ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

P. GRISVARD

Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polyèdre

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 2, nº 3 (1975), p. 359-388

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1975_4_2_3_359_0>

Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polyedre.

P. GRISVARD (*)

Sunto. – *Estensione al caso di più dimensioni dei risultati ottenuti in* [4]: *cioè studio della regolarità della soluzione del problema di Dirichlet non omogeneo in un dominio tridimensionale con frontiera poliedrale.*

Introduction.

Dans Grisvard [4] on a établi le résultat suivant où Ω désigne un ouvert borné de R^2 à frontière polygonale dont les ouvertures des angles aux sommets (vers l'intérieur de Ω) sont notées $\omega_1, \ldots, \omega_N$. L'opérateur de Laplace Δ considéré de $H^{s+2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$ a une image fermée si et seulement si aucun des ω_j n'est de la forme

$$\frac{l\pi}{s+1}, \quad l \in N,\ l \neq s+1 \ (^{**}) .$$

Lorsque cette condition est réalisée, l'image de Δ est de codimension finie égale à

$$\sum_{j=1}^{N} \nu_s(\omega_j)$$

où $\nu_s(\omega)$ est le plus grand entier $k < (\omega/\pi)(s+1)$. En particulier Δ est surjectif si on a:

$$\omega_j < \frac{\pi}{s+1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N .$$

(*) Université de Nice.
(**) Ici s est entier $\geqslant 0$.
Pervenuto alla Redazione il 18 Settembre 1974.

On remarque que pour $s = 0$, la condition est que Ω soit convexe; pour $s = 1$, la condition est $\omega_j < \pi/2$, qui n'est vérifiée que par un triangle dont tous les angles sont $< \pi/2$. Enfin, pour $s > 2$, la condition n'est jamais vérifiée (elle le serait cependant si on admettait les polygônes curvilignes).

Dans ce travail on montrera que si Ω est un ouvert borné de R^3 à frontière polyèdrale dont les ouvertures des angles des dièdres (vers l'intérieur de Ω) sont notées $\omega_{j,k}$, le résultat correspondant au précédent s'énonce comme suit: Δ considéré de $H^{s+2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$ a une image fermée si et seulement si aucun des $\omega_{j,k}$ n'est de la forme:

$$\frac{l\pi}{s+1}, \quad l \in N, \ l \neq s+1 .$$

Lorsque cette condition est réalisée Δ est surjectif si on a:

$$\omega_{j,k} < \frac{\pi}{s+1}, \quad \forall j, k$$

et sinon l'image de Δ est de *codimension infinie*. C'est ce dernier phénomène qui différentie le cas polyédral du cas polygonal, à savoir que dans le cas polyèdral, si Δ n'est pas surjectif, il n'est pas non plus « à indice ».

Dans un autre travail (Grisvard [5]) consacré au cas où Ω a une frontière conique, on a aussi vu que Δ est soit surjectif, soit à indice lorsque son image est fermée; ceci conduit naturellement à la conjecture suivante: Si Δ de $H^{s+2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$ est à image fermée et non surjectif, alors l'image de Δ est de codimension finie si et seulement si l'ensemble des points non réguliers de $\Gamma = \partial\Omega$ est fini.

Il résulte entre autres du résultat énoncé plus haut que Δ est un isomorphisme de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$, dès que Ω est un polyèdre convexe. Comme on établit également une inégalité à priori correspondant à ce résultat, où on précise la dépendance des constantes par rapport à Ω, un procédé de passage à la limite typique des méthodes utilisées en analyse numérique permet d'étendre le résultat au cas où Ω est un convexe borné quelconque de R^3 (ou de R^n par les mêmes méthodes). Ce fait a déjà été prouvé dans Kadlec [8]. Les résultats de ce travail ont été annoncés dans une note (Grisvard [7]).

On a regroupé dans un paragraphe spécial (le § 2), les théorèmes concernant la régularité des dérivées secondes qui sont techniquement plus simples à établir et susceptibles d'extension au cas où Ω est seulement convexe, comme il a été indiqué plus haut.

Les paragraphes 3 et 4 conduisent à la démonstration des majorations à priori des dérivées d'ordre supérieur à deux; ces démonstrations sont différentes de celles de Grisvard [4] relatives au cas bidimensionnel, c'est pourquoi, on les a données en détail. Par contre, dans les paragraphes 5 et 6, dans un souci de brièveté, on n'a pas répété les démonstrations relatives au cas bidimensionnel, dont l'extension n'offre pas de difficulté.

1. – Expaces de Sobolev dans un polyedre.

Dans toute la suite on utilisera les notations suivantes: Ω est un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^3$ à frontière Γ polyèdrale, c'est-à-dire que $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N} \overline{\Gamma}_j$ où les Γ_j sont des ouverts plans, deux à deux disjoints, Ω étant d'un seul côté de Γ.

Les Γ_j sont donc des ouverts bornés à deux dimensions et à frontière polygonale. On notera $A_{j,k}$, l'arête commune à $\overline{\Gamma}_j$ et $\overline{\Gamma}_k$, c'est à dire que

$$A_{j,k} = \overline{\Gamma}_j \cap \overline{\Gamma}_k , \qquad 1 \leqslant j,\ k \leqslant N,\ j \neq k .$$

Enfin, on notera $\omega_{j,k}$ l'angle de Γ_j avec Γ_k (c'est à dire l'ouverture du dièdre formé par Γ_j et Γ_k) vers l'intérieur de Ω; on suppose bien sûr que $\omega_{j,k} \neq \pi$ (*).

Les ouverts Ω et Γ_j, $1 \leqslant j \leqslant N$ ayant évidemment la propriété du prolongement, on définit $H^s(\Omega)$ (resp. $H^s(\Gamma_j)$) comme espace des restrictions à Ω (resp. Γ_j) des fonctions de $H^s(\boldsymbol{R}^3)$ (resp. de $H^s(\pi_j)$ où π_j désigne le plan qui porte Γ_j) où comme d'habitude $H^s(\boldsymbol{R}^n)$ désigne l'espace des u telles que

$$(1 - \Delta)^{s/2} u \in L^2(\boldsymbol{R}^n) .$$

Pour s entier, il revient au même de définir $H^s(\Omega)$ comme espace des u telles que

$$D^\alpha u \in L^2(\Omega) , \qquad |\alpha| \leqslant s .$$

Tous ces espaces sont munis des normes usuelles.

L'opérateur de dérivation dans la direction normale à Γ_j (vers l'extérieur de Ω) sera noté N_j, $1 \leqslant j \leqslant N$.

Ceci posé, les traces sur la frontière des fonctions de $H^s(\Omega)$ sont caractérisées par le:

THEOREME 1.1. *L'application*

$$u \to \{(f_{j,k} = N_j^k u|_{\Gamma_j})_{k=0,1,\dots,s-1}\}_{j=1,2\dots N}$$

(*) On ne considérera bien entendu que les couples j, k tels que $A_{j,k} \neq \emptyset$.

est linéaire continue de $H^s(\Omega)$ *sur le sous-espace de*

$$\prod_{j=1}^{N}\left(\prod_{k=0}^{s-1} H^{s-k-\frac{1}{2}}(\Gamma_j)\right)$$

défini par les conditions suivantes: Pour tout opérateur différentiel L *à coefficients constants d'ordre* $\leqslant s-1$, *on a*:

$$\text{(i)}\quad \sum_{k=0}^{s-2} P_k f_{j,k} = \sum_{m=0}^{s-2} Q_m f_{m,l} \ \textit{sur}\ A_{j,l}\ \textit{si}\ d^\circ L \leqslant s-2,$$

$$\text{(ii)}\quad \int_{\Gamma_j}\int_{\Gamma_l} \left| \sum_{k=0}^{s-1} P_k f_{j,k}(x) - \sum_{m=0}^{s-1} Q_m f_{m,l}(y) \right|^2 \frac{dx\,dy}{\|x-y\|^3} < +\infty$$

si $d^\circ L = s-1$, *où* P_k, $0 \leqslant k \leqslant s-2$ (*resp.* Q_m, $0 \leqslant m \leqslant s-2$) *sont les opérateurs tangentiels à* Γ_j (*resp.* Γ_l) *tels que*:

$$L = \sum_{k=0}^{s-1} P_k N_j^k = \sum_{m=0}^{s-1} Q_m N_l^m ,$$

$1 \leqslant j, l \leqslant N$, $j \neq l$, $\bar{\Gamma}_j \cap \bar{\Gamma}_l \neq \emptyset$ (*s est entier*).

L'espace des opérateurs différentiels de degré $\leqslant s-1$ étant de dimension finie et le nombre des arêtes $A_{j,k}$ étant également fini, les conditions (i) et (ii) sont en nombre fini. Ce résultat est démontré dans Grisvard [6].

On définit également $H_0^s(\Omega)$ comme fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$; comme Ω a la propriété du segment (*), c'est aussi l'espace des restrictions à Ω des fonctions $u \in H^s(\boldsymbol{R}^3)$ nulles hors de $\bar{\Omega}$. En utilisant le théorème précédent, on voit que c'est aussi le sous-espace de $H^s(\Omega)$ défini par les conditions aux limites

$$N_j^k u|_{\Gamma_j} = 0\,, \quad k = 0, 1, \ldots, s-1,\ j = 1, 2, \ldots, N\,.$$

2. – Regularite des derivees secondes.

On considère $u \in H_0^1(\Omega)$ solution (variationnelle) de

$$\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega\,,$$

avec $f \in L^2(\Omega)$ donné. On se propose de chercher les conditions sur Ω pour que $u \in H^2(\Omega)$.

(*) Pour les propriétés de cones et de segments c.f. p. ex. Agmon [1].

On introduit l'espace $W(\Omega) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ où on cherche u. Pour commencer on démontre une inégalité a priori pour $u \in W(\Omega)$.

THÉORÈME 2.1. *On a*:

$$\|D_x^2 u\|^2 + \|D_y^2 u\|^2 + \|D_z^2 u\|^2 + 2\|D_x D_y u\|^2 + 2\|D_y D_z u\|^2 + \\ + 2\|D_z D_x u\|^2 \leqslant \|\Delta u\|^2 ,$$

pour $u \in W(\Omega)$.

(La norme sans indice sera toujours celle de $L^2(\Omega)$).

DÉMONSTRATION. On calcule explicitement $\|\Delta u\|^2$; il vient

$$\|\Delta u\|^2 = \|D_x^2 u + D_y^2 u + D_z^2 u\|^2$$
$$= \|D_x^2 u\|^2 + \|D_y^2 u\|^2 + \|D_z^2 u\|^2 + 2(D_x^2 u; D_y^2 u) + 2(D_y^2 u; D_z^2 u) + 2(D_z^2 u; D_y^2 u) .$$

Il suffit de montrer que

$$(D_x^2 u; D_y^2 u) = \|D_x D_y u\|^2$$

ainsi que des identités analogues pour chacun des autres couples de variables. Explicitement on a:

$$(D_x^2 u; D_y^2 u) = \int_\Omega D_x^2 u D_y^2 u \, dx\, dy\, dz .$$

On note Ω_z l'intersection de Ω avec le plan de hauteur z fixée; pour presque tout z fixé on a:

$$u \in H^2(\Omega_z) \cap H_0^1(\Omega_z)$$

et comme Ω_z est à frontière polygonale on a d'après les lemmes 2.2 et 2.3 de Grivard [4], l'identité

$$\int_{\Omega_z} D_x^2 u D_y^2 u \, dx\, dy = \int_{\Omega_z} |D_x D_y u|^2 \, dx\, dy$$

pour presque tout z fixé; on en déduit le résultat désiré en intégrant en z. C.Q.F.D.

L'existence d'une constante C_1 (dépendant de Ω) telle que

$$\|u\|^2 + \|D_x u\|^2 + \|D_y u\|^2 + \|D_z u\|^2 \leqslant C_1 \|\Delta u\|^2$$

résulte de la majoration variationnelle de u et de l'inégalité de Poincaré. On en déduit l'inégalité:

$$\|u\|_2 \leqslant C_2 \|\Delta u\|$$

où $\|u\|_2$ désigne la norme de u dans $H^2(\Omega)$.

Cette dernière inégalité montre que l'image de $W(\Omega)$ par Δ est fermée dans $L^2(\Omega)$. On désignera dans ce qui suit cette image par $R(\Omega)$ c'est à dire que:

$$R(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) ; f = \Delta u, u \in W(\Omega)\} .$$

On va chercher à déterminer $N(\Omega)$ l'orthogonal de $R(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. Il est clair que les éléments de $N(\Omega)$ sont des fonctions de $L^2(\Omega)$ qui sont harmoniques; elles vérifient aussi une condition de Dirichlet au bord de Ω grâce à ce qui suit: On désignera par $D(\Omega)$ l'espace

$$D(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) ; \Delta v \in L^2(\Omega)\} .$$

THÉORÈME 2.2. *$H^2(\Omega)$ est dense dans $D(\Omega)$. L'application*

$$v \mapsto v|_\Gamma$$

qui est bien définie pour $v \in H^2(\Omega)$ se prolonge par continuité en une application γ de $D(\Omega)$ dans $X(\Gamma)^*$ dual de l'espace $X(\Gamma)$ décrit par $\{N_1 u, \ldots, N_N u\}$ lorsque u décrit $W(\Omega)$. De plus on a:

$$(\Delta u ; v) - (u ; \Delta v) = \langle \{N_1 u, \ldots, N_N u\} ; \gamma v \rangle$$

pour $u \in W(\Omega)$ et $v \in D(\Omega)$.

DÉMONSTRATION. La densité de $H^2(\Omega)$ dans $D(\Omega)$ se démontre exactement comme dans Lions-Magenes [9] (§ 6, chap. II). La suite est une conséquence facile du fait (évident) que

$$u, v \mapsto (\Delta u ; v) - (u ; \Delta u)$$

est bilinéaire continu sur $W(\Omega) \times D(\Omega)$. C.Q.F.D.

On en déduit que si $v \in N(\Omega)$ on a $(\Delta u, v) = 0$ pour tout $u \in W(\Omega)$ et ceci est équivalent à $\gamma v = 0$ dans $X(\Gamma)^*$:

$$N(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) ; \Delta v = 0, \ ds \ \Omega, \ \gamma v = 0\} .$$

On va maintenant déterminer la dimension de $N(\Omega)$:

THÉORÈME 2.3.

(i) $N(\Omega) = \{0\}$ *si* Ω *est convexe.*

(ii) $\dim N(\Omega) = +\infty$ *si* Ω *est non convexe.*

La démonstration du point (i) est basée sur le

LEMME 2.4. $N(\Omega) \subseteq H^2(\Omega)$ *si* Ω *est convexe.*

DÉMONSTRATION. Il est bien connu que v est analytique dans Ω et jusque sur les parties planes de la frontière, (cela se démontre facilement par la méthode de réflexion); il reste donc à prouver que pour tout $x \in A$ $\left(\text{où } A = \bigcup_{j,k=1}^{N} \bar{A}_{j,k} \text{ est l'ensemble des sommets et des arêtes de } \bar{\Omega}\right)$, il existe un voisinage V de x dans $\boldsymbol{R}^n$ tel que $v \in H^2(\Omega \cap V)$ dès que $v \in N(\Omega)$. On translate le point x considéré en 0 (ce qui ne change rien au problème) et on suppose que V est une boule de centre 0 et de rayon R assez petit pour $\Omega \cap V$ soit un tronc de cône (de hauteur R) sous-tendu par l'ouvert G de S^2 (la sphère unité de $\boldsymbol{R}^3$):

$$\Omega \cap V = \{x = r\omega;\ 0 < r < R,\ \omega \in G\}\,.$$

Il est clair que G est à frontière lipschitzienne dans S^2; on considérera l'opérateur de Laplace-Beltrami L sur G avec conditions de Dirichlet (c'est à dire pour fixer les idées L réalisé comme isomorphisme de $H^1_0(G)$ sur $H^{-1}(G)$). La compacité de l'injection de $H^1_0(G)$ dans $L^2(G)$ permet de diagonaliser L dans $L^2(G)$: il existe une base orthonormale w_k, $k = 1, 2, \dots$ de $L^2(G)$ formée de fonctions propres de L donc telle que

$$\begin{cases} w_k \in H^1_0(G)\,, & k \geqslant 1 \\ Lw_k = -\lambda_k w_k\,, & k \geqslant 1 \end{cases}$$

avec $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \dots,\ \lambda_k \to +\infty$.

Soit alors $v \in N(\Omega)$, on a $v \in L^2(G)$ pour presque tout $r \in]0, R[$ fixé, donc

$$v(r\omega) = \sum_{k\geqslant 1} c_k(r) w_k(\omega)\,, \qquad 0 < r < R\,, \qquad \omega \in G$$

avec

$$c_k(r) = \int_G v(r\omega) w_k(\omega)\, d\omega\,.$$

On va calculer c_k en utilisant l'équation dont v est solution:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}Lv=0\,, \qquad 0<r<R,\ \omega\in G\,.$$

Du fait de la convexité de Ω on sait (cf. Appendice) que $w_k\in H^2(G)$, alors si $\varphi\in\mathcal{D}(]0,R[)$ il est facile de voir que la fonction u_k définie par

$$u_k(r\omega)=\begin{cases}\varphi(r)\,w_k(\omega) & 0<r<R,\ \omega\in G\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

est dans $W(\Omega)$. De la définition de $N(\Omega)$ il résulte que v est orthogonal à Δu_k pour tout k:

$$\int_0^R\!\!\int_G v(r\omega)\,\Delta u_k(r\omega)\,r^2\,dr\,d\omega=0$$

$$=\int_0^R\!\!\int_G v(r\omega)\left\{\varphi''(r)+\frac{2}{r}\varphi'(r)-\frac{\lambda_k}{r^2}\varphi(r)\right\}w_k(\omega)\,r^2\,dr\,d\omega$$

$$=\int_0^R\{r^2\varphi''(r)+2r\varphi'(r)-\lambda_k\varphi(r)\}\,c_k(r)\,dr$$

$$=\langle r^2c_k;\varphi''\rangle+2\langle rc_k;\varphi'\rangle-\lambda_k\langle c_k;\varphi\rangle$$

$$=\langle (r^2c_k)''-2(rc_k)'-\lambda_kc_k;\varphi\rangle$$

$$=\langle r^2c_k''+2rc_k'-\lambda_kc_k;\varphi\rangle$$

comme l'identité ci-dessus est vérifiée pour toute $\varphi\in\mathcal{D}(]0,R[)$ on a

$$r^2c_k''+2rc_k'-\lambda_kc_k=0 \text{ dans }]0,R[$$

au sens des distributions, donc

$$c_k(r)=a_kr^{\alpha_k}+b_kr^{\beta_k}$$

où

$$\alpha_k=\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda_k}}{2}\,, \qquad \beta_k=\frac{-1-\sqrt{1+4\lambda_k}}{2}$$

et a_k et b_k sont des constantes arbitraires telles que l'on ait

$$\int_G |v(r\omega)|^2 d\omega = \sum_{k\geqslant 1} |c_k(r)|^2, \qquad \text{p.p.}$$

donc

$$\int_{\Omega\cap V} |v(x)|^2 dx = \sum_{k\geqslant 1} \int_0^R |c_k(r)|^2 r^2 dr < +\infty$$

puisque $v \in L^2(\Omega)$. On voit immédiatement que $b_k = 0$ dès que:

$$\int_0^R r^{2+2\beta_k} dr = +\infty$$

c'est à dire que $\lambda_k \geqslant \frac{3}{4}$. Pour conclure on admet provisoirement le lemme suivant:

LEMME 2.5. *Si G est contenu dans une demi-sphére, on a $\lambda_1 > \frac{3}{4}$.*

Il en résulte immédiatement dans le cas où Ω est convexe que $b_k = 0$ pour tout k, donc

$$v(r\omega) = \sum_{k\geqslant 1} a_k r^{\alpha_k} w_k(\omega)$$

avec

$$\int_G |v(r\omega)|^2 d\omega = \sum_{k\geqslant 1} |a_k|^2 r^{2\alpha_k}$$

d'où

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \geqslant \sum_{k\geqslant 1} |a_k|^2 \int_0^R r^{2+2\alpha_k} dr = \sum_{k\geqslant 1} |a_k|^2 \frac{R^{3+2\alpha_k}}{3+2\alpha_k}.$$

Il est maintenant aisé de vérifier que $v \in H^2$ au voisinage de zéro, c'est à dire que

$$\int_0^\varrho \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right\|^2_{L^2(G)} r^2 dr + \int_0^\varrho \left\| \frac{\partial v}{\partial r} \right\|^2_{H^1(G)} dr + \int_0^\varrho \|v\|^2_{H^2(G)} \frac{dr}{r^2} < +\infty$$

pour ϱ assez petit. En effet on a $2\alpha_k > 1$ grâce au lemme 2.5 donc

$$\int_0^\varrho \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right\|^2_{L^2(G)} r^2 dr = \sum_{k\geqslant 1} |a_k|^2 \alpha_k^2(\alpha_k - 1)^2 \int_0^\varrho r^{2\alpha_k - 2} dr = \sum_{k\geqslant 1} |a_k|^2 \alpha_k^2 (\alpha_k - 1)^2 \frac{\varrho^{2\alpha_k - 1}}{2\alpha_k - 1}.$$

Compte tenu du fait que $\lambda_k \sim Kk$ lorsque $k \to +\infty$ (cf. p. ex. Courant-Hilbert [2]). On en déduit que

$$\alpha_k \sim \sqrt{Kk} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_k^2(\alpha_k-1)^2\,\varrho^{2\alpha_k-1}}{2\alpha_k-1} \sim \frac{(Kk)^{3/2}\varrho^{2\sqrt{Kk}}}{2}$$

et aussi

$$\frac{R^{3+2\alpha_k}}{3+2\alpha_k} \sim \frac{1}{2\sqrt{Kk}}\,R^{2\sqrt{Kk}}$$

donc pour $\varrho < R$ on a

$$\frac{\alpha_k^2(\alpha_k-1)^2\varrho^{2\alpha_k-1}}{2\alpha_k-1} = 0\left(\frac{R^{3+2\alpha_k}}{3+2\alpha_k}\right), \qquad k \to +\infty$$

ceci prouve la convergence de la dernière série écrite. Pour estimer les autres intégrales, on utilise l'inégalité à priori

$$\|w\|^2_{H^2(G)} \leqslant c\,\|Lw\|^2_{L^2(G)}$$

donc

$$\|u\|^2_{H^2(G)} \leqslant c \sum_{k\geqslant 1} |a_k|^2 r^{2\alpha_k} \lambda_k^2$$

et

$$\int_0^\varrho \|v\|^2_{H^2(G)} \frac{dr}{r^2} \leqslant c \sum_{k\geqslant 1} |a_k|^2 \lambda_k^2 \frac{\varrho^{2\alpha_k-1}}{2\alpha_k-1}$$

avec l'équivalence

$$\lambda_k^2 \frac{\varrho^{2\alpha_k-1}}{2\alpha_k-1} \sim \frac{(Kk)^{\frac{3}{2}}}{2}\,\varrho^{2\sqrt{Kk}}$$

d'où la convergence de la série. On majore la troisième intégrale de la même manière.

Démonstration du Lemme 2.5. On utilise les coordonnées sphèriques sur S^2:

$$\begin{cases} x = \sin\varphi\cos\theta \\ y = \sin\varphi\sin\theta \\ z = \cos\varphi \end{cases}$$

avec $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. La mesure $d\omega$ s'écrit alors

$$d\omega = |\sin\varphi|\, d\varphi\, d\theta$$

et l'opérateur de Laplace-Beltrami s'écrit

$$Lw = \frac{1}{\sin\varphi} D_\varphi(\sin\varphi D_\varphi w) + \frac{1}{\sin^2\varphi} D_\theta^2 w\,.$$

Comme G est contenu dans une demi-sphère on peut choisir les axes de coordonnées de manière que $G \subset G_\alpha$ où

$$G_\alpha = \{\omega \in S^2;\ 0 < \theta < \alpha\}$$

avec $\alpha < \pi$. D'après le résultat prouvé en appendice, L est autoadjoint dans $L^2(G)$ avec pour domaine $D_L = H^2(G) \cap H_0^1(G)$. On introduit aussi M fermeture de l'opérateur.

$$w \mapsto D_\theta^2 w$$

défini sur D_L. Il est clair que M est autoadjoint et que

$$L \leqslant M$$

dans le sens de l'ordre des opérateurs autoadjoints dans $L^2(G)$ car on a évidemment

$$(Lw;\, w) \leqslant (Mw;\, w)$$

pour tout $w \in D_L$. On en déduit que si $-\lambda_1$ est la plus grande valeur propre de L et $-\mu_1$ la plus grande valeur propre de M, alors $\lambda_1 \geqslant \mu_1$.

Un calcul élémentaire montre que $\mu_1 = \pi^2/\alpha^2$ donc

$$\lambda_1 \geqslant \frac{\pi^2}{\alpha^2} > 1$$

si $\alpha < \pi$. Ceci démontre le lemme 2.5.

Démonstration du Théorème 2.3. Point (i): A présent pour $v \in N(\Omega)$ on sait que

$$\begin{cases} v \in H^2(\Omega) \\ \gamma v = 0 \\ \Delta v = 0 \quad \text{dans } \Omega\,. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que l'opérateur γ défini par le théorème 2.2, restreint à $H^2(\Omega)$ coïncide avec l'opérateur usuel de traces sur $H^2(\Omega)$ donc $v \in W(\Omega)$ et l'unicité variationnelle implique que $v = 0$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.3. Point (ii): On raisonne par l'absurde en supposant que $\dim N(\Omega) = \nu < +\infty$. On choisit une arête non convexe d'ouverture $\alpha > \pi$ de Ω et par un choix convenable des axes de coordonnées, on peut supposer cette arête portée par l'axe Oz. On note Ω_0 l'intersection de Ω avec le plan $z = 0$; c'est un polygone plan non convexe et d'après Grisvard [4] on sait qu'il existe u_0 à support dans un voisinage de zéro, tel que

$$u_0 \in H_0^1(\Omega_0)\,, \qquad \Delta u_0 = f_0 \in L^2(\Omega_0) \qquad \text{et} \qquad u_0 \notin H^2(\Omega_0)\,.$$

Comme Ω est ouvert on peut choisir un intervalle $I = (a, b)$ tel que si $\varphi \in \mathfrak{D}(I)$ la fonction u définie par

$$u(x, y, z) = u_0(x, y)\varphi(z)$$

est à support dans Ω. On a donc $u \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\Delta u = f_0(x, y)\varphi(z) + u_0(x, y)\varphi''(z) = f\,.$$

Soit $\{v_1, \dots, v_\nu\}$ une base de $N(\Omega)$; on sait que si

$$\langle f; v_j\rangle = 0\,, \qquad j = 1, 2, \dots, \nu$$

alors $u \in H^2(\Omega)$ et si $\varphi \neq 0$ cela implique $u_0 \in H^2(\Omega_0)$ ce qui est impossible. Cependant on a évidemment $\langle f; v_j\rangle = 0$ ssi $\langle \varphi, F_j\rangle = 0$ où F_j est la distribution définie par

$$F_j(z) = \int_{\Omega_z} f_0(x, y)v_j(x, y, z)\,dx\,dy + D_z^2\int_{\Omega_z} u_0(x, y)v_j(x, y, z)\,dx\,dy$$

où Ω_z est l'intersection de Ω avec le plan de hauteur z. Il est clair que $\mathfrak{D}(I)$ étant de dimension infinie, on peut trouver $\varphi \neq 0$ telle que $\langle \varphi; F_j\rangle = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, \nu$, ce qui est contradictoire.

En particulier, il résulte du théorème 2.3 que Δ est un isomorphisme de $W(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$ dès que Ω est convexe puisque d'après le lemme 2.5, on a $\lambda_1 > \frac{3}{4}$ pour tout point de A. On peut en déduire le résultat suivant déjà démontré par Kadlec [8]:

THÉORÈME 2.6. *Soit Ω un ouvert convexe borné de $\mathbf{R}^n$ $(n = 2, 3)$ alors Δ est un isomorphisme de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION. On doit seulement prouver l'existence de $u \in H^2(\Omega) \cap \cap H_0^1(\Omega)$ solution de $\Delta u = f$ pour $f \in L^2(\Omega)$ donné puisque l'unicité (variationnelle) est connue. Pour cela on considère une suite croissante Ω_ν, $\nu = 1, 2, \dots$ d'ouverts à frontière polyédrale (polygonale si $n = 2$) telle que

$$\Omega = \bigcup_{\nu \geq 1} \Omega_\nu .$$

D'après ce qui précède, il existe $u_\nu \in H^2(\Omega_\nu) \cap H_0^1(\Omega_\nu)$ solution de

$$\Delta u_\nu = f \qquad \text{dans } \Omega_\nu .$$

De plus, d'après le théorème 2.1 et l'inégalité de Poincaré (qui est uniforme pour les Ω_ν) on a

$$\|u_\nu\|_{H^2(\Omega_\nu)} \leq c \|f\| , \qquad \nu = 1, 2, \dots$$

où c ne dépend pas de ν. On pose alors

$$\tilde{u}_\nu = \begin{cases} u_\nu & \text{dans } \Omega_\nu \\ 0 & \text{dans } \bar{\Omega}_\nu . \end{cases}$$

Du fait que $u_\nu \in H_0^1(\Omega_\nu)$, on a $\tilde{u}_\nu \in H^1(\boldsymbol{R}^n)$ et le support des $\tilde{u}_\nu$ est contenu dans $\bar{\Omega}$ pour tout ν. De plus on a

$$\|\tilde{u}_\nu\|_{H^1(\boldsymbol{R}^n)} \leq c \|f\| , \qquad \nu = 1, 2, \dots$$

et

$$\|D^2_{j,k} u_\nu\|_{L^2(\boldsymbol{R}^n)} \leq \|f\| , \qquad j, k \in \{1, \dots, n\} , \qquad \nu = 1, 2, \dots .$$

Comme $H^1(\boldsymbol{R}^n)$ et $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ sont des espaces de Hilbert, il existe $u \in H^1(\boldsymbol{R}^n)$ à support dans $\bar{\Omega}$ et $v_{j,k} \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ tels que (quitte à remplacer Ω_ν par une sous-suite)

$$\begin{array}{llll} \tilde{u}_\nu \rightharpoonup u & \text{dans} & H^1(\boldsymbol{R}^n) & \\ \widetilde{D^2_{j,k} u_\nu} \rightharpoonup v_{j,k} & \text{dans} & L^2(\boldsymbol{R}^n) , & j, k \in \{1, 2, \dots, n\} . \end{array}$$

Il est clair que $u \in H_0^1(\Omega)$ car Ω étant convexe donc à frontière lipschitzienne, $H_0^1(\Omega)$ s'identifie au sous-espace de $H^1(\boldsymbol{R}^n)$ des u à support dans $\bar{\Omega}$ (ceci résulte par exemple de Gagliardo [3] ou Nécas [10]). On a aussi

$\Delta u = f$ dans Ω car pour $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, il existe ν_0 tel que Ω_{ν_0} contienne le support de φ et par conséquent on a:

$$\begin{aligned}\langle \Delta u; \varphi\rangle = \langle u; \Delta\varphi\rangle &= \int_\Omega u\,\Delta\varphi\,dx\\ &= \lim_{\nu\to\infty} \int_\Omega \tilde{u}_\nu \Delta\varphi\,dx = \lim_{\nu\to\infty}\int_{\Omega_\nu} u_\nu \Delta\varphi\,dx\\ &= \lim_{\nu\to\infty}\int_{\Omega_\nu} \Delta u_\nu\,\varphi\,dx = \langle f, \varphi\rangle\end{aligned}$$

Enfin $v_{j,k} = D_{j,k} u$, ce qui prouve que $u \in H^2(\Omega)$; en effet

$$\begin{aligned}\langle D^2_{j,k} u; \varphi\rangle = \langle u; D^2_{j,k}\varphi\rangle &= \lim_\infty \langle \tilde{u}_\nu; D^2_{j,k}\varphi\rangle\\ &= \lim_{\nu\to\infty}\int_{\Omega_\nu} u_\nu D^2_{j,k}\varphi\,dx = \lim_{\nu\to\infty}\int_{\Omega_\nu} D^2_{j,k} u_\nu\,\varphi\,dx\\ &= \lim_{\nu\to\infty}\langle \widetilde{D^2_{j,k}u_\nu}; \varphi\rangle = \langle v_{j,k}; \varphi\rangle\,.\end{aligned}$$

Le théorème 2.6 est ainsi complètement démontré.

3. – Etude d'un espace fonctionnel.

Pour étendre les résultats précédents au cas des dérivées d'ordre supérieur à 2, on est conduit à considérer l'espace suivant qui généralise l'espace $W(\Omega)$ introduit au § 2: Pour s entier $\geqslant 0$ on pose

$$W_s(\Omega) = \{u \in H^{s+2}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega);\ \Delta u \in H^s_0(\Omega)\}\ ;$$

cet espace est fermé dans $H^{s+2}(\Omega)$, c'est pourquoi on le munit de la norme induite par $H^{s+2}(\Omega)$. Il sera utile de connaître les traces de cet espace: A priori, d'après le théorème 1.1 pour $u \in H^{s+2}(\Omega)$, on peut considérer les fonctions

$$f_{j,k} = N^k_j u|_{\Gamma_j} \in H^{s-k+\frac{3}{2}}(\Gamma_j)\,,\qquad 0 \leqslant k \leqslant s+1,\ 1 \leqslant j \leqslant N\,.$$

L'hypothèse $u \in H^1_0(\Omega)$, implique $f_{j,0} = 0$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Ensuite la condition $\Delta u \in H^s_0(\Omega)$ s'écrit:

$$N_j\,\Delta u|_{\Gamma_j} = 0\,,\qquad 0 \leqslant l \leqslant s-1,\ 1 \leqslant j \leqslant N\,.$$

Si pour chaque j on note Δ_j l'opérateur de Laplace dans les dérivées tangentielles à Γ_j, on a

$$\Delta = N_j^2 + \Delta_j$$

d'où

$$N_j^{l+2} u|_{\Gamma_j} + \Delta_j N_j^l u|_{\Gamma_j} = 0\,, \qquad 0 \leqslant l \leqslant s-1,\ 1 \leqslant j \leqslant N$$

soit

$$f_{j,l+2} + \Delta_j f_{j,l} = 0\,, \qquad 0 \leqslant l \leqslant s-1,\ 1 \leqslant j \leqslant N\,.$$

On en déduit que $f_{j,k} = 0$ pour k pair et que

$$f_{j,2k+1} = (-\Delta_j)^k f_{j,1}; \qquad 0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{s}{2}\right],\ 1 \leqslant j \leqslant N\,.$$

Ceci montre qu'on peut décrire toutes les traces de $u \in W_s(\Omega)$ à partir des $f_{j,1}$.

THÉORÈME 3.1. *L'image de $W_s(\Omega)$ par l'application*

$$u \to \{f_{j,1} = N_j u|_{\Gamma_j}\}_{j=1,2,\ldots,N}$$

est l'espace $X_s(\Gamma) = \prod_{j=1}^{N} H_{0,0}^{s+\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ pourvu qu'aucun des angles $\omega_{j,k}$, $1 \leqslant j \leqslant N$, $1 \leqslant k \leqslant N$ ne soit de la forme

$$\frac{l\pi}{m+1}\,, \qquad l,m \in N,\ 1 \leqslant m \leqslant s,\ l \neq m+1\,.$$

DÉMONSTRATION. On va expliciter les conditions aux limites vérifiées par $f_{j,1}$ sur l'arête $A_{j,l}$ de Γ_j. On choisit le système d'axes de coordonnées de façon que $A_{j,l}$ soit porté par l'axe oz et Γ_j par le plan $x\,o\,z$; la face Γ_l est alors portée par le plan d'équation

$$y = x \operatorname{tg} \omega_{j,l}\,.$$

Soit alors $u \in W_s(\Omega)$, d'après le théorème 1.1 les conditions qui relient $f_{j,1}$ et $f_{l,1}$ sont les suivantes (écrites en tenant compte des remarques ci-dessus):

Pour tout opérateur L d'ordre $\leqslant s+1$ écrit sous la forme:

$$L=\sum_{k=0}^{s+1} P_k N_j^k = \sum_{m=0}^{s+1} Q_m N_l^m$$

$$\text{(i)} \qquad \sum_{k\leqslant[s/2]} P_{2k+1}(-\Delta_j)^k f_{j,1} = \sum_{m\leqslant[s/2]} Q_{2m+1}(-\Delta_l)^m f_{l,1} \quad \text{sur } A_{j,l}$$

si $d^{\circ} L\leqslant s$

$$\text{(ii)} \quad \iint_{\Gamma_j\times\Gamma_l} \Big| \sum_{k\leqslant[s/2]} P_{2k+1}(-\Delta_j)^k f_{j,1}(x) - \sum_{m\leqslant[s/2]} Q_{2m+1}(-\Delta_l)^m f_{l,1}(y)\Big|^2 \frac{dx\,dy}{\|x-y\|^3}<+\infty$$

si $d^{\circ} L = s+1$.

Compte tenu du choix particulier des coordonnées on a

$$N_j=-D_y\,, \qquad N_l=-\sin\omega_{j,l} D_x+\cos\omega_{j,l} D_y\,.$$

Dans ce qui suit, on écrira ω au lieu de $\omega_{j,l}$. On désignera par T_j l'opérateur D_x (qui est tangent à Γ_j) et T_l l'opérateur (tangent à Γ_l) défini par

$$T_l=-\cos\omega D_x-\sin\omega D_y\,.$$

On a alors les relations

$$\begin{cases} N_l=-\sin\omega T_j-\cos\omega N_j \\ N_j=\quad\sin\omega T_l-\cos\omega N_l \end{cases}$$

On va expliciter les relations (i) et (ii) en prenant pour opérateur L les puissances de N_j et de N_l successivement:

Si $L=N_j^p$, on a

$$L=N_j^p=\sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}(-1)^m \sin^{p-m}\omega\cos^m\omega\, T_l^{p-m} N_l^m$$

et si $p\leqslant s$ la relation (i) s'écrit comme suit: Si p est impair ($p=2q+1$):

$$\text{(i)}' \quad (-\Delta_j)^q f_{j,1}=-\sum_{m\leqslant q}\binom{2q+1}{2m+1}\sin^{2(q-m)}\omega\cos^{2m+1}\omega\, T_l^{2(q-m)}(-\Delta_l)^m f_{l,1} \text{ sur } A_{j,l}\,.$$

Si p est pair $(p=2q)$:

$$\text{(i)}'' \quad 0=-\sum_{m<q}\binom{2q}{2m+1}\sin^{2(q-m)-1}\omega\cos^{2m+1}\omega\, T_l^{2(q-m)+1}(-\Delta_l)^m f_{l,1} \qquad \text{sur } A_{j,l}\,.$$

De même si $p=s+1$ la relation (ii) s'écrit comme suit: Si p est impair $(p=2q+1)$:

$$\text{(ii)}' \quad \iint_{\Gamma_l\,\Gamma_j}\Big|(-\Delta_j)^q f_{j,1}(x)+\sum_{m\leqslant q}\binom{2q+1}{2m+1}\sin^{2(q-m)}\omega\cos^{2m+1}\omega\cdot$$

$$\cdot\, T_l^{2(q-m)}(-\Delta_l)^m f_{l,1}(y)\Big|^2\frac{dx\,dy}{\|x-y\|^3}<+\infty\,.$$

Si p est pair $(p=2q)$:

$$\text{(ii)}'' \quad \iint_{\Gamma_j\,\Gamma_l}\Big|\sum_{m<q}\binom{2q}{2m+1}\sin^{2(q-m)-1}\cos^{2m+1}\omega\, T_l^{2(q-m)-1}(-\Delta_l)^m f_{l,1}(y)\Big|^2\cdot$$

$$\cdot\,\frac{dx\,dy}{\|x-y\|^3}<+\infty\,.$$

Ensuite si $L=N_l^p$, on a les relations analogues du fait que

$$L=N_l^p=(-1)^p\sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}\sin^{p-m}\cos^m\omega\, T_j^{p-m}N_j^m$$

donc si $p=2q+1\leqslant s$, (i) s'écrit

$$\text{(iii)}' \quad (-\Delta_l)^q f_{l,1}=-\sum_{m<q}\binom{2q+1}{2m+1}\sin^{2(q-m)}\omega\cos^{2m+1}\omega\, T_j^{2(q-m)}(-\Delta_j)^m f_{j,1} \text{ sur } A_{j,l}$$

et si $p=2q\leqslant s$

$$\text{(iii)}'' \quad 0=\sum_{m<q}\binom{2q}{2m+1}\sin^{2(q-m)-1}\omega\cos^{2m+1}\omega\, T_j^{2(q-m)-1}(-\Delta_j)^m f_{j,1} \qquad \text{sur } A_{j,l}$$

et si $p=2q+1=s+1$, (ii) s'écrit

$$\text{(iv)}' \quad \iint_{\Gamma_j\,\Gamma_l}\Big|(-\Delta_l)^q f_{l,1}(y)+\sum_{m\leqslant q}\binom{2q+1}{2m+1}\sin^{2(q-m)}\omega\cos^{2m+1}\omega\, T_j^{2(q-m)}(-\Delta_j)^m\cdot$$

$$\cdot\, f_{j,1}(x)\Big|^2\frac{dx\,dy}{\|x-y\|^3}<+\infty$$

et si $p = 2q = s + 1$, (ii) s'écrit

$$\text{(iv)}'' \quad \int_{\Gamma_j}\int_{\Gamma_l} \left| \sum_{m<q} \binom{2q}{2m+1} \sin^{2(q-m)-1}\omega \cos^{2m+1}\omega T_j^{2(q-m)-1}(-\Delta_,)^m \cdot \right.$$

$$\left. \cdot f_{j,1}(x) \right|^2 \frac{dx\,dy}{\|x-y\|^3} < +\infty .$$

Les relations précédentes sont banales pour $p = 0$. Des relations correspondant à $p = 1$, on tire

$$\begin{cases} f_{j.1} + \cos\omega f_{l.1} = 0 \\ \cos\omega f_{j.1} + f_{l.1} = 0 \end{cases}$$

sur $A_{j,l}$ d'où $f_{j.1} = f_{l.1} = 0$ sur $A_{j,l}$ puisque $|\cos\omega| \neq 1$.

Les relations correspondant à $p = 2$ sont

$$\begin{cases} \sin\omega \cos\omega T_l f_{l.1} = 0 \\ \sin\omega \cos\omega T_j f_{j.1} = 0 \end{cases}$$

sur $A_{j,l}$ d'où $T_l f_{l.1} = T_j f_{j.1} = 0$ sur $A_{j,l}$ puisque $\sin\omega\cos\omega \neq 0$ (i.e. $\omega \neq \pi/2$). Ensuite les relations correspondant à $p = 3$ sont

$$\begin{cases} \Delta_j f_{j.1} = 3\sin^2\omega \cos\omega T_l^2 f_{l.1} + \cos^3\omega(-\Delta_l) f_{l.1} \\ \Delta_l f_{l.1} = 3\sin^2\omega \cos\omega T_j^2 f_{j.1} + \cos^3\omega(-\Delta_j) f_{j.1} \end{cases}$$

sur $A_{j,l}$. Comme on a $\Delta_j = T_j^2 + D_z^2$, $\Delta_l = T_l^2 + D_z^2$ et d'après ce qui précède

$$D_z^2 f_{j.1} = D_z^2 f_{l.1} = 0 \quad \text{sur } A_{j,l}$$

ces relations s'écrivent encore

$$\begin{cases} T_j^2 f_{j.1} = \{3\sin^2\omega\cos\omega - \cos^3\omega\}\, T_l^2 f_{l.1} \\ T_l^2 f_{l.1} = \{3\sin^2\omega\cos\omega - \cos^3\omega\}\, T^2 f_{j.1} \end{cases}$$

sur $A_{j,l}$ d'où $T_j^2 f_{j.1} = T_l^2 f_{l.1}$ sur $A_{j,l}$ car $|3\sin^2\omega\cos\omega - \cos^3\omega| \neq 1$. On prouve ainsi par récurrence sur p que

$$T_j^{p-1} f_{j.1} = T_l^{p-1} f_{l.1} = 0 \quad \text{sur } A_{j,l}$$

pour $p=1, \ldots, s$. Pour $p=s+1$ on obtient si s est impair $(s=2q-1)$

$$\int_{\Gamma_j}\int_{\Gamma_l}\left|\sum_{m<q}\binom{2q}{2m+1}\sin^{2(q-m)-1}\omega\cos^{2m+1}\omega(-1)^m T_j^{2q-1}f_{j,1}(x)\right|^2\frac{dx\,dy}{\|x-y\|^3}<+\infty$$

car

$$\int_{\Gamma_j}\int_{\Gamma_l}|T_j^{2(q-m)-1}D_z^{2m}f_{j,1}(x)|^2\frac{dx\,dy}{\|x-y\|^3}<c_l\int_{\Gamma_j}|T_j^{2(q-m)-1}D_z^{2m}f_{j,1}(x)|^2\frac{dx}{d(x;A_{j,l})}<+\infty$$

pour $m>1$ car $T_j^{2(q-m)-1}f_{j,1}=0$ sur $A_{j,l}$ d'après ce qui précède. Vu les hypothèses sur ω, cela implique

$$\int_{\Gamma_j}|T_j^s f_{j,1}(x)|^2\frac{dx\,dy}{\|x-y\|^3}<+\infty$$

d'où

$$\int_{\Gamma_j}|T_j^s f_{j,1}(x)|^2\frac{dx}{d(x;A_{j,l})}<+\infty\,.$$

On montre de la même manière que

$$\int_{\Gamma_l}|T_l^s f_{j,1}(y)|^2\frac{dy}{d(y;A_{j,l})}<+\infty$$

Des raisonnement analogues conduisent au même résultat lorsque s est pair. Si on remarque que T_j est la dérivée normale au morceau de fontière $A_{j,l}$ de Γ_j on voit que $f_{j,1}H_{0.0}^{s+\frac12}(\Gamma_j)$.

Réciproquement partant de $f_{j,1}\in H_{0.0}^{s+\frac12}(\Gamma_j)$, $1\leqslant j\leqslant N$ donnés, on vérifie qu'il existe $u\in W_s(\Omega)$ tel que $f_{j,1}=N_j u|_{\Gamma_j}$, $1\leqslant j\leqslant N$ en vérifiant les relations (i) et (ii). Ces relations sont évidentes puisque par hypothèse on a

$$T_j^p f_{j,1}=T_l^p f_{l,1}=0 \quad \text{sur } A_{j,l}$$

$0\leqslant p\leqslant s-1$ et aussi

$$\int_{\Gamma_j}|T_j^s f_{1,1}(x)|^2\frac{dx}{d(x;A_{j,l})}<\infty\,,$$

$$\int_{\Gamma_l}|T_l^s f_{l,1}(y)|^2\frac{dy}{d(x;A_{j,l})}<\infty\,.$$

Une conséquence importante du théorème 3.1 est la suivante

COROLLAIRE 3.2. *Le sous-espace de $W_s(\Omega)$ formé des $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$, tels que $D^\alpha u = 0$ sur A pour tout α tel que $|\alpha| \leqslant s+1$, est dense dans $W_s(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION. On désigne par $\mathring{W}_s(\Omega)$ le sous-espace dont on veut prouver la densité: Soit F une forme linéaire continue sur $W_s(\Omega)$, nulle sur $\mathring{W}_s(\Omega)$; comme $W_s(\Omega)$ est fermé dans $H^{s+2}(\Omega)$, il existe $T \in H^{-s-2}(\boldsymbol{R}^3)$ à support dans $\bar{\Omega}$ tel que $F(u) = \langle T; \mathcal{V} \rangle$ où $\mathcal{V} \in H^{s+2}(\boldsymbol{R}^3)$ vérifie $\mathcal{V}|_\Omega = u$. Comme $F(u) = 0$ pour $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $\langle T; \mathcal{V} \rangle = 0$ pour $\mathcal{V} \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^3)$ à support dans Ω; ceci prouve que T a son support dans Γ, donc que F ne dépend que des traces de u. On peut donc écrire

$$F(u) = \sum_{j=1}^{N} \langle S_j; N_j u \rangle$$

où $S_j \in H^{-s-\frac{1}{2}}(\Gamma_j) = \{H_{0,0}^{s+\frac{1}{2}}(\Gamma_j)\}^*$, $1 \leqslant j \leqslant N$. On va montrer que les S_j sont nuls (donc aussi F); en effet si $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Gamma_j)$ il est facile de construire $u \in \mathring{W}_s(\Omega)$ tel que

$$N_j u = \varphi_j \quad \text{sur } \Gamma_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant N$$

on a donc $F(u) = 0$ i.e. $\sum_{j=1}^{N} \langle S_j, \varphi_j \rangle = 0$, pour tout $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Gamma_j)$. Comme $\mathcal{D}(\Gamma_j)$ est dense dans $H_{0,0}^{s+\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$, ceci prouve que $S_j = 0$.

On a ainsi prouvé que toute forme F linéaire continue sur $W_s(\Omega)$, nulle sur $\mathring{W}_s(\Omega)$ est nulle sur tout $W_s(\Omega)$, c'est à dire que $\mathring{W}_s(\Omega)$ est dense dans $W_s(\Omega)$.

Un autre résultat utile dans ce qui suit, concernant l'espace $W_s(\Omega)$ est donné par le

THÉORÈME 3.3. *Soit $u \in W_s(\Omega)$ et $v = D^\alpha u$ avec $|\alpha| = s$; v vérifie sur Γ_j une condition aux limites de la forme*

$$D_i v = T_{i,j} f_{j1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

où $T_{i,j}$ est un opérateur différentiel homogène à coefficients constants d'ordre $|s|$, tangentiel à Γ_i et $f_{j,1} = N_j u|_{\Gamma_j}$.

DÉMONSTRATION. L'opérateur $D_i D^\alpha$ s'écrit évidemment $\sum_{k=0}^{s+1} P_k N_j^k$ où P_k est opérateur tangentiel à Γ_j d'ordre $s+1-k$. On en déduit que

$$D_i v = D_i D^\alpha u = \sum_{k=0}^{s+1} P_k f_{j,k} = \sum_{p \leqslant [s/2]} P_{2p+1}(-\Delta_j)^p f_{j,1} \quad \text{sur } \Gamma_j$$

d'après les relations établies au début de ce §. On obtient le résultat en posant

$$T_{i,j} = \sum_{p \leqslant [s/2]} P_{2p+1}(-\Delta_j)^p .$$

4. – Inegalites a priori.

Le but de ce § est de prouver l'existence de C_s tel que

$$\|u\|_{s+2} \leqslant C_s \|\Delta u\|_s$$

pour tout $u \in W_s(\Omega)$, s entier $\geqslant 0$. On a déjà prouvé ce résultat pour $s = 0$ au § 2, il suffira donc d'établir l'inégalité

$$\|D_x^2 v\|^2 + \|D_y^2 v\|^2 + \|D_z^2 v\|^2 + 2\|D_x D_y v\|^2 + 2\|D_y D_z v\|^2 + 2\|D_z D_y v\|^2 \leqslant \|\Delta v\|^2$$

pour $v = D^\alpha u$, $|\alpha| = s$, $u \in W_s(\Omega)$. Cela résultera du

LEMME 4.1. *Soit* $v = D^\alpha u$, $|\alpha| = s$ *avec* $u \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap W_s(\Omega)$ *et* $D^\beta u = 0$ *sur* A *pour tout* β *tel que* $|\beta| \leqslant s+1$; *alors l'inégalité ci-dessus est vérifiée.*

DÉMONSTRATION. On développe $\|\Delta v\|^2$ de la même manière que dans la démonstration du théorème 2.1; on obtient ainsi

$$\begin{aligned}\|\Delta v\|^2 = {} & \|D_x^2 v\|^2 + \|D_y^2 v\|^2 + \|D_z^2 v\|^2 + 2\|D_x D_y v\|^2 + 2\|D_y D_z v\|^2 \\ & + 2\|D_x D_z v\|^2 + 2\int_\Gamma D_x v \, dD_y v \wedge dz + 2\int_\Gamma D_y v \, dD_z v \wedge dx + 2\int_\Gamma D_z v \, dD_x v \wedge dy \,.\end{aligned}$$

Il reste à vérifier que les intégrales de bord sont nulles; elles sont sommes des intégrales correspondantes sur les Γ_j. On va évaluer la contribution d'une face Γ_j e: Par un changement de base on se ramène au cas où Γ_j est parallèle à l'hyperplan $x_3 = 0$ (en notant à présent les coordonnées dans R^3: x_1, x_2, x_3 au lieu de x, y, z). On a donc à calculer une combinaison linéaire des

$$\int_\Gamma D_k v \, dD_l v \wedge dx_m$$

avec $1 \leqslant k, l, m \leqslant 3$ et naturellement $m < 3$ puisque $dx_3 = 0$ sur Γ_j. On va maintenant utiliser les conditions aux limites vérifiées par v sur Γ_j. On a en posant $\varphi = f_{j,1}$ d'après le théorème 3.3

$$D_k v = T_{k,j} \varphi \,, \qquad D_l v = T_{l,j} \varphi$$

et par conséquent $\int_{\Gamma_j} D_k v \, dD_l v \wedge dx_m$ est combinaison linéaire d'intégrales de la forme:

$$\int_{\Gamma_j} D_1^\alpha D_2^\beta \varphi \, dD_1^\gamma D_2^\delta \varphi \wedge dx_m \,, \qquad m = 1 \text{ ou } 2, \ \alpha + \beta = \gamma + \delta = \mu$$

i.e. ou bien

$$I' = \int_{\Gamma_j} D_1^{\alpha} D_2^{\beta} \varphi D_1^{\gamma+1} D_2^{\delta} \varphi \, dx_1 \wedge dx_2$$

ou

$$I'' = -\int_{\Gamma_j} D_1^{\alpha} D_2^{\beta} \varphi D_1^{\gamma} D_2^{\delta+1} \varphi \, dx_1 \wedge dx_2 .$$

Ces intégrales sont identiques si on échange les rôles de x_1 et x_2; on va montrer qu'elles sont nulles. Après un nombre fini d'intégrations par parties on a (au signe près)

$$I' = \pm \int_{\Gamma_j} D_1^{\mu} D_2^{\nu} \varphi D_1^{\mu+1} D_2^{\nu} \varphi \, dx_1 \wedge dx_2 = + \tfrac{1}{2} \int_{\Gamma_j} D_1 [D_1^{\mu} D_1^{\nu} D_2 \varphi]^2 dx_1 \wedge dx_2$$

avec $\alpha + \gamma = 2\mu$ $\beta + \delta = 2v$ si $\alpha + \gamma$ est pair et

$$I' = \pm \int_{\Gamma_j} D_1^{\mu+1} D_2^{\nu} \varphi D_1^{\mu+1} D_2^{\nu+1} \varphi \, dx_1 \wedge dx_2 = \pm \tfrac{1}{2} \int_{\Gamma_j} D_2 [D_1^{\mu} D_2^{\nu} \varphi]^2 dx_1 \wedge dx_2$$

avec $\alpha + \gamma = 2\mu + 1$, $\beta + \delta = 2\nu + 1$, si $\alpha + \gamma$ est impair car les intégrales sur $\partial \Gamma_j$ sont toutes nulles puisque par hypothèse les dérivées jusqu'à l'ordre s de φ (qui sont des dérivées d'ordre $\leqslant s+1$ de u) sont nulles sur $\partial \Gamma_j \subset A$. Dans les deux cas I' s'intègre complètement et on a $I' = 0$. Le lemme est ainsi complètement démontré.

Utilisant le corollaire 3.2, on en déduit le

THÉORÈME 4.2. *Il existe C_s tel que*

$$\|u\|_{s+2} < C_s \|\Delta u\|_s$$

pour tout $u \in W_s(\Omega)$, à condition qu'aucun des $\omega_{j,k}$, $1 \leqslant j \leqslant N$, $1 \leqslant k \leqslant N$ ne soit de la forme:

$$\frac{l\pi}{m+1}, \quad l, m \in \boldsymbol{N}, \ 1 \leqslant m \leqslant s, \ l \neq m+1 .$$

Il ne sera pas nécéssaire dans la suite de démontrer l'inégalité à priori sans restriction sur les angles.

5. – Alternative de Fredholm.

Dans tout ce qui suit on suppose vérifiées les conditions sur les angles $\omega_{j,k}$ contenues dans les hypothèses du théorème 4.2. On sait alors que Δ est injectif et à image fermée de $W_s(\Omega)$ dans $H_0^s(\Omega)$; on va maintenant essayer d'en déterminer l'orthogonal c'est à dire

$$N_s(\Omega) = \{v \in H^{-s}(\Omega);\ \langle \Delta u; v\rangle = 0 \ \ \forall u \in W_s(\Omega)\}\ .$$

L'idée essentielle consiste à utiliser le fait que v est solution du problème de Dirichlet homogène:

$$\Delta v = 0 \qquad \text{dans } \Omega$$

et $v|_\Gamma = 0$ dans un sens faible, qu'on pourrait préciser comme au § 2, en utilisant les techniques de Lions Magenes [9]. On va prouver le:

THÉORÈME 5.1. (i) $N_s(\Omega) = 0$ *si* $\omega_{j,k} < \pi/(s+1)$, $1 \leqslant j \leqslant N$, $1 \leqslant k \leqslant N$.

(ii) $\dim N_s(\Omega) = +\infty$ *si un des* $\omega_{j,k}$ *est* $> \pi/(s+1)$.

Pour démontrer le point (i) on part du

LEMME 5.2. *Si* $\omega_{j,k} < \pi/s+1)$, $1 \leqslant j \leqslant N$, $1 \leqslant k \leqslant N$, *alors* $N_s(\Omega) \subseteq H^2(\Omega)$.

DÉMONSTRATION. Le cas $s = 0$ a déjà été examiné au § 2 (Lemme 2.4). Comme il n'existe pas de polyèdre Ω vérifiant la condition $\omega_{j,k} < \pi/3$ pour tout j et tout k, il reste seulement à examiner le cas où $s = 1$, c'est à dire qu'on suppose $\omega_{j,k} < \pi/2$, $1 \leqslant j \leqslant N$, $1 \leqslant k \leqslant N$.

Raisonnant comme dans la démonstration du lemme 2.4, on vérifie facilement que $v \in N_1(\Omega)$ est en fait analytique dans $\bar{\Omega} - A$; il suffira donc de vérifier la régularité H^2 de v au voisinage de tout point $x \in A$. Ramenant x en 0 par translation et choisissant pour V une boule de centre 0 et de rayon assez petit, on a

$$\Omega \cap V = \{x = r\omega;\ 0 < r < R,\ \omega \in G\}$$

où G est un polygône curviligne de S^2 dont tous les angles sont inférieurs à $\pi/2$. On sait alors (d'après l'appendice) que les fonctions propres w_k de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur G (mêmes notations que dans le lemme 2.4) avec conditions de Dirichlet sur ∂G sont dans $H^3(G)$.

Soit donc $v \in N_1(\Omega)$, on a dans $\Omega \cap V$

$$v(r\omega) = \sum_k c_k(r)\, w_k(\omega)$$

avec

$$c_k(r) = \langle v(r\omega);\, w_k\rangle_G \ (*)\,.$$

On trouve l'équation dont c_k est solution en écrivant que

$$\langle v;\, \Delta u\rangle = 0$$

avec

$$u(r\omega) = \begin{cases} \varphi(r) w_k(\omega)\,, & 0 < r < R,\ \omega \in G \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\varphi \in \mathcal{D}\,(]0, R[)$. Du fait que $w_k \in H^3(G)$, on vérifie aisément que $u \in H^3(\Omega)$; il est clair que $u|_\Gamma = 0$ car $w_k|_{\partial G} = 0$; enfin on a l'identité

$$\Delta u = \begin{cases} \varphi''(r) + \dfrac{2}{r}\varphi'(r) - \dfrac{\lambda_k}{r^2}\varphi(r)\, w_k(\omega)\,, & 0 < r < R,\ \omega \in G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui assure que $\Delta u|_\Gamma = 0$ donc que $u \in W^1(\Omega)$. L'équation $\langle v;\, \Delta u\rangle = 0$, implique que

$$r^2 c_k'' + 2r c_k' - \lambda_k c_k = 0$$

d'où comme dans la démonstration du lemme 2.4.

$$v(r\omega) = \sum_k (a_k r^{\alpha_k} + b_k r^{\beta_k}) w_k(\omega)$$

où

$$\alpha_k = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\lambda_k}}{2}\,, \qquad \beta_k = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\lambda_k}}{2}\,.$$

Pour terminer cette démonstration on admet provisoirement le

LEMME 5.3. *Si G est contenu dans un quart de sphère S^2, on a* $\lambda_1 \geqslant 4$. On en déduit que $\beta_k \leqslant (-1 - \sqrt{17})/2 < -\frac{5}{2}$. La technique du lemme 3.10

(*) En réalité, puisque $v \in H^{-1}$, on peut écrire $v = \partial v_1/\partial r + \sqrt{-L}\ v_2$ avec v_1, $v_2 \in L^2$; les fonctions v_1 et v_2 sont développables en séries de w_k d'où

$$c_k(r) = \frac{\partial}{\partial r}\langle v_1(r\omega);\, w_k\rangle_G + \sqrt{\lambda_k}\langle v_2(r\omega);\, w_k\rangle_G\,.$$

de Grisvard [4] montre que

$$r^{\beta} w_k \in H^{-1}(\Omega \cap V)$$

si et seulement si $\beta > -\frac{5}{2}$ et par conséquent le fait que $v \in H^{-1}(\Omega)$ implique que

$$v(r\omega) = \sum_k a_k r^{\alpha_k} w_k(\omega) .$$

Ensuite toujours grâce à la condition $v \in H^{-1}(\Omega)$, on peut estimer la croissance des a_k: la fonction

$$u(r\omega) = \begin{cases} \varphi(r) w_k(\omega) , & 0 < r < R, \ \omega \in G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\varphi \in \mathcal{D}(]0, R[)$ est dans $H^1_0(\Omega)$ et sa norme est

$$\|u\|_1 \leqslant C\Big([1 + \lambda_k]\int_0^R |\varphi(r)|^2 r^2\, dr + \int_0^R |\varphi'(r)|^2 r^2\, dr\Big)^{\frac{1}{2}} ;$$

par ailleurs on a

$$\Big|\langle v; u\rangle| = |a_k \int_0^R r^{\alpha_k} \varphi(r)\, r^2\, dr\Big| \leqslant \|v\|_{-1} \|u\|_1$$

d'où

$$|a_k| \leqslant C \|v\|_{-1} \frac{\big([1 + \lambda_k]\int_0^R |\varphi(r)|^2 r^2\, dr + \int_0^R |\varphi'(r)|^2 r^2\, dr\big)^{\frac{1}{2}}}{\big|\int_0^R r^{\alpha_k} \varphi(r)\, r^2\, dr\big|}$$

Compte tenu du fait que $\lambda_k \sim Kk$ et par conséquent $\alpha_k \sim \sqrt{Kk}$ on voit qu'il existe C' et $\varepsilon > 0$ tels que

$$|a_k| \leqslant C' \frac{k^{\frac{3}{4}}}{\varepsilon^{\sqrt{k}}}$$

On est à présent en mesure de prouver que $N_1(\Omega) \subseteq H^2(\Omega)$; comme on sait déjà que $N_0(\Omega) = N(\Omega) \subseteq H^2(\Omega)$ d'après le lemme 2.4, il suffit de vérifier que $N_1(\Omega) \subseteq N_0(\Omega)$ i.e. que $N_1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$: Dans $\Omega \cap V$ on a

$$\int_{\Omega \cap V} |v(r\omega)|^2 r^2\, dr\, d\omega = \sum_k |a_k|^2 \int_0^R r^{2\alpha_k + 2}\, dr = \sum_k |a_k|^2 \frac{R^{2\alpha_k + 3}}{2\alpha_k + 3}$$

et le terme général de cette série est asymptotiquement majoré par

$$\frac{k^3}{\varepsilon^{2\sqrt{k}}}\frac{R^{2\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$$

à une constante près; la série est donc convergente si $R<\varepsilon$. Le lemme 5.2 est démontré.

DÉMONSTRATION DU LEMME 5.3. Comme il est connu que λ_1 décroît lorsque G croît, il suffit de considérer le cas où G est un quart de sphère: Si on utilise les mêmes coordonnées que dans la démonstration du lemme 2.5, on peut choisir les coordonnées de manière que $G=G_{\pi/2}$:

$$G_{\pi/2}=\left\{\omega\in S^2;\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Dans ce domaine, on a $\lambda_1\geqslant\mu_1$ où μ_1 est la première valeur propre de $-D_\theta^2$ dans $G_{\pi/2}$ i.e. $\mu_1=4$.

On déduit du lemme 5.2 que

$$N_s(\Omega)\subseteq\{u\in H^2(\Omega);\,\Delta u=0,\,u|_{\Gamma_j}=0,\,j=1,2,\dots,N\}$$

ceci démontre le point (i) du théorème 5.1. Il reste à démontrer le point (ii) du théorème 5.1.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.1 (ii). L'idée est que supposer $\dim N_s(\Omega)<+\infty$ contredirait les résultats obtenus lorsque $n=2$ dans Grisvard [4]. Supposons que $A_{j,k}$ soit porté par l'axe Oz, ce qui est toujours possible en changeant éventuellement de système d'axes de coordonnées; or peut aussi se ramener au cas où Γ_j est porté par le plan xOz et Γ_k par le plan défini par $y=x\,\mathrm{tg}\,\omega_{j,k}$. Soit alors I un intervalle de l'axe Oz tel que $\bar{I}\subset A_{j,k}^0$ et soit $\varrho>0$ tel que

$$\{(x,y,z);\ z\in I,\ x^2+y^2<\varrho^2,\ (x,y)\in\Sigma\}\subseteq\Omega$$

où Σ désigne le secteur plan infini (dans le plan xOy) d'ouverture $\omega_{j,k}$ et s'appuyant sur l'axe Ox. On va étudier la régularité de $u\in H_0^1(\Sigma)$ solution de $\Delta u=f\in H_0^s(\Sigma)$ avec l'hypothèse que u est à support dans $\{(x,y): x^2+y^2<\varrho^2\}$. On se ramène au cas à trois dimensions en considérant

$$w(x,y,z)=u(x,y)\varphi(z)\qquad(\text{noté } w=u\otimes\varphi)$$

avec $\varphi \in \mathfrak{D}(I)$. Il est clair que

$$w \in H_0^1(\Omega)$$

et que

$$\Delta w = f \otimes \varphi + u \otimes \varphi'' \in H_0^s(\Omega)$$

au moins si $s = 0$ ou 1.

Soit $V_1, \ldots, V_N$ une base de $N_s(\Omega)$ supposé de dimension finie. On aura $w \in H^{s+2}(\Omega)$ si $\langle \Delta w; v_j \rangle = 0$, $1 \leqslant j \leqslant N$ i.e.

$$\langle f \otimes \varphi; V_j \rangle + \langle u \otimes \varphi''; V_j \rangle = 0 \,, \quad 1 \leqslant j \leqslant N \,.$$

Comme u et f sont fixées et $\varphi \in \mathfrak{D}(I)$ est quelconque, les N identités ci-dessus sont N conditions linéaires sur φ. La dimension de $\mathfrak{D}(I)$ étant infinie, on peut trouver $\varphi \in \mathfrak{D}(I)$, $\varphi \neq 0$ telle que les identités soient satisfaites et par conséquent $w \in H^{s+2}(\Omega)$, d'où puisque $\varphi \in \mathfrak{D}(I)$, $u \in H^{s+2}(\Sigma)$. Ce raisonnement prouve que toute $u \in H_0^1(\Sigma)$, vérifiant $\Delta u \in H_0^s(\Sigma)$, à support dans $x^2 + y^2 < \varrho^2$ est automatiquement dans $H^{s+2}(\Sigma)$; comme $\omega_{j,k} > \pi/(s+1)$, ceci contredit le corollaire 3.8 de Grisvard [4].

La démonstration lorsque $s \geqslant 2$ suit les mêmes idées.

6. – Epilogue.

Les résultats des § précédents concernent les solutions de $\Delta u = f$ avec $f \in H_0^s(\Omega)$ c'est à dire que f vérifie des conditions aux limites superflues dont il faut se débarasser lorsque $s \geqslant 1$. On utilisera pour cela les théorèmes de traces.

Plus précisement on considère l'application

$$P_\Omega^s \colon u \to \{\Delta u; u|_{\Gamma_j}, 1 \leqslant j \leqslant N\} \,.$$

C'est naturellement une application de $H^{s+2}(\Omega)$ dans

$$H^s(\Omega) \times \prod_{j=1}^{N} H^{s+\frac{3}{2}}(\Gamma_j) \,;$$

de plus on a nécessairement (d'après le théorème 1.1)

$$g_j = g_k \text{ sur } A_{j,k} \text{ si } A_{j,k} \neq \phi \,.$$

Par conséquent, il est naturel de considérer P_Ω^s de $H^{s+2}(\Omega)$ dans $I^s(\Omega)$ sous-espace de $H^s(\Omega)\times\prod_{j=1}^{N} H^{s+\frac{3}{2}}(\Gamma_j)$ défini par les conditions $g_j=g_k$ sur $A_{j,k}$.

On va prouver le

THÉORÈME 6.1. (*a*) *P_Ω^s est bijectif de $H^{s+2}(\Omega)$ sur $I^s(\Omega)$ si on a $\omega_{j,k}<\pi(s+1)$ pour tout couple j, k tel que $A_{j,k}\neq\phi$;* (*b*) *l'image de $H^{s+2}(\Omega)$ par P_Ω^s dans $I^s(\Omega)$ est fermée et de codimension infinie dans $I^s(\Omega)$ si aucun des $\omega_{j,k}$ n'est de la forme $l\pi/(m+1)$, $l, m\in N$, $1\leqslant m\leqslant s$, $l\neq m+1$ et l'un des $\omega_{j,k}$ est $>\pi/(s+1)$.*

On déduira ce théorème des résultats de § précédents et du

THÉORÈME 6.2. *Soit $\{f; g_1, \dots, g_N\}\in I^s(\Omega)$, on suppose qu'aucun des $\omega_{j,k}$ n'est de la forme $l\pi/(m+1)$, $l, m\in N$, $1\leqslant m\leqslant s$, $l\neq m+1$; alors il existe $w\in H^{s+2}(\Omega)$ solution de*

$$\begin{cases} w|_{\Gamma_j}=g_j\,, & 1\leqslant j\leqslant N \\ \Delta w-f\in H_0^s(\Omega)\,. \end{cases}$$

La démonstration du théorème 6.2 est basée sur l'utilisation du théorème 1.1.

Il est clair que le théorème 6.2 permet de ramener la démonstration du théorème 6.1 à l'application du théorème 5.1: les techniques utilisées sont les mêmes que celles du § 4 de Grisvard [4].

REMARQUE 6.3. On pourrait préciser le résultat lorsqu'un des angles $\omega_{j,k}$ de Ω est de la forme $l\pi/(m+1)$. On montrerait que si aucun des $\omega_{j,k}$ n'est de la forme $l\pi/(s+1)$, l'image de P_Ω^s dans $I^s(\Omega)$ est encore fermée ce qui n'est vrai lorsque l'un des $\omega_{j,k}$ est de la forme $l\pi/(s+1)$ $(l\in\mathbf{N})$. On ne donnera pas le détail des démonstrations (d'ailleurs semblables à celles de Grisvard [4]) pour des raisons de brièveté.

Appendice.

On a regroupé ici deux résultats utilisés dans les §§ 2 et 5 respectivement et qui sont relatifs à des problèmes bidimensionnels donc plus liés à Grisvard [4].

On note L l'opérateur de Laplace-Beltrami sur S^2 (la sphère unité de R^3) et G un ouvert de S^2 de la forme particulière suivante: ∂G est formé d'un nombre fini d'arcs de grands cercles qu'on notera S_j, $1\leqslant j\leqslant N$. En d'autres termes G est l'intersection avec S^2 d'un cône polyédral Ω de sommet 0; Ω est limité par ses faces Γ_j et $S_j = S^2 \cap \Gamma_j$. On notera ω_j l'angle que font les tangentes à S_j et à S_{j+1} en leurs points de rencontre, c'est à dire l'angle de Γ_j avec Γ_{j+1} (vers l'intérieur de Ω).

THÉORÈME. *Si $\omega_j < \pi$ pour tout j alors L est un isomorphisme de $H^2(G) \cap H_0^1(G)$ sur $L^2(G)$ et si $\omega_j < \pi/2$ pour tout j alors L est un isomorphisme de $H^3(G) \cap H_0^1(G)$ sur $H^1(G)$.*

Il en résulte que si $w_k \in H_0^1(G)$ est fonction propre de L i.e.

$$Lw_k = -\lambda_k w_k \qquad \text{dans } G$$

alors $w_k \in H^2(G)$ si $\omega_j < \pi$ pour tout j (c'est le résultat utilisé dans la démonstration du lemme 2.4) et $w_k \in H^3(G)$ si $\omega_j < \pi/2$ pour tout j (c'est le résultat utilisé dans la démonstration du lemme 5.2).

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'un résultat de régularité qui compte tenu de l'ellipticité de L, est évident à l'intérieur de G et au voisinage des arcs S_j; il n'y a de problème qu'au voisinage des sommets. Il suffit donc de considérer le cas où la fonction u dont on veut prouver la régularité, est à support au voisinage d'un des sommets. En coordonnée locales on est ramené au problème suivant:

G est le secteur plan limité par l'axe Ox et la demi-droite qui fait avec Ox un angle ω_j dans le sens-direct, $u \in H_0^1(G)$, est à support borné et de plus u est solution de

$$Lu = f \in L^2(G)$$

où $L = \sum_{|\alpha| \leqslant 2} a_\alpha(x; y) D_x^{\alpha_1} D_y^{\alpha_2}$ avec a_α fonction régulière telle que

$$a_{1,1}(0,0) = 1\,, \qquad a_{2,2}(0,0) = 1\,, \qquad a_{1,2}(0,0) = a_{2,1}(0,0) = 0\,.$$

On a donc

$$\Delta u = f + Au + Bu$$

où B est un opérateur du premier ordre et A un opérateur du second ordre dont les coefficients s'annullent en zéro.

Si $f \in L^2(G)$ on a

$$g = \Delta u - Au \in L^2(G)\,.$$

On peut trouver un triangle coïncidant avec G au voisinage de 0 et contenant le support de u. Soit Δ_1 la restriction de Δ à $H_0^1(\Omega_1)$; d'après la remarque 3.11 de Grisvard [4] on sait que Δ_1 est un isomorphisme de $H^2(\Omega_1) \cap H_0^1(\Omega_1)$

sur $L^2(\Omega_1)$. Comme les coefficients de A tendent vers zéro lorsqu'on diminue Ω, on voit que si Ω_1 est assez petit $\Delta_1 + A$ est encore un isomorphisme de $H^2(\Omega_1) \cap H^1_0(\Omega_1)$ sur $L^2(\Omega_1)$. Il en résulte que

$$u = (\Delta_1 + A)^{-1} g \in H^2(G) .$$

Si tous les ω_j sont $< \pi/2$, on utilise un triangle Ω_1 dont tous les angles sont $< \pi/2$ et alors d'après le théorème 4.2 de Grisvard [4] on sait que Δ_1 est un isomorphisme de $H^3(\Omega_1) \cap H^1_0(\Omega_1)$ sur $H^1(\Omega_1)$ et le même raisonnement que ci-dessus montre que $u \in H^3(G)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Agmon, *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van-Nostrand, 1965.

[2] Courant - Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Interscience, 1953.

[3] Gagliardo, *Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera ...*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **27** (1957), pp. 284-305.

[4] Grisvard, *Alternative de Fredholm relative au problème ...*, Bollettino U.M.I., **5** (1972), pp. 132-164.

[5] Grisvard, *Problème de Dirichlet dans un cône*, Ricerche di Matematica, **20** (1971), pp. 175-192.

[6] Grisvard, *Théorèmes de traces relatifs à un polyèdre*, C.R.A.S., Paris, **278** (1974), pp. 1581-1583.

[7] Grisvard, *Problème de Dirichlet dans un domaine non régulier*, C.R.A.S., Paris, **278** (1974), pp. 1615-1617.

[8] Kadlec, *La régularité de la solution du problème de Poisson ...*, Czechoslovak. Math. J., **89** (1964), pp. 386-393.

[9] Lions - Magenes, *Problèmes aux limites non homogène et applications*, Dunod, 1968.

[10] Necas, *Les méthodes directes en théorie des équations élliptiques*, Prague, 1967.