ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JEAN JACQUES MOREAU

Multiapplications à retraction finie

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 1, nº 3-4 (1974), p. 169-203

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1974_4_1_3-4_169_0>

Multiapplications à Retraction Finie.

JEAN JACQUES MOREAU (*)

Introduction.

1*a*. *Motivation.*

Il s'agit, dans cet article, d'*applications multivoques* ou *multiapplications* d'un intervalle $I \subset \boldsymbol{R}$ dans un espace métrique E. Si $t \mapsto A(t)$ est une telle multiapplication et qu'on interprète la variable t comme le temps, la situation peut se décrire en langage de cinématique: A est un *ensemble mobile* dans l'espace métrique E.

L'étude de certains problèmes d'évolution associés à un ensemble mobile donné conduit à formuler des hypothèses de régularité du mouvement de cet ensemble. Un premier cadre pour cette formulation consiste à faire de l'ensemble des parties (fermées) de E un espace métrique au moyen de la *distance de Hausdorff*, à valeurs éventuellement infinies si on ne se restreint pas à des ensembles bornés. Dans ce cadre, A est traitée comme une application ordinaire et on dispose des notions usuelles d'application *continue*, resp. *à variation bornée*, resp. *absolument continue*, resp. *lipschitzienne* etc.. C'est ce qui est fait, par exemple, chez Hermes [1], Kikuchi et Tomita [1], à propos de théorèmes de sélection ou d'équations différentielles à second membre multivoque dans $\boldsymbol{R}^n$. Tel était aussi le point de vue de l'auteur dans une première approche (cf. Moreau [4]) du problème d'évolution suivant, issu de la théorie des *systèmes mécaniques élastoplastiques*. On donne $t \mapsto C(t)$, multiapplication d'un intervalle $I \subset \boldsymbol{R}$, contenant son origine t_0, dans un espace hilbertien réel H, à valeurs convexes fermées non vides; on demande de construire une application (univoque) $u: I \to H$, absolument continue sur

(*) Institut de Mathématiques, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, 34060 Montpellier - Cedex.

Pervenuto alla Redazione il 12 Maggio 1973 e pervenuto in forma definitiva il 10 Maggio 1974.

tout sous-intervalle compact, telle que $u(t_0) = a$, élément donné de $C(t_0)$ et que, pour presque tout $t \in I$,

$$-\frac{du}{dt} \in \Gamma(t, u)\,; \tag{1.1}$$

$\Gamma(t, u)$ désigne ici le cône convexe constitué par les éléments de H qui, en un sens classique, sont *normaux* au convexe $C(t)$ au point u, dans la direction « sortante »: cône vide si et seulement si $u \notin C(t)$; réduit à $\{0\}$, en particulier, si u est point interne de $C(t)$. Au moins dans le cas où le convexe mobile $C(t)$ possède un intérieur non vide, la loi d'évolution (1.1) possède une image mécanique intuitive: le *point mobile* $t \mapsto u(t)$ reste fixe tant qu'il est intérieur à C; lorqu'il est atteint par la frontière de cet ensemble mobile, il ne peut prendre qu'un mouvement dans une direction normale entrante, comme poussé par ladite frontière, de manière à continuer d'appartenir à $C(t)$ pour tout t.

Un résultat de cette première étude était l'existence d'une solution (d'ailleurs unique, parce que la multiapplication $x \mapsto \Gamma(t, x)$ est monotone au sens de Minty) pour le problème posé, sous l'hypothèse que la multiapplication $t \mapsto C(t)$ soit, au sens de la distance de Hausdorff, ***absolument continue sur tout sous-intervalle compact*** de I.

Mais cette hypothèse apparaît inutilement restrictive: si, sur un intervalle $[t_1, t_2[$, le convexe mobile ou, tout au moins, son intersection avec un voisinage du point $u(t_1)$, se trouve « en expansion », il est clair que l'application constante $t \mapsto u(t) = u(t_1)$ est solution de (1.1) sur cet intervalle sans qu'il soit besoin d'aucune régularité de l'évolution de C. Une telle régularité n'importe que si C « se rétracte ». De là l'idée de faire usage d'un *écart* entre deux parties A et B de E moins fin que la distance de Hausdorff, *dissymétrique*; on note

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y)\,, \tag{1.2}$$

expression nulle si et seulement si A est contenu dans l'adhérence de B (notée $\operatorname{adh} B$).

Cet écart (on en rencontre déja un emploi chez Van Cutsem [1], [2], Bridgland [1], [2]) est un intermédiaire habituel dans l'étude de la distance de Hausdorff, laquelle s'écrit $h(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}$. L'essentiel est que e donne lieu à une *inégalité triangulaire* et cela va permettre de reproduire la construction traditionnelle qui, considérant la somme des distances entre les valeurs successivement prises par une fonction en des points de subdivision d'un intervalle $[s, t]$, élabore, par passage au « sup » (ou limite selon l'ordonné filtrant des subdivisions de $[s, t]$), la *variation* de la fonction sur cet intervalle: pour toute multiapplication A de $[s, t]$ dans l'espace métrique E, nous définirons, en faisant jouer à e le rôle d'une distance, la *rétraction* $\operatorname{ret}(A; s, t)$, expression à valeurs dans $[0, +\infty]$, nulle si et seulement si la multiapplication $\tau \to \operatorname{adh} A(\tau)$ est croissante (non strictement) sur cet intervalle.

Appliquée au problème précité cette notion permet une amélioration substantielle du théorème d'existence de la solution: il suffit pour cette existence que la fonction $t \mapsto \operatorname{ret}(C; t_0, t)$ soit absolument continue sur tout sous-intervalle compact de I (cf. Moreau [5]). Il ne s'agit pas là d'un raffinement académique; une équation plus compliquée que (1.1), mais étroitement reliée à elle, régit la dynamique d'un système mécanique présentant des *liaisons unilatérales* par exemple des contacts entre solides: à partir de chaque configuration atteinte par le système, l'ensemble des valeurs que de telles liaisons permettent à la vitesse est une partie convexe mobile $C(t)$ d'un espace hilbertien de dimension finie; à un instant où l'un des contacts vient à cesser la dimension de cet ensemble augmente, d'où une variation, au sens de la distance de Hausdorff, qui peut être discontinue et même infinie; mais cela n'implique pas d'irrégularité pour la fonction rétraction considérée ci-dessus.

1*b*. *Résultats.*

La section 2 établit les propriétés élémentaires de l'écart e. Nous avons tenu à prendre en compte l'éventualité d'*ensembles vides*; on doit alors préciser que les « inf » et « sup », écrits en (1.2) ci-dessus, sont entendus au sens de l'ensemble ordonné $\boldsymbol{R}_+ = [0, +\infty]$: dans cet ensemble le « sup » de la partie vide est 0.

Dans le cas particulier où E est un espace vectoriel réel normé, et où les ensembles A et B considérés sont *convexes* non vides, on peut évaluer $e(A, B)$ à partir des *fonctions d'appui* de ces ensembles.

La section 3 définit, dans la ligne esquissée plus haut, la *rétraction* $\operatorname{ret}(A; s, t)$ de la multiapplication A sur l'intervalle $[s, t]$. On dit que A est à *rétraction finie* sur l'intervalle I si cette expression est finie pour tout $[s, t] \subset I$; dans ce cas on construit une fonction *rétraction indéfinie* $r: I \to \boldsymbol{R}$ (croissante au sens large) telle que

$$\operatorname{ret}(A; s, t) = r(t) - r(s).$$

En inversant l'ordre de $\boldsymbol{R}$, on définit de même l'*expansion* $\exp(A; s, t)$. La *variation* au sens de la distance de Hausdorff, notée $\operatorname{var}(A; s, t)$, majore évidemment rétraction et expansion; des relations plus précises sont formulées.

On dit que la multiapplication A est à rétraction finie continue (resp. absolument continue, resp. lipschitzienne) si la fonction numérique r est finie continue (resp. absolument continue, resp. lipschitzienne).

Une remarque techniquement utile est que, si A est à rétraction finie continue sur I, cette multiapplication possède une factorisation de la forme $A = L \circ c$, où c est une application continue strictement croissante de I sur un intervalle J et L une multiapplication de J dans E, à rétraction lipschitzienne de rapport 1.

On ne considère désormais que des multiapplications à rétraction finie. La section 4 débute par l'étude d'une multiapplication A définie au moins sur un intervalle ouvert à gauche $]t_1, t_2]$ et telle que la fonction (croissante au sens large) r soit bornée, d'où l'existence du réel $r^+(t_1)$, limite de r à droite du point t_1. On montre que A possède une *limite*, à droite du point t_1, notée $A^+(t_1)$, ensemble fermé éventuellement vide, c'est-à-dire que les ensembles appelés classiquement (cf. par exemple Berge [1]) *limite supérieure* et *limite inférieure* de A à droite du point t_1 sont égaux. Un ensemble B est contenu dans $A^+(t_1)$ si et seulement si

$$\lim_{t \downarrow t_1} e\big(B, A(t)\big) = 0 .$$

Lorsque les $A(t)$ sont contenus dans un compact fixe, $A^+(t_1)$ est aussi limite de $A(t)$ au sens de la distance de Hausdorff.

Passant au cas où la multiapplication A est définie et à rétraction finie au moins sur l'intervalle compact $[t_1, t_2]$, le § $4b$ établit

$$r^+(t_1) - r(t_1) = \lim_{t \downarrow t_1} e\big(A(t_1), A(t)\big) \leqslant e\big(A(t_1), A^+(t_1)\big) , \tag{1.3}$$

ce qui conduit en particulier, au § $4c$, à la formulation d'un certain nombre de propriétés équivalentes à la *continuité à droite* de la fonction r au point t_1.

Il est vital pour la suite de dégager des cas où le dernier membre de (1.3) se trouve égal aux deux premiers. Dans ce but sont examinées au § $4d$ trois éventualités mettant en jeu certaines *compacités*:

HYPOTHÈSE H_1. L'espace métrique E est tel que les boules fermées soient compactes.

HYPOTHÈSE H_2. E est l'espace de Banach dual d'un espace normé X et on suppose que les valeurs de A sont des ensembles fermés pour la topologie faible $\sigma(E, X)$ (exploitation la plus usuelle: cas où E est un espace de Banach réflexif et où les valeurs de A sont convexes fortement fermées).

HYPOTHÈSE H_3. L'espace métrique E est complet et les valeurs de A sont des ensembles compacts.

Une quatrième éventualité ferait logiquement pendant à H_2:

HYPOTHÈSE H_4. E est un espace de Banach et les valeurs de A sont faiblement compactes. Son étude est reportée au paragraphe final 5*e* où l'on montre qu'elle se ramène banalement à H_2.

Moyennant l'une quelconque de ces hypothèses, on montre que, si A est à rétraction bornée sur $]t_1, t_2]$, on a, pour tout $B \subset E$,

$$\lim_{t \downarrow t_1} e(B, A(t)) = e(B, A^+(t_1)) .$$

De là découlent, en particulier, des conditions assurant $A^+(t_1) \neq \emptyset$. Si, de plus, A est à rétraction finie sur $[t_1, t_2]$ on obtient l'égalité du dernier membre de (1.3) aux deux premiers.

Les *limites à gauche* ne semblent pas avoir, dans les applications de la théorie de la rétraction, la même utilité que les limites à droite. C'est pourquoi on se contente, au § 4*e*, de résumer un certain nombre de faits concernant ces limites, en renvoyant pour les démonstrations à Moreau [5] et [11].

Tout est alors prêt pour aborder, dans la 5-ème et dernière partie, les *theorèmes de sélection et d'approximation* qui constituent l'objet principal de cet article (et déjà annoncés sans démonstration dans Moreau [6]).

Soit I un intervalle de $\boldsymbol{R}$, contenant son origine t_0 et soit A une multiapplication à rétraction finie de I dans E; on fait l'une des hypothèses « H ». Alors quel que soit $a_0 \in A(t_0)$ (noter que l'existence d'un tel a_0 assure $A(t) \neq \emptyset$ pour tout $t \in I$) il existe une sélection $t \mapsto u(t) \in A(t)$ de la multiapplication A telle que $u(t_0) = a_0$ et que

$$\forall [s, t] \subset I: \ \operatorname{var}(u; s, t) \leqslant \operatorname{ret}(A; s, t) . \tag{1.4}$$

En particulier cette inégalité entraine que, si la multiapplication A est à rétraction finie continue (resp. absolument continue, resp. lipschitzienne), l'application u est à variation finie continue (resp. absolument continue, resp. lipschitzienne). Rappelons que la *variation* de la multiapplication A, au sens de la distance de Hausdorff, majore la rétraction; de là un cadre d'exploitation usuel de ce théorème qui contient, en particulier, un résultat de Kikuchi et Tomita [1] (sélections de multiapplications absolument continues ou lipschitziennes, à valeurs dans $\boldsymbol{R}^n$). Dans cet ordre d'idées, on trouvera dans Moreau [8], [10] des conditions assurant la continuité absolue de l'intersection de deux multiapplications à valeurs convexes dans un espace normé.

En passant par l'hypothèse H_3 et le plongement d'un espace métrique quelconque dans son complété on obtient que toute multiapplication à rétraction finie, à valeurs compactes dans un espace métrique, présente cette même possibilité de sélection.

La propriété d'approximation « à gauche » qui fait l'objet du § 5*c* joue un rôle essentiel dans l'étude du problème d'évolution (1.1). On note $\mathcal{T}(I)$ l'ensemble des partitions de l'intervalle I en sous-intervalles de forme quelconque (ouverts, fermés ou semi-ouverts, certains d'entre eux éventuellement réduits à des points), partitions qui soient *localement finies* dans le sens que tout compact de I est recouvert par un nombre fini de ces intervalles. Soit A une multiapplication à rétraction finie définie sur I et soit $P \in \mathcal{T}(I)$; on note A_P la multiapplication (dite localement en escalier) qui prend sur chaque intervalle I_i de P la valeur constante déterminée comme suit: $A_P(I_i) = A(t_i)$ si I_i contient son origine t_i et $A_P(I_i) = A^+(t_i)$ sinon.

Il est facile de construire $P \in \mathcal{T}(I)$ de façon que sur chaque intervalle de cette partition l'oscillation de la fonction r soit inférieure ou égale à un $\varepsilon > 0$ donné: prendre une partition localement finie de $\boldsymbol{R}$ en intervalles de longueur moindre que ε, puis prendre les images réciproques de ces intervalles par la fonction r (laquelle est croissante au sens large); avec une telle partition P, la Proposition 5*c* formule que, si l'une des hypothèses « H » est satisfaite, on a, pour tout $t \in I$,

$$e\big(A_P(t), A(t) \leqslant \varepsilon$$

et, pour tout sous-intervalle compact $[s, t]$ de I,

$$\operatorname{ret}(A_P; s, t) \leqslant \operatorname{ret}(A; s, t) + \varepsilon .$$

2. – Un ecart non symetrique sur l'ensemble des parties d'un espace métrique.

2*a*. *Excès d'un ensemble sur un autre.*

DEFINITION (2*a*). *Soit A et B deux sous-ensembles d'un espace metrique E; on appelle excès de A sur B l'expression suivante, à valeurs dans* $\overline{\boldsymbol{R}}_+ = [0, +\infty]$,

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) ,$$

où le sup *est pris au sens de l'ensemble ordonné* $\overline{\boldsymbol{R}}_+$ (dans cet ensemble, le sup de la partie vide est 0).

Il est évidemment indifférent de remplacer les ensembles considérés par leurs adhérences. En particulier

$$e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \operatorname{adh} B \,. \tag{2.1}$$

Noter que, si on prend pour A la partie vide de E, on obtient, quel que soit B (éventuellement vide lui-même),

$$e(\emptyset, B) = 0 \,. \tag{2.2}$$

En outre, pour tout $a \in E$ on a $d(a, \emptyset) = +\infty$ donc

$$A \neq \emptyset \Rightarrow e(A, \emptyset) = +\infty \,. \tag{2.3}$$

La classique *distance de Hausdorff* entre deux parties A et B de E s'écrit

$$h(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\} \,. \tag{2.4}$$

On voit qu'on peut, dans le maniement de cette dernière notion, aller jusqu'à la considération d'ensembles vides; cela permet des énoncés plus substantiels et plus cohérents.

Proposition (2*a*). *Si A, B, C sont trois parties quelconques de E, on a l'inégalité triangulaire*

$$e(A, C) \leqslant e(A, B) + e(B, C) \,. \tag{2.5}$$

En effet, pour un éventuel $\varrho \in \boldsymbol{R}$ strictement supérieur au second membre de (2.5), il existe σ et τ dans $\boldsymbol{R}$ tels que $\varrho = \sigma + \tau$ et que

$$\sigma > \sup_{a \in A} d(a, B) \,, \qquad \tau > \sup_{b \in B} d(b, C) \,.$$

Alors

$$\begin{aligned} \forall a \in A \,, \quad \exists b \in B\colon &\quad \sigma > d(a, b) \\ \forall b \in B\colon &\quad \tau > d(b, C) \,. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $a \in A$, on peut écrire

$$d(a, C) \leqslant d(a, b) + d(b, C) < \sigma + \tau = \varrho \,,$$

d'où $e(A, C) \leqslant \varrho$, ce qui prouve (2.5).

2b. La multiapplication « boule ».

Si b est un point de l'espace métrique E et si $\varrho \in \boldsymbol{R}_+$, nous notons $\beta(b, \varrho)$ (resp. $\beta_0(b, \varrho)$) la boule fermée (resp. ouverte) de centre b, de rayon ϱ.

On peut interpréter $b \mapsto \beta(b, \varrho)$ (resp. $b \mapsto \beta_0(b, \varrho)$) comme une multiapplication de E dans lui-même; alors, si B est une partie quelconque de E, la notation habituelle d'image d'un ensemble par une multiapplication fournit ici l'écriture

$$\beta(B, \varrho) = \bigcup_{b \in B} \beta(b, \varrho)$$

et une notation semblable avec β_0.

Appelons g la fonction définie, pour tout $x \in E$, par $g(x) = d(x, B)$ et considérons ses « tranches »:

$$g^<(\varrho) = \{x \in E \colon g(x) < \varrho\}$$
$$g^{\leqslant}(\varrho) = \{x \in E \colon g(x) \leqslant \varrho\} .$$

On trouve, pour tout $\varrho \in \boldsymbol{R}_+$,

$$g^<(\varrho) = \beta_0(B, \varrho) \subset \beta(B, \varrho) \subset g^{\leqslant}(\varrho) . \tag{2.6}$$

D'un autre côté (pour g fonction numérique quelconque, définie sur un ensemble E quelconque), si A est une partie de E, on établit aisément:

$$\begin{aligned} \sup g(A) &= \inf \{\varrho \colon A \subset g^<(\varrho)\} \\ &= \inf \{\varrho \colon A \subset g^{\leqslant}(\varrho)\} ; \end{aligned}$$

de là une nouvelle expression de $e(A, B)$:

En notant indifféremment B_ϱ l'un quelconque des quatre ensembles qui figurent en (2.6), *on a*

$$e(A, B) = \inf \{\varrho \in \boldsymbol{R}_+ \colon A \subset B_\varrho\} . \tag{2.7}$$

2c. Cas d'un espace vectoriel normé.

On suppose dans ce paragraphe que E est un espace vectoriel réel normé; la norme sera notée $|\cdot|$.

Si B est une partie *convexe* de cet espace vectoriel les quatre ensembles figurant en (2.6) sont convexes. Alors, si on note conv *l'enveloppe convexe* d'un ensemble, (2.7) montre que

$$B \text{ convexe} \Rightarrow e(A, B) = e(\operatorname{conv} A, B) .$$

Soit F le *dual topologique* de E; on note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la forme bilinéaire de cette dualité.

A toute partie C de E, on associe sa *fonction d'appui* γ, définie sur F par

$$\gamma(y) = \sup_{x\in C} \langle x, y\rangle \,.$$

C'est la *fonction polaire* de ψ_C, *fonction indicatrice* de C (i.e. $\psi_C(x) = 0$ si $x \in C$ et $\psi_C(x) = +\infty$ si $x \notin C$); pour l'usage fait ici de la théorie des fonctions polaires, consulter Laurent [1] ou Moreau [1].

Soit γ et γ' les fonctions d'appui de deux parties *convexes* C et C' de E, *supposées non vides.* Pour tout $a \in E$, on a

$$\begin{aligned} d(a, C') = \inf_{x'\in C'} |a - x'| &= \inf_{x'\in E} [\psi_{C'}(x') + |a - x'|] \\ &= (\psi_{C'}\nabla|\cdot|)(a)\,. \end{aligned}$$

La fonction polaire de l'*inf-convolution* $\psi_{C'}\nabla|\cdot|$ est la somme des fonctions polaires de $\psi_{C'}$ et de $|\cdot|$, à savoir, respectivement γ' et ψ_B, en désigant ici par B la *boule unité fermée* de F. Comme par ailleurs $|\cdot|$ est convexe partout finie et continue, que $\psi_{C'}$ est convexe (et finie en un point au moins puisque C' est non vide), la fonction $\psi_{C'}\nabla|\cdot|$ est convexe partout finie et continue, donc égale à sa bipolaire. Cela donne

$$d(a, C') = \sup_{y\in F} [\langle a, y\rangle - \gamma'(y) - \psi_B(y)] = \sup_{y\in B} [\langle a, y\rangle - \gamma'(y)]\,.$$

En théorie des fonctions polaires les « sup » sont naturellement pris au sens de l'ordre de $\overline{\boldsymbol{R}}$. Comme C et C' sont non vides, ces mêmes « sup » peuvent être employés dans la définition de e; donc

$$e(C, C') = \sup_{a\in C}\sup_{y\in B} [\langle a, y\rangle - \gamma'(y)] = \sup_{y\in B}\sup_{a\in C} [-\gamma'(y) \dot{+} \langle a, y\rangle]$$

où l'opération $\dot{+}$ prolonge l'addition classique selon la convention $(+\infty)\,\dot{+}\,(-\infty) = -\infty$. On invoque alors une règle de calcul des « sup », encore valable avec cette addition prolongée (cf. Moreau [2]).

$$e(C, C') = \sup_{y\in B} [-\gamma'(y) \dot{+} \sup_{y\in C} \langle a, y\rangle] = \sup_{y\in B} [-\gamma'(y) \dot{+} \gamma(y)]\,.$$

D'ailleurs comme γ et γ' sont positivement homogènes il est équivalent d'entendre B comme boule unité ouverte; bref:

Si C et C' sont deux parties convexes non vides de E et si B est la boule unité fermée (resp. ouverte) de F, on a, en faisant la convention $\infty - \infty = -\infty$,

$$e(C, C') = \sup_{y \in B} [\gamma(y) - \gamma'(y)] . \tag{2.8}$$

Vu cette convention, tout y tel que $\gamma'(y) = +\infty$ peut être omis dans la construction du « sup », c'est-à-dire que (on note classiquement $\operatorname{dom}\gamma' = \{y \in F : \gamma'(y) < +\infty\}$)

$$e(C, C') = \sup_{y \in B \cap \operatorname{dom}\gamma'} [\gamma(y) - \gamma'(y)] .$$

On en tire en particulier l'implication

$$e(C, C') < +\infty \Rightarrow \operatorname{dom}\gamma' \subset \operatorname{dom}\gamma . \tag{2.9}$$

On sait que, si les convexes C et C' sont *fermés*, leurs *cônes asymptotiques* C_∞ et C'_∞ (ou *cônes de récession*) sont respectivement les cônes polaires, au sens de la dualité (F, E), des cônes convexes $\operatorname{dom}\gamma$ et $\operatorname{dom}\gamma'$; (2.9) fournit donc l'implication

$$e(C, C') < +\infty \Rightarrow C_\infty \subset C'_\infty .$$

Le cas le plus simple est celui où C et C' sont bornés; alors évidemment $e(C, C') < +\infty$ *et, d'ailleurs,* $\operatorname{dom}\gamma = \operatorname{dom}\gamma' = F$.

3. – Retraction d'une multiapplication.

3a. *Définition.*

Soit $t \mapsto A(t)$ une multiapplication d'un intervalle I de $\boldsymbol{R}$ dans l'espace métrique E. Soient s et t dans I, avec $s \leqslant t$. Pour toute subdivision finie S de l'intervalle $[s, t]$, à savoir

$$S: \quad s = \tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_n = t , \tag{3.1}$$

notons

$$R(S) = \sum_{i=1}^{n} e\big(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)\big) \in \boldsymbol{R}_+ . \tag{3.2}$$

Le sup *de $R(S)$ pour S décrivant l'ensemble des subdivisions finies de* $[s, t]$ *est appelé rétraction de la multiapplication A sur l'intervalle* $[s, t]$; *notation* $\operatorname{ret}(A; s, t)$ *(à valeurs dans* $\overline{\boldsymbol{R}}_+$*).*

La multiapplication $\tau \mapsto \operatorname{adh} A(\tau)$ a même rétraction que A.

Evidemment, si $[\sigma, \tau]$ est un sous-intervalle de $[s, t]$,

$$e(A(\sigma), A(\tau)) \leqslant \operatorname{ret}(A; \sigma, \tau) \leqslant \operatorname{ret}(A; s, t) . \tag{3.3}$$

Il résulte alors de (2.1) que $\operatorname{ret}(A; s, t) = 0$ si et seulement si la multiapplication $\tau \mapsto \operatorname{adh} A(\tau)$ est (non strictement) croissante sur l'intervalle $[s, t]$.

3b. Additivité.

L'ensemble $\mathcal{S}(s, t)$ des subdivisions finies de $[s, t]$, ordonné par l'inclusion, est filtrant à droite. Et il résulte de l'inégalité triangulaire que la fonction numérique $S \mapsto R(S)$ est croissante sur cet ensemble ordonné: son « sup » est donc aussi bien sa *limite* suivant la base de filtre des sections de l'ensemble ordonné.

Soit $s \leqslant t \leqslant u$ dans I; la réunion d'une subdivision finie S de $[s, t]$ et d'une subdivision finie S' de $[t, u]$ fournit une subdivision finie de $[s, u]$, soit S'', admettant t pour noeud et

$$R(S'') = R(S) + R(S') .$$

Comme l'ensemble des subdivisions finies de $[s, u]$ admettant t pour noeud est visiblement cofinal dans l'ordonné $\mathcal{S}(s, u)$, il vient à la limite:

$$\operatorname{ret}(A; s, u) = \operatorname{ret}(A; s, t) + \operatorname{ret}(A; t, u) . \tag{3.4}$$

Soit t_0 un « point de repère » dans I; pour tout $t \in I$ posons

$$r(t) = \begin{cases} \operatorname{ret}(A; t_0, t) & \text{si } t_0 \leqslant t \\ -\operatorname{ret}(A; t, t_0) & \text{si } t \leqslant t_0 . \end{cases} \tag{3.5}$$

On tire d'abord de (3.4) que la fonction r ainsi définie sur I (on peut l'appeler *rétraction indéfinie* de A) est *croissante*. En outre, si deux des trois quantités écrites en (3.4) sont finies, la troisième l'est aussi; par suite:

La fonction r est partout finie sur I si et seulement si $\operatorname{ret}(A; s, t) < +\infty$ *pour tout sous-intervalle* $[s, t] \subset I$; *on dit alors que la multiapplication A est à rétraction finie sur I*; *dans ce cas* (3.4) *donne*

$$\operatorname{ret}(A; s, t) = r(t) - r(s) .$$

On dit que la multiapplication A est à rétraction bornée sur I si la fonction r est bornée.

REMARQUE. (2.2) montre que si $A(t)$ est *vide* pour tout $t \in [t_1, t_2[$, on a $\operatorname{ret}(A; t_1, t_2) = 0$.

Par ailleurs supposons A à rétraction finie sur I et soit $t_1 \in I$; si $A(t_1) \neq \emptyset$, (2.3) montre que $A(t) \neq \emptyset$ pour tout $t > t_1$. De même si $A(t_1) = \emptyset$, (2.3) montre que $A(t) = \emptyset$ pour tout $t < t_1$.

3c. *Expansion, rétraction et variation.*

De la même manière, on peut poser

$$P(S) = \sum_{i=1}^{n} e\big(A(\tau_i), A(\tau_{i-1})\big) \in \overline{\boldsymbol{R}}_+ .$$

Le « sup » *de* $P(S)$, *pour* S *décrivant l'ensemble des subdivisions finies de* $[s, t]$ *est appelé expansion de la multiapplication* A *sur l'intervalle* $[s, t]$; *notation* $\exp(A; s, t)$.

Il vient cette fois $\exp(A; s, t) = 0$ si et seulement si la multiapplication $\tau \mapsto \operatorname{adh} A(\tau)$ est (non strictement) décroissante sur l'intervalle $[s, t]$.

Il est classique, par ailleurs, d'appeler *variation* de la multiapplication A sur $[s, t]$, notation $\operatorname{var}(A; s, t)$, le « sup » de

$$V(S) = \sum_{i=1}^{n} h\big(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)\big) .$$

La définition (2.4) de la distance de Hausdorff h impliquant

$$h\big(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)\big) \leqslant e\big(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)\big) + e\big(A(\tau_i), A(\tau_{i-1})\big) ,$$

on obtient

$$\begin{aligned} (3.6) \qquad \max\{\operatorname{ret}(A; s, t), \exp(A; s, t)\} &\leqslant \operatorname{var}(A; s, t) \\ &\leqslant \operatorname{ret}(A; s, t) + \exp(A; s, t) . \end{aligned}$$

La multiapplication A est donc à *variation finie* sur l'intervalle I si et seulement si elle est à la fois à rétraction finie et à expansion finie. Dans ce cas, choisissons, comme en (3.5), un point de repère t_0 dans I et définissons la fonction *expansion indéfinie* de A:

$$p(t) = \begin{cases} \exp(A; t_0, t) & \text{si } t_0 \leqslant t \\ -\exp(A; t, t_0) & \text{si } t \leqslant t_0 \end{cases}$$

ainsi que la fonction *variation indéfinie* de A:

$$v(t) = \begin{cases} \operatorname{var}(A; t_0, t) & \text{si } t_0 \leqslant t \\ -\operatorname{var}(A; t, t_0) & \text{si } t \leqslant t_0 . \end{cases}$$

De (3.6) résultent des inégalités entre les trois fonctions r, p, v; mais, de façon plus précise, *la donnée de* r *et* p *détermine* v. La construction peut se décrire comme suit. Notons a l'application $t \mapsto (r(t), p(t))$ de I dans $\boldsymbol{R}^2$; munissons $\boldsymbol{R}^2$ de la norme

$$\|(x_1, x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\} . \tag{3.7}$$

Alors, au sens de cette métrique de $\boldsymbol{R}^2$, *on trouve aisément que la variation de* a *sur un intervalle* $[s, t]$ *est*

$$\operatorname{var}(a; s, t) = \operatorname{var}(A; s, t) , \tag{3.8}$$

de sorte que la fonction v *est variation indéfinie de l'application* a.

3d. Rétraction continue, absolument continue ou lipschitzienne.

On dit que la multiapplication A *est à rétraction finie continue si la fonction numérique* r *est finie et continue.*

On dit que A *est à rétraction absolument continue* (*resp. localement absolument continue*) *sur l'intervalle* I *si la fonction numérique* r *est finie et absolument continue* (*resp. localement absolument continue*) *sur cet intervalle. Cela équivaut à l'existence d'une vitesse de rétraction* $\dot{r}$, *fonction positive appartenant à* $L^1(I)$ (*resp. appartenant à* $L^1_{\text{loc}}(I)$) *telle que*

$$\forall [s, t] \subset I : \quad e(A(s), A(t)) \leqslant \int_s^t \dot{r}(\tau)\, d\tau .$$

La caractérisation classique des fonctions numériques absolument continues fournit en outre:

La multiapplication A *est à rétraction absolument continue sur l'intervalle compact* $[s, t]$ *si et seulement si à tout* $\varepsilon > 0$ *on peut associer* $\eta > 0$ *tel que, pour les familles finies d'intervalles ouverts* $]\sigma_i, \tau_i[\subset [s, t]$ *deux à deux disjoints, on ait l'implication*

$$\sum_i (\tau_i - \sigma_i) < \eta \Rightarrow \sum_i e(A(\sigma_i), A(\tau_i)) < \varepsilon .$$

Par ailleurs:

On dit que la multiapplication A est à rétraction lipschitzienne de rapport ℓ sur I si la fonction numérique r est (finie et) lipschitzienne de rapport ℓ sur I.

Cela équivaut à

$$\forall [s, t] \subset I: \quad e\big(A(s), A(t)\big) \leqslant (t-s)\ell \,.$$

Il faut et il suffit pour cela que A soit à rétraction localement absolument continue avec $\dot{r} \leqslant \ell$ presque partout.

Evidemment, si la multiapplication A est à *variation* localement absolument continue, au sens de la distance de Hausdorff, ce qui équivaut à l'existence d'une *vitesse de variation* $\dot{v}$, fonction positive appartenant à $L^1_{\mathrm{loc}}(I)$, l'inégalité (3.6) fait qu'a fortiori A est à rétraction localement absolument continue, avec $\dot{r} \leqslant \dot{v}$ presque partout.

3e. *Changement de variable.*

Soit π une application surjective croissante (peut-être non strictement) d'un intervalle I' de $\boldsymbol{R}$ sur l'intervalle I; cette application est continue. On note naturellement $A \circ \pi$ la multiapplication $t' \mapsto A\big(\pi(t')\big)$ de I' dans E. Soit $[s', t'] \subset I'$; on vérifie immédiatement que

$$\operatorname{ret}(A\circ\pi; s', t') = \operatorname{ret}\big(A; \pi(s'), \pi(t')\big)\,.$$

Par suite, si la fonction $r: I \to \boldsymbol{R}$ est rétraction indéfinie de A, la fonction $r \circ \pi$ est rétraction indéfinie de $A \circ \pi$.

Vient alors une propriété de factorisation:

PROPOSITION (3e). *Si la multiapplication A est à rétraction finie continue sur I, il existe une application c continue strictement croissante de I sur un intervalle J et une multiapplication L de J dans E, à rétraction lipschitzienne de rapport* 1, *telles que $A = L \circ c$.*

En effet, si la fonction r est finie et continue, l'application $c: t \mapsto t + r(t)$ est continue strictement croissante, donc bijective de I sur un intervalle J. Soit $[\sigma, \tau] \subset J$; posons $s = c^{-1}(\sigma)$, $t = c^{-1}(\tau)$. La multiapplication $L = A \circ c^{-1}$ donne lieu à l'inégalité

$$e\big(L(\sigma), L(\tau)\big) = e\big(A(s), A(t)\big) \leqslant r(t) - r(s) \leqslant \tau - \sigma \,.$$

REMARQUE. Dans le cas particulier où la fonction rétraction r est *strictement croissante*, il est possible de prendre $c = r$, ce qui fournit pour la multiapplication $L = A \circ c^{-1}$ une vitesse de rétraction partout égale à 1. Par contre, s'il existe un intervalle $[t_1, t_2]$ sur lequel la fonction r est constante sans que A le soit, toute application croissante c assurant une factorisation de la forme $A = L \circ c$ enverra $[t_1, t_2]$ sur un intervalle non nul; la vitesse de rétraction de L sera nulle sur ce dernier intervalle.

La situation analogue concernant la *variation*, au sens de la distance de Hausdorff, est plus simple, du moins si l'on suppose A à valeurs *fermées*. Dans ce cas, en effet, la fonction v, variation indéfinie de A, supposée finie et continue, permet toujours une factorisation de la forme $A = L \circ v$ car, sur tout intervalle où v serait constante, la multiapplication A sera constante aussi; cette multiapplication L possède une *vitesse de variation* partout égale à 1.

3f. Cas d'un espace normé.

On suppose dans ce paragraphe que E est un espace vectoriel réel normé, et on introduit, comme en 2c, les *fonctions d'appui* de parties convexes de E.

PROPOSITION (3f). *Soit $t \mapsto C(t)$ une multiapplication d'un intervalle I dans un espace vectoriel réel normé E, à valeurs convexes non vides; on note $y \mapsto \gamma(t, y)$ la fonction d'appui de $C(t)$ definie sur le dual topologique F de E. La multiapplication C est à rétraction finie (resp. à rétraction continue finie, resp. à rétraction absolument continue, resp. à rétraction lipschitzienne de rapport ℓ) si et seulement si il existe une fonction numérique croissante finie (resp. continue finie, resp. absolument continue, resp. lipschitzienne de rapport ℓ), soit $\varrho: I \to \mathbf{R}$, telle que pour tout $[s, t] \subset I$, on ait, avec la convention $\infty - \infty = -\infty$,*

$$\forall y \in F: \gamma(s, y) - \gamma(t, y) \leqslant |y|\big(\varrho(t) - \varrho(s)\big), \tag{3.9}$$

ou, de façon équivalente,

$$\forall y \in B: \gamma(s, y) - \gamma(t, y) \leqslant \varrho(t) - \varrho(s), \tag{3.10}$$

B désignant la boule unité fermee (resp. ouverte) de F.

DÉMONSTRATION. L'équivalence de (3.9) et (3.10) résulte de ce que les fonctions d'appui sont positivement homogènes.

Si la multiapplication C est à rétraction finie, la fonction croissante r définie en 3b fournit l'inégalité

$$e\big(C(s), C(t)\big) \leqslant r(t) - r(s),$$

donc, en invoquant (2.8),

$$\forall y \in B: \gamma(s, y) - \gamma(t, y) \leqslant r(t) - r(s),$$

d'où (3.10) avec $r = \varrho$. Cela prouve la partie « seulement si » de la proposition.

Inversement, en invoquant (2.8), la condition (3.10) implique, pour tous les intervalles $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ déterminés par une subdivision de $[s, t]$,

$$e\big(C(\tau_{i-1}), C(\tau_i)\big) \leqslant \varrho(\tau_i) - \varrho(\tau_{i-1}).$$

Par suite, en revenant à la définition de la rétraction de C sur $[s, t]$,

$$r(t) - r(s) = \operatorname{ret}(C; s, t) \leqslant \varrho(t) - \varrho(s).$$

Les propriétés évoquées pour ϱ dans l'énoncé impliquent donc ces mêmes propriétés pour r.

Remarque. La proposition ci-dessus montre que, si la multiapplication C est à rétraction finie, la multiapplication $t \mapsto \operatorname{dom} \gamma(t, \cdot)$ de I dans F est (non strictement) *décroissante.*

4. – Limites à droite.

4a. *Limite à droite d'une multiapplication à rétraction bornée.*

Soit E un espace métrique; on suppose que la multiapplication $t \mapsto A(t) \subset E$ est definie au moins sur un intervalle ouvert à gauche $]t_1, t_2]$, à *rétraction bornée* sur cet intervalle. La fonction r, rétraction indéfinie de A, définie sur cet intervalle à partir d'un « point de repère » quelconque, est une fonction numérique croissante et minorée d'où l'existence du réel

$$\lim_{t \downarrow t_1} r(t) = \inf_{t \in]t_1, t_2]} r(t), \quad \text{noté } r^+(t_1). \tag{4.1}$$

Les notions générales de *limite inférieure* et de *limite supérieure* d'une famille d'ensembles (cf. C. Berge [1]) se particularisent ici de la façon suivante: la limite inférieure de la multiapplication A à droite du point t_1 est l'ensemble (fermé, éventuellement vide):

$$\lim_{t \downarrow t_1} \cdot \inf A(t) = \{x \in E: \lim_{t \downarrow t_1} d\big(x, A(t)\big) = 0\}; \tag{4.2}$$

la limite supérieure est l'ensemble (fermé, éventuellement vide, en tout cas contenant le précédent):

$$\text{(4.3)}\qquad \lim_{t\downarrow t_1}\cdot\sup A(t)=\{x\in E\colon\ 0 \text{ est valeur d'adhérence de la fonction } t\mapsto d(x, A(t)) \text{ pour } t\downarrow t_1\}\,.$$

Autrement dit, x appartient à la limite inférieure (resp. supérieure) si et seulement si il existe une *sélection* de A, soit $t\mapsto u(t)\in A(t)$, admettant x comme limite (resp. valeur d'adhérence) pour $t\downarrow t_1$. On peut écrire aussi $(T\in]t_1, t_2]$ choisi indifféremment):

$$\text{(4.4)}\qquad \lim_{t\downarrow t_1}\cdot\sup A(t)=\bigcap_{\theta\in]t_1,T[}\mathit{adh}\bigcup_{\tau\in]t_1,\theta]}A(\tau)\,.$$

PROPOSITION (4*a*). *On suppose que la multiapplication A est à rétraction bornée sur $]t_1, t_2]$. Les ensembles* (4.2) *et* (4.3) *sont égaux à un ensemble* (*éventuellement vide*) *qu'on notera $A^+(t_1)$. Un ensemble B est contenud ans $A^+(t_1)$ si et seulement si*

$$\text{(4.5)}\qquad \lim_{t\downarrow t_1} e(B, A(t))=0\,.$$

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que, si on note A^1 l'ensemble limite supérieure écrit en (4.3), on a

$$\text{(4.6)}\qquad \lim_{t\downarrow t_1} e(A^1, A(t))=0$$

et, plus précisément, pour tout $t\in]t_1, t_2]$,

$$\text{(4.7)}\qquad e(A^1, A(t))\leqslant r(t)-r^+(t_1)$$

(inégalité banalement vérifiée si $A^1=\emptyset$), ce qui signifie que, pour tout $a\in A^1$,

$$\text{(4.8)}\qquad d(a, A(t)\leqslant \sup\{\mathrm{ret}(A;\tau, t)\colon \tau\in]t_1, t]\}\,.$$

Soit $\varrho\in\boldsymbol{R}$, strictement inférieur au premier membre de (4.8); il existe $\varepsilon>0$ tel que $\varrho+\varepsilon<d(a, A(t))$. Puisque $a\in A^1$, il existe $\tau\in]t_1, t]$ tel que $d(a, A(\tau))<\varepsilon$, d'où

$$\text{(4.9)}\qquad \varrho+d(a, A(\tau))<d(a, A(t))\,.$$

En appliquant l'inégalité triangulaire (2.5) aux trois ensembles $\{a\}$, $A(\tau)$ et $A(t)$, on a

$$d(a, A(t))\leqslant d(a, A(\tau))+e(A(\tau), A(t))\leqslant d(a, A(\tau))+\mathrm{ret}(A;\tau, t)\,.$$

Par addition avec (4.9), il vient $\varrho < \mathrm{ret}(A; \tau, t)$, ce qui établit (4.8) (noter qu'on peut supposer ici les ensembles $A(\tau)$ et $A(t)$ non vides, sans quoi, en vertu de l'hypothèse de rétraction finie, la multiapplication A prendrait des valeurs vides sur un voisinage de t_1, ce qui ramène au cas banal $A^1 = \emptyset$).

A fortiori, (4.6) entraîne, par l'inégalité triangulaire, que tout $B \subset A^1$ vérifie (4.5).

Inversement, un ensemble B vérifiant (4.5) est contenu dans l'ensemble limite inférieure écrit en (4.2), puisque pour tout $x \in B$ on a $d(x, A(t)) \leqslant e(B, A(t))$. En particulier, (4.6) montre que tel est le cas pour $B = A^1$ et cela achève la démonstration.

Définition. *On dira que la valeur commune $A^+(t_1)$ des ensembles* (4.2) *et* (4.3) *est la limite de la multiapplication A à droite du point t_1 (ensemble fermé, éventuellement vide).*

Remarque 1. Si E est un espace vectoriel normé et si les valeurs de A sont des ensembles *convexes*, on trouve aisément que $A^+(t_1)$ est convexe.

Remarque 2. Supposant toujours que la multiapplication A est définie et à rétraction bornée sur $]t_1, t_2]$, prolongeons-la en une multiapplication $\hat{A}$ définie sur $[t_1, t_2]$ en choisissant pour $\hat{A}(t_1)$ une partie quelconque de E. On vérifie aisément que la condition $e(\hat{A}(t_1), A^+(t_1)) < +\infty$ est suffisante mais non nécessaire pour que la multiapplication $\hat{A}$ soit à rétraction finie sur $[t_1, t_2]$.

Remarque 3. *Si les ensembles $A(t)$ sont contenus dans un compact fixe K, l'ensemble $A^+(t_1)$ est aussi limite de $A(t)$, au sens de la distance de Hausdorff, pour $t \downarrow t_1$.* Il suffit pour le prouver d'établir

$$\lim_{t \downarrow t_1} e(A(t), A^+(t_1)) = 0 .$$

S'il n'en était pas ainsi, il existerait $\alpha > 0$ et une suite (τ_n), convergeant vers t_1 dans $]t_1, t_2]$, telle que

$$e(A(\tau_n), A^+(t_1)) > \alpha .$$

Dans cette hypothèse, pour chaque n, on peut choisir $x_n \in A(\tau_n)$ tel que $d(x_n, A^+(t_1)) > \alpha$; la suite (x_n), prenant ses valeurs dans K possède une valeur d'adhérence soit a. La continuité de la fonction $x \mapsto d(x, A^+(t_1))$ fait que $d(a, A^+(t_1)) \geqslant \alpha$. Mais a appartient à $A^+(t_1)$, en vertu, par exemple, de l'expression (4.4) de cet ensemble, d'où contradiction.

4b. Saut de r à droite d'un point.

On suppose maintenant que la multiapplication A est définie et à rétraction finie sur l'intervalle compact non réduit à un point $[t_1, t_2]$; on note r la fonction rétraction indéfinie construite à partir d'un point de repère quelconque.

L'écriture $t \downarrow t_1$ signifiera naturellement que t *tend vers* t_1 *dans* $]t_1, t_2]$. Comme la fonction r est croissante on est assuré de l'existence du réel

$$\lim_{t \downarrow t_1} \operatorname{ret}(A; t_1, t) = r^+(t_1) - r(t_1) = \inf_{t \in]t_1, t_2]} \operatorname{ret}(A; t_1, t) \geqslant 0 .$$

Alors:

PROPOSITION (4*b*). *On a*

$$r^+(t_1) - r(t_1) = \lim_{t \downarrow t_1} e(A(t_1), A(t)) \leqslant e(A(t_1), A^+(t_1)) . \tag{4.10}$$

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon > 0$; il existe une subdivision de $[t_1, t_2]$, notons-la

$$t_1 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = t_2 ,$$

telle que

$$\operatorname{ret}(A; t_1, t_2) \leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} e(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)) .$$

Si $t \in]t_1, \tau_1[$ il en résulte, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \operatorname{ret}(A; t_1, t_2) &\leqslant \varepsilon + e(A(t_1), A(t)) + e(A(t), A(\tau_1)) + \sum_{i=2}^{n} e(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)) \\ &\leqslant \varepsilon + e(A(t_1), A(t)) + \operatorname{ret}(A; t, t_2) . \end{aligned}$$

De là l'implication

$$t \in]t_1, \tau_1[\Rightarrow \operatorname{ret}(A; t_1, t) \leqslant \varepsilon + e(A(t_1), A(t))$$

et comme, essentiellement,

$$e(A(t_1), A(t)) \leqslant \operatorname{ret}(A; t_1, t) ,$$

cela démontre l'égalité en (4.10).

Par ailleurs

$$e(A(t_1), A(t)) \leqslant e(A(t_1), A^+(t_1)) + e(A^+(t_1), A(t)) .$$

Pour $t\downarrow t_1$, $t\in]t_1, t_2]$, le dernier terme tend vers zéro d'après la Proposition $4a$; cela établit l'inégalité en (4.10) (noter qu'elle est banale si $A(t_1)$ ou $A^+(t_1)$ sont vides).

REMARQUE. L'exemple suivant montre que l'inégalité en (4.10) peut être stricte. On prend pour E la réunion du demi-plan ouvert $\{(x, y)\in \boldsymbol{R}^2 : x>0\}$ et des deux points $p=(0, 1)$ et $q=(0, -1)$; on munit E de la distance euclidienne de $\boldsymbol{R}^2$. On définit

$$A(t)=\left|\begin{array}{ll}\{(x, y)\in E : x=t-t_1,\ y\geqslant 0\} & \text{si } t>t_1\\ \{q\} \quad \text{si } t=t_1 & \end{array}\right.$$

qui est bien une multiapplication à rétraction finie. On trouve $A^+(t_1)=\{p\}$, d'où $e\big(A(t_1), A^+(t_1)\big)=2$ et

$$\lim_{t\downarrow t_1} e\big(A(t_1), A(t)\big)=1 .$$

4c. *Continuité de la fonction r à droite.*

PROPOSITION (4c). *Si la multiapplication A de $[t_1, t_2]$ dans l'espace métrique E est à rétraction finie, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) *La fonction numérique r est continue à droite au point t_1.*

ii) $\lim_{t\downarrow t_1} e\big(A(t_1), A(t)\big)=0$.

iii) $A(t_1)\subset A^+(t_1)$.

iv) *La famille de fonctions numériques $t\mapsto d\big(a, A(t)\big)$ est équi-semi-continue supérieurement à droite au point t_1, c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\theta\in]t_1, t_2]$ tel que*

$$\forall t\in [t_1, \theta[, \qquad \forall a\in E:\ d\big(a, A(t)\big)\leqslant d\big(a, A(t_1)\big)+\varepsilon$$

(propriétés banales si $A(t_1)=\emptyset$).

DÉMONSTRATION. L'équivalence de i) et ii) résulte de la Proposition ($4b$); l'équivalence de ii) et iii) résulte de la Proposition ($4a$).

Que ii) entraîne iv) résulte de l'inégalité triangulaire

$$d\big(a, A(t)\big)\leqslant d\big(a, A(t_1)\big)+e\big(A(t_1), A(t)\big) .$$

Inversement, supposer iv) fournit, en prenant $a \in A(t_1)$,

$$\forall t \in [t_1, \theta[: \sup_{a \in A(t_1)} d(a, A(t)) \leqslant \varepsilon$$

d'où ii).

COROLLAIRE (4c). *Si la fonction r est continue à droite au point t_1, la multiapplication A est semi-continue inférieurement à droite au point t_1, dans le sens classique suivant: pour tout ouvert Ω tel que $\Omega \cap A(t_1) \neq \emptyset$, il existe $\theta \in]t_1, t_2]$ tel que*

$$\forall t \in [t_1, \theta[: \Omega \cap A(t) \neq \emptyset .$$

Si on fait l'hypothèse additionnelle que l'ensemble $A(t_1)$ est précompact, cette semi-continuité inférieure implique réciproquement la continuité de r à droite au point t_1.

En effet, si $\Omega \cap A(t_1) \neq \emptyset$, il existe β, boule ouverte de rayon $\varepsilon > 0$ de centre $a \in A(t_1)$, contenue dans Ω. Si la propriété ii) a lieu, il existe $\theta \in]t_1, t_2]$ tel que

$$t \in [t_1, \theta[\Rightarrow e(A(t_1), A(t)) < \varepsilon \Rightarrow d(a, A(t)) < \varepsilon \Rightarrow \beta \cap A(t) \neq \emptyset .$$

Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$; on suppose $A(t_1)$ précompact: il existe un recouvrement de cet ensemble par une famille finie de boules ouvertes β_i, de rayon $\leqslant \varepsilon/2$. Si la multiapplication A est s.c.i. à droite au point t_1, il existe pour chaque β_i d'intersection non vide avec $A(t_1)$ un $\theta_i \in]t_1, t_2]$ tel que $t \in [t_1, \theta_i[$ assure $\beta_i \cap A(t) \neq \emptyset$; donc pour ces valeurs de t on a

$$\forall a \in \beta_i : d(a, A(t)) < \varepsilon .$$

Comme les β_i forment un recouvrement de $A(t_1)$, on voit qu'en prenant pour θ le plus petit des θ_i, on a l'implication

$$t \in]t_1, \theta[\Rightarrow \sup_{a \in A(t_1)} d(a, A(t)) \leqslant \varepsilon$$

d'où la propriété ii) de la Proposition (4c).

4d. Hypothèses de compacité.

On sera conduit plusieurs fois dans la suite à faire l'une des trois hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSE H_1. *L'espace métrique E est tel que les boules fermées soient compactes.*

Hypothèse H_2. *E est l'espace de Banach dual d'un espace normé X et on suppose que les valeurs de la multiapplication A sont des ensembles fermés pour la topologie faible $\sigma(E, X)$.*

Hypothèse H_3. *L'espace métrique E est complet et les valeurs de la multiapplication A sont des ensembles compacts.*

Proposition (4*d*). *Soit $t_1 < t_2$; on fait l'une des trois hypothèses ci-dessus et on suppose que la multiapplication A est à rétraction bornée sur l'intervalle $]t_1, t_2]$. Alors pour toute partie B de E, on a*

$$\lim_{t \downarrow t_1} e(B, A(t)) = e(B, A^+(t_1)) . \tag{4.11}$$

Dans l'hypothèse H_2, l'ensemble $A^+(t_1)$ est fermé pour $\sigma(E, X)$; dans l'hypothèse H_3, *cet ensemble est compact, d'ailleurs non vide si les $A(t)$ sont non vides.*

Démonstration. On observe d'abord que

$$e(B, A(t)) \leqslant e(B, A^+(t_1)) + e(A^+(t_1), A(t)) ;$$

la Proposition 4*a* montre que le dernier terme a pour limite zéro, d'où

$$\lim_{t \downarrow t_1} \cdot \sup e(B, A(t)) \leqslant e(B, A^+(t_1)) .$$

On va établir par ailleurs que

$$\lim_{t \downarrow t_1} \cdot \inf e(B, A(t)) \geqslant e(B, A^+(t_1))$$

(tout est trivial si $B = \emptyset$) en prouvant que, pour tout $b \in E$,

$$\lim_{t \downarrow t_1} \cdot \inf d(b, A(t)) \geqslant d(b, A^+(t_1)) . \tag{4.12}$$

La démonstration est superflue pour tout b tel que le premier membre de (4.12) vaille $+\infty$ (noter en passant que l'existence d'un tel b exige $A^+(t_1) = \emptyset$; en effet, pour $a \in A^+(t_1)$, on a $d(b, A(t)) \leqslant d(b, a) + d(a, A(t))$ et le dernier terme tend vers zéro, d'après la Proposition 4*a*). Soit $\varrho \in \boldsymbol{R}$ strictement supérieur à ce premier membre; cela veut dire, en appelant β la boule fermée de centre b, de rayon ϱ, qu'il existe une suite infinie décroissante (τ_n) d'éléments de $]t_1, t_2]$, tendant vers t_1, et une suite (x_n) telle que $x_n \in A(\tau_n) \cap \beta$.

Cas de l'hypothèse H_1. La boule β étant compacte la suite (x_n) possède au moins une valeur d'adhérence, soit x, laquelle appartient à cette boule et aussi à la limite supérieure de $A(t)$ pour $t\downarrow t_1$, c'est-à-dire $A^+(t_1)$; donc $\varrho \geqslant d(b, A^+(t_1))$ et cela établit (4.12).

Cas de l'hypothèse H_2. La boule β est, dans ce cas, compacte pour la topologie faible $\sigma(E, X)$; la suite (x_n) possède donc une valeur d'adhérence faible, soit x, qui appartient à la *limite supérieure faible* de $A(t)$ pour $t\downarrow t_1$, c'est-à-dire à l'ensemble

$$\sigma\text{-}\lim_{t\downarrow t_1}\cdot\sup A(t) = \bigcap_{\theta>t_1} \sigma\text{-}adh \bigcup_{\tau\in]t_1,\theta]} A(\tau)\,. \tag{4.13}$$

On termine en prouvant que cet ensemble, a priori plus grand que $A^+(t_1)$, lui est en fait égal. Plus précisément, pour tout a dans l'ensemble en question et tout t dans $]t_1, t_2]$, montrons que

$$d(a, A(t)) \leqslant r(t) - r^+(t_1) \tag{4.14}$$

(inégalité triviale si le premier membre est nul). En effet, soit $k \geqslant 0$ strictement inférieur à $d(a, A(t))$, c'est-à-dire que, en notant α la boule fermée centrée à l'origine, de rayon k, on a $(a-\alpha)\cap A(t) = \emptyset$, ce qui équivaut à $a \notin \alpha + A(t)$. Or l'ensemble $\alpha + A(t)$ est $\sigma(E, X)$-fermé puisqu'il en est ainsi pour $A(t)$, par hypothèse, et que la boule α est $\sigma(E, X)$-compacte. Il existe donc un $\sigma(E, X)$-voisinage de a, soit V, ne rencontrant pas $\alpha + A(t)$; alors:

$$\forall y \in V:\ d(y, A(t)) \geqslant k\,. \tag{4.15}$$

Puisque a appartient à l'ensemble (4.13) il existe $\tau\in]t_1, t]$ tel que $V\cap A(\tau) \neq \emptyset$. En choisissant y dans $V\cap A(\tau)$, (4.15) montre que

$$k \leqslant e(A(\tau), A(t)) \leqslant \mathrm{ret}(A;\, \tau, t) \leqslant r(t) - r^+(t_1)$$

ce qui établit (4.14).

Cas de l'hypothèse H_3. On établit cette fois l'existence d'une valeur d'adhérence forte de la suite (x_n) en prouvant que l'ensemble

$$K = \mathrm{adh} \bigcup_{n\in N} A(\tau_n)$$

est compact. Comme E est complet il suffit de montrer que la réunion des $A(\tau_n)$ est précompacte, c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, cette réunion peut être recouverte par une famille finie de boules de rayon ε. De fait, il existe m tel que $r(\tau_m)-r^+(t_1)<\varepsilon/2$; alors, pour tout $n\geqslant m$ on a

$$e(A(\tau_n), A(\tau_m))\leqslant r(\tau_m)-r(\tau_n)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après l'hypothèse, on peut recouvrir $A(\tau_m)$ par une famille finie de boules de rayon $\varepsilon/2$. Pour tout $x\in A(\tau_n)$, si $n\geqslant m$, on a $d(x, A(\tau_m))<\varepsilon/2$; donc x est contenu dans une des boules de rayon ε concentriques aux précédentes. Ainsi est recouverte la réunion des $A(\tau_n)$, $n\geqslant m$; par ailleurs la réunion des $A(\tau_n)$, $n<m$, est compacte, donc recouverte aussi par une famille finie de boules de rayon ε.

Tout point de l'ensemble (fermé) $A^+(t_1)$ étant limite d'une sélection de A, cet ensemble est contenu dans K, donc compact. Si les valeurs de A sont non vides, on peut choisir une suite (x_n) telle que $x_n\in A(\tau_n)\subset K$: toute valeur d'adhérence de cette suite appartient à $A^+(t_1)$, qui est donc non vide.

COROLLAIRE 1 (4d). *Avec les mêmes hypothèses que dans la Proposition ci-dessus, on suppose qu'il existe $\theta\in]t_1, t_2]$ tel que $A(\theta)$ soit borné (ce qui est automatiquement assuré dans l'hypothèse H_3) et on suppose que les valeurs de A sont non vides. Alors $A^+(t_1)$ est non vide.*

En effet, il existe une boule (centre c, rayon R) contenant $A(\theta)$; pour $t\in]t_1, \theta]$ et $x\in A(t)$ on a

$$\begin{aligned} d(x, c)&\leqslant e(\{x\}, A(\theta))+e(A(\theta), \{c\})\\ &\leqslant e(A(t), A(\theta))+R\leqslant r(\theta)-r(t)+R\,. \end{aligned}$$

Comme $A(t)$ est non vide, il en résulte

$$d(c, A(t))\leqslant r(\theta)-r^+(t_1)+R\,.$$

Le premier membre de (4.11), écrit en prenant $B=\{c\}$, est donc différent de $+\infty$.

La Proposition (4d) nous sera surtout utile dans la suite par cet autre corollaire:

COROLLAIRE 2 (4d). *On fait l'une des trois hypothèses H_1, H_2 ou H_3 et on suppose que la multiapplication A est à rétraction finie sur $[t_1, t_2]$, avec $A(t_1)\neq\emptyset$. Alors*

$$r^+(t_1)-r(t_1)=\lim_{t\downarrow t_1} e(A(t_1), A(t))=e(A(t_1), A^+(t_1))\,. \tag{4.16}$$

Il suffit, en effet, de rapprocher (4.10) et (4.11). Noter que $A(t)$ est alors non vide pour tout $t\in[t_1, t_2]$, de même que $A^+(t_1)$.

4e. Remarques sur les limites à gauche.

Les limites à gauche ne semblent pas avoir, dans les applications de la théorie de la rétraction, la même utilité que les limites à droite. Signalons simplement les faits suivants, en renvoyant pour les démonstrations à Moreau [5] et [11].

Si A est une multiapplication à rétraction bornée d'un intervalle $[t_0, t_1[$ dans un espace métrique E, on a

$$\lim_{t \uparrow t_1} \cdot \inf A(t) = \lim_{t \uparrow t_1} \cdot \sup A(t)\ ;$$

notons $A^-(t_1)$ cette valeur commune, éventuellement vide.

Si A est à rétraction finie sur $[t_0, t_1]$, on a

$$e\big(A^-(t_1), A(t_1)\big) \leqslant r(t_1) - r^-(t_1) = \lim_{t \uparrow t_1} e\big(A(t), A(t_1)\big)\,. \tag{4.17}$$

La fonction r est donc continue à gauche si et seulement si

$$\lim_{t \downarrow t_1} e\big(A(t), A(t_1)\big) = 0\,. \tag{4.18}$$

Cela équivaut d'ailleurs à l'équi-semi-continuité inférieure à gauche au point t_1 pour la famille de fonctions numériques $t \mapsto d\big(a, A(t)\big)$, $a \in E$. C'est ce qui a lieu, en particulier lorsque la multiapplication A est semi-continue supérieurement dans le sens classique suivant: pour tout Ω, ouvert contenant $A(t_1)$, il existe $\tau \in [t_0, t_1[$ tel que

$$t \in [\tau, t_1] \Rightarrow A(t) \subset \Omega\,.$$

Si on fait l'hypothèse additionnelle que $A(t_1)$ est compact, cette semicontinuité supérieure implique inversement (4.18).

Venons-en au cas où l'espace métrique E est *complet.* Si A est à rétraction bornée sur $[t_0, t_1[$, on trouve dans ce cas

$$\forall t \in [t_0, t_1[:\ e\big(A(t), A^-(t_1)\big) \leqslant r^-(t_1) - r(t)\,. \tag{4.19}$$

Par suite $A^-(t_1)$ est non vide, à moins que $A(t)$ ne soit partout vide. Si A est à rétraction finie sur $[t_0, t_1]$, le premier membre de (4.17) est égal aux deux autres; on voit donc que (4.18) équivaut dans ce cas à $A^-(t_1) \subset \operatorname{adh} A(t_1)$. Une autre conséquence de (4.19) est que, si E est complet et si la multiapplication A est à rétraction bornée sur $[t_0, t_1[$, on a pour tout $B \subset E$

$$\lim_{t \uparrow t_1} e\big(A(t), B\big) = e\big(A^-(t_1), B\big)\,.$$

5. – Approximations et sélections.

5a. *Multiapplications localement en escalier.*

Soit I un intervalle de $\boldsymbol{R}$. On notera $\mathcal{T}(I)$ l'ensemble des partitions de I en sous-intervalles de forme quelconque (ouverts, fermés ou semi-ouverts, certains d'entre-eux éventuellement réduits à des points), partitions qui soient *localement finies* dans le sens suivant: *toute partie compacte de I est recouverte par un nombre fini d'intervalles de la partition considérée.*

On définit une *relation d'ordre* sur $\mathcal{T}(I)$ en écrivant $P \leqslant P'$ si P' est un *raffinement* de P, c'est-à-dire si tout intervalle de P' est contenu dans un intervalle P. Cet ordre est visiblement *filtrant* à droite.

Une application ou une multiapplication définie sur I est dite *localement en escalier* s'il existe une partition $P \in \mathcal{T}(I)$ sur chaque intervalle de laquelle cette application ou multiapplication est contante.

Dans toute la suite on supposera, pour alléger, que l'intervalle I possède une origine, soit t_0, et la contient. En ce cas, les intervalles constituant une partition $P \in \mathcal{T}(I)$ peuvent être munis d'un indexation dans $\boldsymbol{N}$ correspondant à leur succession dans $\boldsymbol{R}$: on les notera par exemple

$$P\colon I_0, I_1, \ldots, I_i, \ldots \tag{5.1}$$

et on notera t_i l'origine de l'intervalle I_i, appartenant ou non à cet intervalle (évidemment l'origine de I_0 coïncide avec l'origine de I, déjà notée t_0).

Si A_P est une multiapplication localement en escalier de I dans l'espace métrique E, constante sur chacun des intervalles de la partition P, on évalue comme suit la *rétraction* de A_P sur tout sous-intervalle compact $[s, t]$ de I. Soient $J_0, J_1, \ldots, J_m$, indexés selon leur ordre de succession dans $\boldsymbol{R}$, ceux des intervalles $[s, t] \cap I_i$ qui sont non vides; choisissons arbitrairement un élément σ_j dans chaque J_j. Toute subdivision de $[s, t]$ possède un raffinement dont les σ_j sont des noeuds; on peut donc construire $\operatorname{ret}(A_p; s, t)$ à partir de subdivisions de cette sorte, et cela laisse finalement

$$\operatorname{ret}(A_P; s, t) = \sum_{j=1}^{m} e\big(A_P(\sigma_{j-1}), A_P(\sigma_j)\big) \tag{5.2}$$

(expression à interpréter comme nulle si $m = 0$).

5b. *Ensemble des débuts.*

On dira que deux sous-intervalles J et J' de I ont *même début* s'ils ont même origine et, tous les deux, soit contiennent soit excluent cette origine.

Il s'agit visiblement là d'une relation d'équivalence dans l'ensemble des sous-intervalles non vides de I: l'ensemble quotient s'appellera *ensemble des débuts* associé à I et noté $D(I)$. Soit $b \in D(I)$; tout intervalle J appartenant à la classe b possède la même origine; appelons-la $t \in I$; on dira que t est *l'origine de* b et, naturellement, que b est *le début de* J. Notations:

$$t = \operatorname{ori} b\,, \qquad b = \operatorname{déb} J\,.$$

Par abus de langage disons que $b = \operatorname{déb} J$ est un *debut ouvert* (resp. un *début fermé*) si l'intervalle J est ouvert à gauche (resp. fermé à gauche).

On munit $D(I)$ d'une relation d'*ordre total*: pour b et b' éléments de $D(I)$, on écrit $b \leqslant b'$ s'il existe un intervalle de début b' contenu dans un intervalle de début b.

Soit f une application (resp. multiapplication) définie sur I et possèdant en chaque point t de I une limite à droite, notée $f^+(t)$. On notera $\hat{f}$ l'extension de f à $D(I)$ définie par

$$\hat{f}(b) = \begin{cases} f(\operatorname{ori} b) & \text{si } b \text{ est en début fermé} \\ f^+(\operatorname{ori} b) & \text{si } b \text{ est un début ouvert}\,. \end{cases}$$

Lorsque, par exemple, f est une fonction numérique croissante (au sens large) pour l'ordre de I, l'extension $\hat{f}$ est croissante (au sens large) pour l'ordre de $D(I)$.

Avec ces notations:

PROPOSITION (5*b*). *Si la multiapplication A est à rétraction finie sur I et si est vérifiée l'une des hypothèses* H_1, H_2 *ou* H_3 *du* § 4*d*, *on a l'implication*

$$b \leqslant b' \Rightarrow e\big(\hat{A}(b), \hat{A}(b')\big) \leqslant \hat{r}(b') - \hat{r}(b)\,. \tag{5.3}$$

DÉMONSTRATION. Soit $t = \operatorname{ori} b$, $t' = \operatorname{ori} b'$. Si b et b' sont des débuts fermés, (5.3) se réduit à une propriété banale de $\operatorname{ret}(A; t, t')$. Si b est ouvert et b' fermé on a, quel que soit $\tau \in \,]t, t']$,

$$\begin{aligned} e\big(\hat{A}(b),\hat{A}(b')\big) = e\big(A^+(t), A(t')\big) \leqslant e\big(A^+(t), A(\tau)\big) + e\big(A(\tau), A(t')\big) \leqslant \\ \leqslant e\big(A^+(t), A(\tau)\big) + r(t') - r(\tau)\,. \end{aligned}$$

Lorsque $\tau \downarrow t$, le premier terme du dernier membre tend vers zéro, d'après la Proposition 4*a*, et $r(\tau)$ tend vers $r^+(t) = \hat{r}(b)$ d'où encore (5.3). C'est seulement lorsque b' est ouvert qu'entrent en jeu les hypothèses H_1, H_2 ou H_3.

Dans ce cas, soit b'' le début fermé de même origine t' que b'; on a $b \leqslant b'' < b'$ et

$$e(\hat{A}(b), \hat{A}(b')) \leqslant e(\hat{A}(b), \hat{A}(b'')) + e(\hat{A}(b''), \hat{A}(b')) .$$

Le premier terme du second membre rentre dans les cas qu'on vient d'examiner, donc est majoré par $\hat{r}(b'') - \hat{r}(b)$, tandis que, d'après le Corollaire 2 (4*d*), le dernier terme est égal à

$$e(A(t'), A^+(t')) = r^+(t') - r(t') = \hat{r}(b') - \hat{r}(b'') ,$$

d'où (5.3) par addition.

5*c*. *Approximantes localement en escalier.*

NOTATION. – *Soit f une application (resp. multiapplication) définie sur I et possèdant en chaque point $t \in I$ une limite à droite $f^+(t)$. Soit $P \in \mathcal{T}(I)$; on notera f_P l'application (resp. multiapplication) localement en escalier qui prend sur chaque intervalle I_i de P la valeur constante*

$$f_P(I_i) = \hat{f}(\text{déb}\, I_i) . \tag{5.4}$$

Autrement dit $f_P(I_i) = f(t_i)$ si I_i contient son origine t_i et $f_P(I_i) = f^+(t_i)$ sinon.
Alors:

LEMME 1 (5*c*). *Pour tout $t \in I_i$*

$$e(A_P(t), A(t)) \leqslant \sup \{\text{ret}(A; \sigma, \tau) : [\sigma, \tau] \subset I_i\} . \tag{5.5}$$

En effet, le premier membre n'est autre que $e(\hat{A}(\text{déb}\, I_i), \hat{A}(\text{déb}\, [t])$; comme $[t]$ est un intervalle fermé on se trouve dans le cas banal où (5.3) a lieu sans aucune des hypothèses « *H* ». Ce premier membre est donc majoré par

$$\hat{r}(\text{déb}\, [t]) - \hat{r}(\text{déb}\, I_i) = r(t) - r_P(I_i)$$

évidemment majoré par le second membre.

LEMME 2 (5*c*). *Si l'une des hypothèses* H_1, H_2 *ou* H_3 *est satisfaite, on a pour tout* $[s, t] \subset I$

$$\text{ret}(A_P; s, t) \leqslant r_P(t) - r_P(s) . \tag{5.6}$$

Notons $I_p, I_{p+1}, \ldots, I_q$ ceux des membres de la partition P qui ont une intersection non vide avec $[s, t]$; comme $A_P(I_i) = \hat{A}(\text{déb}\, I_i)$, on a, par (5.2),

$$\text{ret}(A_P; s, t) = \sum_{i=p+1}^{q} e\big(\hat{A}(\text{déb}\, I_{i-1}), \hat{A}(\text{déb}\, I_i)\big),$$

somme à interpréter comme nulle si $p = q$; il n'y a qu'à appliquer (5.3) à chaque terme de cette somme et ajouter.

Observons par ailleurs que le second membre de (5.5) constitue *l'oscillation de la fonction r sur l'intervalle I_i*; pour l'exploitation du Lemme 2, on utilisera:

LEMME 3 (5*c*). *Soit une partition localement finie de $\boldsymbol{R}$ en intervalles de longueur inférieure ou égale à ε. Les images réciproques par r des membres de cette partition sont des sous-intervalles de I; ceux de ces sous-intervalles qui sont non vides constituent une partition localement finie $P \in \mathfrak{T}(I)$; sur chacun d'entre eux, l'oscillation de la fonction r est $\leqslant \varepsilon$.*

Vérification immédiate, puisque r est une fonction (non strictement) croissante.

Vient alors la propriété d'approximation « à gauche »:

PROPOSITION (5*c*). *On suppose satisfaite l'une des hypothèses* H_1, H_2 *ou* H_3. *Soit $P \in \mathfrak{T}(I)$ une partition sur chaque intervalle de laquelle l'oscillation de r est $\leqslant \varepsilon$. Alors*:

$$\forall t \in I: \quad e\big(A_P(t), A(t)\big) \leqslant \varepsilon, \tag{5.7}$$

$$\forall [s, t] \subset I: \ \text{ret}(A_P; s, t) \leqslant \text{ret}(A; s, t) + \varepsilon. \tag{5.8}$$

DÉMONSTRATION. L'inégalité (5.7) résulte immédiatement du Lemme 1. En reprenant d'autre part les mêmes notations que dans la démonstration du Lemme 2, on a $t \in I_q$ donc

$$r_P(t) = \hat{r}(\text{déb}\, I_q) \leqslant r(t)$$

et $s \in I_p$ donc

$$r(s) - r_P(s) \leqslant \varepsilon,$$

d'où (5.8) en invoquant le Lemme 2.

REMARQUE. Si s se trouve être l'origine d'un des intervalles I_i de la partition P et appartient à cet intervalle, on peut omettre le terme ε au second membre de (5.8). Tel est le cas, en particulier, pour $s = t_0$.

5d. Théorème de sélection.

PROPOSITION (5*d*). *Soit, comme précédemment, I un intervalle de* $\boldsymbol{R}$ *contenant son origine t_0 et soit A une multiapplication à rétraction finie de I dans E, à valeurs fermées; on fait l'une des hypothèses* H_1, H_2 *ou* H_3. *Alors, quel que soit $a_0 \in A(t_0)$, il existe une sélection $t \mapsto u(t) \in A(t)$ de la multiapplication A telle que $u(t_0) = a_0$ et que*

$$\forall [s, t] \subset I \colon \operatorname{var}(u; s, t) \leqslant \operatorname{ret}(A; s, t) . \tag{5.9}$$

DÉMONSTRATION. L'énoncé est sans objet si $A(t_0)$ est vide; on suppose donc $A(t_0) \neq \emptyset$, d'où $A(t) \neq \emptyset$ pour tout $t \in I$.

D'après le Lemme 3(5*c*), pour tout entier $n > 0$ il existe une partition $P(n) \in \mathfrak{T}(I)$ sur chaque intervalle de laquelle l'oscillation de la fonction r est inférieure ou égale à $1/n$. Utilisant le fait que l'ordre de $\mathfrak{T}(I)$ est filtrant à droite on peut en outre obtenir que la suite des partitions $P(n)$ soit (non strictement) croissante. Supposons la suite construite de la sorte; si $b \in D(I)$ est le début d'un des intervalles constituant $P(n_0)$, cet élément b est aussi, pour tout $n \geqslant n_0$, le début d'un des intervalles de $P(n)$. Notons $B \subset D(I)$ l'ensemble des débuts de tous les intervalles constituant les $P(n)$, pour n parcourant l'ensemble $\boldsymbol{N}^*$ des entiers > 0: chaque $b \in B$ figure ainsi comme début d'un intervalle pour toutes les partitions $P(n)$ à partir d'une valeur de n convenable.

Pour chaque $n \in \boldsymbol{N}^*$, notons $b_0^n, b_1^n, \ldots, b_i^n, \ldots$ les débuts des intervalles constituant $P(n)$, indexés dans l'ordre croissant, ce qui fait que $b_0^n = \text{déb}\,[t_0]$. Définissons sur cet ensemble d'éléments de B une fonction u_n, à valeurs dans E, par la récurrence suivante: On prend $u_n(b_0^n) = a_0$ puis, de proche et proche, $u_n(b_{i+1}^n)$ est choisi dans l'ensemble $\hat{A}(b_{i+1}^n)$ de manière que

$$d\big(u_n(b_i^n), u_n(b_{i+1}^n)\big) = d\big(u_n(b_i^n), \hat{A}(b_{i+1}^n)\big) . \tag{5.10}$$

Les hypothèses H_1, H_2 ou H_3 assurent classiquement qu'un tel choix est possible (existence de « points proximaux » dans l'ensemble non vide $\hat{A}(b_{i+1}^n)$). Si b et b' sont les débuts de deux intervalles consécutifs de $P(n)$, il résulte de (5.3) et (5.10) que

$$\begin{aligned} d\big(u_n(b), u_n(b')\big) &= d\big(u_n(b), \hat{A}(b')\big) \\ &\leqslant e\big(A(b), \hat{A}(b')\big) \leqslant \hat{r}(b') - \hat{r}(b) . \end{aligned}$$

Par addition, il vient que cette même inégalité

$$d\big(u_n(b), u_n(b')\big) \leqslant \hat{r}(b') - \hat{r}(b) \tag{5.11}$$

est vraie encore si $b \leqslant b'$ sont les débuts de deux intervalles quelconques de $P(n)$.

Cas de l'hypothèse H_3. Convenons dans ce cas d'etendre u_n en une fontion définie sur l'ensemble B tout entier: si $b \in B$ n'est pas le début d'un des intervalles de $P(n)$, on attribue à $u_n(b)$ une valeur choisie arbitrairement dans $\hat{A}(b)$. Ainsi u_n est une sélection de $\hat{A}$, autrement dit un élément de l'espace produit

$$\prod_{b \in B} \hat{A}(b) .$$

Dans l'hypothèse H_3, les $\hat{A}(b)$ sont compacts, en vertu de la Proposition (4d), donc cet espace, muni de la topologie produit est compact, d'après Tychonoff. Pour la topologie produit, la suite (u_n) possède donc au moins une valeur d'adhérence, soit $\tilde{u}: B \to E$.

Montrons que

$$b \leqslant b' \Rightarrow d(\tilde{u}(b), \tilde{u}(b')) \leqslant \hat{r}(b') - \hat{r}(b) . \tag{5.12}$$

Soit $\varepsilon > 0$; puisque $\tilde{u}$ est valeur d'adhérence de (u_n), il existe $n \in \boldsymbol{N}^*$ tel que

$$d(\tilde{u}(b), u_n(b)) \leqslant \varepsilon$$
$$d(\tilde{u}(b'), u_n(b')) \leqslant \varepsilon$$

et cet n peut être pris assez grand pour que b et b' soient les débuts d'intervalles de $P(n)$. Vu (5.11), on obtient donc

$$d(\tilde{u}(b), \tilde{u}(b')) \leqslant \hat{r}(b') - \hat{r}(b) + 2\varepsilon$$

d'où (5.12) puisque ε être choisi arbitrairement.

A partir de $\tilde{u}$ on construit maintenant la fonction $u: I \to E$ attendue. Soit $t \in I$; notons $b_n \in B$ le début de l'intervalle de $P(n)$ contenant t; l'oscillation de r sur cet intervalle étant moindre que $1/n$ on a

$$0 \leqslant r(t) - \hat{r}(b_n) \leqslant \frac{1}{n} . \tag{5.13}$$

En rapprochant de (5.12), on conclut que la suite des $\tilde{u}(b_n)$ est de Cauchy dans E; soit $u(t)$ sa limite. Evidemment $u(t_0) = \tilde{u}(\text{déb}\,[t_0]) = a_0$.

Montrons que $u(t) \in A(t)$. Comme $\tilde{u}(b_n) \in \hat{A}(b_n)$ on a, vu (5.13),

$$d\ \tilde{u}(b_n), A(t)) \leqslant e(\hat{A}(b_n), A(t)) \leqslant r(t) - \hat{r}(b_n) \leqslant \frac{1}{n}$$

donc, à la limite, $d(u(t), A(t)) = 0$.

Enfin, pour établir (5.9) il suffit de prouver que, pour tout sous-intervalle compact $[t, t']$ de I on a

$$d(u(t), u(t')) \leqslant r(t') - r(t) .$$

Avec la même définition de b_n que ci-dessus et en notant par ailleurs b_n' le début de l'intervalle de $P(n)$ contenant t' (évidemment $b_n \leqslant b_n'$ puisque $t \leqslant t'$) on applique (5.12):

$$d(\tilde{u}(b_n), \tilde{u}(b_n')) \leqslant \hat{r}(b_n') - \hat{r}(b_n) .$$

Pour $n \to +\infty$, le premier membre tend vers $d(u(t), u(t'))$ et le second membre tend vers $r(t') - r(t)$ d'après (5.13).

Cas de l'hypothèse H_1. C'est, cette fois, la compacité des boules fermées de E qu'il faudra invoquer. Remplaçant, en (5.11), b' par b et b par $b_0^n = \text{déb}[t_0]$ on obtient que, si b est le début d'un des intervalles de $P(n)$, le point $u_n(b)$ appartient à la boule fermée de centre a_0, de rayon $\hat{r}(b) - r(t_0)$. Notons $\beta(b)$ cette boule et convenons maintenant d'étendre u_n en une fonction définie sur l'ensemble B tout entier de la façon suivante: si b n'est pas le début d'un des intervalles de $P(n)$ on attribue à $u_n(b)$ une valeur arbitrairement choisie dans $\beta(b)$. Alors u_n est une sélection de la multiapplication $\beta: B \to E$, c'est-à-dire que les u_n constituent une suite de points de l'espace produit

$$\prod_{b \in B} \beta(b)$$

lequel est compact d'après Tychonoff. On note $\tilde{u}$ une valeur d'adhérence de cette suite et la démonstration s'achève comme précédemment, car l'hypothèse H_1 entraîne que E est complet.

Cas de l'hypothèse H_2. Avec les mêmes notations que dans le cas précédent, on a seulement la compacité des boules $\beta(b)$ pour la topologie faible $\sigma(E, X)$. On obtient donc l'existence d'une valeur d'adhérence $\tilde{u}$ de la suite (u_n) au sens de la topologie produit des topologies faibles des espaces facteurs $\beta(b)$, c'est-à-dire la topologie de la convergence simple faible pour les fonctions définies sur B, à valeurs dans E.

Etablissons (5.12) dans ce nouveau cadre. Soit W un voisinage de l'origine dans E pour la topologie $\sigma(E, X)$; il en existe alors un autre, soit V, tel que $V + V \subset W$. Puisque $\tilde{u}$ est valeur d'adhérence de la suite (u_n), il existe $n \in \boldsymbol{N}^*$ tel que

$$u_n(b) - \tilde{u}(b) \in V$$

$$\tilde{u}(b') - u_n(b') \in V$$

et cet n peut être pris assez grand pour que b et b' soient les débuts d'intervalles de $P(n)$. Par ailleurs, en appelant γ la boule fermée contrée à l'origine, de rayon $\hat{r}(b')-\hat{r}(b)$, (5.11) s'écrit

$$u_n(b')-u_n(b)\in\gamma\,.$$

Par addition on obtient donc

$$\tilde{u}(b')-\tilde{u}(b)\in V+V+\gamma\subset W+\gamma$$

quel que soit W. Comme la boule γ est fermée pour la topologie $\sigma(E,X)$, on conclut que $\tilde{u}(b')-\tilde{u}(b)\in\gamma$, c'est-à-dire (5.12).

La démonstration s'achève comme précédemment.

COROLLAIRE (5*d*). *On suppose que E est un espace métrique quelconque et que la multiapplication A, à rétraction finie de I dans E, a ses valeurs compactes. Alors, quel que soit $a_0\in A(t_0)$, il existe une sélection u de A telle que $u(t_0)=a_0$ et satisfaisant* (5.9).

En effet, l'immersion de E dans son complété étant une isométrie, on se ramène à la Proposition précedente, cas de l'hypothèse H_3.

5*e*. *Cas d'un espace de Banach ou d'un espace normé quelconque.*

Les hypothèses H_1 et H_2 mettent en jeu la compacité des boules fermées, respectivement pour la topologie métrique de E, puis pour la topologie $\sigma(E,X)$, E étant dans ce second cas le dual d'un espace normé X. Par contre, la compacité invoquée dans l'hypothèse H_3 concerne les valeurs de la multiapplication A, cela au sens de la topologie metrique de E. Il aurait semblé naturel, pour faire pendant à l'hypothèse H_2, d'envisager systématiquement aussi:

HYPOTHÈSE H_4. *E est un espace de Banach et les valeurs de la multiapplication A sont des ensembles compacts pour la topologie faible.*

En fait on va voir que ce cas se ramène immédiatement à celui de l'hypothèse H_2.

PROPOSITION (5*e*). *La Proposition* (4*d*) *et ses Corollaires, le Lemme* 2 (5*c*), *les Propositions* 5*c et* 5*d sont également vraies si l'on substitue l'hypothèse* H_4 *aux hypothèses* H_1, H_2 *ou* H_3.

DÉMONSTRATION. Appelons X le dual topologique de l'espace de Banach E et interprétons l'injection canonique de E dans le dual topologique E'' de X comme un plongement. Alors A peut aussi bien s'interpréter comme une multiapplication dans E'', avec les mêmes valeurs pour les excès et les rétractions, puisque le plongement de E dans E'' est isométrique. Comme E est fermé dans E'' pour la topologie de la norme, tout ensemble limite tel que $A^+(t_1)$ est aussi le même dans les deux points de vue: en effet, les points de $A^+(t_1)$ sont caractérisés comme les limites de sélections de A pour $t \downarrow t_1$. La topologie $\sigma(E'', X)$ induit sur E la topologie $\sigma(E, X)$; si donc on fait l'hypothèse H_4, les $A(t)$ sont compacts pour $\sigma(E'', X)$, donc fermés pour cette topologie: on est ainsi ramené à l'hypothèse H_2, vis-à-vis de l'espace E'', dual de l'espace normé X.

Noter aussi que, si A est à rétraction bornée sur $]t_1, t_2]$, on a par l'inégalité (4.7)

$$e\big(A^+(t_1), A(t_2)\big) \leqslant r(t_2) - r^+(t_1)\,.$$

L'hypothèse H_4 entraînera que $A(t_2)$ est borné dans E'', donc aussi $A^+(t_1)$ vu cette inégalité: on en conclut que $A^+(t_1)$ est compact pour la topologie $\sigma(E'', X)$ et de même pour la topologie $\sigma(E, X)$, puisque cet ensemble est contenu dans E.

Finalement, la Proposition (5*d*) donne:

COROLLAIRE (5*e*). *On suppose que E est un espace vectoriel normé, non nécessairement complet, et on appelle X son dual topologique. On suppose que la multiapplication A, à rétraction finie de I dans E, a ses valeurs compactes pour la topologie $\sigma(E, X)$. Alors, pour tout $a_0 \in A(t_0)$, il existe une sélection $u: I \to E$ de A telle que $u(t_0) = u_0$ et que, pour tout $[s, t] \subset I$, on ait*

$$\operatorname{var}(u; s, t) \leqslant \operatorname{ret}(A; s, t)\,.$$

On observe en effet que le plongement de E dans son complété $\hat{E}$ est une isométrie et que X est aussi bien le dual topologique de $\hat{E}$. Les valeurs de A s'interprètent donc comme des parties de $\widehat{E}$, compactes pour la topologie $\sigma(\widehat{E}, X)$, ce qui ramène à l'hypothèse H_4.

REFERENCES

BERGE (C.):

[1] *Espaces topologiques, fonctions multivoques,* Dunod, 1959.

BRIDGLAND (T. F.):

[1] *Contributions to the theory of generalized differential equations,* I, Math. Systems Theory, **3** (1969), pp. 17-50; II, ibid., pp. 156-165.

[2] *Extreme limits of compacta valued functions,* Trans. Amer. Math. Soc., **170** (1972), pp. 149-163.

HERMES (H.):

[1] *On continuous and measurables selections and the existence of solutions of generalized differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc., **29** (1971), pp. 535-542.

KIKUCHI (N.) - TOMITA (Y.):

[1] *On the absolute continuity of multifunctions and orientor fields*, Funkcialaj ekvacioj, **14** (1971), pp. 161-170.

LAURENT (P.J.):

[1] *Approximation et optimisation*, Hermann, 1972, Chap. VI.

MOREAU (J. J.):

[1] *Fonctionnelles convexes*, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, Paris, 1967 (multigraphié 108 p.).
[2] *Inf-convolution, sous-additivité, convexité des fonctions numériques*, J. Math. pures et appl., **49** (1970), pp. 109-154.
[3] *Sur l'évolution d'un système élasto-visco-plastique*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **273** (1971), pp. 118-121.
[4] *Rafle par un convexe variable, première partie*, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1971, exposé n. 15 (multigraphié 43 p.); deuxième partie, ibid., 1972, exposé n. 3 (multigraphié 36 p.).
[5] *Rétraction d'une multiapplication*, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1972, exposé n. 13 (multigraphié 89 p.).
[6] *Sélections de multiapplications à rètraction finie*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **276** (1973), pp. 265-268.
[7] *Problème d'évolution associé à un convexe mobile d'un espace hilbertien*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **276** (1973), pp. 791-794.
[8] *Intersection de deux convexes mobiles*, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1973, Exposé n. 1 (multigraphié 26 p.) résumé dans: C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **276** (1973), pp. 1505-1508.
[9] *Systèmes élastoplastiques de liberté finie*, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1973, Exposé n. 12 (multigraphié 33 p.).
[10] *On unilateral constraints, friction and plasticity*, in: *New variational techniques in Mathematical physics*, Centro Internazionale Matematico Estivo, 1973.
[11] *Compléments sur les multiapplications à rétraction finie*, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1974, Exposé n. 9 (multigraphié 26 p.).

VAN CUTSEM (B.):

[1] *Eléments aléatoires à valeurs convexes compactes*, Thèse, Grenoble, 1971.
[2] *Problems of convergence in stochastic linear programming*, in: *Techniques of Optimization*, (A. V. BALAKRISHNAM, ed.) Academic Press, 1972, pp. 445-454.