ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

F. ACQUISTAPACE
F. BROGLIA

Problemi di Cousin e di Poincaré per spazi di Stein non ridotti

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 27, nº 4 (1973), p. 889-904

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_4_889_0>

PROBLEMI DI COUSIN E DI POINCARÉ PER SPAZI DI STEIN NON RIDOTTI

F. ACQUISTAPACE (*) - F. BROGLIA (*)

Introduzione.

Scopo di questo lavoro è studiare le condizioni sotto le quali è possibile risolvere i problemi di Poincarè e di Cousin per gli spazi di Stein. Più precisamente si dimostrano i seguenti teoremi:

TEOREMA 1. Sia X uno spazio di Stein (non necessariamente ridotto): il 2^0 problema di Cousin è risolubile per X se e solo se $H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq H^1(X, \mathcal{O}^*) = 0$.

Sia X uno spazio ridotto verificante il teorema A: il 2^0 problema di Cousin è risolubile per X se e solo se $H^1(X, \mathcal{O}^*) = 0$.

TEOREMA 2. Sia X uno spazio di Stein (non necessariamente ridotto): allora il problema di Poincarè è risolubile per X. Se X è uno spazio ridotto è sufficiente che X verifichi il teorema A.

Gli autori ringraziano il prof. O. Stănăşilă per aver loro suggerito il problema e i proff. A. Tognoli e F. Lazzeri.

1. Divisori di zero e spazi di Stein.

Sia A un anello commutativo con identità.

Un elemento $x \in A$ si dice NON DIVISORE DI ZERO se l'omotetia di rapporto x è iniettiva.

Pervenuto alla Redazione il 18 Ottobre 1972.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

Sarà indicato con A_T l'anello totale di frazioni di A, cioè

$$A_T = S^{-1} A \text{ ove } S = \{x \in A \mid x \text{ è non divisore di zero}\}.$$

OSSERVAZIONE: l'associazione $A \rightsquigarrow A_T$ non è in generale funtoriale. Ad esempio nell'omomorfismo $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(2)$, $\varphi(n) = n \cdot 1$, $\varphi(2) = 0$ divide zero, mentre 2 non divide zero. Tuttavia se $\varphi : A \longrightarrow B$ è un morfismo d'anelli tale che $\varphi(x)$ non divide zero se x non divide zero, allora φ si prolunga a un unico morfismo

$$\Phi : A_T \rightarrow B_T \text{ definito da } \Phi\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)}.$$

Inoltre se φ è un monomorfismo anche Φ lo è.

LEMMA 1. Sia $\varphi : A \longrightarrow B$ un omomorfismo piatto d'anelli. Se $x \in A$ è non divisore di zero anche $\varphi(x)$ lo è.

DIM: Sia $f_x : A \longrightarrow A$ l'omotetia di rapporto x per ipotesi iniettiva. Si ha la successione esatta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f_x} A \longrightarrow A/xA \longrightarrow 0.$$

Poichè B è piatto su A se ne ottiene la successione esatta

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f_x \otimes_A \text{id.}} B \longrightarrow A/xA \otimes_A B \longrightarrow 0$$

ma $A/xA \otimes_A B \simeq B/\varphi(x) B$ e $f_x \otimes_A \text{id.}$ non è altro che l'omotetia di rapporto $\varphi(x)$: da cui la tesi.

DEFINIZIONE. Uno spazio analitico complesso $(X, \mathcal{O}_X)$ separato e a base numerabile si dice SPAZIO DI STEIN se:

(1) è olomorficamente separato: cioè per ogni x in X esiste un naturale n e un morfismo, finito in x, $f : X \longrightarrow C^n$.

(2) è olomorficamente convesso: cioè per ogni compatto $K \subset X$, l'inviluppo convesso di K

$$\widehat{K} = \{x \in X \mid \text{per ogni } s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \mid s(x) \mid \leq \sup_{y \in K} \mid s(y) \mid\}$$

è compatto.

La definizione classica, equivalente a questa, è invece: $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno SPAZIO DI STEIN se:

(1) $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ separa i punti e dà coordinate locali; cioè per ogni x, y in X, $x \neq y$ esiste $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ tale che $s(x) \neq s(y)$ e per ogni $x \in X$ esistono $f_1, \dots, f_k \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ tali che il morfismo da esse definito $X \to \mathbb{C}^k$ è un'immersione in x.

(2) è olomorficamente convesso.

La condizione (2) è equivalente alla

(2′) per ogni successione $\{x_n\}$ in X senza punto di accumulazione esiste $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ tale che la successione $\{|f(x_n)|\}$ è illimitata in $\mathbb{R}$.

Queste definizioni hanno senso anche se X non è ridotto e risulta inoltre: $(X, \mathcal{O}_X)$ non ridotto è uno spazio di Stein se e solo se lo spazio ridotto associato $(X, \mathcal{O}_X)_{\mathrm{rid}}$ lo è. Per le dimostrazioni di questi fatti si può vedere [2].

Lemma 2. Sia X uno spazio di Stein (non necessariamente ridotto). Sia $x \in X$ e U un aperto di Stein relativamente compatto. Allora i morfismi canonici

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_{X,x} \quad \text{e} \quad \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$$

sono morfismi piatti d'anelli.

Per la dimostrazione vedi [3].

Sia ora $\mathcal{F}$ un fascio coerente qualsiasi su uno spazio di Stein X e sia U un aperto di Stein relativamente compatto in X. Dal lemma 2 e dagli isomorfismi $\mathcal{F}_x \simeq \Gamma(X, \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} \mathcal{O}_{X,x}$, $\Gamma(U, \mathcal{F}) \simeq \Gamma(X, \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ (cfr. [3]) si deduce facilmente il

Lemma 3. I morfismi canonici

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}_x \text{ e } \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$$

sono morfismi piatti di $\Gamma(X, \mathcal{F})$-moduli.

Dim: Se $0 \to N \to M$ è una succesione esatta di $\Gamma(X, \mathcal{F})$-moduli, tensorizzando con $\mathcal{F}_x$ si ottiene la successione

$$0 \to \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} \Gamma(X, \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{F})} N \to \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} \Gamma(X, \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{F})} M$$

cioè $0 \to \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} N \to \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} M$ che è esatta per il lemma 2. Analogamente per l'altro morfismo.

Per comprendere meglio il comportamento dei divisori di zero è utile il seguente esempio (tratto da [1]).

Consideriamo in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una coppia di rette distinte passanti per un punto p fissato; sia A una delle due rette privata di un punto $q \neq p$ e B l'altra. Quindi $A \simeq \mathbb{C}$, $B \simeq \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, $A \cap B = \{p\}$.

Possiamo supporre che p coincida con l'origine di $\mathbb{C}$. Sia $X = A \cup B$ lo spazio analitico unione e sia $\mathcal{O}$ il suo fascio.

Poichè le funzioni olomorfe su B sono solo le costanti, se $f \in \Gamma(B, \mathcal{O})$ per ogni $x \in B$ $f(x) = f(p)$. Inoltre la restrizione $\Gamma(X, \mathcal{O}) \xrightarrow{r} \Gamma(A, \mathcal{O})$ è chiaramente un isomorfismo. La funzione z coordinata di $\mathbb{C}$ è non divisore di 0 in $\Gamma(X, \mathcal{O}) \simeq \Gamma(A, \mathcal{O})$, tuttavia $r_B^X(z) = 0$ poichè $z(p) = 0$. Ciò prova che il lemma 2 non è valido senza ipotesi.

2. Il fascio dei germi di funzioni meromorfe.

Considereremo d'ora in poi solo spazi analitici a base numerabile, i quali salvo avviso contrario potranno essere non ridotti e anche non di dimensione finita.

Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio analitico.

E' possibile definire su X i seguenti due prefasci $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}$

(*a*) Sia $S_U = \{s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \mid s_x$ non divide zero per ogni $x \in X\}$. Poniamo:

$$\mathcal{P}'(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)_{S_U}, \qquad \varrho_V^U = \text{restrizione naturale.}$$

(*b*) Sia $\mathfrak{U} = \{U$ aperti di Stein relativamente compatti in $X\}$. $\mathfrak{U}$ è una base d'aperti. Poniamo

$$\mathcal{P}(U) = \begin{cases} \Gamma(U, \mathcal{O}_X)_{T_U} = \text{anello totale di frazioni, se } U \in \mathfrak{U} \\ \varprojlim_{\substack{U_i \subset U \\ U_i \in \mathfrak{U}}} \mathcal{P}(U_i) \quad \text{se} \quad U \notin \mathfrak{U} \end{cases}$$

$$r_V^U = \text{restrizione naturale.}$$

OSSERVAZIONE. I due prefasci sono in generale differenti: nell'esempio del paragrafo precedente infatti $T_X \neq S_X$.

LEMMA 4. Se U è un aperto di Stein relativamente compatto $S_U = T_U$. Ne segue $\mathcal{P}(U) = \mathcal{P}'(U)$ e quindi $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ hanno lo stesso fascio associato.

DIM: Per il lemma 2 $T_U \subset S_U$. Sia $s \in S_U$. Supponiamo che esista $t \neq 0$ in $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ tale che $s \cdot t = 0$. Poichè $t \neq 0$ esiste $z \in U$ con $t_z \neq 0$; ne segue che s_z divide zero e dunque $s \notin S_U$. $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ coincidono su una base d'aperti ed hanno quindi lo stesso fascio associato.

DEFINIZIONE. Il fascio $\mathcal{M}$ associato a $\mathcal{P}$ e a $\mathcal{P}'$ si dice il FASCIO DI GERMI DI FUNZIONI MEROMORFE.

Osserviamo che la definizione data coincide con quella usuale nel caso delle varietà e con quella data in [6] se X è uno spazio ridotto, poichè in tal caso $S_U = \{ s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \mid s$ non si annulla identicamente su nessun aperto non vuoto di $U\}$.

LEMMA 5. Sia X uno spazio analitico.

(1) per ogni $x \in X$, $\mathcal{M}_x \simeq (\mathcal{O}_{x,\, x})_{T_x}$

(2) $\mathcal{O}_X$ è un sottofascio di $\mathcal{M}$.

DIM: (1) $\mathcal{M}_x = \mathcal{P}'_x = \varinjlim_{U \ni x} \Gamma(U, \mathcal{O}_X)_{S_U}$. Se $x \in U$ è definita l'applicazione

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X)_{S_U} \longrightarrow (\mathcal{O}_{X,\, x})_{T_x}$$

$$f/g \longmapsto f_x/g_x$$

questa induce un morfismo del limite diretto $\varphi_x : \mathcal{M}_x \rightarrow (\mathcal{O}_{X,\, x})_{T_x}$.

φ_x *è iniettiva*: infatti se la classe di f/g è tale che $f_x/g_x = 0$ cioè $f_x = 0$, f è nulla su un piccolo intorno di x cioè f/g definisce la classe nulla.

φ_x *è surgettiva*: sia $f_x/g_x \in (\mathcal{O}_{X,\, x})_{T_x}$; g_x è non divisore di zero.

f_x e g_x sono i germi di due sezioni $f, g \in \Gamma(W, \mathcal{O}_X)$ dove W è un piccolo intorno di x. Consideriamo l'omotetia di rapporto g tra $\mathcal{O}_X|_W$ e $\mathcal{O}_X|_W$ e sia $\mathcal{I}$ il nucleo di questo morfismo. Naturalmente $\mathcal{I}_x = 0$ e dunque $\mathcal{I}_y = 0$ per ogni y in un piccolo intorno $V \subset W$. Pertanto $g_y \in T_y$ per ogni $y \in V$ cioè $r^W_V g \in S_V$. Ciò prova che $f|_V/g|_V \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)_{S_V}$.

(2) Consideriamo l'applicazione $\mathcal{O} \xrightarrow{i} \mathcal{M}$ così definita

$$i(U): \Gamma(U, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{M})$$

$$i(U)(f) = \{f_x\}_{x \in U} \text{ (1)}$$

i è iniettiva perchè fibra per fibra i_x: $\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{M}_x \simeq (\mathcal{O}_{X,x})_{T_x}$ lo è.

OSSERVAZIONE. $\mathcal{M}$ non è un fascio analitico coerente. Ad esempio per $X = \mathbb{C}$, se $\mathcal{M}$ fosse coerente $\mathcal{M}_x$ sarebbe un $\mathcal{O}_{X,x}$ modulo di tipo finito; in altri termini $\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{M}_x$ sarebbe un morfismo finito e iniettivo e dunque $\mathcal{O}_{X,x}$ e $\mathcal{M}_x$ avrebbero la stessa dimensione di Krull. Invece $\mathcal{M}_x$, essendo il corpo di frazioni di $\mathcal{O}_{X,x}$, ha dimensione 0 mentre $\mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathbb{C}\{z\}$ ha dimensione 1.

Tuttavia ogni sotto $\mathcal{O}_X$-modulo di tipo finito di $\mathcal{M}$ è coerente.

3. La decomposizione primaria degli ideali di $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio di Stein. Per l'anello $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ valgono i seguenti risultati (dimostrati da O. Forster in [5]). Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, chiuso (2). In analogia con il caso di un anello noetheriano, $\mathfrak{a}$ ammette una decomposizione primaria numerabile

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{q}_i$$

ove $\mathfrak{q}_i$ è un ideale primario chiuso. Inoltre tale decomposizione è irridondante nel senso che nessuno dei $\mathfrak{q}_i$ è contenuto nell'intersezione di alcuni degli altri e gli ideali $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ sono ideali primi chiusi a due a due distinti.

In particolare consideriamo la decomposizione primaria di (0)

$$(0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{q}_n, \qquad \mathfrak{p}_n = \sqrt{\mathfrak{q}_n}.$$

Come nel caso noetheriano $\{a \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \mid a \text{ divide zero}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{p}_n$. Infatti sia a un divisore di zero; esiste allora b con $ab = 0$ e quindi $ab \in \mathfrak{q}_n$

(1) Una sezione $s \in \Gamma(U, \mathcal{M})$ è per definizione una famiglia di germi $\{s_x\}_{x \in U}$ tale che esiste un ricoprimento $\{U_i\}$ di U ed elementi $s_i \in \mathcal{P}'(U_i)$ tali che $s_{i,z} = s_z$ per ogni $z \in U_i$.

(2) Se X è uno spazio analitico, $\mathcal{F}$ un fascio coerente su X, U un aperto qualunque di X è possibile dare a $\Gamma(U, \mathcal{F})$ una topologia di spazio di Fréchet per la quale le restrizioni sono continue (vedi [8]).

per ogni n. Se $a \notin \mathfrak{p}_n$, allora $b \in \mathfrak{q}_n$ perchè $\mathfrak{q}_n$ è $\mathfrak{p}_n$-primario. Dunque se $a \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{p}_n$, $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{q}_n$ cioè $b = 0$.

Viceversa sia a elemento, ad esempio, di $\mathfrak{p}_1$. Esiste un interno h tale che $a^h \in \mathfrak{q}_1$. Poichè $\bigcap_{i=2}^{\infty} \mathfrak{q}_i \neq (0)$ esiste $b \in \bigcap_{i=2}^{\infty} \mathfrak{q}_i$; ma allora $a^h b \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{q}_i$ e dunque $a^h b = 0$. Se ne deduce che esiste un intero s, $1 \leq s \leq h$, tale che $a^s b = 0$ mentre $t = a^{s-1} b \neq 0$ e quindi a divide zero. Osserviamo che se $a \in \mathfrak{p}_1$, abbiamo trovato un elemento $t \notin \mathfrak{q}_1$ con $at = 0$.

Abbiamo visto d'altra parte che (se per X è valido il teorema A) affinchè s divida 0 basta che esista $z \in X$ tale che s_z divide 0 in $\mathcal{O}_{X,z}$. Viceversa, essendo X di Stein, per i lemmi 2 e 3 $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ non divide 0 se e solo se s_z non divide 0 per ogni $z \in X$.

Osserviamo infine che per ogni i

$$X_i = \{x \in X \mid f(y) = 0 \text{ per ogni } f \in \mathfrak{p}_i\}$$

è non vuoto in quanto $\mathfrak{p}_i$ è un ideale chiuso in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

4. I problemi di Cousin.

Sia $\mathcal{M}^*$ il sottofascio moltiplicativo di gruppi abeliani di $\mathcal{M}$ formato dai germi di sezioni invertibili. In altri termini per ogni aperto U in X

$$\mathcal{M}^*(U) = \{s \in \Gamma(U, \mathcal{M}) \mid \text{esiste } t \in \Gamma(U, \mathcal{M}) \text{ con } s \cdot t = t \cdot s = 1\}$$

$\mathcal{O}^*$ risulta naturalmente un sottofascio di $\mathcal{M}^*$.

Si hanno le seguenti due successioni esatte di gruppi abeliani:

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}/\mathcal{O} \to 0 \tag{1}$$

$$0 \to \mathcal{O}^* \to \mathcal{M}^* \to \mathcal{O}^*/\mathcal{M}^* \to 0 \tag{2}$$

$\mathcal{M}/\mathcal{O} = \mathcal{R}$ si dice il FASCIO DEI GERMI DI PARTI PRINCIPALI (0 RIPARTIZIONI).

$\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* = \operatorname{Div} X$ si dice il FASCIO DEI GERMI DI DIVISORI.

Da (1) e (2) si traggono le successioni esatte:

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{O}) \to \Gamma(X, \mathcal{M}) \xrightarrow{\alpha} \Gamma(X, \mathcal{R})$$

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{O}^*) \to \Gamma(X, \mathcal{M}^*) \xrightarrow{\beta} \Gamma(X, \operatorname{Div} X)$$

Il 1^0 e il 2^0 problema di Cousin consistono nel chiedere sotto quali condizioni per lo spazio X α e β risultano surgettive. Le condizioni sufficienti che seguono sono analoghe a quelle per il caso classico delle varietà; ci proponiamo di studiare la necessità di tali condizioni.

È ben noto il seguente teorema, la cui dimostrazione è identica a quella che si dà per le varietà:

TEOREMA (Cousin) 1. Sia X uno spazio di Stein: allora il 1^0 problema di Cousin è risolubile per X.

2. Sia X uno spazio di Stein tale che $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$; allora il 2^0 problema di Cousin è risolubile per X.

Osserviamo subito che la prima condizione è sufficiente, ma non necessaria. Infatti sia $X = \mathbb{P}_n(C), n \geq 1$: in questo caso $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$, quindi α è surgettiva, tuttavia X, essendo compatto, non è Stein.

Per il 2^0 problema di Cousin vogliamo dimostrare il seguente

TEOREMA 1. (1) Sia X uno spazio di Stein (non necessariamente ridotto): se il 2^0 problema di Cousin è risolubile per X allora

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq H^1(X, \mathcal{O}^*) = 0 \; (^3)$$

(2) Sia X uno spazio ridotto verificante il teorema A: se il 2^0 problema di Cousin è risolubile per X allora

$$H^1(X, \mathcal{O}^*) = 0.$$

La dimostrazione deriva dai seguenti lemmi.

LEMMA 6. Sia X uno spazio analitico verificante il teorema A e $\mathcal{F}$ un fascio analitico coerente su X. Per ogni $x \in X$ l'applicazione canonica di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\gamma_x} \mathcal{F}_x / \mathfrak{M}_x \mathcal{F}_x$$

---

(3) Come nel caso delle varietà questo isomorfismo deriva dalla successione esatta

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\text{exp.}} \mathcal{O}_X^* \to 0.$$

L'applicazione esponenziale ha senso anche in questo caso: possiamo infatti supporre $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}(C^n)/\mathcal{I}$; se $f \in \Gamma(X, \mathcal{I})$, poichè $\dfrac{1 - e^{2\pi i f}}{f} = h$ è olomorfa, $1 - e^{2\pi i f} \in \Gamma(X, \mathcal{I})$. Quindi l'applicazione exp: $\mathcal{O}(C^n) \to \mathcal{O}^*(C^n)$ passa al quoziente.

è surgettiva e aperta. Inoltre ker γ_x è un chiuso a complementare denso per la topologia di Fréchet su $\Gamma(X, \mathcal{F})$.

DIM: Osserviamo anzitutto che $\mathfrak{M}_x \mathcal{F}_x$ è un sottomodulo chiuso di $\mathcal{F}_x$; infatti poichè $\mathfrak{M}_x \mathcal{F}_x$ è finitamente generato, qualunque sia $U \ni x$ un aperto di Stein relativamente compatto, l'immagine inversa di $\mathfrak{M}_x \mathcal{F}_x$ in $\Gamma(U, \mathcal{F})$ è un ideale finitamente generato, poichè $\mathcal{F}_x$ è piatto su $\Gamma(U, \mathcal{F})$; dunque, come ideale finitamente generato in un'algebra di Fréchet, è chiuso. Sia $s_x \in \mathcal{F}_x$. Per il teorema A esistono $s_1, \dots, s_r$ in $\Gamma(X, \mathcal{F})$ e $f_1, \dots f_r$ in $\mathcal{O}_{X,x}$ tali che

$$s_x = \sum_{i=1}^{r} f_i \, s_{ix} .$$

Dà cui

$$s_x = \Sigma \, [f_i - f_i(x)] \, s_{ix} + \Sigma f_i(x) \, s_{ix}$$

Poichè

$$[f_i - f_i(x)] \, s_{ix} \in \mathfrak{M}_x \mathcal{F}_x$$

risulta:

$$\text{classe di } s_x \text{ mod. } \mathfrak{M}_x \mathcal{F}_x = \text{classe di } \Sigma f_i(x) \, s_{ix} = \gamma_x (\Sigma f_i(x) \, s_i) .$$

e γ_x è surgettiva.

Ora, poichè $\mathcal{F}_x / \mathfrak{M}_x \mathcal{F}_x$ è un $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{M}_x$-spazio vettoriale di dimensione finita, si ha che γ_x è $\mathbb{C}$-lineare, continua e surgettiva tra spazi di Fréchet: dal teorema del grafico chiuso segue che γ_x è aperta.

Se poi U è aperto in $\Gamma(X, \mathcal{F})$, $f(U)$ è aperto in $\mathcal{F}_x / \mathfrak{M}_x \mathcal{F}_x \simeq \mathbb{C}^k$. Ne segue che U incontra il complementare di ker γ_x e dunque questo è denso.

LEMMA 7. Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio di Stein e $\mathcal{L}$ un fascio su X localmente libero di rango 1. Allora esiste $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ tale che s_x non divide 0 in $\mathcal{L}_x \simeq \mathcal{O}_{X,x}$ per ogni $x \in X$.

DIM: Siano $\{\mathfrak{p}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, gli ideali primi ottenuti dalla decomposizione di (0) in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Sappiamo che per $i = 1, \dots, k, \dots$ l'insieme $X_i = \{x \in X \mid f(x) = 0$ per ogni $f \in \mathfrak{p}_i\}$ è non vuoto. Sia $x_i \in X_i$. E' possibile trovare una sezione $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ tale che $s_{x_i} \notin \mathfrak{M}_{x_i} \mathcal{L}_{x_i}$ per ogni i. Infatti per il lemma 5 l'intersezione

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_{x_i}^{-1} \complement \{0\}$$

è una intersezione di aperti densi, non vuota per il teorema di Baire.

Consideriamo ora il fascio coerente $\check{\mathcal{L}} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$. Con lo stesso ragionamento è possibile trovare $\Phi \in \Gamma(X, \check{\mathcal{L}})$ tale che per ogni i $\Phi_{x_i} \notin \mathfrak{M}_{x_i} \check{\mathcal{L}}_{x_i}$.

Φ è un omomorfismo tra $\Gamma(X, \mathcal{L})$ e $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ lineare. Da quanto procede segue che

$$(\Phi(s))_{x_i} = \Phi_{x_i}(s_{x_i}) \notin \mathfrak{M}\, x_i .$$

Consideriamo infatti il diagramma commutativo per ogni i

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X, \mathcal{L}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & \Gamma(X, \mathcal{O}_x) \arrow[d] \\
\mathcal{L}_{x_i} \arrow[r, "\Phi_{x_i}"] \arrow[d] & \mathcal{O}_{X, x_i} \arrow[d] \\
\mathbb{C} \simeq \mathcal{L}_{x_i}/\mathfrak{M}_{x_i}\mathcal{L}_{x_i} \arrow[r, "\lambda_i"] & \mathcal{O}_{X, x_i}/\mathfrak{M}_{x_i} \simeq \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

λ_i non è il morfismo nullo poichè $\Phi_{x_i} \notin \mathfrak{M}_{x_i} \check{\mathcal{L}}_{x_i}$ e quindi è iniettivo. Poichè $s_{x_i} \notin \mathfrak{M}_{x_i} \mathcal{L}_{x_i}$ si ha la tesi

Mostriamo ora che s non divide 0 in ogni punto. Supponiamo che esista $x \in X$ tale che s_x divide zero. Il sottofascio di $\mathcal{O}_X$ Ann s [4] è coerente come nucleo del morfismo tra fasci coerenti « moltiplicazione per s »: $\mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$. Ora $(\mathrm{Ann}\, s)_x \coloneqq \mathrm{Ann}\, s_x \neq 0$ poichè s_x divide 0. Dal teorema A esiste $f \in \Gamma(X, \mathrm{Ann}\, s)$ con $f \neq 0$ e $f \cdot s = 0$. Si ha allora $f \cdot \Phi(s) = \Phi(f \cdot s) = 0$.

Cioè $\Phi(s)$ divide 0 e dunque $\Phi(s) \in \mathfrak{p}_{i_0}$ per qualche $i_0 \in \mathfrak{N}$.

Ne segue $\Phi(s)(x_{i_0}) = 0$ cioè $(\Phi(s))_{x_{i_0}} \in \mathfrak{M}_{x_{i_0}}$ contro quanto avevamo trovato.

DIM. DEL TEOREMA 1. (1) Sia X uno spazio di Stein. E' sufficiente provare che $H^1(X, \mathcal{O}^*) = 0$. Poichè β è surgettiva per ipotesi, dalla succes- $\Gamma(X, \mathcal{M}^*) \xrightarrow{\beta} \Gamma(X, \mathrm{Div}\, X) \to H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\lambda} H^1(X, \mathcal{M}^*)$ si ottiene che basta mostrare che λ ha immagine nulla.

Sia $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$: $\xi =$ classe di ξ_{ij}, $\xi_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*)$, ove $\{U_i\}$ è un ricoprimento di X. ξ definisce un fascio invertibile $\mathcal{L}$. Per il lemma 6 esiste $s \in \Gamma(X, \Gamma)$ tale che s_x non divide zero per ogni $x \in X$. Per definizione $s = \{s_i\}$ con $s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) \cap S_{U_i}$ e $s_i|_{U_i \cap U_j} = \xi_{ij} s_j|_{U_j \cap U_j}$.

---

[4] Ann $s(U) = \{t \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ tale che $t.s|_U = 0\}$.

Quindi

$$\lambda(\xi) = \text{classe di } s_i s_j^{-1} = 0.$$

(2) Sia X uno spazio ridotto verificante il teorema A e sia β surgettiva. Ancora dobbiamo mostrare che $\mathcal{I}m\ \lambda = 0$. Sia $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$, $\xi = [\xi_{ij}]$, $\xi_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*)$, e sia $\mathcal{L}$ il fascio invertibile determinato da ξ. Sia A un insieme numerabile denso in X. Scegliamo $s \in \bigcap_{x \in A} \gamma_x^{-1}(\mathcal{C}\{0\})$, intersezione certamente non vuota per il teorema di Baire, $s = \{s_i\}$ $s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}^*)$, $s_i|_{U_i \cap U_j} = \xi_{ij} s_j|_{U_i \cap U_j}$. Ma $s_i(x) \neq 0$ $\forall x \in U_i \cap A$ e quindi (cfr. par 2) per ogni i $s_i \in S_{U_i}$. Ancora si conclude $\lambda(\xi) = [s_i s_j^{-1}] = 0$.

Corollario. Sia X uno spazio di Stein: il 2^0 problema di Cousin è risolubile per X se e solo se $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$.

5. Il problema di Poincaré.

Abbiamo introdotto $\mathcal{M}$ come il fascio associato al prefascio $\mathcal{P}$.
Tra prefascio e fascio associato è definita un'applicazione che in generale non è iniettiva. Tuttavia nel nostro caso $F: \mathcal{P} \to \mathcal{M}$ lo è. Infatti se U è aperto in X, F è data da

$$F_U : \Gamma(U, \mathcal{O}_X)_{S_U} \to \Gamma(U, \mathcal{M})$$

$$F_U(f/g) = \{f_x/g_x\}_{x \in U}$$

e quindi $\{f_x/g_x\} = 0$ se e solo se $f = 0$.

In particolare per ogni spazio analitico X si ha un omomorfismo iniettivo d'anelli

$$F_X : \Gamma(X, \mathcal{O}_X)_{S_X} \to \Gamma(X, \mathcal{M}).$$

Il problema di Poincaré consiste nel chiedere per quali spazi X, F_X è surgettiva.

Vogliamo dimostrare la seguente proposizione, analoga al lemma 7.

Prop. 8. Sia X uno spazio di Stein, $\mathcal{I}$ un fascio coerente di ideali di $\mathcal{O}_X$. Supponiamo che per ogni $x \in X$, la fibra $\mathcal{I}_x$ contenga un non divisore di zero. Allora esiste $s \in \Gamma(X, \mathcal{I})$ tale che s_x non divide zero per ogni $x \in X$.

Sono necessari i seguenti lemmi:

LEMMA 9. Sia T_x l'insieme, supposto non vuoto, dei non divisori di zero in $\mathcal{I}_x$. T_x è aperto e denso in $\mathcal{I}_x$ per la topologia di Cartan [5].

DIM: Sia $\mathfrak{a}$ un ideale qualunque in $\mathcal{O}_{X,x}$. $\mathfrak{a}$ è finitamente generato perchè $\mathcal{O}_{X,x}$ è un anello noetheriano. Comunque si scelga un aperto U di Stein relativamente compatto contenente x, poichè $\mathcal{O}_{X,x}$ è piatto su $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, l'immagine inversa di $\mathfrak{a}$ in $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ è finitamente generata e dunque chiusa. Ciò prova che $\mathfrak{a}$ è chiuso nella topologia limite diretto di $\mathcal{O}_{X,x}$. Inoltre $\mathfrak{a}$ è un sotto $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di $\mathcal{O}_{X,x}$ e quindi se $\mathfrak{a} \neq \mathcal{O}_{X,x}$, il complementare di $\mathfrak{a}$ è denso in $\mathcal{O}_{X,x}$.

Sia ora $(0) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{q}_i$ la decomposizione primaria di (0) nell'anello noetheriano $\mathcal{O}_{X,x}$ e sia $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. $\mathfrak{p}_i$ è chiuso e quindi $\mathfrak{p}_i \cap \mathcal{I}_x$ è chiuso in $\mathcal{I}_x$. Inoltre $\mathfrak{p}_i \cap \mathcal{I}_x$ è un sotto $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di $\mathcal{I}_x$ proprio, poichè altrimenti si avrebbe $T_x = \bigcap_{i=1}^{k} [\mathcal{I}_x - (\mathfrak{p}_i \cap \mathcal{I}_x)] = \emptyset$. Pertanto $\mathfrak{p}_i \cap \mathcal{I}_x$ è a complementare denso e quindi T_x è un aperto denso.

LEMMA 10. Sia $\gamma_x : \Gamma(X, \mathcal{I}) \to \mathcal{I}_x$ l'applicazione canonica: $\gamma_x^{-1}(T_x)$ è aperto e denso in $\Gamma(X, \mathcal{I})$.

DIM. Supponiamo per il momento $\gamma_x^{-1}(T_x)$ non vuoto. Si ha allora per ogni i che $\gamma_x^{-1}(\mathfrak{p}_i \cap \mathcal{I}_x)$ è un sotto $\mathbb{C}$-spazio vettoriale chiuso non banale di $\Gamma(X, \mathcal{I})$ e quindi è magro. Ne segue che $\gamma_x^{-1}(T_x)$ è aperto e denso.

Resta solo da provare che $\gamma_x^{-1}(T_x) \neq \emptyset$; ma questa è una conseguenza del più generale

LEMMA 11. Sia A un anello e siano $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ ideali in A. Sia R un sottoinsieme di A chiuso rispetto alla somma e al prodotto. Se $R \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$ allora $R \subset \mathfrak{a}_j$ per qualche j.

DIM: Se per ogni j $R \not\subset \mathfrak{a}_j$, esistono elementi $b_1, \dots, b_n$ tali che $b_j \notin \mathfrak{a}_j$, $j = 1, \dots, n$. Sotto queste ipotesi il polinomio

---

[5] La topologia di Cartan sulla fibra di un fascio coerente $\mathcal{F}$ è definita così: una successione $\{g_n\}$ in $\mathcal{F}_x$ converge a g se esiste un aperto $U \ni x$ e una successione $\{f_n\}$ in $\Gamma(U, \mathcal{F})$ convergente ad $f \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ con $f_{n,x} = g_n$ e $f_x = g$.

La topologia di Cartan coincide con la topologia limite diretto.

$$P_n(b_1, \dots, b_n) = \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i_1 < i_2} b_{i_1} b_{i_2} + \dots + b_1 \cdot b_2 \dots b_n$$

non può essere elemento di nessun $\mathfrak{a}_j$.

Questo si dimostra per induzione. Per $n = 1$ è banalmente vero. Supponiamo ora, ad esempio, $P_n(b_1, \dots, b_n) \in \mathfrak{a}_1$. Si ha

$$P_n(b_1, \dots, b_n) = b_1(1 + P_{n-1}(b_2, \dots, b_n)) + P_{n-1}(b_2, \dots, b_n) \in \mathfrak{a}_1 .$$

Per ipotesi induttiva $P_{n-1}(b_1, \dots, b_u) \notin \mathfrak{a}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{a}_n$ e qunque, dato che R è chiuso, è elemento di $\mathfrak{a}_1$. Se $P_n(b_1, \dots, b_n) \in \mathfrak{a}_1$ si ha $b_1 \in \mathfrak{a}_1$ contro l'ipotesi.

Quindi $P_n(b_1, \dots, b_n) \notin \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$ e dunque R non è chiuso rispetto alla somma e al prodotto.

Dim. della prop. 8: Sia al solito $(0) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$, $X_i = \{x \in X \mid f(x) = 0$ per ogni $f \in \mathfrak{p}_i\}$ e x_i un punto qualunque in X_i. Sia $s \in \mathfrak{p}_i$; s è allora divisore di 0 ed esiste quindi $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ con $s \cdot f = 0$.

Abbiamo visto che si può supporre $f \notin \mathfrak{q}_i$.

Sia $M_{x_i} = \{t \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \mid t(x_i) = 0\}$ e sia $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)_{M_{x_i}}$ il localizzato di $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ rispetto al complementare di M_{x_i}.

Mostriamo che s è divisore di zero come elemento di $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)_{M_{x_i}}$: infatti f non è zero in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)_{M_x}$, perchè, se lo fosse, esisterebbe $t \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $t \notin M_{x_i}$ con $f \cdot t = 0$; poichè $M_{x_i} \supset \mathfrak{p}_i$, $t \notin \mathfrak{p}_i$ e dunque poichè $f \cdot t = 0 \in \mathfrak{q}_i$, si avrebbe $f \in \mathfrak{q}_i$ contro l'ipotesi. Dunque $s \cdot f = 0$ in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)_{M_{x_i}}$ con $f \neq 0$.

Osserviamo ora che l'applicazione

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X)_{M_{x_i}} \to \mathcal{O}_{X, x_i}$$

è iniettiva. Infatti se $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ è tale che $f_{x_i} = 0$, la fibra in x_i del fascio $\operatorname{Ann} f$ è $\mathcal{O}_{X, x_i}$. Poichè $\operatorname{Ann} f$ è un fascio coerente esiste una sezione globale $t \in \Gamma(X, \operatorname{Ann} f)$ tale $t_{x_i} \notin \mathfrak{M}_{x_i}$, cioè $t \notin M_{x_i}$. Poichè $t \cdot f = 0$, f è zero come elemento $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)_{M_{x_i}}$.

In conclusione abbiamo provato che se $s \in \mathfrak{p}_i$ allora s_{x_i} è divisore di 0.

Per il teorema di Baire l'insieme

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_x^{-1}(T_{x_i})$$

non è vuoto: sia s un suo elemento. Dunque per ogni i s_{x_i} è non divisore di zero: per quanto visto prima $s \notin \mathfrak{p}_i$ per ogni i e dunque s è non divisore di 0 in $\Gamma(X, \mathcal{I})$. Per il lemma 2 s_x non divide 0 per ogni $x \in X$ e quindi risolve il nostro problema.

TEOREMA 2. (1) Se X è uno spazio di Stein (non necessariamente ridotto) il problema di Poincaré è risolubile per X.

(2) Se X è rno spazio ridotto verificante il teorema A, il problema di Poincarè è risolubile per X.

DIM: (1) Sia $m \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ una funzione meromorfa. Per ogni aperto U di X poniamo

$$\mathcal{I}(U) = \{h \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \text{ tali che } h \cdot m|_U \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)\}.$$

E' così definito un fascio coerente di ideali di $\mathcal{O}_X$ in quanto $\mathcal{I} = \text{Ann}\, \dfrac{\mathcal{O}_X + m\mathcal{O}_X}{\mathcal{O}_X}$.

Inoltre poichè per ogni x $m_x = f_x/g_x$ con $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$, $g_x \in T_x \subset \mathcal{I}_x$, $\mathcal{I}_x$ contiene un non divisore di zero. Secondo la prop. 8 esiste $s \in (X, \mathcal{I})$ tale che $s_x \in T_x$ per ogui x in X. Si ha

$$s \cdot m = f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X).$$

Poichè $s \in S_X$ si ha $m = f/s$ e il problema di Poincarè è risolto

(2) Nel caso in cui X sia ridotto è sufficiente il teorema A secondo i risultati di [4].

6. Un esempio di varietà non di Stein per cui il problema di Poincaré è risolubile.

Sia X una varietà complessa che sia una « corona completa » nel senso di [7] e in cui la funzione esaustiva φ non raggiunga mai il suo estremo inferiore. Sotto queste ipotesi X non è di Stein perché l'inviluppo convesso dei compatti $\{a \leq \varphi \leq b\}$ è dato da $\{\varphi \leq b\}$ e quindi non è compatto.

In [7] pag. 66-68 è provato che se $\mathcal{F}$ è un fascio analitico coerente su X tale che prof. $\mathcal{F} > 3$ allora X verifica il teorema A relativamente ad $\mathcal{F}$.

Sia $m \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ una funzione meromorfa su X e sia $\mathcal{F}$ il fascio di ideali definito nel teorema 2: per provare che il problema di Poincarè è risolubile per X basterà dimostrare che prof $\mathcal{I} > 3$. Questo discende dal fatto che per ogni $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x} = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ è fattoriale.

Infatti per ogni $x \in X$ si ha $m_x = \dfrac{a_x}{b_x}$ con a_x e b_x in $\mathcal{O}_{X,x}$. Per la fattorialità di $\mathcal{O}_{X,x}$ si può supporre che a_x e b_x siano primi fra loro e quindi, se a e b sono le sezioni di $\mathcal{O}_X$ definite da a_x e b_x su un piccolo intorno di x, che a_y e b_y siano primi fra loro per ogni y abbastanza vicino a x.

Sia $h_x \in \mathcal{I}_x$: per definizione $h_x m_x = \dfrac{h_x a_x}{b_x} \in \mathcal{O}_{X,x}$. Dalla fattorialità di $\mathcal{O}_{X,x}$ segue che b_x divide h_x. Ciò prova che $\mathcal{I}_x$ è generato da b_x e dunque $\mathcal{I}$ è un fascio localmente libero di rango 1 (b_x è non divisore di zero).
Pertanto prof. $\mathcal{I} = \dim X = n > 3$.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. ABHYANKAR - *Local analytic geometry.* Acad. Press. 1964.

[2] C. BĂNICĂ A. DUMA O. STĂNĂŞILĂ - *Proprietăţi ale spatiilor Stein,* Studi si cercetari matematice. Tom 21, N⁰ 6, pag. 877-907. Bucaresti 1969.

[3] C.BĂNICĂ O. STĂNĂŞILĂ - *A structure theorem for the analytic coherent sheaves.* Boll. U. M. I. (4) n. 6, pag. 615-621 (1969).

[4] C. BĂNICĂ O. STĂNĂŞILĂ - *Problème de Poincaré pour un espace de Stein.* Ren. Acc. Naz. Lincei, Serie VIII, Vol. XLVII pag. 25-26 (1969).

[5] O. FORSTER - *Primärzerlegung in Steinschen Algebren.* Math. Annalen 154 pag. 307-329 (1964).

[6] R. NARASIMHAN - *Introduction to the theory of Analytic spaces.* Lecture notes 25. Springer 1966.

[7] G. TOMASSINI - *Inviluppo d'olomorfia e spazi pseudoconcavi.* Annali di Matematica pura ed applicata (IV) Vol. LXXXVII pag. 59-86.

[8] Y. SIU G. TRAUTMANN - *Gap sheaves and extension of coherent analytic subsheaves.* Lect. Notes. in Math. 172 (1972).