application S envoie K_{ρ_0} dans K_{ρ_0} . Elle est continue. De plus comme K_{ρ_0} est borné dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $f(K_{\rho_0})$ est borné dans $L^{1+\eta}(Q)$. Par suite $S(K_{\rho_0})$ est relativement compact dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

En appliquant le théorème de Leray-Schauder, on voit que S possède un point fixe u dans K_{ρ_0} . u vérifie bien (3.13). D'après la proposition 3.2 on a, puisque $f(u) \in L^{1+\eta}(Q)$, $\partial u / \partial t + Au \in L^{1+\eta}(Q)$, d'où par un résultat de régularité sur l'équation de la chaleur cf. [11] on a: $\partial u / \partial t \in L^{1+\eta}(Q)$ et $Au \in L^{1+\eta}(Q)$. La relation (3.14) se montre aisément par intégration par parties et par passage à l'adhérence de $K \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ dans $L^\infty(Q)$ faible \star .

PROPOSITION 3.6. Sous l'hypothèse (f.3) et si φ et ψ vérifient (3.4) et (3.5), alors u solution de (3.14) est un fait solution de (3.3).

DÉMONSTRATION. On reprend exactement la démonstration de la proposition (2.3) en utilisant la régularité trouvée pour la solution u .

Ceci termine la démonstration du théorème 3.1.

REMARQUE. Les conclusions du théorème 3.1 demeurent valables si dans la définition des sous solutions et sur solution, on suppose seulement que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi \in L^{1+\eta}(Q),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + A\psi \in L^{1+\eta}(Q).$$

L'argument de compacité se montre alors en utilisant une inéquation variationnelle auxiliaire pour laquelle le convexe est délimité par les bornes, dans $L^\infty(Q)$, de φ et ψ .

4. - Comportement à l'infini et stabilité.

Soit f une application de $\Omega \times R^{n+1}$ dans R qui, à (x, p_0, \dots, p_n) associe $f(x, p_0, p_1, \dots, p_n)$, telle que, pour presque tout $x \in \Omega$, $(p_0, \dots, p_n) \rightarrow f(x, p_0, \dots, p_n)$

soit continue. On définira

$$f(u) = f\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\right).$$

On suppose que f vérifie les conditions (f.1), (f.2) du chapitre II (problèmes elliptiques) et que pour tout $T > 0$, f vérifie les conditions (f.1), (f.2) du chapitre III (problèmes paraboliques).

On suppose en outre qu'il existe une sous solution φ et une sur solution ψ du problème (2.3) (problème elliptique) avec φ et ψ dans $L^\infty(\Omega)$ et $\varphi \leq \psi$ p.p. dans Ω .

Nous rappelons qu'alors le théorème 2.1 nous donne l'existence d'une solution pour le problème elliptique (2.3). De plus, φ et ψ sont sous solution et sur solution du problème (3.3) (problème parabolique) pourvu que la donnée initiale u_0 vérifie: $\varphi \leq u_0 \leq \psi$ p.p. dans Ω .

Dans ces conditions, le théorème 3.1 nous donne l'existence d'une solution pour le problème parabolique (3.3), pour tout $T > 0$.

Dans toute la suite du chapitre nous supposons que nous avons l'unicité dans le problème (3.3) (unicité des solutions comprises entre φ et ψ). Ceci semble raisonnable pour étudier le comportement à l'infini.

Certains des résultats que nous allons établir ont des analogues si on ne fait pas l'hypothèse d'unicité mais leur formulation est délicate.

Nous allons montrer que:

- 1) Si la donnée initiale est φ , la solution de (3.3) est croissante en t et converge, si $t \rightarrow \infty$ vers une solution de (2.3).
- 2) Si la donnée initiale est ψ , la solution de (3.3) est décroissante en t et converge, si $t \rightarrow \infty$ vers une solution de (2.3).
- 3) Si la donnée initiale u_0 est comprise entre φ et ψ , la solution de (3.3) reste comprise entre les solutions précédentes.
- 4) Le problème (2.3) admet une solution minimale et une solution maximale.
- 5) Si le problème (2.3) admet une solution unique entre φ et ψ , cette solution est « stable » (dans un sens que l'on précisera.)

4.1. Cas où la donnée initiale est une sous-solution ou une sur solution du problème elliptique.

Nous n'étudierons que le cas où la donnée initiale est φ (sous-solution de (2.3)), le deuxième cas s'en déduisant immédiatement.

THÉORÈME 4.1. *Pour tout $T > 0$, la solution $\tilde{\varphi} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T], L^2(\Omega))$ du problème*

$$(4.1) \quad \begin{cases} \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} + A\tilde{\varphi} + f(\tilde{\varphi}) = 0 & \text{p.p. dans } \Omega \times]0, T[, \\ \tilde{\varphi}|_{\Sigma} = 0 & \text{p.p. sur } \Sigma, \\ \tilde{\varphi}(0) = \varphi & \text{p.p. dans } \Omega, \end{cases}$$

avec $\varphi \leq \tilde{\varphi}(t) \leq \psi$ p.p. dans Ω pour tout $t \in [0, T]$ est croissante en t .

{La croissance en t signifie que si $t_1 < t_2$, $\tilde{\varphi}(t_1) \leq \tilde{\varphi}(t_2)$ p.p. dans Ω }

REMARQUE. Le théorème 4.1 reste valable si l'on remplace ψ par une sur solution quelconque de (4.1) indépendante de t . En particulier, ce qui servira par la suite, si on remplace ψ par une solution du problème (2.3) comprise entre φ et ψ .

DÉMONSTRATION. Nous allons construire une telle solution, ce qui donnera également une autre méthode d'existence.

Posons $Nk = T$ où $N \in \mathbb{N}$ et considérons le schéma de semi-discrétisation suivant:

$$(4.2)_n \quad \begin{cases} \varphi_0 = \varphi, \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{k} + A\varphi^{n+1} + f(\varphi^{n+1}) = 0 & n = 0, \dots, N-1, \\ \varphi^{n+1}/\Gamma = 0, \quad \varphi^n \leq \varphi^{n+1} \leq \psi & \text{p.p. dans } \Omega. \end{cases}$$

Pour (4.2)₀ (équation donnant φ^1), $\varphi = \varphi_0$ est une sous-solution et ψ est une sur solution. Donc d'après le théorème 2.1 (4.2)₀ a une solution φ^1 avec $\varphi_0 \leq \varphi^1 \leq \psi$ p.p. dans Ω . De plus $A\varphi^1 + f(\varphi^1) \leq 0$ p.p. dans Ω .

Donc φ^1 est sous solution pour le problème (4.2)₁.

Supposons que l'on ait trouvé φ^{i+1} solution de (4.2)_i pour $i = 0, \dots, n-1$. Alors

$$A\varphi^n + f(\varphi^n) = \frac{\varphi^{n-1} - \varphi^n}{k} \leq 0.$$

Pour (4.2)_n φ^n est une sous-solution; ψ est une sur solution et $\varphi^n \leq \psi$ p.p. sur Ω . Donc (4.2)_n admet une solution φ^{n+1} et φ^{n+1} est une sous solution pour (4.2)_{n+1}.

Donc le système constitué par les équations (4.2)_n, $n = 0, \dots, N-1$ admet bien une solution dans $(H_0^1(\Omega))^N$.

Nous noterons φ_k la fonction en escalier en t telle que :

$$\varphi_k(t) = \varphi^{n+1} \quad \text{si } t \in [nk, (n+1)k], \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Nous noterons $\tilde{\varphi}_k$ la fonction de t , affine par morceaux telle que :

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_k(t) = \varphi^1 & \text{si } t \in [0, k], \\ \tilde{\varphi}_k(t) = \varphi^n + \left(\frac{t-nk}{k}\right) (\varphi^{n+1} - \varphi^n) & \text{si } t \in [nk, (n+1)k], \\ & n = 1, \dots, N-1, \end{cases}$$

φ_k et $\tilde{\varphi}_k$ sont, par construction même, des fonctions croissantes de t .

LEMME 1. φ_k et $\tilde{\varphi}_k$ restent dans un borné (indépendant de k) de $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

DÉMONSTRATION. On a

$$\|\varphi_k\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 = \sum_{n=1}^N k \|\varphi^n\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

et

$$\|\tilde{\varphi}_k\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 \leq k \|\varphi^1\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{4}{3} \sum_{n=1}^N k \|\varphi^n\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

multiplions (4.2)_n par $k\varphi^{n+1}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\varphi^{n+1}|^2 - \frac{1}{2} |\varphi^n|^2 + \frac{1}{2} |\varphi^{n+1} - \varphi^n|^2 + \alpha k \|\varphi^{n+1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq k |f(\varphi^{n+1})|_{L^1(\Omega)} |\varphi^{n+1}|_{L^\infty(\Omega)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha \sum_{n=1}^N k \|\varphi^n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq M \sum_{n=1}^N k |f(\varphi^n)|_{L^1(\Omega)} + \frac{1}{2} |\varphi^0|^2 \\ &\Rightarrow \|\varphi_k\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 \leq C_1 \|\varphi_k\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^{2-\varepsilon} + C_2 \end{aligned}$$

d'où $\|\varphi_k\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}$ reste borné. Il en est bien sûr de même pour $\|\tilde{\varphi}_k\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}$, d'où le lemme.

Nous allons maintenant montrer que pour tout $\delta > 0$, $\tilde{\varphi}_k$ reste dans un compact fixe (indépendant de k) de $L^2(\delta, T; H_0^1(\Omega))$.

Comme $\|\varphi_k\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}$ reste borné, $|f(\varphi_k)|_{L^{1+\eta}(\Omega)}$ reste borné indépendamment de k .

Nous noterons $1 + \eta = p$. Donc

$$\sum_{n=0}^{N-1} k |f(\varphi^{n+1})|_{L^p(\Omega)}^p \leq M \quad \text{indépendamment de } k.$$

Nous allons considérer un système d'inéquations variationnelles auxiliaires:

Soit $K = \{v | v \in L^2(\Omega), \varphi \leq v \leq \psi \text{ p.p. sur } \Omega\}$.

A un ensemble d'éléments (g^1, \dots, g^N) (dont nous préciserons la régularité ci-dessous) nous faisons correspondre (u^1, \dots, u^N) tels que (si on a posé $u_0 = \varphi$):

$$(4.3) \quad \begin{cases} \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{k} + Au^{n+1} + g^{n+1}, v - u^{n+1} \right) \geq 0 & \forall v \in K \cap H_0^1(\Omega), \\ u^{n+1} \in K \cap H_0^1(\Omega) & \text{pour } n = 0, N-1. \end{cases}$$

Nous noterons: $G = (g^1, \dots, g^N)$, $U = (u^1, \dots, u^N)$ u_k sera la fonction étagée définie sur $[0, T[$ telle que

$$u_k(t) = u^{n+1} \quad \text{si } t \in [nk, (n+1)k[, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

\tilde{u}_k sera la fonction continue, affine par morceaux définie sur $[0, T[$ telle que:

$$\begin{cases} \tilde{u}_k(t) = u^n + \left(\frac{t - nk}{k} \right) (u^{n+1} - u^n) & \text{si } t \in [nk, (n+1)k[, \\ & n = 1, \dots, N-1, \\ \tilde{u}_k(t) = u^1 & \text{si } t \in [0, k]. \end{cases}$$

Nous savons que si $G \in (L^2(\Omega))^N$, le système (4.3) est bien défini et donne une solution $U \in (H_0^1(\Omega))^N$.

Le convexe K étant borné dans $L^\infty(\Omega)$, nous pouvons aisément montrer, comme il l'a été fait dans le chapitre II que si $G \in (L^1(\Omega))^N$, le système (4.3) admet également une solution unique $U \in (H_0^1(\Omega))^N$. (Donc u_k et \tilde{u}_k sont des éléments de $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$).

Appelons T l'application qui, à $G \in (L^1(\Omega))^N$ associe $\tilde{u}_k \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

REMARQUES.

- 1) Les équations (4.2)_n nous montrent bien sûr que $\tilde{\varphi}_k = T(f(\varphi^1), \dots, f(\varphi^N))$.
- 2) On peut considérer que A est réduit à sa partie principale (symétrique), les autres termes étant englobés dans f .

LEMME 2. L'application T est höldérienne d'ordre $\frac{1}{2}$ de $(L^1(\Omega))^N$ muni de

la norme: $|G|_{(L^1)^N} = \sum_{n=1}^N k |g^n|_{L^1(\Omega)} \quad \text{dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$

(donc dans $L^2(\delta, T; H_0^1(\Omega))$ pour tout $\delta > 0$). La constante de Hölder est indépendante de k .

DÉMONSTRATION. Soit

$$\begin{cases} G = (g^1, \dots, g^n) \in (L^1(\Omega))^N \\ G = (\hat{g}^1, \dots, \hat{g}^n) \in (L^1(\Omega))^N. \end{cases}$$

Nous avons pour $n = 0, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{k} + A u^{n+1} + g^{n+1}, \hat{u}^{n+1} - u^{n+1} \right) &\geq 0, \\ \left(\frac{\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n}{k} + A \hat{u}^{n+1} + \hat{g}^{n+1}, u^{n+1} - \hat{u}^{n+1} \right) &\geq 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} k\alpha \|\hat{u}^{n+1} - u^{n+1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} |(\hat{u}^{n+1} - u^{n+1})|^2 - \frac{1}{2} |\hat{u}^n - u^n|^2 + \\ + \frac{1}{2} |(\hat{u}^{n+1} - u^{n+1}) - (\hat{u}^n - u^n)|^2 \leq ck |\hat{g}^{n+1} - g^{n+1}|_{L^1(\Omega)} \end{aligned}$$

où α est la constante de coercivité et c est indépendante de k .

Comme $\hat{u}^0 = u^0 = \varphi$ nous obtenons par sommation :

$$\alpha \sum_{n=1}^{N+1} k \|\hat{u}^n - u^n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq c \sum_{n=1}^N k |\hat{g}^n - g^n|_{L^1(\Omega)}$$

d'où le lemme 2. Puisque c et α sont indépendants de k . Soit

$$W(\delta, T) = \left\{ v \mid v \in L^2(\delta, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)); \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(\delta, T; L^2(\Omega)) \right\}$$

muni de la norme

$$\|v\|_{W(\delta, T)}^2 = \|v\|_{L^2(\delta, T; H_0^1(\Omega))}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^2(\delta, T; L^2(\Omega))}^2.$$

On sait que l'injection de $W(\delta, T)$ dans $L^2(\delta, T; H_0^1(\Omega))$ est compacte.

LEMME 3. L'application T envoie $(L^2(\Omega))^N$ dans $W(\delta, T)$ pour tout $\delta > 0$ et de plus, $\forall \delta > 0, \exists C$ indépendante de k telle que :

$$\|T(G)\|_{W(\delta, T)} \leq C[1 + |G|_{(L^2)^N}] \quad \text{où} \quad |G|_{(L^2)^N} = \left(\sum_{n=1}^N k |g^n|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $U = T(\mathcal{G})$. Nous allons montrer que

$$\|t\tilde{u}_k\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))} \leq C[1 + |\mathcal{G}|_{(L^2)^N}^2]$$

et que

$$\left|t \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t}\right|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C[1 + |\mathcal{G}|_{(L^2)^N}^2]$$

où C est indépendante de k , ce qui suffira à prouver le lemme 3. Nous avons :

$$\begin{cases} \left(\frac{u^{n+1}-u^n}{k} + Au^{n+1} + g^{n+1}, v - u^{n+1}\right) \geq 0 & \forall v \in K \cap H_0^1(\Omega), \\ u^{n+1} \in K \cap H_0^1(\Omega) & n = 0, \dots, N-1. \end{cases}$$

Pour $n = 1, \dots, N-1$ posons $v = u^n$ et divisons par k .

$$\left|\frac{u^{n+1}-u^n}{k}\right|^2 + a\left(u^{n+1}, \frac{u^{n+1}-u^n}{k}\right) \leq \left(g^{n+1}, \frac{u^n-u^{n+1}}{k}\right).$$

On multiplie cette inégalité par $[(n+1)k]^2$.

En notant $a(v) = a(v, v)$ et en remarquant que a est symétrique, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \left| (n+1)k \left(\frac{u^{n+1}-u^n}{k}\right) \right|^2 + \frac{1}{k} \left[\frac{1}{2} a((n+1)ku^{n+1}) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} a(nku^n) - \frac{1}{2} a(ku^n) - a(nku^n, ku^n) + \frac{1}{2} a((n+1)k(u^{n+1}-u^n)) \right] \leq \\ & \leq \left((n+1)kg^{n+1}, (n+1)k \left(\frac{u^n-u^{n+1}}{k}\right) \right). \end{aligned}$$

On somme de $n = 1$ à $N-1$ après multiplication par k :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N-1} k \left| (n+1)k \left(\frac{u^{n+1}-u^n}{k}\right) \right|^2 + \frac{1}{2} a(Nku^N) - \frac{1}{2} a(ku^1) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} k(2n+1)ka(u^n) \leq \\ & \leq \sum_{n=1}^{N-1} k \left((n+1)kg^{n+1}, (n+1)k \left(\frac{u^n-u^{n+1}}{k}\right) \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N-1} k \left| (n+1)k \left(\frac{u^{n+1}-u^n}{k}\right) \right|^2 + a(Nku^N) \leq \sum_{n=1}^{N-1} k |(n+1)kg^{n+1}|^2 + a(ku^1) + \\ & + \sum_{n=1}^{N-1} k(2n+1)ka(u^n). \end{aligned}$$

Il est maintenant aisé de voir que le deuxième membre peut être majoré par: $C \left[1 + \sum_{n=1}^N k |g^n|^2 \right]$ où C peut bien sûr dépendre de T mais est indépendante de k .

Comme sur $[nk, (n+1)k]$, $t \leq (n+1)k$. Nous voyons que

$$\begin{aligned} \left| t \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t} \right|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 &\leq \sum_{n=1}^{N-1} k \left| (n+1)k \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{k} \right) \right|^2, \\ \left| t \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t} \right|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 &\leq C [1 + |G|_{(L^2)^N}^2]. \end{aligned}$$

On a maintenant: (C désignant différentes constantes indépendantes de k)

$$|Au^{n+1}|^2 \leq C \left[1 + |g^{n+1}|^2 + \left| \frac{u^{n+1} - u^n}{k} \right|^2 \right].$$

Donc d'après les estimations données ci-dessus.

$$\sum_{n=1}^{N-1} |(n+1)k Au^{n+1}|^2 \leq C \left[1 + \sum_{n=1}^N k |g^n|^2 \right].$$

D'autre part:

$$k^2 |Au^1|^2 \leq C [k^2 + k^2 |g^1|^2 + k |u - u_0|^2]$$

et il est aisé de voir que

$$|u^1 - u_0|^2 \leq C [1 + k^2 |g^1|^2]$$

d'où finalement

$$\sum_{n=1}^{N-1} k |n k Au^n|^2 \leq C \left[1 + \sum_{n=1}^N k |g^n|^2 \right]$$

ceci nous montre que

$$\|t \tilde{u}_k\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))}^2 \leq C \left[1 + \sum_{n=1}^N k |g^n|^2 \right]$$

d'où le lemme 3.

LEMME 4. Si $(L^p(\Omega))^N$ est muni de la norme

$$|G|_{(L^p)^N} = \left(\sum_{n=1}^N k |g^n|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad (p > 1), \text{ si } |G|_{(L^p)^N} \leq M$$

où M est indépendant de k , pour tout $\delta > 0$, $T(G)$ reste dans un compact indépendant de k de $L^2(\delta, T; H_0^1(\Omega))$.

DÉMONSTRATION. Les lemmes 2 et 3 nous montrent que nous pouvons appliquer un théorème d'interpolation non linéaire, nous disant en particulier que si $|G|_{(L^p)^N} \leq M$ indépendant de k $T(G)$ reste dans un borné (indépendant de k) d'un espace d'interpolation entre $L^2(\delta, T; H_0^1(\Omega))$ et $W(\delta, T)$, espace qui s'injecte compactement dans $L^2(\delta, T; H_0^1(\Omega))$ d'où le lemme 4.

Revenons maintenant à notre problème initial pour lui appliquer les résultats auxiliaires.

Comme $\sum_{n=1}^N k |f(\varphi^n)|_{L^p(\Omega)}^p \leq M$ indépendant de k nous voyons que pour tout $\delta > 0$, $\tilde{\varphi}_k$ reste dans un compact fixe de $L^2(\delta, T; H_0^1(\Omega))$.

De plus nous savions que $\tilde{\varphi}_k$ reste dans un borné indépendant de k de $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Donc, après au besoin extraction d'une sous-suite,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_k &\rightarrow \tilde{\varphi} && \text{dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ faible} \\ \tilde{\varphi}_k &\rightarrow \tilde{\varphi} && \text{dans } L^2(\delta, T; H_0^1(\Omega)) \text{ fort, } \quad \forall \delta > 0 \end{aligned}$$

ceci entraîne que $\varphi_k \rightarrow \tilde{\varphi}$ dans $L^2(\delta, T; H_0^1(\Omega))$ fort, $\forall \delta > 0$. Donc, d'après les hypothèses sur f :

$$f(\varphi_k) \rightarrow f(\tilde{\varphi}) \quad \text{dans } L^2(\delta, T; L^1(\Omega)) \text{ fort, } \quad \forall \delta > 0$$

Or puisque $|f(\varphi_k)|_{L^p(0, T; L^p(\Omega))}$ reste borné indépendamment de k . $f(\varphi_k) \rightarrow \chi$ dans $L^p(Q)$ faible, et on a obligatoirement $\chi = f(\tilde{\varphi})$.

Montrons maintenant que $\varphi^1 \rightarrow \varphi$ dans $L^2(\Omega)$ fort si $k \rightarrow 0$. On a:

$$\begin{cases} \frac{\varphi^1 - \varphi}{k} + A\varphi^1 + f(\varphi^1) = 0, \\ \varphi^1 \in H_0^1(\Omega), \quad \varphi \leq \varphi^1 \leq \psi \quad \text{p.p. dans } \Omega. \end{cases}$$

En multipliant cette équation par $k\varphi^1$ on obtient:

$$\frac{1}{2}|\varphi^1| - \frac{1}{2}|\varphi|^2 + \frac{1}{2}|\varphi^1 - \varphi|^2 + kx\|\varphi^1\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq Mk|f(\varphi^1)|_{L^1(\Omega)} \leq M_2k\|\varphi^1\|_{H_0^1(\Omega)}^{2-\varepsilon} + M_3k.$$

Donc:

- 1) $k\|\varphi^1\|_{H_0^1(\Omega)}^2$ reste borné.
- 2) φ^1 reste borné dans $L^2(\Omega)$ et dans $L^\infty(\Omega)$.

Par suite $k|f(\varphi^1)|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$ si $k \rightarrow 0$.

Ceci entraîne que $\varphi^1 \rightarrow \varphi$ dans $L^2(\Omega)$ faible, et dans $L^\infty(\Omega)$ faible *

$$\begin{aligned} |\varphi^1 - \varphi|^2 &= -(\varphi^1 - \varphi, \varphi) + (\varphi^1 - \varphi, \varphi^1) \\ &= -(\varphi^1 - \varphi, \varphi) - ka(\varphi^1, \varphi^1) + k(f(\varphi^1), \varphi^1). \end{aligned}$$

Donc

$$|\varphi^1 - \varphi|^2 + ka(\varphi^1, \varphi^1) = -(\varphi^1 - \varphi, \varphi) + (kf(\varphi^1), \varphi^1).$$

Comme $k|f(\varphi^1)|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$ on voit que

$$\varphi^1 \rightarrow \varphi \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort si } k \rightarrow 0.$$

Il est maintenant aisé de passer à la limite quand $k \rightarrow 0$ et de voir que $\tilde{\varphi}$ vérifie:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} + A\tilde{\varphi} + f(\tilde{\varphi}) = 0, \\ \tilde{\varphi}|_\Sigma = 0, \\ \tilde{\varphi}(0) = \varphi, \end{cases}$$

avec $\tilde{\varphi} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$.

Comme $\tilde{\varphi}_k$ vérifie: $\varphi \leq \tilde{\varphi}_k(t) \leq \psi$ p.p. dans Ω , $\forall t \in [0, T]$ φ vérifie également $\varphi \leq \varphi(t) \leq \psi$ p.p. dans Ω , $\forall t \in [0, T]$. Les $\tilde{\varphi}_k$ étant des fonctions croissantes de t il en est de même pour $\tilde{\varphi}$, et ceci termine la démonstration du théorème 4.1.

Nous avons bien sûr le théorème suivant:

THÉORÈME 4.2. *Pour tout $T > 0$, il existe une solution $\tilde{\varphi}$ décroissante en t*

$$\tilde{\varphi} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$$

du problème:

$$(4.4) \quad \begin{cases} \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} + A\tilde{\varphi} + f(\tilde{\varphi}) = 0 & \text{p.p. dans } \Omega \times]0, T[, \\ \tilde{\varphi}|_\Sigma = 0 & \text{p.p. sur } \Sigma, \\ \tilde{\varphi}(0) = \varphi & \text{p.p. dans } \Omega, \end{cases}$$

avec $\varphi \leq \tilde{\varphi}(t) \leq \psi$ p.p. dans Ω , pour tout $t \in [0, T]$.

COROLLAIRE 4.3. $\exists \underline{u} \in L^\infty(\Omega)$ telle que si $t \rightarrow \infty$ $\tilde{\varphi}(t) \rightarrow \underline{u}$ dans $L^q(\Omega)$ fort, pour tout q , $1 \leq q < +\infty$; $\exists \bar{u} \in L^\infty(\Omega)$ telle que $\tilde{\varphi}(t) \rightarrow \bar{u}$ dans $L^q(\Omega)$ fort si

$t \rightarrow \infty$ pour tout q , $1 \leq q < +\infty$ de plus on a :

$$\varphi \leq \underline{u} \leq \bar{u} \leq \psi \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

DÉMONSTRATION. Soit u une solution du problème elliptique avec $\varphi \leq u \leq \psi$ p.p. dans Ω .

$\tilde{\varphi}(t)$ est une fonction croissante de t majorée par u (d'après la remarque suivant le théorème 4.1 et l'unicité dans (4.1)).

Donc $\exists \underline{u} \leq u$ p.p. dans Ω , telle que $\tilde{\varphi}(t) \rightarrow \underline{u}$ dans $L^q(\Omega)$ fort, pour tout q , $1 \leq q < +\infty$. De plus $\varphi \leq \underline{u} \leq u$ p.p. dans Ω , donc $\underline{u} \in L^\infty(\Omega)$.

De même pour l'existence de \bar{u} . On a bien sûr $\varphi \leq \underline{u} \leq u < \bar{u} \leq \psi$ p.p. dans Ω . D'où le corollaire.

THÉORÈME 4.4.

$$\begin{aligned} \underline{u} \text{ vérifie: } & \begin{cases} \underline{u} \in H_0^1(\Omega) \\ A\underline{u} + f(\underline{u}) = 0, \end{cases} \\ \bar{u} \text{ vérifie: } & \begin{cases} \bar{u} \in H_0^1(\Omega), \\ A\bar{u} + f(\bar{u}) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Nous ne montrerons que la première partie du théorème, la deuxième se montrant par un raisonnement analogue.

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &\in C([0, T]; L^2(\Omega)) \quad \forall T \geq 0, \\ \tilde{\varphi} &\in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad \forall T \geq 0. \end{aligned}$$

D'autre part nous avons $\partial\tilde{\varphi}/\partial t \in L^p(\delta, T; L^2(\Omega))$, $\forall \delta > 0$, $\forall T > 0$. Comme $\tilde{\varphi}$ est croissante $\partial\tilde{\varphi}/\partial t \geq 0$ p.p.

Soit t_0 tel que $\tilde{\varphi}(t_0) \in H_0^1(\Omega)$. Pour tout $t > t_0$ on a : $\tilde{\varphi}(t) \geq \tilde{\varphi}(t_0)$ p.p. sur Ω .

Pour presque tout $t > t_0$, nous pouvons écrire :

$$\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t}(t), \tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0) \right) + (A\tilde{\varphi}(t), \tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0)) + (f(\tilde{\varphi}(t)), \tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0)) = 0.$$

Or pour presque tout $t > t_0$, $((\partial\tilde{\varphi}/\partial t)(t), \tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0)) \geq 0$.

Donc :

$$a(\tilde{\varphi}(t), \tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0)) + (f(\tilde{\varphi}(t)), \tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0)) \leq 0.$$

d'après les hypothèses sur f , ceci nous permet de dire que $\|\tilde{\varphi}(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M$ pour presque tout $t > t_0$.

Et donc

$$|f(\tilde{\varphi}(t))|_{L^p(\Omega)} \leq M' \quad \text{p.p. en } t > t_0.$$

Par suite, puisque $\tilde{\varphi}(t) \rightarrow \underline{u}$ dans $L^2(\Omega)$ si $t \rightarrow \infty$ nous voyons que $\underline{u} \in H_0^1(\Omega)$.

Comme $A\tilde{\varphi}(t) \in L^p(\Omega)$ pour presque tout t , nous pouvons supposer que $A\tilde{\varphi}(t_0) \in L^p(\Omega)$.

En multipliant l'équation donnant $\tilde{\varphi}$ par 1, nous obtenons: p.p. en $t > t_0$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}(t) dx + a(\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0), 1) - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_A} (\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0)) 1 d\Gamma + (f(\tilde{\varphi}(t)) + A\tilde{\varphi}(t_0), 1) = 0.$$

Or

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}(t) dx = \left| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}(t) \right|_{L^1(\Omega)}.$$

De plus, comme $\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0) \geq 0$ et $[\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0)]|_{\Gamma} = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial \nu_A} (\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0)) \leq 0.$$

Donc $|(\partial \tilde{\varphi} / \partial t)(t)|_{L^1(\Omega)}$ est borné indépendamment de t pour presque tout $t > t_0$.

Il en est alors de même de $|A\tilde{\varphi}(t)|_{L^1(\Omega)}$.

Donc pour presque tout $t > t_0$, $\tilde{\varphi}(t)$ reste, en particulier, dans un compact fixe de $W^{1,1}(\Omega)$.

Par suite: sauf pour t dans un ensemble de mesure nulle

$$\tilde{\varphi}(t) \rightarrow \underline{u} \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible} \quad \text{si } t \rightarrow \infty$$

$$\tilde{\varphi}(t) \rightarrow \underline{u} \quad \text{dans } W^{1,1}(\Omega) \text{ fort} \quad \text{si } t \rightarrow \infty$$

$$f(\tilde{\varphi}(t)) \text{ reste dans un borné de } L^p(\Omega).$$

Il existe une suite (t_n) , $t_n \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow +\infty$ telle que:

$$\tilde{\varphi}(t_n) \rightarrow \underline{u} \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_i}(t_n) \rightarrow \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i} \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Donc puisque f est une fonction continue de ses arguments

$$f(\tilde{\varphi}(t_n)) \rightarrow f(\underline{u}) \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Alors on sait (cf. Lions [6]) que $f(\tilde{\varphi}(t_n)) \rightharpoonup f(\underline{u})$ dans $L^p(\Omega)$ faible.

On peut aisément montrer que $f(\underline{u})$ est la seule valeur d'adhérence faible de $f(\tilde{\varphi}(t))$ (t en dehors d'un ensemble de mesure nulle).

Donc $f(\tilde{\varphi}(t)) \rightharpoonup f(\underline{u})$ dans $L^p(\Omega)$ faible si $t \rightarrow \infty$.

Nous pouvons maintenant passer à la limite à partir de l'équation donnant $\tilde{\varphi}$, et montrer que \underline{u} vérifie

$$A\underline{u} + f(\underline{u}) = 0, \quad \text{d'où le théorème 4.4.}$$

PROPOSITION 4.5. Le problème stationnaire

$$(4.5) \quad \begin{cases} Au + f(u) = 0 \\ u \in H_0^1(\Omega) \\ \varphi \leq u \leq \psi \quad \text{p.p. dans } \Omega \end{cases}$$

(qui est le problème (2.3) étudié au chapitre II), admet une solution minimale u_{\min} et une solution maximale u_{\max} . De plus $u_{\min} = \underline{u}$ et $u_{\max} = \bar{u}$.

DÉMONSTRATION. Nous savons que si u est une solution quelconque de (4.5), alors, $\forall t \geq 0$, $\tilde{\varphi}(t) \leq u$ p.p. dans Ω . Donc $\underline{u} \leq u$ p.p. dans Ω . Or nous venons de montrer que \underline{u} est solution de (4.5). Donc \underline{u} est bien solution minimale. De même \bar{u} est solution maximale.

4.2. *Cas où la donnée initiale u_0 vérifie $\varphi \leq u_0 \leq \psi$ p.p. dans Ω . Comportement à l'infini.*

Soit donc \tilde{u}_0 solution du problème:

$$(4.6) \quad \begin{cases} \frac{d\tilde{u}_0}{dt} + A\tilde{u}_0 + f(\tilde{u}_0) = 0, \\ \tilde{u}_0|_{\Sigma} = 0, \\ \tilde{u}_0(0) = u_0, \\ \varphi \leq \tilde{u}_0(t) \leq \psi \quad \text{p.p. dans } \Omega, \text{ pour tout } t. \end{cases}$$

Nous savons, d'après le théorème 3.1 que \tilde{u}_0 existe.

THÉORÈME 4.6. *La solution \tilde{u}_0 de (4.6) vérifie:*

$$\forall t \geq 0, \quad \tilde{\varphi}(t) \leq \tilde{u}_0(t) \leq \tilde{\psi}(t) \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Si de plus, le problème stationnaire (4.5) admet une solution unique u , alors $\tilde{u}_0(t) \rightarrow u$ dans $L^q(\Omega)$ si $t \rightarrow \infty$, pour tout q tel que $1 \leq q < \infty$.

DÉMONSTRATION. $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ sont sous solution et sur solution (dépendant de t) du problème (4.6). D'après le théorème 3.1 et la remarque qui le suit (nécessaire vue la régularité de $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$) il existe une solution \tilde{u}_0 du problème (4.6) vérifiant $\tilde{\varphi}(t) \leq \tilde{u}_0(t) \leq \tilde{\psi}(t)$ p.p. dans Ω pour tout $t \geq 0$.

Si le problème stationnaire (4.5) admet une solution unique u $\underline{u} = \bar{u} = u$. Donc:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(t) &\rightarrow u && \text{dans } L^q(\Omega) && \text{si } t \rightarrow \infty, \\ \tilde{\psi}(t) &\rightarrow u && \text{dans } L^q(\Omega) && \text{si } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Il en est bien sûr de même de $\tilde{u}_0(t)$ puisque

$$\tilde{\varphi}(t) \leq \tilde{u}_0(t) \leq \tilde{\psi}(t) \quad \text{p.p. dans } \Omega, \text{ d'où le théorème.}$$

Ce théorème donne dans un sens particulier, un résultat de stabilité asymptotique de la solution u du problème elliptique.

Remarque.

Depuis l'envoi du manuscrit, il a été possible d'améliorer les théorèmes 2.1 et 3.1, en supposant seulement que φ et ψ sont des sous et sur solutions faibles (avec des définitions évidentes). Il suffit alors d'avoir:

Pour le théorème 2.1.:

$$p \text{ et } \psi \text{ dans } H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad f(p) \text{ et } f(\psi) \text{ dans } L^{(1+\eta)'(\Omega)}.$$

Pour le théorème 3.1.:

$$\begin{aligned} p, \psi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q); \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \\ f(p) \text{ et } f(\psi) \in L^{(1+\eta)'(Q)}. \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [0] H. AMANN, *On the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces*, J. Functional Anal., **11** (1972), 346-384.
- [1] H. BREZIS, *Un problème d'évolution avec contraintes unilatérales dépendant du temps*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, série A, pp. 310-312 (24 Janvier 1972).
- [2] H. BREZIS - W. A. STRAUSS, *Semi-linear second order elliptic equations in L^1* , Journal of Japan Math. Society, 1973.
- [3] Y. CHOQUET-BRUHAT - J. LERAY, *Sur le problème de Dirichlet quasi-linéaire d'ordre 2*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, série A (3 Janvier 1972).

- [4] COURANT - HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, vol. II, Interscience, New York, 1962.
- [5] O. A. LADYZHENSKAYA - N. N. URAL'TSEVA, *Equations aux dérivées partielles de type elliptique*, Dunod, Paris, 1968.
- [6] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
- [7] J.-P. PUEL, *Sur des problèmes quasilineaires elliptiques et paraboliques d'ordre 2*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, série A (17 Juillet 1972).
- [8] D. H. SATTINGER, *Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. Journal, **21** (1972), 979-1000.
- [9] G. STAMPACCHIA, *Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Séminaire de Mathématiques Supérieures, Université de Montréal, 1965.
- [10] L. TARTAR, *Interpolation non linéaire et régularité*, Journal of Functional Analysis, vol. 9, no. 4 (April 1972).
- [11] V. A. SOLONNIKOV, *Inégalité a priori pour les équations du deuxième ordre de type parabolique*, Trudi Stekloff, **70** (1964), 133-212.