Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

N. Lohoué
J. Peyrière

Estimation de la norme de certains opérateurs de $L^p(T)$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 27, nº 4 (1973), p. 815-844
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_4_815_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ESTIMATION DE LA NORME DE CERTAINS OPÉRATEURS DE $L^p(T)$

par N. Lohoué et J. Peyrière

Introduction.

1⁰ Nous nous proposons d'étudier le problème suivant :

Soit $\mathbf{T}$ le cercle unité; soit $\{a_{m,n}\}_{m,n \in \mathbf{Z}}$ une matrice infinie, trouver des conditions variationnelles sur les coefficients de cette matrice pour qu'elle définisse, dans un sens évident, on opérateur borné sur $L^p(\mathbf{T})$, $(1 < p < \infty)$.

Le cas où la matrice $\{a_{m,n}\}$ est diagonale a déjà été étudié par plusieurs auteurs (Marcinkiewicz (8), Mihlin (9)). Plus récemment E. M. Stein a donné des conditions suffisantes, liées à un semi-groupe de Poisson, sur un espace mesuré, M, quelconque, pour qu'un opérateur soit borné sur $L^p(M)$ (voir 11).

En général il n'y a pas de méthode directe pour s'attaquer à un tel problème; nous prendrons un détour, en appliquant des méthodes d'intégrales singulières à un groupe contenant $\mathbf{T}$ comme sous-groupe.

2⁰ Idées directrices; utilisation de $M(2)$.

a) Nous notons $M(2)$ le groupe des déplacements du plan, il se réalise comme le produit semi-direct $\mathbf{R}^2 \circledS \mathbf{T}$; $\mathbf{T}$ est identifié au groupe des rotations du plan. Le point générique de $M(2)$ sera noté $g = (x, \alpha)$ ou $g = (r, \varphi, \alpha)$, r et φ étant les coordonnées polaires de x.

b) Pour chaque $\varrho > 0$, on définit une représentation, T_ϱ, de $M(2)$ sur $L^p(\mathbf{T})$ de la façon suivante :

si $g = (r, \varphi, \alpha)$ et si $f \in L^p(\mathbf{T})$ on pose $T_\varrho(g) f(\psi) = e^{i\varrho r \cos(\psi - \varphi)} f(\psi - \alpha)$.

Soit h une fonction sommable sur $M(2)$ pour la mesure $dx\, d\alpha$, l'opérateur $\hat{h}(\varrho)$ défini par :

$$\hat{h}(\varrho) f = \iint_{\mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}} T_\varrho(x, \alpha) f\, h(x, \alpha)\, dx\, d\alpha$$

est borné sur $L^p(\mathbf{T})$.

Pervenuto alla Redazione il 12 Luglio 1973.

L'application $h \longmapsto \hat{h}(\varrho)$ se prolonge en une application linéaire d'un certain sous-espace de Banach des opérateurs de convolution de $L^p(M(2))$ sur $\mathcal{L}(L^p(\mathbf{T}))$, (voir (2)). Par conséquent tout théorème garantissant qu'un opérateur de convolution est borné sur $L^p(M(2))$ donne des conditions suffisantes pour que certains opérateurs soient bornés sur $L^p(\mathbf{T})$.

3° Enoncés des résultats.

Les résultats que nous obtenons par cette méthode paraissent nouveaux. Malheureusement leurs énoncés ne sont pas très simples, et ils ne répondent que partiellemcnt à la question posée.

Nous commencerons par les énoncés concernant $L^p(M(2))$, et nous donnerons ensuite en applieation ceux qui intéressent $L^p(\mathbf{T})$.

Soit $M(\varrho) = \{M(\varrho, m, n)\}_{(m,n)\in Z\times Z}$ une fonction du nombre réel strictement positif, ϱ, à valeurs dans l'ensemble des matrices infinies à coefficients complexes. Le théorème 1 donne une condition suffisante pour que cette fonction soit un multiplicateur à gauche de $\mathcal{F}(L^p(M(2)))$ pour $p \in]1, 2]$ (la définition est rappelée au § 2.3.2).

On suppose que chacune des fonctions $\varrho \longmapsto M(\varrho, m, n)$ est de classe C^2 et que, lorsque n est non nul, $M(\varrho, m, n) = o(\varrho^{-|m-n|})$ et $M'(\varrho, m, n) = o(\varrho^{-(1+|m-n|)})$ au voisinage de 0.

Si j est un entier négatif on pose :

$$A_j = 2^{-4j}\int_{2^{j-1}}^{2^j}\Big(\sum_{m\in Z}|M(\varrho, m, 0)(1+m^2)|^2\Big)\varrho\, d\varrho$$

$$B_j = 2^{-2j}\int_{2^{j-1}}^{2^j}\Big(\sum_{m\in Z}|M'(\varrho, m, 0)|^2\Big)\varrho\, d\varrho$$

$$C_j = \int_{2^{j-1}}^{2^j}\Big(\sum_{m\in Z}|M''(\varrho, m, 0)|^2\Big)\varrho\, d\varrho$$

$$D_j = 0.$$

On appelle $\{n_j\}_{j\geq 0}$ la suite d'entiers ainsi définie : $n_0 = 0$, $n_j = 2^{2(j-1)}$.

Si j est un entier strictement positif on pose :

$$A_j = \int_0^{2^{j-1}}\Big(\sum_{m\in Z}\ \sum_{n_{j-1}\leq |n|\leq n_j}|(m-n)^2 M(\varrho, m, n)|^2\Big)\frac{d\varrho}{\varrho^3}$$

$$+\int_{2^{j-1}}^{2^j}\Big(\sum_{m\in Z}\ \sum_{|n|\le n_j}|(m-n)^2 M(\varrho,m,n)|^2\Big)\frac{d\varrho}{\varrho^3}$$

$$+\,2^{-4j}\int_{2^{j-1}}^{2^j}\Big(\sum_{m\in Z}\ \sum_{n_{j-1}\le|n|\le n_j}|M(\varrho,m,n)|^2\Big)\varrho\,d\varrho$$

$$+\,2^{-4j}\int_{2^{j-1}}^{2^j}\Big(\sum_{m\in Z}\ \sum_{|n|\le n_j}|M(\varrho,m,n)|^2\Big)\varrho\,d\varrho$$

$$B_j=\int_0^{2^{j-1}}\Big(\sum_{m\in Z}\ \sum_{n_{j-1}\le|n|\le n_j}|M'(\varrho,m,n)|^2\Big)\frac{d\varrho}{\varrho}$$

$$+\int_{2^{j-1}}^{2^j}\Big(\sum_{m\in Z}\ \sum_{|n|\le n_j}|M'(\varrho,m,n)|^2\Big)\frac{d\varrho}{\varrho}$$

$$C_j=\int_0^{2^{j-1}}\Big(\sum_{m\in Z}\ \sum_{n_{j-1}\le|n|\le n_j}|M''(\varrho,m,n)|^2\Big)\varrho\,d\varrho$$

$$+\int_{2^{j-1}}^{2^j}\Big(\sum_{m\in Z}\ \sum_{|n|\le n_j}|M''(\varrho,m,n)|^2\Big)\varrho\,d\varrho$$

$$D_j=\int_0^{2^{j-1}}\Big(\sum_{m\in Z}\ \sum_{n_{j-1}\le|n|\le n_j}|M(\varrho,m,n)-M(\varrho,m+1,n+1)|^2\Big)\varrho\,d\varrho$$

$$+\int_{2^{j-1}}^{2^j}\Big(\sum_{m\in Z}\ \sum_{|n|\le n_j}|M(\varrho,m,n)-M(\varrho,m+1,n+1)|^2\Big)\varrho\,d\varrho.$$

THÉORÈME 1. **Si, pour tout j, les nombres A_j, B_j, C_j, D_j sont finis, si, lorsque j tend vers $-\infty$, $A_j+B_j+C_j=0\,(2^{-2j})$ et, lorsque j tend vers $+\infty$, $A_j+B_j+C_j+D_j=0\,(j^{-3})$, M est, pour tout $p\in]1,2]$, un multiplicateur à gauche de $\mathcal{F}(L^p(M(2)))$.**

Si S est une distribution sur $M(2)$ c'est aussi une distribution sur le groupe abélien $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}$ dont nous noterons $\mathcal{F}S$ la transformée de Fourier. Le théorème suivant donne des conditions portant sur $\mathcal{F}S$ suffisantes pour que S soit un convoluteur à gauche de $L^p(M(2))$ $(1 < p < \infty)$.

Théorème 2. On suppose que la distribution $\mathcal{F}S$ est une fonction, qu'elle est de classe C^2 en dehors des axes et qu'il existe un nombre C tel que:

$$\text{(i)} \quad \mathcal{F}S(x, y, 0) \leq C \text{ et } \sum_{n \in \mathbf{Z}} |\mathcal{F}S(x, y, n+1) - \mathcal{F}S(x, y, n)| \leq C$$

quels que soient x et y.

(ii) Pour tout nombre stcictement positif, R:

$$\int_{-R}^{R} \left(\left| \frac{\partial \mathcal{F}S}{\partial y}(\varepsilon R, t, 0) \right| + \left| \frac{\partial \mathcal{F}S}{\partial x}(t, \varepsilon R, 0) \right| \right) dt \leq C \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

et

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_{-R}^{R} \left(\left| \frac{\partial \mathcal{F}S}{\partial y}(\varepsilon R, t, n+1) - \frac{\partial \mathcal{F}S}{\partial y}(\varepsilon R, t, n) \right| + \right.$$
$$\left. \left| \frac{\partial \mathcal{F}S}{\partial x}(t, \varepsilon R, n+1) - \frac{\partial \mathcal{F}S}{\partial x}(t, \varepsilon R, n) \right| \right) dt \leq C.$$

(iii) Pour tout nombre positif, R:

$$\iint_{R \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2R} \left| \frac{\partial^2 \mathcal{F}S}{\partial x\, \partial y}(x, y, 0) \right| dx\, dy \leq C$$

et

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \iint_{R \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2R} \left| \frac{\partial^2 \mathcal{F}S}{\partial x\, \partial y}(x, y, n+1) - \frac{\partial^2 \mathcal{F}S}{\partial x\, \partial y}(x, y, n) \right| dx\, dy \leq C.$$

Alors pour tout $p \in]1, +\infty[$, l'application $f \mapsto S * f$, définie sur les fonctions de $\mathcal{D}(M(2))$, se prolonge continûment à $L^p(M(2))$.

Utilisant le théorème 1 nous obtenons le résultat suivant sur les opérateurs de $L^p(\mathbf{T})$.

Théorème 3. Soit $A = \{a_{m,n}\}_{(m,n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}}$ une matrice infinie de nombres complexes telle que:

(i) pour tout n, $\sum_{m \in \mathbf{Z}} |a_{m,n}|^2 < +\infty$

(ii) $\sup_{j>0} j^3 \sum_{m\in Z} \sum_{2^{2j}\leq |n|\leq 2^{2j+2}} |(1+(m-n)^2)\, a_{m,n}|^2 < +\infty.$

Alors A définit un opérateur, T, sur les polynômes trigonométriques ainsi :

$Te^{inx} = \Sigma\, a_{m,n}\, e^{imx}$; cet opérateur se prolonge continûment à $L^p(\mathbf{T})$ lorsque $p \in]1, +\infty[$.

I. QUELQUES RÉSULTATS D'ANALYSE HARMONIQUE GÉNÉRALE

1. Rappels.

1.1. Le point générique de $M(2)$ sera noté $g = (x, \alpha)$ ou $g = (r, \varphi, \alpha)$, $x \in \mathbf{R}^2$ $r \in [0, +\infty[$, $\varphi \in [0, 2\pi[$, $\alpha \in [0, 2\pi[$, r et φ étant les coordonnées polaires de x. On notera aussi x_α le point transformé de x par la rotation d'angle α.

Le groupe $M(2)$ est unimodulaire ; la mesure de Haar est $dg = \frac{1}{4\pi^2}\, dx\, d\alpha = \frac{1}{4\pi^2}\, r\, dr\, d\varphi\, d\alpha$. Une fonction sur $M(2)$ sera identifiée suivant le cas à une fonction sur $\mathbf{R}^3$, 2π périodique de la dernière variable ou à une fonction sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2$, 2π-périodique des deux dernières variables.

$M(2)$ est un groupe de Lie résoluble, donc moyennable ; nous utiliserons cette propriété sous la forme suivante : pour tout compact K_1 de $M(2)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_2 de $M(2)$ tel que :

$$\mathrm{mes}\,(K_1 K_2) \leq (1+\varepsilon)\,\mathrm{mes}\,(K_1)$$

$\mathrm{mes}\,(K_i)$ est la mesure de K_i (voir 2).

1.2. Pour chaque $\varrho > 0$, on définit une représentation, T_ϱ, unitaire irréductible de $M(2)$ sur $L^2(\mathbf{T})$ de la façon suivante :

Si $g = (r, \varphi, \alpha)$ et $f \in L^2(\mathbf{T})$, on pose $T_\varrho(g) f(\psi) = e^{i\varrho r \cos(\psi-\varphi)} f(\psi - \alpha)$. On montre dans (8) que toute représentation unitaire isréductible de $M(2)$ est équivalente à l'une d'elles.

1.3. Nous utiliserons la base de $L^2(\mathbf{T})$ formée des fonctions $e_n(\psi) = e^{in\psi}$, $n \in \mathbf{Z}$. Dans cette base les coefficients de Fourier de la représentation T_ϱ sont :

$$t^{\varrho}_{m,n}(r, \varphi, \alpha) = \langle T_\varrho(r, \varphi, \alpha)\, e_n, e_m \rangle_{L^2(T)}$$

soit :

$$t^{\varrho}_{m,n}(r,\varphi,\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\varrho r\cos(\psi-\varphi)}\, e^{i[(n-m)\psi-n\alpha]}\, d\psi = i^{n-m}\, e^{-i[n\alpha+(m-n)\varphi]}\, J_{n-m}(\varrho r)$$

où J_γ désigne la fonction de Bessel d'indice γ.

On trouve les résultats de 1.1 et 1.2 dans [12].

1.4. Nous utiliserons certains espaces de Banach introduits par Kunze et Stein dans [5]. Nous notons $\mathcal{L}L^2(\mathbf{T})$ l'espace de Banach des endomorphismes continus de $L^2(\mathbf{T})$ et $\mathcal{L}\mathcal{C}L^2(\mathbf{T})$ le sous-espace de $\mathcal{L}L^2(\mathbf{T})$ constitué des opérateurs compacts.

Une fonction $F: \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathcal{L}L^2(\mathbf{T})$ sera dite mesurable, si elle est faiblement mesurable.

Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on note $\mathbf{L}^p(\varrho\, d\varrho, \mathcal{B}_p)$, l'espace de Banach, pour la norme évidente, des fonctions $F: \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathcal{L}L^2(\mathbf{T})$ qui vérifient la relation :

$$\int_0^{+\infty} Tr\,[F(\varrho)\,F^*(\varrho)]^{p/2}\,\varrho\, d\varrho < \infty$$

où $Tr(A)$ désigne la trace de l'opérateur A.

On a une définition analogue de $\mathbf{L}^\infty$ en faisant les modifications classiques. On montre que, pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace de Banach dual de $\mathbf{L}^p(\varrho\, d\varrho, \mathcal{B}_p)$ est $\mathbf{L}^{p'}(\varrho\, d\varrho, \mathcal{B}_{p'})$ où $1/p + 1/p' = 1$.

On pourra consulter [5] pour avoir plus de précision sur cette partie.

2. Transformation de Fourier.

2.1.1. Soit f une fonction continue à support compact sur $M(2)$ et soit ϱ un nombre strictement positif; on pose :

$$\hat{f}(\varrho) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{M(2)} T_\varrho(r,\varphi,\alpha)\, f(r,\varphi,\alpha)\, r\, dr\, d\varphi\, d\alpha$$

$\hat{f}(\varrho)$ est un opérateur compact de $L^2(\mathbf{T})$; les coefficients de la matrice de cet opérateur par rapport à la base $\{e_n\}$ sont :

$$\langle \hat{f}(\varrho)\, e_n, e_m \rangle = \hat{f}(\varrho, m, n)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+2\pi} \int_0^{2\pi} t^{\varrho}_{m,n}(r, \varphi, \alpha) f(r, \varphi, \alpha)\, r\, dr\, d\varphi\, d\alpha.$$

L'application $f \mapsto \widehat{f}(\varrho)$ est un homomorphisme d'image dense de $L^1(M(2))$ dans $\mathcal{L}C(L^2(\mathbf{T}))$.

2.1.2. Une fonction, f, de $L^1(M(2))$ peut aussi être considérée comme un élément de $L^1(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{T})$ ce qui permet de définir sa transformée de Fourier habituelle, les formules suivantes relient les diverses transformées :

Si l'on pose :

$$\mathcal{F}_1 f(\varrho, \psi, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{i\varrho r \cos(\psi - \varphi)} f(r, \varphi, \alpha)\, r\, dr\, d\varphi$$

$$\mathcal{F} f(\varrho, \psi, n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\varrho r \cos(\psi - \varphi) - in\alpha} f(r, \varphi, \alpha)\, r\, dr\, d\varphi\, d\alpha.$$

On a :

$$\widehat{f}(\varrho, m, n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i((n-m)\psi - n\alpha)} \mathcal{F}_1 f(\varrho, \psi, \alpha)\, d\psi\, d\alpha$$

et

$$\widehat{f}(\varrho, m, n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\psi} \mathcal{F} f(\varrho, \psi, n)\, d\psi.$$

2.2. *Formule de Plancherel.*

Nous énonçons une proposition dont la preuve est presque évidente, qui doit être certainement prouvée quelque part ; mais nous ne savons pas où. Pour éviter des renvois inutiles au lecteur, nous préfèrons la démontrer.

PROPOSITION :

La trasformation $f \to \widehat{f}$ est une isométrie de $L^2(M(2))$ sur $\mathbf{L}^2(\varrho\, d\varrho, \mathcal{B}_2)$. (On peut montrer, en utilisant une idée de Kunze et E. M. Stein (7) qu'elle applique $L^p(M(2))$ dans $\mathbf{L}^{p'}(\varrho\, d\varrho, \mathcal{B}_{p'})$ lorsque $p \in [1, 2]$. Adoptons la

DÉFINITION. Soit f une fonction sur R^+, de carré intégrable par rapport à la mesure $\varrho\, d\varrho$; on appelle transformée de Fourier-Bessel d'ordre n

de f la fonction

2.2.1 $$\mathcal{F}\mathcal{B}_n(f)(r) = \int_0^{+\infty} f(r)\, J_n(\varrho r)\, \varrho\, d\varrho.$$

On montre que $\mathcal{F}\mathcal{B}_n$ est un automorphisme isométrique de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+, \varrho\, d\varrho)$ dont le carré est l'identité.

Passons à la démonstration de la proposition.

Soit f une fonction de classe C^∞ sur $M(2)$, à support compact :

$$\widehat{f}(\varrho, m+n, n) = \frac{i^{-m}}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\alpha - im\varphi}\, J_{-m}(\varrho r) f(r, \varphi, \alpha)\, r\, dr\, d\varphi\, d\alpha.$$

On obtient donc la transformation de Fourier opératorielle sur $M(2)$ en composant la transformation de Fourier sur $\mathbf{T}$ et la transformation de Fourier Bessel.

En utilisant les formules d'inversion, on trouve :

2.2.2 $$f(r, \varphi, \alpha) = \sum_{\substack{m \in \mathbf{Z} \\ n \in \mathbf{Z}}} (i)^m\, e^{i[n\alpha + m\varphi]} \int_0^{+\infty} \varrho\, J_{-m}(\varrho\, r) \widehat{f}(\varrho, m+n, n)\, d\varrho$$

Par ailleurs :

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\widehat{f}(\varrho, n+m, n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \left[\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{+\infty} J_{-m}(\varrho r)\, r\, dr \int_0^{2\pi} e^{im\varphi} f(r, \varphi, \alpha)\, d\varphi \right| \right]^2$$

2.2.3 $$\int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\widehat{f}(\varrho, m+n, n)|^2\Big)\, \varrho\, d\varrho = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{+\infty} r\, dr \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} f(r, \varphi, \alpha)\, d\varphi \right|^2$$

$$\sum_{m \in \mathbf{Z}} \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\widehat{f}(\varrho, m+n, n)|^2\Big)\, \varrho\, d\varrho = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{+\infty} r\, dr \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r, \varphi, \alpha)|^2\, d\varphi\right).$$

Cette dernière égalité s'écrit aussi $\|\widehat{f}\|_{\mathbf{L}^2(\varrho d\varrho, \mathcal{B}_2)} = \|f\|_{L^2(M(2))}$. Puisque $\mathcal{D}(M(2))$ est dense dans $L^2(M(2))$ ceci montre que la transformation de Fourier est une isométrie de $L^2(M(2))$ dans $\mathbf{L}^2(\varrho\, d\varrho, \mathcal{B}_2)$.

Par ailleurs si F est une fonction simple de $\mathbf{L}^2(\varrho\, d\varrho, \mathcal{B}_2)$, c'est-à-dire une fonction de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathcal{LC}(L^2(\mathbf{T}))$ prenant un nombre fini de valeurs qui sont des opérateurs de rang fini, la formule 2.2.2 donne une fonction,

f, dont F est la transformée de Fourier. Il suffit d'utiliser la densité de l'ensemble des fonctions simples dans $\mathbf{L}^2(\varrho\, d\varrho, \mathcal{B}_2)$ pour voir que la transformation de Fourier est surjective.

2.3. *Transformée de Fourier d'un convoluteur de $M(2)$.*

Soit $\mathrm{CONV}_p(M(2))$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires de $L^p(M(2))$ qui commutent avec les translations à droite.

2.3.1. Proposition. $\mathrm{CONV}_2(M(2))$ et $\mathbf{L}^\infty(\varrho\, d\varrho, \mathcal{B}_\infty)$ sont isométriquement isomorphes.

La démonstration de cette proposition ressemble à la démonstration classique pour un groupe abélien (7).

2.3.2. Corollaire. Soit $S \in \mathrm{CONV}_p(M(2))$, il existe une fonction, $\widehat{S} \in \mathbf{L}^\infty(\varrho\, d\varrho, \mathcal{B}_\infty)$, telle que pour toute fonction, $f \in L^p(M(2)) \cap L^2(M(2))$, la transformée de Fourier de $S * f$ soit $\widehat{S} \cdot \widehat{f}$.

Il suffit de remarquer que le groupe $M(2)$ est moyennable et d'appliquer un résultat de (4).

3. Etude de certains convoluteurs.

Les convoluteurs portés par $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{T}$ et les convoluteurs centraux (ceux qui commutent avec les translations à droite et à gauche) se décrivent facilement.

On sait que tont sous-groupe fermé de $M(2)$ est moyennable, par conséquent de synthèse pour l'algèbre $A_p(M(2))$ d'après (3). Plus précisément on a la proposition suivante :

3.1. Proposition. Soit S une distribution portée par l'un des deux sous-groupes $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{T}$. les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) L'opérateur $f \longmapsto S * f$ (convolution non abélienne) est borné sur $L^p(M(2))$.

b) L'opératenr $f \longmapsto S * f$ (convolution abélienne) est borné sur $L^p(\mathbf{R}^2)$ ou $L^p(\mathbf{T})$ suivant que S est porté par $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{T}$; de plus, selon les cas on a :

$$\| S \|_{\mathrm{CONV}_p(M(2))} = \| S \|_{\mathrm{CONV}_p(\mathbf{R}^2)} \quad \text{ou} \quad \| S \|_{\mathrm{CONV}_p(M(2))} = \| S \|_{\mathrm{CONV}_p(\mathbf{T})} .$$

On montre facilement qu'un convoluteur central est porté par $\mathbf{R}^2$ et que sa transformée de Fourier est une fonction radiale.

On peut remarquer que les convoluteurs à support dans $\mathbf{T}$ sont exactement ceux dont la transformée de Fourier s'écrit : $\widehat{S}(\varrho, m, n) = \mathcal{F}S(m)\,\delta_{m,n}$ où $\mathcal{F}S$ est la suite bornée, transformée de Fourier de la distribution tempérée S, sur le groupe commutatif $\mathbf{T}$.

3.2. Etant donnée une fonction, f, définie sur $\mathbf{R}^2$ on définit deux fonctions, $\tilde{f}$ et $f^{\#}$, sur $M(2)$ ainsi :

$$\tilde{f}(x, \alpha) = f(x_{-\alpha}), \quad f^{\#}(x, \alpha) = f(x).$$

On a le résultat suivant :

3.3. Proposition. Etant donnée une fonction, f, appartenant à $L^1(\mathbf{R}^2)$ les normes de $\tilde{f}$ et $f^{\#}$ dans $\mathrm{CONV}_p(M(2))$ sont majorées par celle de f dans $\mathrm{CONV}_p(\mathbf{R}^2)$.

Soit h un élément de $\mathcal{D}(M(2))$. On a :

$$\tilde{f} * h(x, \alpha) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{R}^2} \int_0^{2\pi} f(x_{\beta-\alpha} - y)\, h(y, \beta)\, dy\, d\beta.$$

Or

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} f(x_{\beta-\alpha} - y)\, h(y, \beta)\, dy \right|^p dx \leq \|f\|^p_{\mathrm{CONV}_p(\mathbf{R}^2)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} |h(x, \beta)|^p\, dx \right)$$

donc

$$\left(\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} f_{\beta-\alpha} - y)\, h(y, \beta)\, dy \right|^p d\alpha\, dx \right)^{1/p}$$

$$\leq \|f\|_{\mathrm{CONV}_p(\mathbf{R}^2)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} |h(x, \beta)|^p\, dx \right)^{1/p}$$

utilisant l'inégalité de Minkowski nous obtenons :

$$\|\tilde{f} * h\|_{L^p(M(2))} \leq \|f\|_{\mathrm{CONV}_p(\mathbf{R}^2)} \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} |h(x, \beta)|^p\, dx \right)^{1/p} d\beta$$

d'où

$$\|\tilde{f} * h\|_{L^p(M(2))} \leq \|h\|_{L^p(M(2))}\, \|f\|_{\mathrm{CONV}_p(\mathbf{R}^2)}.$$

Un calcul analogue montre que

$$\| h * \tilde{f} \|_{L^p(M(2))} \leq \| h \|_{L^p(M(2))} \| f \|_{\mathrm{CONV}_p(\mathbf{R}^2)} .$$

Remarquons, d'autre part, que

$$\tilde{f}((x, \alpha)^{-1}) = \tilde{f}(-x_{-\alpha}, -\alpha) = f(-x) = f^{\#}(-x, \alpha)$$

ce qui prouve l'assertion relative à $f^{\#}$.

f étant toujours une fonction de $L^1(\mathbf{R}^2)$, nous noterons $\mathcal{F}f$ sa transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}f(\varrho, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{i\varrho r \cos(\psi - \varphi)} f(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi$$

en vertu des formules 2.1.2 nous avons :

3.4 $$\widehat{f^{\#}}(\varrho, m, n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-im\psi} \mathcal{F}f(\varrho, \psi)\, d\psi & \text{si} \quad n = 0 \end{cases}$$

$$\widehat{\tilde{f}}(\varrho, m, n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq 0 \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{in\psi} \mathcal{F}f(\varrho, \psi)\, d\psi & \text{si} \quad m = 0. \end{cases}$$

3.5. Remarque. Les résultats de cette partie, à l'exception des formules 3.4, n'étendent aux convoluteurs vectoriels. De façon plus précise soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert séparables, appelons $\mathcal{B}$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$. Soit f un élément de $L^1(\mathbf{R}^2, \mathcal{B})$. Alors f définit un convoluteur de $L^p(M(2), \mathcal{H}_1)$ dans $L^p(M(2), \mathcal{H}_2)$ à support dans $\mathbf{R}^2$, dont la norme est majorée par celle de f comme convoluteur de $L^p(\mathbf{R}^2, \mathcal{H}_1)$ dans $L^p(\mathbf{R}^2, \mathcal{H}_2)$, (le même résultat vaut pour les convoluteurs portés par $\mathbf{T}$) en outre les résultats relatifs à $\tilde{f}$ et $f^{\#}$ sont valides.

III. DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES

Pour démontrer les principaux résultats, nous aurons besoin des théorèmes d'intégrales singulières sur $M(2)$.

1. Intégrales singulières sur $M(2)$.

1.0. Soit $g = (x, \alpha) \in M(2)$, posons $\lambda(g) = \lambda(x, \alpha) = |x|^2 + \left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|$.
Alors :

$$\lambda[(x, \alpha)(y, \beta)] = |x + y_\alpha|^2 + \left|\sin\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\right|$$

et :

$$|\lambda[(x, \alpha)(y, \beta)]| \leq 2[\lambda(x, \alpha) + \lambda(y, \beta)].$$

1.1. Pour tout $t > 0$, on pose $v(t) = \int_{\lambda(g) \leq t} dg$.

Si $t \geq 1$ $$v(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{\pi}$$

Si $0 \leq t \leq 1$ $$v(t) = \frac{1}{\pi} ARC\sin t - \frac{1}{\pi}(1 - \sqrt{1 - t^2}).$$

Par conséquent $v(t)$ est équivalent à $\frac{1}{2}t$ au voisinage de l'infini et à $\frac{t^2}{2\pi}$ au voisinage de 0.

Alors $\sup_{t>0} \frac{v(2t)}{v(t)} < \infty$, ce qui montre que λ est une pseudo distance. Comme dans [1 chap. 3]. Ceci donne d'après [1 p. 74] l'énoncé suivant:

1.2. THÉORÈME. Soit k une fonction localement intégrable sur $M(2) \setminus \{0\}$. On suppose que :

1⁰ $\|\hat{k}\|_{L^\infty[\mathbb{R}^+, \varrho\, d\varrho, \mathcal{B}_\infty]} \leq A$.

2⁰ Il existe une constante $\tau > 0$ telle que :

$$\sup_{\lambda(g_0) \leq t} \int_{\lambda(g) \geq \tau t} |k(gg_0) - k(g)|\, dg \leq A.$$

Alors, pour tout $p \in]1, 2]$, k est un opérateur de convolution à gauche de $L^p[M(2)]$; sa norme est $O[[p-1]^{-1}]$.

2. Quelques inégalités.

2.1. Pour tout $t > 0$, posons

$$w(t) = \int_{\lambda(g)\geq t} \frac{dg}{\lambda(g)^2}.$$

On a :

$$w(t) = \int_t^{+\infty} \frac{dv(s)}{s^2}.$$

Par conséquent :

$$w(t) \simeq \frac{1}{2t} \quad \text{au voisinage de } +\infty$$

$$w(t) \simeq \frac{1}{4\pi} \log\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{au voisinage de } 0.$$

2.2. Soit f une fonction telle que $f \in L^2[M(2)]$, $\lambda f \in L^2[M(2)]$. On a les inégalités :

$$\int_{\lambda(g)\leq t} |f(g)|\, dg \leq \left[\int_{M(2)} |f(g)|^2\, dg\right]^{\frac{1}{2}} v(t)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_{\lambda(g)\geq t} |f(g)|\, dg \leq \left[\int_{M(2)} |\lambda(g) f(g)|^2\, dg\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\lambda(g)\geq t} \frac{dg}{[\lambda(g)]^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

par conséquent :

$$\|f\|_1 \leq \operatorname{Inf}\left(\|f\|_2 [v(t)]^{\frac{1}{2}} + \|\lambda f\|_2 [w(t)]^{\frac{1}{2}}\right).$$

3. Une autre pseudo-distance.

3.0. Soit

$$\lambda_1(g) = \lambda_1(x, \alpha) = |x|^2 + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

On vérifie que :

$$\lambda_1[(x, \alpha)(y, \beta)] \leq 2[\lambda_1(x, \alpha) + \lambda_1(y, \beta)].$$

3.1. Pour tout $t > 0$, on pose

$$v_1(t) = \int_{\lambda_1(g)} dg\,; \qquad w_1(t) = \int_{\lambda_1(g)\geq t} \frac{dg}{[\lambda_1(g)]^2}\,.$$

Alors :

$$v_1(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| \leq \sqrt{t}} \left[t - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right] d\alpha$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \qquad \text{si} \quad t \geq 1$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[t - \frac{1}{2}\right] \operatorname{Arc\,sin} \sqrt{t} + \frac{1}{2\pi}\sqrt{t(1-t)} \qquad \text{si} \quad 0 < t \leq 1.$$

En opérant de la même façon que précédemment on voit que :

$$v_1(t) = 0(t)\,; \quad w_1(t) = 0(t^{-1}) \quad \text{au voisinage de } +\infty$$

$$v_1(t) = 0(t^{3/2})\,; \quad w_1(t) = 0(t^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{au voisinage de } 0.$$

Par conséquent :

$$\sup_{t>0} \frac{v_1(2t)}{v_1(t)} < +\infty$$

et on a un théorème d'intégrales singulières analogue au théorème 1.2.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1 :

Pour démontrer le premier théorème, nous aurons besoin de deux lemmes techniques : l'un étudie le comportement de la transformée de Fourier-Bessel ; le second généralise une inégalité de S. Berstein. Ces résultats feront l'objet de la première partie. Nous aurons aussi besoin d'une partition de l'unité d'un type spécial ; elle est décrite dans la seconde partie. Nous démontrons aussi le théorème dans cette partie.

Un lemme sur les transformations de Fourier-Bessel

1.1. LEMME. Soient n un entier rationnel et u une fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{C}$, de classe C^2, à support compact. On suppose en outre que, $u'(t) = o(t^{-1-|n|})$ et que, si $n = 0$, $u(t) = o(1)$ au voisinage de 0. Si l'on pose

$$v(x) = \int_0^{+\infty} u(y) J_n(xy)\, y\, dy \text{ on a } x^2 v(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{n^2}{y^2} u(y) - \frac{1}{y} u'(y) - u''(y)\right) J_n(xy)\, y\, dy.$$

Rappelons les faits suivants :

$$J_0(t) = 0\,(1), \quad J_0'(t) = 0\,(t)$$

au voisinage de 0, et, si $n \neq 0$

$$J_n(t) = 0\,(t^{|n|}), \quad J_n'(t) = 0\,(t^{|n|-1})$$

au voisinage de 0.

$$t^2 J_n(t) = n^2 J_n(t) - t\, J_n'(t) - t^2 J_n''(t).$$

On a donc :

$$x^2 J_n(xy) = \frac{n^2}{y^2} J_n(xy) - \frac{x}{y} J_n'(xy) - x^2 J_a''(xy).$$

Or :

$$\int_0^{+\infty} - x\, J_n'(xy)\, u(y)\, dy = [- J_n(xy)\, u(y)]_0^{+\infty} +$$

$$+ \int_0^{+\infty} J_n(xy)\, u'(y)\, dy = \int_0^{+\infty} \frac{u'(y)}{y} J_n(xy)\, y\, dy$$

de même

$$\int_0^{+\infty} - x^2\, J_n''(xy)\, u(y)\, dy = - \int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{y} u'(y) + u''(y)\right) J_n(xy)\, y\, dy$$

ce qui démontre le lemme.

Ce lemme permet d'obtenir la formule suivante : soit f une fonction de $L^2(M(2))$ telle que $r^2 f$ appartienne aussi à $L^2(M(2))$ alors

$$(r^2 \widehat{f})(\varrho, m, n) = \frac{|m-n|^2}{\varrho^2} \widehat{f}(\varrho, m, n) - \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \widehat{f}(\varrho, m, n) - \frac{d^2}{d\varrho^2} \widehat{f}(\varrho, m, n).$$

En effet on peut supposer que f est à support compact, auquel cas $\widehat{f}(\varrho, m, n)$ est une fonction C^∞. On écrit :

$$f(r, \varphi, \alpha) = \sum_{p,q} i^q e^{i(p\alpha + q\varphi)} \int_0^{+\infty} \widehat{f}(\varrho, p+q, p)\, J_{-q}(\varrho r)\, r\, dr$$

et l'on applique le lemme à chaque terme.

1.2. Inégalité de Bernstein pour $M(2)$.

Considérons une fonction, $f \in L^1(M(2)) \cap L^\infty(M(2))$, telle que $\widehat{f}(\varrho, m, n)$ soit nul si $\varrho \geq R$ ou si $|n| \geq N$. Comme nous avons :

$$\widehat{f}(\varrho, m, n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\psi}\, \mathcal{F}f(\varrho, \psi, n)\, d\psi.$$

On en déduit que $\mathcal{F}f(\varrho, \psi, n)$ est nul dans les mêmes conditions si bien que l'inégalité habituelle de Bernstein donne :

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_\infty \leq CR \|f\|_\infty, \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_\infty \leq CR \|f\|_\infty, \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right\|_\infty \leq CN \|f\|_\infty.$$

Soient $g = (x, \alpha) = (r, \varphi, \alpha)$ et $g_0 = (x_0, \alpha_0) = (r_0, \varphi_0, \alpha_0)$ deux éléments de $M(2)$. On a :

$$gg_0 = (x + (x_0)_\alpha, \alpha + \alpha_0)$$

d'où

$$|f(gg_0) - f(g)| \leq C\left(R\,|x_0| + N \left| \sin \frac{\alpha_0}{2} \right| \right) \|f\|_\infty.$$

Ceci prouve que, pour chaque g_0, il existe une mesure, μ, sur $M(2)$ telle que $\|\mu\| \leq C\left(R\,|x_0| + N \left| \sin \frac{\alpha_0}{2} \right| \right)$ et telle que $\int_{M(2)} f\, d\mu = f(g_0) - f(e)$ pour toute fonction continue, f, telle que $\widehat{f}(\varrho, m, n)$ soit nul si $\varrho \geq R$ ou si $|n| \geq N$ (e désigne bien sûr l'élément neutre de $M(2)$).

Soit donc f une telle fonction, la fonction $g_1 \longmapsto f(gg_1)$ a encore la même propriété, on a donc

$$\int_{M(2)} f(gg_1)\, d\mu(g_1) = f(gg_0) - f(g)$$

par suite

$$\int_{M(2)} |f(gg_0) - f(g)|\, dg \leq C\left(R\,|x_0| + N \left| \sin \frac{\beta_0}{2} \right| \right) \|f\|_{L^1(M(2))}.$$

2.1. *Partition de l'unité.*

2.1.0. Soit w une fonction de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^+)$, positive, à support dans $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ et telle que. pour tout nombre, t, réel positif, on ait :

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} w(2^{-k} t) = 1.$$

Si t est dans l'intervalle $[1, 2]$, il n'y a que deux termes non nuls dans la somme ci dessus, par suite :

$$w(t) + w\left(\frac{t}{2}\right) = 1.$$

Pour tout entier rationnel, j, posons :

$$\Omega_j(t) = \sum_{k \leq j} w(2^{-k} t).$$

On a les égalités suivantes :

$$\Omega_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \leq 2^j \\ 0 & \text{si} \quad t \geq 2^{j+1} \\ w(2^{-j} t) = 1 - w(2^{-1-j} t) & \text{si} \quad 2^j \leq t \leq 2^{j+1}. \end{cases}$$

2.11. Soit $n_0 = 0$ et, si j est un entier strictement positif, $n_j = 2^{2(j-1)}$.

Pour chaque j, entier positif ou nul, on définit sur $\mathbf{Z}$ une fonction χ_j par les relations suivantes :

$$1^0 \quad \chi_0(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 0 \end{cases}$$

$$2^0 \quad \chi_j(\pm n_j) = 1 \, ; \quad \chi_j(\pm n_{j+1}) = \chi_j(\pm n_{j-1}) = 0,$$

χ_j est linéaire entre les points $\pm n_{j-1}$, $\pm n_j$, $\pm n_{j+1}$, nulle en dehors de l'intervalle $[- n_{j+1}, n_{j+1}]$.

Alors :

$$\sum_{j \geq 0} \chi_j = 1.$$

Soit $X_j = \sum_{0 \leq k \leq j} \chi_k$, j étant un entier positif. Alors :

$$X_j(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |n| \geq n_{j+1} \\ 1 & \text{si} \quad |n| \leq n_j \\ \chi_j(n) = 1 - \chi_{j+1}(n) & \text{si} \quad n_j \leq |n| \leq n_{j+1}. \end{cases}$$

2.1.2. Posons encore, pour tout $j \leq 0$,

$$a_j(\varrho, n) = w(2^{-j} \varrho) \, \chi_0(n)$$

et pour tout $j > 0$

$$a_j(\varrho, n) = \Omega_j(\varrho)\, X_j(n) - \Omega_{j-1}(\varrho)\, X_{j-1}(n).$$

Alors :

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} a_j(\varrho, n) = 1.$$

Soit $j > 0$, on a :

$$a_j(\varrho, n) = \chi_j(n) \quad \text{pour tout} \quad \varrho \in]\,0, 2^{j-1}\,]$$

$$a_j(\varrho, n) = X_j(n) - w(2^{-j+1}\varrho)\, X_{j-1}(n) = \chi_j(n) + w(2^{-j}\varrho)\, X_{j-1}(n)$$

$$\text{pour tout} \quad \varrho \in [2^{j-1}, 2^j]$$

et :

$$a_j(\varrho, n) = w(2^{-j}\varrho)\, X_j(n) \quad \text{pour tout} \quad \varrho \in [2^j, 2^{j+1}]$$

$$a_j(\varrho, n) = 0 \qquad\qquad \text{pour tout} \quad \varrho \geq 2^{j+1}.$$

Autrement dit, $a_j(\varrho, n)$ est nul dans chacun des cas suivants :

1° $\varrho \geq 2^{j+1}$

2° $|n| \geq n_{j+1}$

3° $\varrho \leq 2^{j-1}$ et $|n| \leq n_{j-1}$.

On remarque enfin que :

2.1.3. Il existe une constante positive C, telle que :

$$|a_j(\varrho, n)| \leq C \qquad \text{et} \quad |a_j'(\varrho, n)| \leq C\, 2^{-j}$$

$$|a_j''(\varrho, n)| \leq C\, 2^{-2j} \quad \text{et} \quad |a_j(\varrho, n) - a_j(\varrho, n-1)| \leq C\, 2^{-2j}.$$

2.1.4. Dans ce paragraphe M désigne une fonction bornée de $]\,0, + + \infty\,[\times \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$, de classe C^2 par rapport à la première variable.

On suppose que pour tout entier $n > 0$, pour tout entier m, on a :

$$|M'(\varrho, m, n)| = o(\varrho^{-1-|m-n|})$$

au voisinage de l'origine et $M(\varrho, n, n) = o(1)$.

Soit

$$M_j(\varrho, m, n) = M(\varrho, m, n)\, a_j(\varrho, n).$$

On note $M(\varrho)$ et $M_j(\varrho)$ les matrices dont les coefficients sont respectivement $M(\varrho, m, n)$ et $M_j(\varrho, m, n)$. On a :

$$\frac{(m-n)^2}{\varrho^2} M_j(\varrho, m, n) - \frac{M_j'(\varrho, m, n)}{\varrho} - M_j''(\varrho, m, n) =$$

$$= a_j(\varrho, n)\left[\frac{(m-n)^2}{\varrho^2} M(\varrho, m, n) - \frac{1}{\varrho} M'(\varrho, m, n) - M''(\varrho, m, n)\right] -$$

$$- a_j'(\varrho, n)\left[\frac{1}{\varrho} M(\varrho, m, n) + 2M'(\varrho, m, n)\right] - a_j''(\varrho, n)\, M(\varrho, m, n)$$

et :

$$M_j(\varrho, m, n) - M_j(\varrho, m+1, n+1) =$$

$$= [a_j(\varrho, n) - a_j(\varrho, n+1)]\, M(\varrho, m, n) + a_j(\varrho, n+1)\cdot$$

$$\cdot[M(\varrho, m, n) - M(\varrho, m+1, n+1)].$$

On conserve les notations de l'énoncé du théorème (1) et on suppose que pour tout j, A_j, B_j, C_j, D_j sont finis.

2.2. Evaluons la quantité $\int_0^{+\infty} \| M_j(\varrho)\|^2_{\mathcal{B}_2}\, \varrho\, d\varrho$ pour voir que M_j est la transformée de Fourier d'une fonction f_j dans $L^2[M(2)]$.

A cette fin, remarquons d'abord que pour j négatif ou nul, f_j ne dépend pas de α, puisque sa transformée de Fourier est telle que $\widehat{f_j}(\varrho, m, n) = 0$ si $n \neq 0$; nous évaluerons alors la quantité $\| r^2 f_j\|_2$ pour $j \leq 0$ et $\| \lambda f_j\|_2$ pour j strictement positif.

2.2.1. Soit $j \leq 0$ nous ferons une évaluation classique du type-Hörmander

$$\|f_j\|_2^2 = \sum_{m\in Z} \int_0^{+\infty} | M_j(\varrho, m, 0)|^2\, \varrho\, d\varrho \leq$$

$$\leq C^p \sum_{m\in Z} \int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} | M(\varrho, m, 0)|^2\, \varrho\, d\varrho \leq C\, 2^{4j}(A_j + A_{j+1}).$$

Mais d'après le lemme

$$\| r^2 f_j\|_2^2 = \sum_{m\in Z} \int_0^{+\infty} \left| \frac{m^2}{\varrho^2} M_j(\varrho, m, 0) - \frac{1}{\varrho} M_j'(\varrho, m, 0) - M_j''(\varrho, m, 0)\right|^2 \varrho\, d\varrho$$

$$< C \sum_{m \in \mathbf{Z}} \int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} \left[\left| \frac{m^2}{\varrho^2} M(\varrho, m, 0) - \frac{1}{\varrho} M'(\varrho, m, 0) - M''(\varrho, m, 0) \right|^2 + \right.$$

$$\left. + 2^{-2j} \left| \frac{1}{\varrho} M(\varrho, m, 0) + 2M'(\varrho, m, 0) \right|^2 \right] \varrho \, d\varrho$$

$$< C \sum_{m \in \mathbf{Z}} \int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} 2^{-4j} | M(\varrho, m, 0) |^2 \varrho \, d\varrho$$

$$< C \sum_{m \in \mathbf{Z}} \int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} (2^{-4j}(1 + m^4) | M(\varrho, m, 0)|^2 + 2^{-2j} | M'(\varrho, m, 0)|^2 + | M''(\varrho, m, 0)|^2) \varrho d\varrho$$

$$< C [A_j + B_j + C_j + A_{j+1} + B_{j+1} + C_{j+1}].$$

2.2.2. Supposons $j > 0$; alors d'après le lemme (1.1)

$$\| r^2 f_j \|_2^2 = \sum_{m, n} \int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{\varrho^2} (m - n)^2 M_j(\varrho, m, n) - \frac{1}{\varrho} M_j'(\varrho, m, n) - M_j''(\varrho, m, n) \right|^2 \varrho \, d\varrho$$

$$\leq 3 \sum_{m, n} \left[\int_0^{+\infty} | a_j(\varrho, n) |^2 \left| \left(\frac{m - n}{\varrho}\right)^2 M(\varrho, m, n) - \frac{1}{\varrho} M'(\varrho, m, n) - M''(\varrho, m, n) \right|^2 \varrho \, d\varrho \right.$$

$$+ 3 \sum_{m, n} \int_0^{+\infty} | a_j'(\varrho, n) |^2 \left| \frac{1}{\varrho} M(\varrho, m, n) + 2M'(\varrho, m, n) \right|^2 \varrho \, d\varrho$$

$$+ 3 \sum_{m, n} \int_0^{+\infty} | a_j''(\varrho, n) |^2 \, | M(\varrho, m, n) |^2 \varrho \, d\varrho$$

$$\leq C (A_j + B_j + C_j + A_{j+1} + B_{j+1} + C_{j+1})$$

$$\left\| \sin \frac{\alpha}{2} f_j \right\|_2^2 = \frac{1}{4} \| (1 - e^{-i\alpha}) f_j \|_2^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{m, n} \int_0^{+\infty} | M_j(\alpha, m, n) - M_j(\varrho, m + 1, n + 1) |^2 \varrho \, d\varrho$$

$$\leq C \sum_{m\in Z}\Bigg[\sum_{n_{j-1}\leq |n|\leq n_{j+1}} \int_0^{2^{j-1}} |M(\varrho, m, n) - M(\varrho, m+1, n+1)|^2 \varrho\, d\varrho +$$

$$+ \sum_{|n|\leq n_{j+1}} \int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} |M(\varrho, m, n) - M(\varrho, m+1, n+1)|^2 \varrho\, d\varrho\Bigg]$$

$$+ 2^{-4j} C \sum_{m\in Z}\Bigg[\sum_{n_{j-1}\leq |n|\leq n_{j+1}} \int_0^{2^{j-1}} |M(\varrho, m, n)|^2 \varrho\, d\varrho +$$

$$+ \sum_{|n|\leq n_{j+1}} \int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} |M(\varrho, m, n)|^2 \varrho\, d\varrho\Bigg] \leq C(A_j + A_{j+1} + D_j + D_{j+1})$$

d'où

$$\|\lambda f_j\|_2^2 \leq C(A_j + B_j + C_j + D_j + A_{j+1} + B_{j+1} + C_{j+1} + D_{j+1}).$$

2.2.3. $$\|f_j\|_2^2 = \sum_{m,n} \int_0^{+\infty} |M_j(\varrho, m. n)|^2 \varrho\, d\varrho$$

$$\leq C \sum_{m\in Z}\Bigg[\sum_{n_{j-1}\leq |n|\leq n_{j+1}} \int_0^{2^{j-1}} |M(\varrho, m, n)|^2 \varrho\, d\varrho +$$

$$+ \sum_{|n|\leq n_{j+1}} \int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} |M(\varrho, m, n)|^2 \varrho\, d\varrho\Bigg] \leq C\, 2^{4j}(A_j + A_{j+1}).$$

2.2.4. Posons, si $j \leq 0$,

$$u_j = (A_j + B_j + C_j + A_{j+1} + B_{j+1} + C_{j+1})^{\frac{1}{2}}$$

et, si $j > 0$,

$$u_j = (A_j + B_j + C_j + D_j + A_{j+1} + B_{j+1} + C_{j+1} + D_{j+1})^{\frac{1}{2}}$$

2.2.5. Soit $j \leq 0$, on a :

$$\|f_j\|_1 \leq C \inf_{t>0} (\|f_j\|_2\, t + \|r^2 f_j\|_2\, t^{-1}) \leq C\, u_j\, 2^j.$$

D'autre part puisque $\widehat{f_j}(\varrho, m, n)$ est nul lorsqne n est différent de 0 on a $f_j(x, \alpha) = f_j^b(x)$, le spectre de la fonction f^b étant contenu dans la boule de centre 0 et de rayon 2^{j+1}. Des estimations classiques de Hörmander [5] montrent que, sous l'hypothèse $\sup\limits_{j\leq 0} 2^j u_j < \infty$, $\sum\limits_{j\leq 0} f_j^b$ est un convoluteur de $L^p(\mathbf{R}^2)$ pour tout $p \in]1, +\infty[$ et donc que $\sum\limits_{j\leq 0} f_j$ est un convoluteur à droite et à gauche de $L^p(M(2))$.

2.2.6. Soit $j > 0$. Puisque $\|f_j\|_2 \leq C\, 2^{2j} u_j$ et $\|\lambda f_j\|_2 \leq C u_j$ nous avons:

$$\|f_j\|_1 \leq C u_j \inf \left(2^{2j} (v(t))^{\frac{1}{2}}, (w(t))^{\frac{1}{2}}\right).$$

Prenant $t = 2^{-2j}$ nous obtenons :

$$\|f_j\|_1 \leq C j^{\frac{1}{2}} u_j .$$

2.2.7. Soit T_j l'opérateur de $L^2(M(2))$ défini par la convolution à gauche par f_j; T_j^* est l'opération de convolution à gauche par f_j^*. La norme de $T_i T_j^*$ ainsi que celle de $T_i^* T_j$ ne dépasse pas $\|f_i\|_{L^1(M(2))} \|f_j\|_{L^1(M(2))}$; d'autre part $T_i^* T_j$ et $T_i T_j^*$ sont nuls si $|i - j| > 1$ donc l'hypothèse $\sup j^{\frac{1}{2}} u_j < \infty$ implique $\sup\limits_j \sum\limits_i \| T_i T_j^* \|^{\frac{1}{2}} < \infty$ et $\sup\limits_j \sum\limits_i \| T_i^* T_j \|^{\frac{1}{2}}$ et l'on conclut au moyen d'un lemme de Cotlar [1, p. 155] que $\sum\limits_{j>0} T_j$ est un opérateur borné de $L^2(M(2))$.

2.2.8. Soit $g_0 \in M(2)$: on pose $t = \lambda(g_0)$ et l'on veut évaluer

$$\mu_j(g_0) = \int_{\lambda(g)\geq 4t} |f_j(g g_0) - f_j(g)|\, dg.$$

Puisque $\lambda(g g_0) \geq \frac{1}{2}(\lambda(g) - 2\lambda(g_0))$ on a $\{g\,;\, \lambda(g) \geq 4t\} \subset \{g\,;\, \lambda(g g_0) \geq t\}$ donc

$$\int_{\lambda(g)\geq 4t} |f_j(g g_0)|\, dg \leq \int_{\lambda(g g_0)\geq t} |f_j(g g_0)|\, dg \leq \|\lambda f_j\|_2 (w(t))^{\frac{1}{2}}.$$

On a aussi

$$\int_{\lambda(g)\geq 4t} |f_j(g)\, dg \leq \| \lambda f_j \|_2 (w(4t))^{\frac{1}{2}} \leq \| \lambda f_j \|_2 (w(t))^{\frac{1}{2}}$$

donc $\mu_j(g_0) \leq C u_j (w(t))^{\frac{1}{2}}$.

On peut aussi appliquer l'inégalité de Bernstein établie en 1.2. à f_j:

$$\int_{M(2)} |f_j(gg_0) - f_j(g)|\, dg \leq C\left(r_0 2^j + 2^{2j}\left|\sin\frac{\beta_0}{2}\right|\right)\|f_j\|_1$$

où $g_0 = (r_0, \varphi_0, \beta_0)$. On a $r_0 \leq t^{\frac{1}{2}}$, $\left|\sin\frac{\beta_0}{2}\right| \leq \inf(t, 1)$ donc

$$\int_{M(2)} |f_j(gg_0) - f_j(g)|\, dg \leq C j^{\frac{1}{2}}\, 2^j (t^{\frac{1}{2}} + 2^j \inf(t, 1))\, u_j.$$

En définitive

$$\mu_j(g_0) \leq C u_j \inf(j^{\frac{1}{2}}\, 2^j (t^{\frac{1}{2}} + 2^j \inf(t, 1)), (w(t))^{\frac{1}{2}}).$$

2.2.9. Nous allons montrer que, sous l-hypothèse $\sup\limits_{j>0} j^{3/2} u_j < \infty$, on a

$$\sup_{g_0 \in M(2)} \sum_{j>0} \mu_j(g_0) < +\infty.$$

Lorsque $t \geq \frac{1}{2}$ nous avons $\mu_j(g_0) \leq C u_j$ et, par conséquent,

$$\sum_{j>0} \mu_j(g_0) \leq C \sum_{j>0} u_j < +\infty.$$

Lorsque $t < \frac{1}{2}$ on a:

$$\sum_{j>0} \mu_j(g_0) < C\left[\left(\operatorname{Log}\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j > \frac{1}{4}\frac{\operatorname{Log} t^{-1}}{\operatorname{Log} 2}} u_j + t^{\frac{1}{2}} \sum_{0<j\leq \frac{1}{4}\frac{\operatorname{Log} t^{-1}}{\operatorname{Log} 2}} j^{\frac{1}{2}} u_j 2^{2j}\right].$$

Puisque $u_j = 0(j^{-3/2})$ nous avons:

$$\sum_{j > \frac{1}{4}\frac{\operatorname{Log} t^{-1}}{\operatorname{Log} 2}} u_j \leq C\left(\frac{1}{4}\frac{\operatorname{Log} t^{-1}}{\operatorname{Log} 2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \sum_{0<j<\frac{1}{4}\frac{\operatorname{Log} t^{-1}}{\operatorname{Log} 2}} j^{\frac{1}{2}} 2^{2j} u_j \leq C\, 2^{\frac{1}{2}\frac{\operatorname{Log} t^{-1}}{\operatorname{Log} 2}}$$

d'où le résultat annoncé.

2.2.10. Le calcul précédent montre que les noyaux $\sum_{0<j\leq k} f_j$ vérifient uniformément les conditions du théorème III 1.2. Ceci, joint à 2.2.7, prouve $\sum_{k_1<j\leq k_2} M_j$ est, pour tout $p \in]1, 2[$, un multiplicateur à gauche de $\mathcal{F}(L^p(M(2)))$ dont la norme est majorée indépendamment de k_1 et k_2. On obtient le théorème par passage à la limite.

THÉORÈME DU TYPE MARCINKIEWICZ

La démonstration de ce théorème se fait en plusieurs étapes : on prouve d'abord des inégalités du type de celles de Zygmund et de Littlewood-Paley puis on démontre le théorème par un procédé standard.

1. Inégalité de Littlewood-Paley.

Soit w une fonction de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^+)$ à support dans $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ et telle que : $\sum_{j\in\mathbf{Z}} w(2^{-j}\varrho) = 1$. On désigne par u_j la fonction sur $\mathbf{R}^2$ dont la transformée de Fourier, $\widehat{u_j}$, est telle que $\widehat{u_j}(x) = w(2^{-j}|x|)$. Si f est une fonction de $L^p(M(2))$ on pose :

$$\Delta_j(f) = f * (u_j \otimes \delta_T)$$

(δ_T désigne la masse unité placée en l'élément neutre de $\mathbf{T}$).

PROPOSITION. Pour tout p, nombre strictement supérieur à 1, il existe un nombre, C_p, tel que pour toute fonction, $f \in L^p(M(2))$, on ait :

$$C_p^{-1} \|f\|_{L^p(M(2))} \leq \|(\sum_j |\Delta_j(f)|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(M(2))} \leq C_p \|f\|_{L^p(M(2))}.$$

C'est une simple conséquence de la remarque I.3.5 et de l'inégalité de Littlewood-Paley habituelle :

$$C_p^{-1} \|h\|_{L^p(\mathbf{R}^2)} \leq \|(\sum_j |u_j * h|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(\mathbf{R}^2)} \leq C_p \|h\|_{L^p(\mathbf{R}^2)}$$

pour toute fonction, h, dans $L^p(\mathbf{R}^2)$.

2. Inégalité de Zygmund.

Etant donné un entier positif, n, on appelle H_n la distribution sur $\mathbf{T}$ dont la transformée de Fourier est la fonction caractéristique de $\{n, n+1, n+2, ..\}$. Si a est un point de $\mathbf{R}^2$ on note D_a la fonction sur $\mathbf{R}^2$ dont la transformée de Fourier est la fonction caractéristique du rectangle à côtés parallèles aux axes dont 0 et a sont deux sommets.

Proposition. Pour tout nombre, p, strictement supérieur à 1, il existe un nombre, c_p, tel que, pour toute suite, $(f_n)_{n\geq 0}$, de fonctions de $L^p(M(2))$ et pour toute suite, $(a_n, k_n)_{n\geq 0}$, d'éléments de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{Z}$ on ait :

$$\|(\sum_n |D_{a_n} \otimes H_{k_n}) * f_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(M(2))} \leq C_p \|(\sum_n |f_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(M(2))}.$$

On a :

$$(D_{a_n} \otimes H_{k_n}) * f_n = (D_{a_n} \otimes \delta_{\mathrm{T}}) * (\delta_{\mathrm{R}^2} \otimes H_{k_n}) * f_n$$

(δ_{R^2} désigne la masse 1 placée en 0 dans $\mathbf{R}^2$).

Les inégalités habituelles de Zygmund s'écrivent :

$$\|(\sum_n |D_{a_n} * g_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(\mathrm{R}^2)} \leq C_p \|(\sum_n |g_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(\mathrm{R}^2)}, \quad (g_n \in L^p(\mathbf{R}^2))$$

$$\|(\sum_n |H_{k_n} * h_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(\mathrm{T})} \leq C_p \|(\sum_n |h_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(\mathrm{T})}, \quad (h_n \in L^p(\mathbf{T})).$$

D'après la remarque I.3.5 nous avons :

$$\|(\sum_n |(\delta_{\mathrm{R}^2} \otimes H_{k_n}) * f_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(M(2))} \leq C_p \|(\sum_n |f_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(M(2))}$$

et

$$\|(\sum_n |(D_{a_n} \otimes \delta_{\mathrm{T}}) * (\delta_{\mathrm{R}^2} \otimes H_{k_n}) * f_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(M(2))} \leq$$

$$\leq C_p \|(\sum_n |(\delta_{\mathrm{R}^2} \otimes H_{k_n}) * f_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(M(2))}$$

d'où la proposition.

On utilisera de cette proposition une version continue qui se démontre de même.

3. Théorème de Marcinkiewcz.

Si f appartient à $L^p(M(2))$, a à $\mathbf{R}^2$, n à $\mathbf{N}$ on note :

$$S_{a,n}(f) = (D_a \otimes H_n) * f.$$

Le principe de la démonstration est le suivant : si T est un opérateur de convolution à gauche tel que l'on puisse écrire

$$\Delta_j(Tf) = \int S_{a,n}(\Delta_j(f))\, d\mu_j(a, n)$$

où μ_j est une mesure sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{Z}$ de façon que $M = \sup \|\mu_j\| < +\infty$, on a

$$|\Delta_j(Tf)|^2 \leq M \int |S_{a,n}(\Delta_j(f))|^2\, d\,|\mu_j|(a, n)$$

$$\Big(\sum_j |\Delta_j(Tf)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq M^{\frac{1}{2}} \left(\sum_j \int |S_{a,n}(\Delta_j(f))|^2\, d\,|\mu_j|(a, n)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prenant les normes L^p des deux membres et tenant compte des deux dernières propositions nous obtenons :

$$\|Tf\|_{L^p(M(2))} \leq MC_p^3 \|f\|_{L^p(M(2))}.$$

Il sera commode dans la suite de travailler sur la transformée de Fourier abélienne, Ω, de T.

Soit donc Ω une fonction de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{Z}$ dans $\mathbf{C}$, deux fois continûment dérivable et bornée. C'est la transformée de Fourier abélienne d'une distribution T sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}$. Ce n'est pas une restriction de supposer que $\Omega(x, y, n)$ est nul si l'un au moins des trois nombres x, y, n est négatif.

Soit j un entier rationnel. Pour tout point, (x, y), de $\mathbf{R}^2$ tel que l'on ait : $x > 0$, $y > 0$ et $2^{j-1} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2^{j+1}$, pour tout entier, n, on a :

$$\Omega(x, y, n) = \int_x^{2^{j+1}} \int_y^{2^{j+1}} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x\, \partial y}(u, v, n)\, du\, dv - \int_y^{2^{j+1}} \frac{\partial \Omega}{\partial y}(2^{j+1}, v, n)\, dv$$
$$- \int_x^{2^{j+1}} \frac{\partial \Omega}{\partial x}(u, 2^{j+1}, n)\, du + \Omega(2^{j+1}, 2^{j+1}, n).$$

Notons $\chi_{(x,y)}$ la fonction telle que: $\chi_{(x,y)}(u,v)$ égale 1 si $0 \leq x \leq u$ et $0 \leq y \leq v$, 0 sinon. On a alors:

$$\Omega(x,y,n) = \iint_{\mathcal{E}_j} \chi_{u,v}(x,y) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}(u,v,n)\, du\, dv$$

$$-\int_0^{2^{j+1}} \chi_{(2^{j+1},v)}(x,y) \frac{\partial \Omega}{\partial y}(2^{j+1},v,n)\, dv - \int_0^{2^{j+1}} \chi_{(u,2^{j+1})}(x,y) \frac{\partial \Omega}{\partial x}(u,2^{j+1},n)\, du$$

$$+ \chi_{(2^{j+1},2^{j+1})}(x,y)\, \Omega(2^{j+1},2^{j+1},n)$$

où

$$\mathcal{E}_j = \{(x,y)\,;\ 0 \leq x \leq 2^{j\pm1},\ 0 \leq y \leq 2^{j+1},\ \sqrt{x^2+y^2} \geq 2^j\}.$$

On a aussi, lorsque n est supérieur à 1:

$$\Omega(x,y,n) = \Omega(x,y,0)\, 1_{\mathrm{N}}(n) + \sum_{l=0}^{+\infty} (\Omega(x,y,l+1) - \Omega(x,y,l))\, 1_{l+\mathrm{N}^*}(n).$$

Ce qui permet d'écrire:

$$\Delta_j(Tf) = \int S_{(u,v),l}(\Delta_j f)\, d\mu_j(u,v), l$$

où

$$\|\mu_j\| \leq \iint_{\mathcal{E}_j} \left(\left| \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}(u,v,0) \right| + \sum_{l=0}^{\infty} \left| \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}(u,v,l+1) - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}(u,v,l) \right| du\, dv \right.$$

$$+ \int_0^{2^{j+1}} \left(\left| \frac{\partial \Omega}{\partial y}(2^{j+1},t,0) \right| + \left| \frac{\partial \Omega}{\partial x}(t,2^{j+1},0) \right| \right) dt$$

$$+ \int_0^{2^{j+1}} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\left| \frac{\partial \Omega}{\partial y}(2^{j+1},t,l+1) - \frac{\partial \Omega}{\partial y}(2^{j+1},t,l) \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{\partial \Omega}{\partial x}(t,2^{j+1},l+1) - \frac{\partial \Omega}{\partial x}(t,2^{j+1},l) \right| \right) dt + |\Omega(2^{j+1},2^{j+1},0)| +$$

$$+ \sum_{l=0}^{+\infty} |\Omega(2^{j+1},2^{j+1},l+1) - \Omega(2^{j+1},2^{j+1},l)|.$$

Bien sûr on opère de même lorsque Ω a son support dans l'un des produits d'un quadrant de $\mathbf{R}^2$ par N ou $-$N. Ceci prouve le théorème 2.

Comme cas particulier de ce théorème on peut examiner ce que deviennent ces conditions lorsque :

$$\Omega(\varrho\cos\psi, \varrho\sin\psi, n) = \Omega_1(\psi, n).$$

Un calcul facile montre que s'il existe un nombre M tel que :

(i) $|\Omega_1(\psi, n)| \leq M, \sum_{n\in\mathbf{Z}} |\Omega_1(\psi, n) - \Omega_1(\psi, n+1)| \leq M$

(ii) $\int_0^{2\pi} |\Omega_1'(\psi, n)|\, d\psi \leq M, \quad \sum_{n\in\mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} |\Omega_1'(\psi, n) - \Omega_1'(\psi, n+1)|\, d\psi \leq M$

(iii) $\int_0^{2\pi} |\sin 2\psi\, \Omega_1''(\psi, n)|\, d\psi \leq M,$

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} |\sin 2\psi|\, |\Omega_1''(\psi, n) - \Omega_1''(\psi, n+1)|\, d\psi \leq M$$

les hypothèses du théorème 2 sont satisfaites.

RESTRICTION D'UN MULTIPLICATEUR

THÉORÈME. Soit S un convoluteur à gauche de $L^p(M(2))$ dont la transformée de Fourier abélienne, F, est une fonction continue sur la couronne,

$$\{(\varrho, \psi, n);\ 0 < \varrho_1 < \varrho < \varrho_2,\ n \in \mathbf{Z},\ 0 \leq \psi < 2\pi\}.$$

Alors, lorsque l'on a $\varrho_1 < \varrho < \varrho_2$, $\widehat{S}(\varrho)$ est un opérateur borné de $L^p(\mathbf{T})$.

Soient deux fonctions, u et v, la première dans $L^p(\mathbf{T})$, la seconde dans $L^{p'}(\mathbf{T})$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$. La fonction $g \longmapsto \langle T_\varrho(g)u, v\rangle$ est dans $B_p(M(2))$ (voir (2)), sa norme est majorée par $\|u\|_{L^p(\mathbf{T})} \|v\|_{L^{p'}(\mathbf{T})}$.

Soit w une fonction paire, indéfiniment dérivable, à support compact dans $\mathbf{R}$, telle que $\int_0^{+\infty} rw(r)\,dr = 1$. On note w_ε la fonction telle que $w_\varepsilon(r) = \frac{1}{\varepsilon^2} w\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)$ et F_ε la fonction sur $M(2)$ telle que $\mathcal{F}F_\varepsilon(x, n) = w_\varepsilon(|x|)\,\delta_{0,n}$.

La fonction F_ε est dans $A_p(M(2))$ et sa norme est majorée indépendamment de ε. On peut écrire :

$$|\langle F_\varepsilon \cdot S, \langle T_\varrho(\cdot)u, v\rangle\rangle| \leq C\,\|S\|_{\mathrm{CONV}_p(M(2))}\,\|u\|_{L^p(\mathrm{T})}\,\|v\|_{L^{p'}(\mathrm{T})}$$

d'autre part

$$\langle F_\varepsilon \cdot S, \langle T_\varrho(\cdot)u, v\rangle\rangle = \langle (F_\varepsilon \cdot S)^\wedge(\varrho)u, v\rangle.$$

Ceci signifie que les $\widehat{F_\varepsilon \cdot S}(\varrho)$ constituent un ensemble borné d'opérateurs de $L^p(\mathrm{T})$, il suffit donc pour montrer que $\widehat{S}(\varrho)$ est un opérateur borné de $L^p(\mathrm{T})$ de prouver que, pour chaque m et n,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (F_\varepsilon S)^\frown(\varrho, m, n) = \widehat{S}(\varrho, m, n).$$

On a, en effet :

$$\mathcal{F}(F_\varepsilon \cdot S) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{R}^2} \frac{1}{\varepsilon^2}\, w\left(\frac{|y|}{\varepsilon}\right) \mathcal{F} S(x-y, n)\, dy.$$

Ceci montre que, lorsque ϱ appartient à $]\varrho_1, \varrho_2[$, $\mathcal{F}(F_\varepsilon \cdot S)(x, n)$ converge vers $\mathcal{F} S(x, n)$ uniformément sur l'ensemble $\{x;\ |x| = \varrho\}$. Par suite :

$$(F_\varepsilon S)^\wedge(\varrho, m, n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\psi}\, \mathcal{F}(F_\varepsilon \cdot S)(\varrho, \psi, n)\, d\psi \longrightarrow \widehat{S}(\varrho, m, n) \text{ lorsque } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Comme application de ceci nous avons les démonstrations du théorème 3.

Soit $A = (a_{m,n})_{(m,n) \in \mathrm{Z}\times\mathrm{Z}}$ une matrice infinie de nombres complexes. Soit u une fonction indéfiniment dérivable à support dans $[1, 2]$ et telle que $u\left(\frac{3}{2}\right) = 1$. Les hypothèses du théorème 3 impliquent que la fonction matricielle $M(\varrho) = Au(\varrho)$ satisfait aux hypothèses du théorème 1. Le théorème de restriction permet alors d'affirmer que $A = M\left(\frac{3}{2}\right)$ est un opératear borné de $L^p(\mathrm{T})$ $(1 < p < 2)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. COIFMAN et G. WEISS, *Analyse Harmonique non commutative sur certains espaces homogènes,* Lecture notes in Mathematics. Springer.

[2] C. S. HERZ, *The theory of p-spaces with an application to convolutions operators,* Trans. Amer. Math. Society, 154, p. 69.

[3] C. S. HERZ, *Harmonic synthesis for subgroups* (à paraître). Ann. Ist. Fourier.

[4] L. HÖRMANDER, *Estimates for translation invariant operators in L^p spaces,* Acta Math. 104 (1960) p. 93-139.

[5] R. A. KUNZE et E. M. STEIN, *Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the* 2×2 *real unimodular group.* I. Amer. J. of Math. 82 (1960) p. 1, 62. II. Amer. J. of Math. 83 (1961) p. 723,786.

[6] N. LOHOUÉ, *Algèbres $A_p(G)$ et convoluteurs de $L^p(G)$.* Thèsc Orsay (à paraître).

[7] N. LOHOUÉ, *Sur certains sous espaces de $B_p(G)$.* (à paraître). Studia Math. (1973).

[8] J. MARCINKIEWICZ, *Sur les multiplicateurs des séries des Fourier,* Studia Math. 8 (1939) p. 78, 91.

[9] S. G. MIHLIN, *On the multipliers of Fourier integral* (en russe). Dok. Akad. Nauk. 109 (1956) p. 701-703.

[10] H. REITER, *Classical Harmonic Analysis and locally compact group* (1968). Oxford Mathematical monographs.

[11] E. M. STEIN, *Topics in Harmonic Analysis,* Annals in Mathematics Studies n⁰ 63. Princeton.

[12] N. VILENKIN, *Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes,* Dunod, 1969.