ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CARLO SBORDONE

Su alcune applicazioni di un tipo di convergenza variazionale

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 2, nº 4 (1975), p. 617-638

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1975_4_2_4_617_0>

Su alcune applicazioni di un tipo di convergenza variazionale (*).

CARLO SBORDONE (**)

Introduzione.

In un recente lavoro [6] E. De Giorgi ha preso in considerazione un tipo di convergenza per successioni di funzionali integrali della forma:

$$\int_\Omega f(x, u, Du)\,dx\,, \tag{1}$$

con $f(x, y, z)$ funzione reale definita in R^{2n+1} verificante le condizioni:

a) $$|z| \leqslant f(x, y, z) \leqslant s(1 + |y| + |z|)\,,$$

b) $$|f(x, y, z) - f(x, y', z')| \leqslant s(|y - y'| + |z - z'|)$$

ed Ω aperto limitato di R^n.

Precisamente, se $\{f_h\}_h$ ed f soddisfano alle a), b), tale convergenza è caratterizzata dalle seguenti proprietà:

Per ogni Ω aperto limitato di R^n:

i) $\forall u_h, u \in C^1(R^n)$, $u_h \to u$ in $L^1(\Omega) \Rightarrow$

$$\int_\Omega f(x, u, Du) \leqslant \liminf_h \int_\Omega f_h(x, u_h, Du_h)\,,$$

ii) $\forall u \in C^1(R^n)\, \exists w_h \in C^1(R^n)$: $w_h - u \in C^1_0(\Omega)$, $w_h \to u$ in $L^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega f(x, u, Du) = \lim_h \int_\Omega f_h(x, w_h, Dw_h)\,.$$

(*) Lavoro eseguito nel periodo in cui l'autore usufruiva di una borsa di studio dell'Accademia Nazionale dei Lincei presso la Scuola Normale Superiore di Pisa per l'A.A. 1974-75.

(**) Istituto di Matematica: R. Caccioppoli, dell'Università di Napoli.

Pervenuto alla Redazione il 9 Luglio 1975.

In [8] E. De Giorgi - S. Spagnolo avevano considerato una convergenza « in energia » per funzionali quadratici equi-uniformemente ellittici del tipo:

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} D_i u D_j u \tag{II}$$

che era strettamente connessa alla nozione di G-convergenza di operatori ellittici del 2° ordine euleriani dei funzionali (II), precedentemente introdotta da Spagnolo in [20], [21], e poi studiata da vari Autori in una serie di lavori (cfr. [1], ..., [5], [10], [12], [14], ..., [24]).

La nozione di convergenza in energia è stata estesa da P. Marcellini [10], [11] ad una classe di funzioni convesse su uno spazio di Banach riflessivo; e recentemente in [4], L. Boccardo-P. Marcellini hanno dimostrato che, in tale contesto, essa equivale ad un tipo di convergenza debole simile a quella definita per i funzionali (I) da i), ii).

Per convergenze analoghe si veda anche U. Mosco [13], J. L. Joly [9], nel caso di funzioni convesse su spazi vettoriali topologici e T. Zolezzi [25], [26] che considera anche funzioni non convesse.

Nella nota [7] E. De Giorgi-T. Franzoni hanno poi introdotto una nozione generale di Γ^- convergenza per funzioni reali definite in spazi topologici, che consente tra l'altro di inquadrare i risultati precedenti e vari altri sui limiti di integrali del Calcolo delle Variazioni.

In questo lavoro, utilizzando alcuni risultati di [7], dapprima (Teor. 1) dò un teorema di compattezza per successioni di integrali che comprendono come casi particolari quelli considerati sia in [6] da De Giorgi sia in [8] da De Giorgi-Spagnolo, generalizzando gli analoghi teoremi di [6], [8] (§ 1, ..., 4).

Successivamente (§ 5, 6) mostro (Teor. 2) che dalla Γ^- convergenza di una successione di funzionali quadratici equi-uniformemente ellittici segue la G-convergenza dei loro operatori di Eulero. (Vedi anche [4], [10]).

Tale impostazione fornisce tra l'altro una nuova dimostrazione del noto teorema di compattezza rispetto alla G-convergenza della classe degli operatori lineari ellittici del 2° ordine, con matrice dei coefficienti aventi due assegnati numeri come minimo e massimo autovalore, dimostrato da Spagnolo in [20], [21] e in [23].

Desidero ringraziare il Prof. E. De Giorgi per avermi proposto questa ricerca e per le utili discussioni sull'argomento.

§ 1. – Per ogni intero positivo n denotiamo con Ap_n l'insieme degli aperti limitati dello spazio euclideo ad n dimensioni $\boldsymbol{R}^n$, e con $C^1(\boldsymbol{R}^n)$ la classe delle funzioni continue su $\boldsymbol{R}^n$ con le loro derivate prime. Fissato un aperto $\Omega \in Ap_n$, e un numero reale $p \geqslant 1$, introduciamo su $C^1(\boldsymbol{R}^n)$ le distanze estese (*)

$$d_\Omega(u, v) = \sqrt[p]{\int_\Omega |u - v|^p} + \sqrt[p]{\int_\Omega |Du - Dv|^p}\,,$$

$$\sigma_\Omega(u, v) = \sqrt[p]{\int_\Omega |u - v|^p}\,,$$

$$\sigma'_\Omega(u, v) = \begin{cases} \sigma_\Omega(u, v) & \text{se } \operatorname{supp}(u - v) \subset \Omega\,, \\ +\infty & \text{se } \operatorname{supp}(u - v) \not\subset \Omega\,, \end{cases}$$

$$\tau_\Omega(u, v) = \begin{cases} \sup\limits_\Omega |u - v| & \text{se } \operatorname{supp}(u - v) \subset \Omega\,, \\ +\infty & \text{se } \operatorname{supp}(u - v) \not\subset \Omega\,. \end{cases}$$

Avendo denotato $\forall \phi \in C^1(\boldsymbol{R}^n)$ con $\operatorname{supp}\phi$ il supporto di ϕ. Per ogni $\Omega \in Ap_n$ denoteremo con mis (Ω) la misura secondo Lebesgue di Ω.

Con N indichiamo l'insieme degli interi positivi. $L^p(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni reali misurabili in Ω aventi potenza p-sima sommabile.

$C^0(R^n)$ è l'insieme delle funzioni continue su R^n.

$C_0^k(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni con derivate continue su Ω fino all'ordine k e con supporto compatto contenuto in Ω.

$C_0^\infty(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni aventi derivate continue di ogni ordine e a supporto compatto contenuto in Ω.

$L^\infty(R^n)$ è l'insieme delle funzioni misurabili su R^n ed essenzialmente limitate.

$H_0^{1,p}(\Omega)$ $(p \geqslant 1)$ è il completamento di $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma

$$\|u\|_{H_0^{1,p}} = \sqrt[p]{\int_\Omega |u|^p} + \sqrt[p]{\int_\Omega |Du|^p}\,.$$

Fissato un numero reale $s \geqslant 1$, denotiamo con $\mathcal{F}_{n,s}$ l'insieme delle funzioni reali definite in $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ e misurabili, che soddisfano alle seguenti condizioni:

a) Per ogni x, $w \in \boldsymbol{R}^n$, $u \in \boldsymbol{R}$:

$$|w| \leqslant f(x, u, w) \leqslant s\big(1 + |u| + |w|\big)$$

(*) Si dice distanza estesa su un insieme X una funzione $\delta\colon X \times X \to \overline{\boldsymbol{R}}$, non negativa, simmetrica, transitiva e tale che $\delta(x, x) = 0$ per ogni $x \in X$.

b) Per ogni $x \in \boldsymbol{R}^n$; $u, u' \in \boldsymbol{R}$; $w, w' \in \boldsymbol{R}^n$:

$$|f(x, u, w) - f(x, u', w')| \leqslant s(|u - u'| + |w - w'|) .$$

Fissato $\Omega \in Ap_n$; p reale $\geqslant 1$; $f_h, f \in \mathcal{F}_{n,s}$, poniamo per ogni $u \in C^1(\boldsymbol{R}^n)$

$$F_h(\Omega, u) = \int_\Omega f_h^p(x, u, Du) \tag{1.1}$$

$$F(\Omega, u) = \int_\Omega f^p(x, u, Du) . \tag{1.2}$$

Sia ora α_Ω una delle distanze estese $\sigma_\Omega, \sigma'_\Omega, \tau_\Omega$.

Ricordiamo che, cfr. [7], fissata $u \in C^1(R^n)$, risulta

$$F(\Omega, u) = \Gamma^-(\alpha_\Omega) \lim_h F_h(\Omega, u)$$

se e soltanto se:

i) $\forall u_h \in C^1(R^n)$: $a_\Omega(u_h, u) \to 0 \Rightarrow F(\Omega, u) \leqslant \liminf_h F_h(\Omega, u_h)$,

ii) $\exists w_h \in C^1(R^n)$: $\alpha_\Omega(w_h, u) \to 0$ e $F(\Omega, u) = \lim_h F_h(\Omega, w_h)$.

Scopo di questa nota è di dimostrare il seguente Teorema di compattezza che generalizza uno analogo di De Giorgi [6] relativo al caso $p = 1$:

TEOREMA 1. *Sia $p \geqslant 1$; $f_h \in \mathcal{F}_{n,s}$; allora esiste una successione strettamente crescente (j_h) di interi positivi ed una $f \in \mathcal{F}_{n,s}$ tali che $\forall \Omega \in Ap_n$, $u \in C^1(R^n)$ sia*:

$$\int_\Omega f^p(x, u, Du) = \Gamma^-(\sigma_\Omega) \lim_h \int_\Omega f_{j_h}^p(x, u, Du) = \Gamma^-(\tau_\Omega) \lim_h \int_\Omega f_{j_h}^p(x, u, Du) .$$

§ 2. – Allo scopo di pervenire alla dimostrazione del Teorema 1, premettiamo alcuni lemmi.

Incominciamo con un lemma di teoria della misura, la cui dimostrazione consegue da note proprietà dell'integrale di Lebesgue.

LEMMA I. *Sia $\tau : Ap_n \to R$ tale che, per una $\psi \in C^0(R^n)$ valgano le*:

$$\Omega' \subseteq \Omega \qquad \Rightarrow \tau(\Omega') \leqslant \tau(\Omega) \leqslant \tau(\Omega') + \int_{\Omega - \Omega'} \psi(x)\, dx$$

$$\Omega \cap \Omega' = \emptyset \Rightarrow \tau(\Omega \cup \Omega') = \tau(\Omega) + \tau(\Omega') .$$

Allora esiste una funzione misurabile $\beta : R^n \to R$ *tale che*:

$$0 \leqslant \beta(x) \leqslant \psi(x) \text{ q.o.} \quad e \quad \tau(\Omega) = \int_\Omega \beta(x)\,dx \quad \forall \Omega \in Ap_n .$$

Sia ora $\mathcal{G}^p_{n,s}$ l'insieme dei funzionali

$$F : Ap_n \times C^1(R^n) \to R$$

soddisfacenti alle condizioni:

G_1) $\forall \Omega, \Omega' \in Ap_n$, $\Omega' \subseteq \Omega$, $u \in C^1(R^n)$ si ha

$$\int_{\Omega'} |Du|^p \leqslant F(\Omega', u) \leqslant F(\Omega, u) \leqslant F(\Omega', u) + s^p \int_{\Omega - \Omega'} (1 + |u| + |Du|)^p .$$

G_2) $\forall \Omega, \Omega' \in Ap_n$, $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$, $u \in C^1(R^n)$ si ha:

$$F(\Omega \cup \Omega', u) = F(\Omega, u) + F(\Omega', u)$$

G_3) $\forall u, u' \in C^1(R^n)$, $\Omega \in Ap_n$ si ha:

$$|\sqrt[p]{F(\Omega, u)} - \sqrt[p]{F(\Omega, u')}| \leqslant s\left(\sqrt[p]{\int_\Omega |u - u'|^p} + \sqrt[p]{\int_\Omega |Du - Du'|^p}\right).$$

Si osservi che se $f \in \mathcal{F}_{n,s}$, il funzionale:

$$F(\Omega, u) = \int_\Omega f^p(x, u, Du)$$

appartiene alla classe $\mathcal{G}^p_{n,s}$. Viceversa, facendo uso del Lemma I e con ragionamenti simili a quelli fatti in [6] per il caso $p = 1$ si dimostra il

LEMMA II. *Se* $F \in \mathcal{G}^p_{n,s}$, *allora esiste una sola* $f \in \mathcal{F}_{n,s}$ *tale che*:

$$F(\Omega, u) = \int_\Omega f^p(x, u, Du) \tag{2.1}$$

per ogni $\Omega \in Ap_n$, *e per ogni* $u \in C^1(R^n)$.

DIM. Sia $\{p_h\}_h$ la successione dei polinomi reali in n variabili reali a coefficienti razionali e sia $\{\varphi_h\}_h$ una successione di funzioni misurabili su R^n tali che $\forall \Omega \in Ap_n$ e $\forall h \in N$ risulti

$$F(\Omega, p_h) = \int_\Omega \varphi_h^p(x)\,dx \tag{2.2}$$

$$0 \leqslant \varphi_h(x) \leqslant s\big(1 + |p_h(x)| + |Dp_h(x)|\big) \text{ q.o.} \tag{2.3}$$

L'esistenza di tali funzioni essendo assicurata dalle condizioni G_1), G_2) per il Lemma I, si avrà inoltre grazie alla G_3) che $\forall h, k \in N$

$$\left| \sqrt[p]{\int_\Omega \varphi_h^p(x)\,dx} - \sqrt[p]{\int_\Omega \varphi_k^p(x)\,dx} \right| \leqslant \tag{2.4}$$
$$\leqslant s\left(\sqrt[p]{\int_\Omega |p_h(x) - p_k(x)|^p} + \sqrt[p]{\int_\Omega |Dp_h(x) - Dp_k(x)|^p} \right).$$

Fissati h e k e detto x un punto di Lebesgue per le funzioni integrande nei due membri della (2.4), si ha:

$$|\varphi_h(x) - \varphi_k(x)| \leqslant s\big(|p_h(x) - p_k(x)| + |Dp_h(x) + Dp_k(x)|\big)\,; \tag{2.5}$$

pertanto esiste un sottoinsieme M di R^n tale che $\text{mis}(M) = 0$ e tale che le (2.3) e (2.5) sono valide $\forall x \in R^n - M$ e $\forall h, k \in N$.

Fissato $x \in R^n - M$, poichè l'insieme delle $(n+1)$-ple del tipo

$$\big(p_h(x), D_1 p_h(x), \ldots, D_n p_h(x)\big) \qquad h \in N$$

è denso in R^{n+1}, dalle (2.3), (2.5) segue l'esistenza di una unica $f \in \mathcal{F}_{n,s}$ tale che:

$$f\big(x, p_h(x), Dp_h(x)\big) = \begin{cases} \varphi_h(x) & \forall x \in R^n - M\,, \\ |Dp_h(x)| & \forall x \in M\,. \end{cases} \tag{2.6}$$

Dalle (2.2), (2.6) segue la (2.1) nel caso che u sia un polinomio a coefficienti razionali ed infine anche nel caso generale, quando si ricordi che tali funzioni approssimano uniformemente sugli aperti limitati di R^n le funzioni di classe $C^1(R^n)$ con le loro derivate prime.

§ 3. – In questo numero valendoci dei risultati del n. precedente dimostreremo la seguente proposizione, nella quale si ottiene un primo risultato di compattezza relativo però soltanto alle metriche estese σ_Ω e σ'_Ω.

PROPOSIZIONE I. *Se* $f_h \in \mathcal{F}_{n,s}$ *per* $h \in N$; *esiste una successione* $\{f_{j_h}\}_h$ *estratta da* $\{f_h\}_h$ *ed una funzione* $F \in \mathcal{G}^p_{n,s}$ *tale che* $\forall \Omega \in Ap_n$ *e* $u \in C^1(R^n)$:

$$F(\Omega, u) = \Gamma^-(\sigma_\Omega) \lim_h \int_\Omega f^p_{j_h}(x, u, Du) = \Gamma^-(\sigma'_\Omega) \lim_h \int_\Omega f^p_{j_h}(x, u, Du) \,. \tag{3.1}$$

Per dimostrare tale proposizione faremo uso dei seguenti lemmi.

LEMMA III. *Se* $f_h \in \mathcal{F}_{n,s}$ *per* $h \in N$; *posto per ogni* $\Omega \in Ap_n$, $u \in C^1(R^n)$

$$G_h(\Omega, u) = \sqrt[p]{\int_\Omega f^p_h(x, u, Du)} \;;$$

se esistono per un $\Omega \in Ap_n$ *ed una* $u \in C^1(R^n)$ *i limiti*

$$G(\Omega, u) = \Gamma^-(\sigma_\Omega) \lim_h G_h(\Omega, u) \,, \tag{3.2}$$

$$G'(\Omega, u) = \Gamma^-(\sigma'_\Omega) \lim_h G_h(\Omega, u) \,, \tag{3.3}$$

allora si ha:

$$G(\Omega, u) = G'(\Omega, u) \,.$$

DIM. Poichè la topologia generata dalla metrica σ_Ω è meno fine di quella generata da σ'_Ω, si ha intanto $G(\Omega, u) \leqslant G'(\Omega, u)$.

Sia ora $u \in C^1(R^n)$ e $\{u_h\}$ una successione di funzioni di classe $C^1(R^n)$ convergente verso u in $L^p(\Omega)$ tale che:

$$G(\Omega, u) = \lim_h G_h(\Omega, u_h) \,.$$

Fissato un compatto $K \subset\subset \Omega$, posto $\delta = \operatorname{dist}(K, R^n - \Omega)$, poniamo come in [6], Lemma I del § 3, per ogni intero $\nu > 1$:

$$B_0 = K \,, \qquad B_i = \left\{x \in R^n;\, \operatorname{dist}(x, K) < \frac{i\delta}{\nu}\right\}, \qquad i = 1, \ldots, \nu \,, \tag{3.4}$$

da cui evidentemente:

$$B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_\nu \subseteq \Omega \,, \tag{3.5}$$

e siano $\psi_1, \dots, \psi_\nu$ delle funzioni soddisfacenti alle condizioni:

$$\text{(3.6)} \qquad \begin{cases} \psi_i \in C_0^1(B_i)\,, & 0 \leqslant \psi_i(x) \leqslant 1\,, \qquad \forall x \in B_i\,, \\ \psi_i(x) = 1\,, & \forall x \in B_{i-1}\,, \\ |D\psi_i(x)| \leqslant \dfrac{\nu+1}{\delta}\,, & \forall x \in B_i\,. \end{cases}$$

Posto per ogni $h \in N$ e $i = 1, \dots, \nu$:

$$\text{(3.7)} \qquad w_{ih} = u + (u_h - u)\psi_i\,,$$

si ha per la (3.3) qualunque sia $i = 1, \dots, \nu$

$$\lim_h \sigma'_\Omega(w_{ih}, u) = 0\,,$$

$$G'(\Omega, u) \leqslant \liminf_{h\to\infty} G_h(\Omega, w_{ih})\,.$$

Pertanto, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{h} \in N$ tale che $\forall h \geqslant \bar{h}$:

$$\text{(3.8)} \qquad G'(\Omega, u) - G(\Omega, u) - \varepsilon < \sqrt[p]{\int_\Omega f_h^p(x, w_{ih}, Dw_{ih})} - \sqrt[p]{\int_{B_i} f_h^p(x, u_h, Du_h)} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt[p]{\int_{\Omega - B_i} f_h^p(x, w_{ih}, Dw_{ih})} + \sqrt[p]{\int_{B_i} f_h^p(x, w_{ih}, Dw_{ih})} - \sqrt[p]{\int_{B_i} f_h^p(x, u_h, Du_h)}\,.$$

Il primo addendo dell'ultimo membro della (3.8) si maggiora, tenendo conto di (3.5), (3.7) e della *a*) del § 1, al seguente modo:

$$\text{(3.9)} \qquad \sqrt[p]{\int_{\Omega - B_i} f_h^p(x, w_{ih}, Dw_{ih})} \leqslant s \sqrt[p]{\int_{\Omega - K} (1 + |u| + |Du|)^p}\,.$$

Inoltre per la *b*) del § 1 e le (3.6), (3.7) si ha:

$$\text{(3.10)} \qquad \sqrt[p]{\int_{B_i} f_h^p(x, w_{ih}, Dw_{ih})} - \sqrt[p]{\int_{B_i} f_h^p(x, u_h, Du_h)} \leqslant$$
$$\leqslant s \sqrt[p]{\int_{B_i - B_{i-1}} \big(|w_{ih} - u_h| + |Dw_{ih} - Du_h|\big)^p}\,.$$

Da (3.8), (3.9), (3.10), tenendo conto di (3.6), (3.7) segue:

$$G'(\Omega, u) - G(\Omega, u) - \varepsilon < s \sqrt[p]{\int_{\Omega - K} (1 + |u| + |Du|)^p} +$$
$$+ s \sqrt[p]{\int_{B_i - B_{i-1}} \left[\left(1 + \frac{\nu + 1}{\delta}\right) |u_h - u| + |Du_h - Du|\right]^p},$$

da cui, per la (3.5) si ha subito:

$$G'(\Omega, u) - G(\Omega, u) - \varepsilon < s \sqrt[p]{\int_{\Omega - K} (1 + |u| + |Du|)^p} + \tag{3.11}$$
$$+ s \sqrt[p]{\frac{1}{\nu}\left(1 + \frac{\nu + 1}{\delta}\right)^p \int_{\Omega} |u_h - u|^p} + \frac{s}{\sqrt[p]{\nu}} \sqrt[p]{\int_{\Omega} |Du_h - Du|^p}.$$

Passando al limite nella (3.11) per $h \to \infty$, per $\nu \to \infty$ e per $K \to \Omega$ si ha, per l'arbitrarietà di ε:

$$G'(\Omega, u) \leqslant G(\Omega, u)$$

ossia la tesi.

Utili, allo scopo di determinare le proprietà di Γ^- limiti di funzionali del tipo $F_h(\Omega, u)$ come funzioni dell'aperto $\Omega \in Ap_n$, sono i seguenti risultati. Con la notazione (1.1) si ha:

LEMMA IV. *Se* $\Omega, \Omega' \in Ap_n$ e $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$, *e se esistono tutti i limiti, si ha*:

$$\Gamma^-(\sigma'_{\Omega \cup \Omega'}) \lim_h F_h(\Omega \cup \Omega', u) = \Gamma^-(\sigma'_{\Omega}) \lim_h F_h(\Omega, u) + \tag{3.12}$$
$$+ \Gamma^-(\sigma'_{\Omega'}) \lim_h F_h(\Omega', u).$$

DIM. Evidentemente per ogni $u, v \in C^1(R^n)$ si ha

$$|F_h(\Omega, u) - F_h(\Omega, v)| \leqslant \sigma'_{\Omega'}(u, v)$$
$$|F_h(\Omega', u) - F_h(\Omega', v)| \leqslant \sigma'_{\Omega}(u, v);$$

inoltre

$$\sigma'_{\Omega \cup \Omega'}(u, v) \geqslant 2^{(1-p)/p} \inf_{w \in C^1(R^n)} \{\sigma'_{\Omega'}(u, w) + \sigma'_{\Omega'}(v, w)\}.$$

Allora la tesi segue subito dal Teorema 3.8 di [7].

LEMMA V. *Se $\Omega', \Omega \in Ap_n$ e $\Omega' \subseteq \Omega$; se $u \in C^1(R^n)$ ed esistono tutti i limiti, si ha:*

$$\Gamma^-(\sigma_{\Omega'}) \lim_h F_h(\Omega', u) \leqslant \Gamma^-(\sigma_\Omega) \lim_h F_h(\Omega, u) , \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^-(\sigma'_\Omega) \lim_h F_h(\Omega, u) &\leqslant \Gamma^-(\sigma'_{\Omega'}) \lim_h F_h(\Omega, u) \leqslant \\ &\leqslant \Gamma^-(\sigma'_{\Omega'}) \lim_h F_h(\Omega', u) + s^p \int_{\Omega-\Omega'} (1 + |u| + |Du|)^p . \end{aligned} \tag{3.14}$$

DIM. Essendo la topologia generata da $\sigma_{\Omega'}$ meno fine di quella generata da σ_Ω e $F_h(\Omega', u) \leqslant F_h(\Omega, u)$, ne segue subito la (3.13).

Poichè la topologia generata da σ'_Ω è meno fine di quella generata da $\sigma'_{\Omega'}$, per ottenere la (3.14) basta dimostrare che

$$\Gamma^-(\sigma'_{\Omega'}) \lim_h F_h(\Omega, u) \leqslant \Gamma^-(\sigma'_{\Omega'}) \lim_h F_h(\Omega', u) + \limsup_h F_h(\Omega - \Omega', u) .$$

Sia w_h in $C^1(R^n)$ tale che:

$$\lim_h \sigma'_{\Omega'}(w_h, u) = 0 , \qquad \Gamma^-(\sigma'_{\Omega'}) \lim_h F_h(\Omega', u) = \lim_h F_h(\Omega', w_h) ;$$

allora:

$$\Gamma^-(\sigma'_{\Omega'}) \lim_h F_h(\Omega, u) \leqslant \lim_h F_h(\Omega', w_h) + \limsup_h F_h(\Omega - \Omega', u) .$$

Denotiamo ora con $\mathcal{B}_n$ la classe delle unioni finite di intervalli aperti di R^n ad estremi razionali e dimostriamo il seguente:

LEMMA VI. *Se per una successione $\{f_h\}_h$ di funzioni di $\mathcal{F}_{n,s}$ esistono per ogni $B \in \mathcal{B}_n$, $u \in C^1(R^n)$ i limiti:*

$$\Gamma^-(\sigma_B) \lim_h F_h(B, u) , \qquad \Gamma^-(\sigma'_B) \lim_h F_h(B, u) , \tag{3.16}$$

allora, per ogni $\Omega \in Ap_n$, $u \in C^1(R^n)$ esistono e coincidono i limiti:

$$\Gamma^-(\sigma_\Omega) \lim_h F_h(\Omega, u) = \Gamma^-(\sigma'_\Omega) \lim_h F_h(\Omega, u) . \tag{3.17}$$

Inoltre, denotato con $F(\Omega, u)$ il valore comune dei limiti in (3.17), *per*

$\Omega, \Omega' \in Ap_n$, $u \in C^1(R^n)$ *si ha*:

$$\Omega \cap \Omega' = \emptyset \Rightarrow F(\Omega \cup \Omega', u) = F(\Omega, u) + F(\Omega', u) \tag{3.18}$$

$$\Omega' \subseteq \Omega \Rightarrow F(\Omega', u) \leqslant F(\Omega, u) \leqslant F(\Omega', u) + s^p \int_{\Omega - \Omega'} (1 + |u| + |Du|)^p \tag{3.19}$$

$$\int_\Omega |Du|^p \leqslant F(\Omega, u)\,. \tag{3.20}$$

DIM. Sia $\Omega \in Ap_n$ ed $\{h_q\}_q$ una successione strettamente crescente di interi positivi tali che per ogni $u \in C^1(R^n)$:

$$F(\Omega, u) = \Gamma^-(\sigma_\Omega) \lim_q F_{h_q}(\Omega, u) = \Gamma^-(\sigma'_\Omega) \lim_q F_{h_q}(\Omega, u)\,. \tag{3.21}$$

Tale successione esiste senz'altro giacchè la successione:

$$u \to \sqrt[p]{\int_\Omega f_h^p(x, u, Du)}$$

è costituita di funzionali equilipschitziani rispetto alla metrica d_Ω (cfr. § 1) e dunque basta invocare il Teor. 3.7 e la Prop. 1.10 di [7] e il Lemma III.

Denotata con $\{B_r\}_r$ una successione di aperti di $\mathcal{B}_n$ tale che:

$$B_{r-1} \subseteq B_r \subseteq \Omega \qquad \forall r \in N\,,$$
$$\lim_r \operatorname{mis}(\Omega - B_r) = 0\,,$$

dal Lemma V segue $\forall r \in N$

$$\begin{aligned} \Gamma^-(\sigma_{B_r}) \lim_q F_{h_q}(B_r, u) \leqslant F(\Omega, u) \leqslant \\ \leqslant \Gamma^-(\sigma'_{B_r}) \lim_q F_{h_q}(B_r, u) + s^p \int_{\Omega - B_r} (1 + |u| + |Du|)^p\,; \end{aligned} \tag{3.22}$$

da cui, passando al limite per $r \to +\infty$ si ha:

$$F(\Omega, u) = \lim_r F(B_r, u)\,, \tag{3.23}$$

e, per l'arbitrarietà di $\{B_r\}$, la (3.17).

Avendo così definito univocamente il funzionale $F(\Omega, u)$ per $\Omega \in Ap_n$, $u \in C^1(R^n)$, è facile verificare le (3.18), (3.19) che seguono rispettivamente dai Lemmi IV, V; e la (3.20) che segue dalla semicontinuità inferiore in $L^p(\Omega)$ del funzionale

$$u \to \int_\Omega |Du|^p\,.$$

DIM. (della Prop. I). Poichè, fissato $B \in \mathcal{B}_n$ i funzionali

$$u \in C^1(R^n) \to \sqrt[p]{\int_B f_h^p(x, u, Du)}$$

sono equilipschitziani rispetto alla metrica d_B (cfr. § 1), dalla numerabilità di $\mathcal{B}_n$, per il Teor. (3.7) e la Prop. (1.10) di [7], esiste un'estratta $\{f_{j_h}\}_h$ da $\{f_h\}_h$ che verifica le ipotesi del Lemma VI.

Dal Teor. (3.6) di [7] segue che è soddisfatta anche la G_3) del § 2, e perciò l'asserto.

§ 4. – Allo scopo di dimostrare il Teorema 1 del § 1 basta tener conto della Prop. 1 del § 3, del Lemma II del § 2 e della seguente

PROPOSIZIONE II. *Se per un $\Omega \in Ap_n$ ed una $u \in C^1(R^n)$ valgono le uguaglianze*

$$F(\Omega, u) = \Gamma^-(\sigma_\Omega) \lim_h F_h(\Omega, u) = \Gamma^-(\sigma'_\Omega) \lim_h F_h(\Omega, u) , \tag{4.1}$$

allora si ha anche:

$$F(\Omega, u) = \Gamma^-(\tau_\Omega) \lim_h F_h(\Omega, u) . \tag{4.2}$$

DIM. Evidentemente basta dimostrare che esistono delle funzioni $w_h \in C^1(R^n)$ tali che:

$$\lim_h \tau_\Omega(w_h, u) = 0 , \tag{4.3}$$

$$\sqrt[p]{F(\Omega, u)} \geqslant \limsup_h \sqrt[p]{F_h(\Omega, w_h)} . \tag{4.4}$$

A tale scopo siano $\{\psi_h\}_h$ delle funzioni di classe $C^1(R^n)$, esistenti per le (4.1), tali che

$$\varrho_h^2 = \sigma'_\Omega(\psi_h, u) \to 0 \qquad (\text{per } h \to \infty) , \tag{4.5}$$

$$\sqrt[p]{F(\Omega, u)} = \lim_h \sqrt[p]{F_h(\Omega, \psi_h)} . \tag{4.6}$$

Posto, per ogni $h \in N$

$$\Omega_h = \{x \in \Omega : |\psi_h(x) - u(x)| > \varrho_h\} ,$$

dalla (4.5) segue:

$$\text{mis}(\Omega_h) < \varrho_h^p . \tag{4.7}$$

Poichè su $\Omega \in Ap_n$ sono limitate le derivate prime delle funzioni di classe $C^1(R^n)$, esisterà una successione $\{\varepsilon_h\}_h$ di numeri positivi tale che:

$$\lim_h \varepsilon_h = 0 , \tag{4.8}$$

tale che, posto:

$$\Sigma_h = \{x \in \Omega_h ;\ \varrho_h < |\psi_h(x) - u(x)| < \varrho_h + \varepsilon_h\} \tag{4.9}$$

risulti per ogni $h \in N$:

$$\sqrt[p]{\int_{\Sigma_h} |D\psi_h - Du|^p} < \varrho_h . \tag{4.10}$$

Sia ora $\{\beta_h\}$ una successione di funzioni di $R \to R$ tali che (cfr. [6]),

$$\begin{cases} \beta_h \in C^1(R) & 0 \leqslant \beta_h' \leqslant 1 \\ \beta_h(t) = t & \text{per } |t| \leqslant \varrho_h \\ \beta_h'(t) = 0 & \text{per } |t| \geqslant \varrho_h + \varepsilon_h \end{cases} \tag{4.11}$$

Posto:

$$w_h = u + \beta_h(\psi_h - u) \tag{4.12}$$

si ha evidentemente:

$$\lim_h \tau_\Omega(w_h, u) = 0 . \tag{4.13}$$

Dalle (4.11), (4.12) segue per la $a)$ del § 1:

$$\begin{aligned} \sqrt[p]{F_h(\Omega, w_h)} - \sqrt[p]{F_h(\Omega, \psi_h)} &\leqslant \sqrt[p]{F_h((\Omega - \Omega_h) \cup \Sigma_h, w_h)} - \\ &- \sqrt[p]{F_h((\Omega - \Omega_h) \cup \Sigma_h, \psi_h)} + \sqrt[p]{F_h(\Omega_h - \Sigma_h, w_h)} \leqslant \\ &\leqslant s \sqrt[p]{\int_{\Omega_h - \Sigma_h} (1 + |w_h| + Dw_h|)^p} + \sqrt[p]{\int_{\Sigma_h} |f_h(x, w_h, Dw_h) - f_h(x, \psi_h, D\psi_h)|^p} . \end{aligned} \tag{4.14}$$

Ora, dalle (4.5), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12) e dalla $b)$ del § 1 segue

$$\sqrt[p]{\int_{\Sigma_h} |f_h(x, w_h, Dw_h) - f_h(x, \psi_h, D\psi_h)|^p} \leqslant s(\varrho_h^2 + \varrho_h) . \tag{4.15}$$

Inoltre evidentemente si ha:

$$\sqrt[p]{\int_{\Omega_h-\Sigma_h}(1+|w_h|+|Dw_h|)^p}\leqslant\sqrt[p]{\int_{\Omega_h-\Sigma_h}(1+\varrho_h+\varepsilon_h+|u|+|Du|)^p}\,. \tag{4.16}$$

Pertanto, essendo $|u|$ e $|Du|$ funzioni limitate in Ω che è limitato, dalle (4.5), (4.7), (4.8), (4.14), (4.15), (4.16) segue subito la (4.4).

§ 5. – In questo numero vogliamo mettere in evidenza alcune proprietà dei Γ^- limiti di funzionali di classe $\mathcal{G}^p_{n,s}$ che verranno utilizzate nel seguito.

Si ha intanto la

PROPOSIZIONE III. *Se $f_h\in\mathcal{F}_{n,s}$ per $h\in N$, e per ogni $p\geqslant 1$ esiste una funzione $f_{(p)}\in\mathcal{F}_{n,s}$ tale che $\forall\Omega\in Ap_n$, $u\in C^1(R^n)$*

$$\int_\Omega f^p_{(p)}(x,u,Du)=\Gamma^-\big(L^p(\Omega)\big)\lim_h\int_\Omega f^p_h(x,u,Du)\ ;$$

allora, la funzione:

$$p\to f_{(p)}\in\mathcal{F}_{n\,s}$$

è monotona crescente.

DIM. Sia $1\leqslant p\leqslant q$ e, fissato $\Omega\in Ap_n$, si osservi che la topologia generata su $C^1(R^n)$ dalla metrica di $L^p(\Omega)$ è meno fine di quella generata dalla metrica di $L^q(\Omega)$ e inoltre vale la relazione:

$$\sqrt[p]{\frac{1}{\operatorname{mis}(\Omega)}\int_\Omega f^p_h(x,u,Du)}\leqslant\sqrt[q]{\frac{1}{\operatorname{mis}(\Omega)}\int_\Omega f^q_h(x,u,Du)}$$

che evidentemente si conserva al Γ^- limite.

Sia α una delle distanze estese σ_Ω, σ'_Ω, τ_Ω introdotte nel § 1, è facile dimostrare la seguente:

PROPOSIZIONE IV. *Se $f_h\in\mathcal{F}_{n,s}$ per ogni $h\in N$, e $f_h=f_h(x,w)$ non dipende da u; se $\forall\Omega, u$*

$$F(\Omega,u)=\Gamma^-(\alpha)\lim_h\int_\Omega f^p_h(x,Du)\,,$$

allora esiste una $f\in\mathcal{F}_{n,s}$, $f=f(x,w)$ indipendente da u, tale che:

$$F(\Omega,u)=\int_\Omega f^p(x,Du)\,. \tag{5.1}$$

DIM. Posto:

$$F_h(\Omega,u) = \int_\Omega f_h^p(x, Du)$$

si verifica facilmente che la condizione

$$F_h(\Omega, u + c) = F_h(\Omega, u) \quad \forall c \in R, \ u \in C^1(R^n), \ \Omega \in Ap_n \tag{5.2}$$

si conserva nel passaggio al Γ^- limite.

Infatti per Ω fissato, se $u \in C^1(R^n)$ e $\lim_h \alpha(w_h, u) = 0$ per una successione w_h tale che inoltre:

$$F(\Omega, u) = \lim_h F_h(\Omega, w_h) ;$$

poichè $w_h + c \xrightarrow{\alpha} u + c$, si ha

$$F(\Omega, u + c) \leqslant \liminf_h F_h(\Omega, w_h + c) = F(\Omega, u) .$$

Analogamente si ragiona per l'altra disuguaglianza.

Poichè per il Teorema 1 del § 1 sappiamo che esiste $f \in \mathcal{F}_{n,s}$ tale che:

$$F(\Omega, u) = \int_\Omega f^p(x, u, Du) ,$$

resta da provare, per ottenere la (5.1), che esiste un sottoinsieme M di R^n tale che $\text{mis}(M) = 0$ e tale che $\forall x \in R^n - M$, $\forall u$, $y \in R$, $\forall w \in R^n$ sia:

$$f(x, u + y, w) = f(x, u, w) .$$

Allora, detta $\{y_h\}_h$ la successione dei numeri razionali e $\{p_h\}_h$ quella dei polinomi reali di n variabili reali a coefficienti razionali, evidentemente esiste $M \subseteq R^n$ con $\text{mis}(M) = 0$ tale che $\forall h \in N$ e $\forall x \in R^n - M$:

$$f\big(x, p_h(x) + y_h, Dp_h(x)\big) = f\big(x, p_h(x), Dp_h(x)\big) .$$

Per la densità in R^{n+1} dell'insieme descritto dal punto $\big(x, p_h(x), Dp_h(x)\big)$ per x fissato in $R^n - M$ al variare di $h \in N$; e per la b) del § 1, si ha la (5.1).

§ 6. In questo paragrafo, rifacendoci alla teoria astratta della Γ^- convergenza come svolta in [7] cominciamo col fare alcune osservazioni nel caso che lo spazio topologico ambiente X sia anche uno spazio vettoriale sui reali.

Tali considerazioni verranno immediatamente applicate a casi concreti di integrali del calcolo delle variazioni nell'ordine di idee dei numeri precedenti.

In particolare, denotando con $M(n, s)$ l'insieme delle matrici di funzioni $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(R^n)$ tali che:

$$|w|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x) w_i w_j \leq s^2 |w|^2$$

proveremo (Prop. VII) che l'insieme $\mathcal{C}_{ns}$ dei funzionali del tipo:

$$F(\Omega, u) = \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} D_i u D_j u$$

con $a_{ij} \in M(n, s)$ costituisce una sottoclasse chiusa di $\mathcal{G}^2_{n,s}$ rispetto alla $\Gamma^-(L^2(\Omega))$ convergenza.

Sia poi $\mathcal{E}_n(s)$ l'insieme degli operatori differenziali uniformemente ellittici del 2° ordine del tipo

$$A = -\sum_{i,j} D_i(a_{ij} D_j) \qquad a_{ij} \in M(n, s)\,.$$

Ricordiamo che (cfr. ad es. [8]) se $\Omega \in Ap_n$, A_h, $A \in \mathcal{E}_n(s)$, si ha:

$$A_h \xrightarrow{G} A \qquad \text{su } \Omega$$

se $\forall \lambda \geq 0$, $\forall \phi \in L^2(\Omega)$, dette u_h, u le soluzioni dei problemi di Dirichlet:

$$\begin{aligned} A_h u_h + \lambda u_h &= \phi \\ A u \ \ + \lambda u \ &= \phi \end{aligned} \qquad u_h,\, u \in H^1_0(\Omega)\,,$$

si ha:

$$u_h \to u \qquad \text{in } L^2(\Omega)\,.$$

Proveremo il seguente:

TEOREMA 2. *Se* $a_{ij,h}$, $a_{ij} \in M(n, s)$ *e si ha:* $\forall u \in C^1(R^n)$, $\Omega \in Ap_n$

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} D_i u D_j u = \Gamma^-(L^2(\Omega)) \lim_h \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij,h} D_i u D_j u\,, \tag{6.1}$$

allora $\forall \Omega \in Ap_n$ *si ha:*

$$A_h = -\sum_{i,j} D_i(a_{ij,h} D_j) \xrightarrow{G} A = -\sum_{i,j} D_i(a_{ij} D_j) \qquad \textit{su } \Omega\,.$$

Sia dunque X uno spazio vettoriale sui reali e α una topologia su X tale che ogni punto x abbia una base numerabile di intorni ed inoltre valga la proprietà:

$$(*)\qquad x_h \xrightarrow{\alpha} x,\quad y_h \xrightarrow{\alpha} y\,;\qquad a, b \in R \Rightarrow ax_h + by_h \xrightarrow{\alpha} ax + by\,.$$

Siano $F_h, F\colon X \to \bar{R}$; ricordiamo (cfr. [7]) che se $u \in X$, si ha:

$$F(u) = \Gamma^-(\alpha) \lim_h F_h(u) \tag{6.2}$$

se e solo se valgono le condizioni

c_1) Se $u_h \in X$ e $u_h \xrightarrow{\alpha} u$, allora $F(u) \leqslant \liminf_h F_h(u_h)$

c_2) Esiste $u_h \xrightarrow{\alpha} u$ tale che $F(u) = \lim_h F_h(u_h)$.

Proposizione V. *Sia F_h una successione di forme quadratiche semidefinite positive estese in X, ossia tali che, detto O_X lo zero di X, risulti:*

$$F_h(O_X) = 0\,;\qquad F_h(x) \geqslant 0,\quad F_h(\lambda x) = \lambda^2 F_h(x)\qquad 0 < |\lambda| < \infty \tag{6.3}$$

$$F_h(x + y) + F_h(x - y) = 2F_h(x) + 2F_h(y)\qquad \forall x, y \in X\,. \tag{6.4}$$

Se $F(x) = \Gamma^-(\alpha) \lim_h F_h(x)$, $\forall x \in X$, allora anche F è una forma quadratica dello stesso tipo delle F_h.

Dim. Cominciamo con l'osservare che dalla c_2) e dalla (6.3) segue subito che $F(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in X$, per cui la condizione $F(O_X) = 0$ è ovvia conseguenza di c_1).

Fissato $\lambda \in \mathbf{R} - \{0\}$ e $x \in X$ sia $x_h \xrightarrow{\alpha} x$ tale che

$$F(x) = \lim_h F_h(x_h)\,.$$

Poichè $\lambda x_h \xrightarrow{\alpha} \lambda x$, si ha anche

$$F(\lambda x) \leqslant \liminf_h F_h(\lambda x_h) = \lambda^2 F(x)\,.$$

Analogamente si prova l'altra disuguaglianza, per cui $F(\lambda x) = \lambda^2 F(x)$.

Per ogni coppia $x, y \in X$ siano $x_h \xrightarrow{\alpha} x$ e $y_h \xrightarrow{\alpha} y$ tali che

$$F(x) = \lim_h F_h(x_h)\,,\qquad F(y) = \lim_h F_h(y_h)\,.$$

Allora dalla (6.1) segue:

$$F(x+y)+F(x-y)\leqslant \liminf_h F_h(x_h+y_h)+\liminf_h F_h(x_h-y_h)\leqslant$$
$$\leqslant 2F(x)+2F(y)\,.$$

Allo stesso modo si prova l'altra disuguaglianza.

Sussiste infine la seguente proposizione di evidente dimostrazione.

PROPOSIZIONE VI. *Se* $F=\Gamma^{-}(\alpha)\lim_h F_h$; $g: X\to R$ *è una funzione* α*-continua, allora*:

$$F+g=\Gamma^{-}(\alpha)\lim_h (F_h+g)\,.$$

Siano ora $a_{ij,h}\in M(n,s)$ e poniamo $\forall\Omega\in Ap_n$, $u\in C^1(R^n)$:

$$F_h(\Omega,u)=\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij,h}D_i u D_j u\,. \tag{6.5}$$

Si ha la:

PROPOSIZIONE VII. *Se* $\forall\Omega\in Ap_n$, $u\in C^1(R^n)$ *si ha*:

$$F(\Omega,u)=\Gamma^{-}\big(L^2(\Omega)\big)\lim_h F_h(\Omega,u)\,, \tag{6.6}$$

allora esistono $a_{ij}\in M(n,s)$ *tali che*:

$$F(\Omega,u)=\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}D_i u\, D_j u\,. \tag{6.7}$$

DIM. Poichè $\forall\Omega\in Ap_n$, il funzionale $u\to F(\Omega,u)$ è una forma quadratica semidefinita positiva del tipo

$$F(\Omega,u)=\int_\Omega f(x,Du)\,, \tag{6.8}$$

con $\sqrt{f}\in\mathcal{F}_{ns}$ (cfr. le Prop. IV, V e il Teor. 1), resta da dimostrare che per quasi ogni $x\in R^n$ e per ogni $w,w'\in R^n$ si ha:

$$f(x,w+w')+f(x,w-w')=2f(x,w)+2f(x,w') \tag{6.9}$$

$$f(x,0)=0\,,\qquad f(x,\lambda w)=\lambda^2 f(x,w)\qquad \text{per } 0<|\lambda|<\infty\,. \tag{6.10}$$

Da tali condizioni segue infatti che per quasi ogni $x \in R^n$, $\forall w \in R^n$:

$$f(x, w) = \sum_{i,j} a_{ij}(x) w_i w_j$$

per certe funzioni $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(R^n)$.

Evidentemente, grazie alla *b*) del § 1, basterà provare la (6.9) per w, w' a coordinate razionali.

Poichè l'insieme M dei punti di Lebesgue comuni a tutte le funzioni del tipo:

$$x \to \langle w, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \qquad (w_i \text{ razionali})$$

ha complementare di misura nulla, fissato $x_0 \in M$, applicando l'uguaglianza:

$$F(\Omega, u + u') + F(\Omega, u - u') = 2F(\Omega, u) + 2F(\Omega, u')$$

con F data dalla (6.8) alle sfere Ω_ϱ di centro x_0 e raggio $\varrho > 0$, e alle funzioni:

$$u(x) = \langle w, x \rangle , \qquad u'(x) = \langle w', x \rangle$$

con w, w' a coordinate razionali, si ha subito la (6.9) per $x = x_0$.

Analogamente si provano le rimanenti uguaglianze.

Passiamo infine alla:

DIM. (del Teor. 2). Fissato $\Omega \in Ap_n$, poniamo, per ogni $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$:

$$G_h(u) = \sqrt{\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij,h} D_i u D_j u} \,, \tag{6.11}$$

$$G(u) = \sqrt{\int_\Omega \sum_{i\,j} a_{ij} D_i u D_j u} \,, \tag{6.12}$$

e dimostriamo che:

$$G(u) = \Gamma^-\big(L^2(\Omega)\big) \lim_h G_h(u) \qquad \forall u \in H_0^{1,2}(\Omega) \,. \tag{6.13}$$

Poichè i funzionali in (6.11) sono equilipschitziani su $H_0^{1,2}(\Omega)$ munito della sua abituale metrica, dai Teor. 3.6, 3.7 di [7] segue l'esistenza di una estratta $\{G_{j_h}\}_h$ dalla successione $\{G_h\}_h$ e di una funzione J lipschitziana su $H_0^{1,2}(\Omega)$ tale che:

$$J(u) = \Gamma^-(L^2(\Omega)) \lim_h G_{j_h}(u) \qquad \forall u \in H_0^{1,2}(\Omega) .$$

Inoltre, posto:

$$\tilde{G}_h(u) = \begin{cases} G_{j_h}(u) & \forall u \in C^1(R^n) , \\ +\infty & \forall u \in H_0^{1,2}(\Omega) - C^1(R^n) \end{cases} \tag{6.14}$$

si ha (cfr. Prop. 1.5 di [7]):

$$J(u) = \Gamma^-(L^2(\Omega)) \lim \tilde{G}_h(u) \qquad \forall u \in H_0^{1,2}(\Omega) . \tag{6.15}$$

Ma dalle (6.1), (6.14), (6.15) segue subito (cfr. [28]):

$$G(u) = J(u)$$

per ogni $u \in C^1(R^n)$ ed anche $\forall u \in H_0^{1,2}(\Omega)$, per motivi di lipschtzianità. Da ciò e dall'arbitrarietà dell'estratta segue la (6.13).

A questo punto, posto $F(u) = G^2(u)$, $F_h(u) = G_h^2(u)$, dalla Prop. 1.10 di [7] e dalla (6.13) segue:

$$F(u) = \Gamma^-(L^2(\Omega)) \lim_h F_h(u) \qquad \forall u \in H_0^{1,2}(\Omega) . \tag{6.16}$$

Posto poi $\forall \lambda \geq 0$, $\forall \phi \in L^2(\Omega)$:

$$g(u) = \int_\Omega (\lambda u^2 - 2\phi u) ,$$

grazie alla Prop. 1.5 di [7] ed alla Prop. VI si ha, tenendo conto della (6.16):

$$F(u) + g(u) = \Gamma^-(L^2(\Omega)) \lim_h (F_h(u) + g(u)) \qquad \forall u \in H_0^{1,2}(\Omega) .$$

Dal Corollario 2.4 di [7] e dalla condizione di uniforme coercività degli F_h, F consegue che, posto:

$$M_h(\phi) = \operatorname*{Min}_{H_0^{1,2}(\Omega)} (F_h(u) + g(u)) ,$$

$$M(\phi) = \operatorname*{Min}_{H_0^{1,2}(\Omega)} (F(u) + g(u)),$$

si ha:

$$M(\phi) = \lim_h M_h(\phi) .$$

Inoltre, dette u_h, u le soluzioni dei problemi di Dirichlet su Ω:

$$A_h u_h + \lambda u_h = \phi \qquad u_h \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

$$A\ u + \lambda u = \phi \qquad u \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

si ha, sempre per il Corollario 2.4 di [7]:

$$u_h \to u \qquad \text{in } L^2(\Omega) .$$

Ossia l'asserto.

BIBLIOGRAFIA

[1] I. BABUSKA, *Solutions of Interface Problem by Homogeneization, I and II*, Inst. for Fluid Dynamics, Univ. of Maryland (1974).

[2] A. BENSOUSSAN - J. L. LIONS - G. PAPANICOLAOU, *Some asymptotic results for solutions of variational inequalities with highly oscillatory periodic coefficients*, in corso di stampa.

[3] L. BOCCARDO - I. CAPUZZO DOLCETTA, *G-convergenza e problema di Dirichlet unilaterale*, in corso di stampa su Boll. U.M.I.

[4] L. BOCCARDO - P. MARCELLINI, *Sulla convergenza delle soluzioni di disequazioni variazionali*, in corso di stampa su Ann. Mat. Pura Appl.

[5] L. CARBONE, *Sur la Γ^--convergence des intégrales du type de l'énergie sur des fonctions á gradient borné*, in corso di stampa.

[6] E. DE GIORGI, *Sulla convergenza di alcune successioni d'integrali del tipo dell'area*, Rend. Matematica, **8** (1975), pp. 277-294.

[7] E. DE GIORGI - T. FRANZONI, *Su un tipo di convergenza variazionale*, in corso di stampa su Atti Accad. Naz. dei Lincei.

[8] E. DE GIORGI - S. SPAGNOLO, *Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del 2° ordine*, Boll. U.M.I., **8** (1973), pp. 391-411.

[9] J. L. JOLY, *Une famille de topologies sur l'ensemble des fonctions convexes pour lesquelles la polarité est bicontinue*, J. Math. Pure Appl., **52** (1973), pp. 421-441.

[10] P. MARCELLINI, *Su una convergenza di funzioni convesse*, Boll. U.M.I., **8** (1973), pp. 137-158.

[11] P. MARCELLINI, *Un teorema di passaggio al limite per la somma di funzioni convesse*, Boll. U.M.I., **11** (1975), pp. 107-124.

[12] A. MARINO - S. SPAGNOLO, *Un tipo di approssimazione dell'operatore $\sum D_i(a_{ij}D_j)$ con operatori $\sum D_j(\beta D_j)$*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **23** (1969) pp., 657-673.

[13] U. MOSCO *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities* Advances in Math., **3** (1969), pp. 510-585.

[14] E. SANCHEZ-PALENCIA, *Solutions périodiques par rapport aux variables d'espace et applications*, C. R. Acad. Sc. Paris **271** (1970), pp. 1129-1132.

[15] E. SANCHEZ-PALENCIA, *Equations aux dérivées partielles dans un type de milieux hétérogènes*, C. R. Acad. Sc. Paris, **272** (1971), pp. 1410-1411.

[16] E. SANCHEZ-PALENCIA, *Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes*, Int. J. Engng. Sci., **12** (1974), pp. 331-351.

[17] C. SBORDONE, *Alcune questioni di convergenza per operatori differenziali del 2° ordine*, Boll. U.M.I., **10** (1974), pp. 672-682.

[18] C. SBORDONE, *Sulla G-convergenza di equazioni ellittiche e paraboliche*, Ricerche di Mat., **24** (1975), pp. 76-136.

[19] P. K. SENATOROV, *The stability of the eigenvalues and eigenfunctions of a Sturm-Liouville problem*, Diff. Urav., **7** (1971), pp. 1667-1671.

[20] S. SPAGNOLO, *Sul limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calore*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **21** (1967), pp. 657-699.

[21] S. SPAGNOLO, *Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **22** (1968), pp. 577-597.

[22] S. SPAGNOLO, *Some convergence problems*, in corso di stampa su Symposia Math. (Conv. Alta Matem., Roma, marzo 1974).

[23] S. SPAGNOLO, *Convergence in energy for elliptic operators*, Symp. Numerical Solutions of Partial Diff. Equations, Maryland, May 1975, di prossima pubblicazione.

[24] L. TARTAR, *Problèmes de contrôle des coefficients dans les équations aux dérivées partielles*, in corso di stampa.

[25] T. ZOLEZZI, *On convergence of minima*, Boll. U.M.I., **8** (1973).

[26] T. ZOLEZZI, *Su alcuni problemi fortemente ben posti di controllo ottimo*, Ann. Mat. Pura Appl., **95** (1973), pp. 147-160.

[27] E. DE GIORGI, *Γ-convergenza e distanze compatibili*, di prossima pubblicazione.

[28] T. FRANZONI, *Γ-convergenza in spazi topologici*, di prossima pubblicazione.