

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

M. GALBIATI

A. TOGNOLI

Alcune proprietà delle varietà algebriche reali

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 27, n° 3 (1973), p. 359-404

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_3_359_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

ALCUNE PROPRIETÀ DELLE VARIETÀ ALGEBRICHE REALI (*)

M. GALBIATI - A. TOGNOLI (Pisa)

Introduzione.

Il metodo di studio di una varietà algebrica come spazio con fascio di anelli, usato da J. P. Serre nel suo famoso lavoro « Faisceaux algébriques cohérents » ([1]), e nel successivo « Géométrie algébrique et géométrie analytique » ([2]), si è dimostrato particolarmente fecondo nel caso di un corpo algebricamente chiuso. E' chiaro, però, che gran parte degli strumenti usati in questo caso non possono essere più utilizzati se si vogliono considerare varietà definite su \mathbb{R} o in generale su un corpo non algebricamente chiuso.

Abbiamo quindi voluto studiare i fenomeni che si producono nella geometria algebrica reale, e procurare strumenti e metodi di lavoro che sostituiscano quelli della geometria algebrica sul corpo complesso.

Ci è sembrato quindi utile studiare alcune proprietà degli « ideali reali » (cioè gli ideali che contengono tutte e sole le funzioni nulle su una varietà reale, e sostituiscono quindi gli ideali coincidenti con il radicale utilizzati nel caso complesso). Si è inoltre studiata una varietà reale sia associandole una complessificazione, sia associandole uno schema, a seconda del tipo di problema.

Ad esempio, studiando la complessificazione di una varietà reale, si può notare che molti risultati del lavoro di Serre, « Géométrie algébrique et géométrie analytique » non sono più validi nel nostro caso. Tra gli altri, si vede che un morfismo di varietà algebriche reali che sia un isomorfismo analitico non è in generale un isomorfismo algebrico.

Pervenuto alla Redazione il 7 Febbraio 1972.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G. N. S. A. G. A. del C. N. R..

Ancora, si è dimostrato, tenendo conto di alcuni fatti relativi alla coomologia degli schemi affini e alla costruzione degli schemi associati alle varietà reali (§ 5), che il teorema B di Cartan non è valido per le varietà affini reali, mentre si può dimostrare facilmente, con metodi classici, il teorema A.

Un altro fenomeno che si può osservare è poi l'immergibilità, in un opportuno spazio affine \mathbb{R}^N , dello spazio proiettivo reale, da cui segue che ogni varietà proiettiva è affine. (§ 6).

§ 0. Il fascio delle funzioni regolari.

Su \mathbb{R}^n considereremo usualmente la topologia di Zariski e indicheremo esplicitamente quando ci riferiremo alla topologia euclidea.

Sia U un aperto di Zariski di \mathbb{R}^n , e $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione analitica, diremo che f è regolare se per ogni $x \in U$ esiste un intorno U_x tale che su U_x la funzione f sia uguale al rapporto di due polinomi con denominatore che non si annulla su U_x .

Nel seguito noteremo con $\underline{\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)$ (o $\underline{\mathcal{R}}(U)$) il fascio delle funzioni regolari su \mathbb{R}^n (o sull'aperto U di \mathbb{R}^n).

Noteremo inoltre con Z_f il luogo dei punti $x \in \mathbb{R}^n$ ($x \in \mathbb{C}^n$) tali che $f(x) = 0$, per $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ (o $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$).

LEMMA 1. *Siano $p, q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ e supponiamo che p sia primo con q . In questa ipotesi, se la funzione p/q definita su $\mathbb{R}^n - \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) = 0\}$ ha una estensione analitica al punto x_0 di \mathbb{R}^n , si ha $q(x_0) \neq 0$. (In altre parole, se p è primo con q , la funzione p/q non si può estendere analiticamente a nessun punto di $Z_q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) = 0\}$).*

PROVA. Consideriamo \mathbb{R}^n canonicamente immerso in \mathbb{C}^n , e siano \tilde{p}, \tilde{q} gli elementi di $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ indotti da p e q .

Supponiamo dunque che esista una funzione analitica f , definita su un intorno E_{x_0} (intorno nel senso della topologia euclidea) di x_0 , tale che, per ogni $y \in E_{x_0} - Z_q$,

$$f(y) = \frac{p(y)}{q(y)}.$$

Esiste allora una funzione analitica \tilde{f} definita su un intorno \tilde{E}_{x_0} di x_0 in \mathbb{C}^n tale che:

a) \tilde{f} è olomorfa

b) \tilde{f} estende $f|_{\tilde{E}_{x_0} \cap \mathbb{R}^n}$.

In un opportuno intorno di x_0 in \mathbb{C}^n (intorno che identificheremo con \tilde{E}_{x_0}) si avrà:

$$\tilde{f}|_{\tilde{E}_{x_0} - Z_{\tilde{q}}} = \tilde{p}/\tilde{q}|_{\tilde{E}_{x_0} - Z_{\tilde{q}}}.$$

Supponiamo, per assurdo, che $x_0 \in Z_q$ e sia $Z_{\tilde{q}}^i$ una componente affine irriducibile di $Z_{\tilde{q}}$ tale che $Z_{\tilde{q}}^i \ni x_0$ ⁽¹⁾.

Essendo $\tilde{f} = \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$ olomorfa nel punto x_0 , si deve avere $(Z_{\tilde{p}})_{x_0} \supset (Z_{\tilde{q}}^i)_{x_0}$ (con Y_x indicheremo il germe dell'insieme Y nel punto x).

Per l'irriducibilità di $Z_{\tilde{q}}^i$ si ha anche $Z_{\tilde{p}} \supset Z_{\tilde{q}}^i$ e dunque, se \tilde{q}_i è un'equazione minima di $Z_{\tilde{q}}^i$, si ha (per il Nullstellensatz) che \tilde{q}_i divide \tilde{p} e \tilde{q} .

E' immediato che \tilde{q}_i si può considerare a coefficienti reali (infatti se $Z_{\tilde{q}}^i$ non è trasformato in sé dal coniugio si prenda $Z_{\tilde{q}}^i \cup \sigma(Z_{\tilde{q}}^i)$, ove σ è il coniugio, e si ragioni sull'equazione minima di $Z_{\tilde{q}}^i \cup \sigma(Z_{\tilde{q}}^i)$, e dunque $q_i = \tilde{q}_i|_{\mathbb{R}^n}$ divide p e q , e questo è contro l'ipotesi che p sia primo con q .

OSSERVAZIONE. A proposito del lemma 1 va osservato che la funzione $f = p/q$ si può prolungare nel punto x_0 ad una classe C^h con $h > 0$, $h < +\infty$ pur essendo p primo con q e $q(x_0) = 0$.

Si consideri ad esempio la funzione $\frac{x^{2(h+1)} + y^{2(h+1)}}{x^2 + y^2}$ la quale si prolunga al punto $(0, 0)$ come funzione di classe C^h (ma non come funzione analitica).

Se la funzione $f = p/q$ si estende al punto x_0 come funzione C^∞ allora essa si prolunga anche come funzione analitica e quindi è regolare in x_0 (infatti basta considerare l'equazione $p - fq = 0$ che ammette soluzione nel punto x_0 con f serie formale e sfruttare un teorema di Artin, [4]).

LEMMA 2. Il fascio $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ è un sottofascio del fascio $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni analitiche reali su \mathbb{R}^n (si usi la topologia euclidea per definire i due fasci \mathcal{R} e \mathcal{A}).

⁽¹⁾ Ricordiamo che un insieme algebrico di \mathbb{R}^n (o di \mathbb{C}^n) è il luogo di zeri di polinomi. Ogni insieme algebrico ammette una decomposizione (unica) come unione di un numero finito di componenti irriducibili (vedi [3]).

PROVA. Bisogna provare che lo spazio dei germi di funzioni regolari è un aperto nello spazio dei germi delle funzioni analitiche e questo è immediato.

LEMMA 3. *L'anello $\Gamma_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{R}(\mathbb{R}^n))$ delle funzioni regolari su \mathbb{R}^n è un'anello noetheriano, ed il suo completamento è l'anello delle serie formali a n indeterminate.*

PROVA. Dal lemma 1 segue immediatamente che ogni funzione regolare su \mathbb{R}^n si può rappresentare come rapporto di polinomi primi fra loro, tale che il denominatore non è mai nullo su \mathbb{R}^n .

Quindi l'anello delle sezioni globali del fascio delle funzioni regolari su \mathbb{R}^n coincide con il localizzato dell'anello $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ rispetto al sistema moltiplicativamente chiuso formato da tutti i polinomi mai nulli su \mathbb{R}^n .

Dunque $\Gamma_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{R}(\mathbb{R}^n))$ essendo il localizzato di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ che è noetheriano è noetheriano. Notiamo con $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ l'anello $\Gamma_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{R}(\mathbb{R}^n))$.

Si può osservare che vale

$$\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \subset \mathcal{R}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}(\mathbb{R}^n);$$

poiché $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ e $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ sono anelli con lo stesso completamento, anche il completamento di $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ è l'anello delle serie formali a n indeterminate.

LEMMA 4. *Sia $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{R}_x(\mathbb{R}^n)$ l'anello dei germi delle funzioni regolari nel punto x , $\mathcal{A}_x(\mathbb{R}^n)$ l'anello dei germi delle funzioni analitiche in x (si usi qui la topologia euclidea per la definizione dei fasci $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$). Si ha allora che $\mathcal{A}_x(\mathbb{R}^n)$ è piatto su $\mathcal{R}_x(\mathbb{R}^n)$.*

PROVA. La tesi segue dal fatto che $\mathcal{R}_x(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{A}_x(\mathbb{R}^n)$ sono anelli noetheriani e hanno lo stesso completamento (vedi [2]).

§ 1. Varietà algebriche reali.

In questo paragrafo considereremo sempre la topologia di Zariski. Omettiamo di elencare qui le definizioni di insieme algebrico, di varietà affine, di prevarietà, di varietà e di morfismi che sono formulate nel modo usuale, pur di considerare, come fascio, quello delle funzioni regolari, di cui ora studieremo con più precisione le principali proprietà.

E' necessario premettere, però, la definizione di varietà complessificata di una varietà affine⁽²⁾.

(2) Questo argomento verrà sviluppato nel paragrafo 4

Consideriamo una varietà affine $(V, \underline{\mathcal{R}}_V)$, e una sua realizzazione in uno spazio affine \mathbb{R}^n ; diciamo che una varietà complessa $\tilde{V} \subset \mathbb{C}^n$ è la *complessificata* di \tilde{V} rispetto alla realizzazione data se \tilde{V} è la minima varietà affine di \mathbb{C}^n che contiene V .

Si ha allora:

LEMMA 1. *Sia V una varietà affine irriducibile, realizzata in \mathbb{R}^n , $V - S$ un aperto di Zariski di V , allora l'anello $\Gamma_{V-S}(\underline{\mathcal{R}}_V)$ è isomorfo all'anello delle funzioni regolari reali⁽³⁾ definite su un intorno di Zariski di $V - S$ nella complessificata \tilde{V} di V .*

PROVA. Sia $\varphi \in \Gamma_U(\underline{\mathcal{R}}_{\tilde{V}})$, φ reale, dove U è un intorno di $V - S$ in \tilde{V} ; allora $\varphi|_{V-S}$ è regolare reale, e quindi si ha

$$\varphi|_{V-S} \in \Gamma_{V-S}(\underline{\mathcal{R}}_V).$$

Viceversa, sia $\psi \in \Gamma_{V-S}(\underline{\mathcal{R}}_V)$. Allora per ogni $x \in V - S$ esiste un intorno U_x tale che

$$\psi|_{U_x} = \frac{\{p\}}{\{q\}}.$$

dove $p, q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, $q(x) \neq 0$, e ne consideriamo la restrizione a V indicata con $\{p\}, \{q\}$.

In ogni U_x la $\psi|_{U_x}$ si estende in modo unico ad una funzione $\tilde{\psi}_x$ definita in un intorno \tilde{U}_x di U_x in \tilde{V} . Per compattezza, esiste un numero finito di intorni $\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_r$ che ricoprono $V - S$, le estensioni della ψ relativamente a queste U_i si incollano⁽⁴⁾ e definiscono l'estensione desiderata.

LEMMA 2. *Sia $(V, \underline{\mathcal{R}}_V)$ una varietà affine, sottovarietà di \mathbb{R}^n .*

Consideriamo l'anello $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]/\mathbb{I}_V$, dove \mathbb{I}_V è l'ideale della varietà.

Si ha allora un isomorfismo naturale

$$J: \left(\frac{\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]}{\mathbb{I}_V} \right)_{N_V} \rightarrow \Gamma_V(\underline{\mathcal{R}}_V).$$

Ove con N_V abbiamo indicato l'insieme degli elementi $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]/\mathbb{I}_V$ che

(3) Una funzione si dice reale se è invariante per coniugio.

(4) Notiamo che viene utilizzato il fatto che una funzione nulla sulla parte reale è nulla sul complessificato.

non si annullano mai su V e con $\left(\frac{\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]}{\mathbb{I}_V}\right)_{N_V}$ l'anello localizzato rispetto al sistema moltiplicativamente chiuso N_V .

PROVA: Ogni elemento $\varphi \in \left(\frac{\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]}{\mathbb{I}_V}\right)_{N_V}$ risulta essere una funzione regolare su V , quindi l'applicazione J è ben definita. E' ovvio che è iniettiva.

Sia $\psi \in \Gamma_V(\mathcal{R}_V)$; ψ si estende ad una funzione regolare definita in un intorno \tilde{U}_V di V nella complessificata \tilde{V} di V . Si può poi vedere, come dimostreremo al termine di questo lemma, che esiste un polinomio q a coefficienti reali, tale che, detto $Z_q = \{x \in \mathbb{C}^n \mid q(x) = 0\}$, si ha $Z_q \cap V = \emptyset$ e inoltre la ψ si estende ad una funzione regolare $\tilde{\psi}$ definita su $\tilde{V} - Z_q$. Allora $\tilde{\psi}$ è restrizione di una funzione del tipo f/q^r con $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ (vedi [1]) da cui

$$\psi = \left(\frac{f}{q^r}\right)_{|V}.$$

Quindi J è surgettiva.

Si deve ancora dimostrare il fatto seguente: sia S un insieme affine di \tilde{V} tale che $S \cap V = \emptyset$. Esiste allora un polinomio a coefficienti reali q tale che $Z_q \cap V = \emptyset$ e $Z_q \supset S$.

Infatti siano $g_1 = 0, \dots, g_s = 0$ le equazioni di S . Consideriamo $q = \sum_{i=1}^s g_i \bar{g}_i$, q ha zeri reali solo nei punti reali di S e non si annulla quindi su V e inoltre $Z_q \supset S$.

Vediamo ora di quale struttura possono essere dotati i sottoinsiemi aperti e quelli chiusi di una varietà affine V .

Nel caso complesso si ha che ogni chiuso di V ha una struttura di varietà affine indotta dal fascio di V , e che solo gli aperti privilegiati, cioè quelli del tipo

$$V_f = \{x \in V \mid f(x) \neq 0\},$$

hanno la struttura di varietà affine. Nel caso reale si ha la stessa situazione per i chiusi, mentre si ha che ogni aperto di una varietà affine è affine, come si vede dalle due proposizioni seguenti.

PROPOSIZIONE 1. Sia (V, \mathcal{R}_V) una varietà affine, e sia W un chiuso irriducibile di V . Dotiamo W del fascio \mathcal{R}_W^* così definito: per ogni aperto $U \subset W$, $\mathcal{R}_W^*(U)$ sia l'insieme delle funzioni f su U tali che per ogni punto $x \in U$ esiste un intorno U_x di x in V e una funzione $F \in \mathcal{R}_V(U_x)$ tale che

$$F|_{U_x \cap W} = f|_{U_x}.$$

Allora W con questo fascio ha la struttura di varietà affine.

PROVA. Si consideri la varietà affine $(V, \underline{\mathcal{R}}_V)$ immersa in \mathbb{R}^n . Allora W può essere considerato come un insieme algebrico irriducibile di \mathbb{R}^n ; sia $\underline{\mathcal{R}}_W$ il fascio delle funzioni regolari su W . Basterà dimostrare che $(W, \underline{\mathcal{R}}_W) \simeq (W, \underline{\mathcal{R}}_W^*)$.

Poiché l'inclusione di W in V è un morfismo, le restrizioni a W di funzioni regolari su V sono funzioni di $\underline{\mathcal{R}}_W$, quindi le sezioni di $\underline{\mathcal{R}}_W^*$ sono anche sezioni di $\underline{\mathcal{R}}_W$.

Viceversa, ogni sezione di $\underline{\mathcal{R}}_W$ corrisponde a una sezione di $\underline{\mathcal{R}}_W^*$, perché ogni funzione $f \in \mathcal{R}_W(W_g)$, $g \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ è restrizione (per il Lemma 2) di una funzione $f' \in \mathcal{R}_V(V_g)$.

Sia ora V una varietà affine realizzata in \mathbb{R}^n sia $f \in \Gamma_V(\underline{\mathcal{R}}_V)$ e $V_f = \{x \in V \mid f(x) \neq 0\}$.

Consideriamo in \mathbb{R}^{n+1} la varietà affine

$$W = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid X_{n+1}f(X_1, \dots, X_n) - 1 = 0\}.$$

Sia $\widehat{P}_{n+1}: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la proiezione $(X_1, \dots, X_{n+1}) \mapsto (X_1, \dots, X_n)$.

PROPOSIZIONE 2. L'applicazione

$$\widehat{P}_{n+1}: W \rightarrow V_f$$

è un isomorfismo.

PROVA. \widehat{P}_{n+1} è un morfismo bigettivo ed è un omeomorfismo. Bisogna provare solamente che se φ è una funzione regolare su un aperto di W allora la funzione $\varphi \circ \widehat{P}_{n+1}^{-1}$ è regolare. Si tratta di una questione locale, quindi su un intorno D la φ sarà del tipo

$$\varphi = \frac{r(X_1, \dots, X_{n+1})}{s(X_1, \dots, X_{n+1})} \Big|_W, \quad r, s \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_{n+1}]$$

con $s \neq 0$ su D .

Ma, su W

$$X_{n+1} = \frac{1}{f(X_1, \dots, X_n)}, \quad f(X_1, \dots, X_n) \neq 0$$

da cui,

$$\varphi = \frac{r\left(X_1, \dots, X_n, \frac{1}{f}\right)}{s\left(X_1, \dots, X_n, \frac{1}{f}\right)} \Big|_W$$

quindi $\psi = \varphi \circ \widehat{P}_{n+1}^{-1}$ è la restrizione di una funzione regolare ed è quindi regolare.

LEMMA 3. *Sia $(V, \underline{\mathcal{R}}_V)$ una varietà affine realizzata in \mathbb{R}^n . Siano $\underline{\mathcal{R}}_{\mathbb{R}^n}$, $\underline{\mathcal{R}}_V$, $\underline{\mathcal{I}}_V$ il fascio delle funzioni regolari su \mathbb{R}^n , su V e il fascio delle funzioni regolari nulle su V . Si ha che questi fasci sono coerenti ($\underline{\mathcal{R}}_{\mathbb{R}^n}$ e $\underline{\mathcal{I}}_V$ come $\underline{\mathcal{R}}_{\mathbb{R}^n}$ -moduli, $\underline{\mathcal{R}}_V$ come $\underline{\mathcal{R}}_V$ -modulo).*

PROVA: a) $\underline{\mathcal{R}}_{\mathbb{R}^n}$ è un fascio coerente. Sia $x \in \mathbb{R}^n$, U un intorno di x , $f_1, \dots, f_r \in \Gamma_U(\underline{\mathcal{R}}_{\mathbb{R}^n})$. Bisogna dimostrare che il fascio delle relazioni tra f_1, \dots, f_r è un fascio di tipo finito su $\underline{\mathcal{R}}_{\mathbb{R}^n}$.

Infatti, pur di restringere opportunamente l'intorno U di x , si può supporre che

$$f_i = p_i/q$$

$p_i, q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, q mai nullo su U .

Consideriamo dunque un punto $y \in U$ e degli elementi $g_1, \dots, g_r \in (\underline{\mathcal{R}}_{\mathbb{R}^n})_y$ tali che

$$\sum_{i=1}^r g_i f_i = 0.$$

Anche le g_i sono del tipo $\frac{h_i}{s}$, $s(y) \neq 0$, quindi in un intorno di y si ha la relazione

$$\sum_{i=1}^r p_i h_i = 0.$$

Ma il modulo delle relazioni tra i p_i è di tipo finito e quindi si conclude l'asserto.

b) $\underline{\mathcal{I}}_V$ è un fascio coerente di $\underline{\mathcal{R}}_{\mathbb{R}^n}$ -moduli.

Infatti, sia \mathbb{I}_V l'ideale di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ che definisce V . Notiamo che

$$(\underline{\mathcal{I}}_V)_x = \mathbb{I}_V \cdot (\underline{\mathcal{R}}_V)_x.$$

Ricorderemo al termine di questo lemma la dimostrazione di questo fatto, dal quale segue la coerenza di $\underline{\mathcal{I}}_V$ poiché \mathbb{I}_V è un ideale finitamente generato.

c) $\underline{\mathcal{R}}_V$ è coerente.

Notiamo che il fascio $\underline{\mathcal{R}}_{\mathbb{R}^n}/\underline{\mathcal{I}}_V$ è un fascio coerente di anelli che è nullo fuori di V e che, ristretto a V , coincide con $\underline{\mathcal{R}}_V$, quindi $\underline{\mathcal{R}}_V$ è coerente.

E' necessario ora dimostrare il risultato utilizzato nella dimostrazione precedente :

LEMMA 4. Sia $(V, \underline{\mathcal{R}}_V)$ una varietà affine realizzata in \mathbb{R}^n , e sia \mathbb{I}_V l'ideale di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ di tutti i polinomi nulli su V . Si ha che $(\underline{\mathcal{I}}_V)_x$ è generato come $(\underline{\mathcal{R}}_V)_x$ -modulo da \mathbb{I}_V cioè

$$(\underline{\mathcal{I}}_V)_x = \mathbb{I}_V \cdot (\underline{\mathcal{R}}_V)_x.$$

PROVA. Consideriamo un elemento $r = \frac{p}{q} \in (\underline{\mathcal{I}}_V)_x$, $q(x) \neq 0$, $p(x) = 0$. Posso trovare un intorno aperto U di x in V tale che per ogni $y \in U$

$$p(y) = 0$$

e un polinomio p' che non sia nullo in x , ma nullo sul complementare di U . Si ha allora che

$$r = \frac{p \cdot p'}{q \cdot p'},$$

ed essendo $p \cdot p' \in \mathbb{I}_V$, si ha la tesi.

LEMMA 5. Siano $(V, \underline{\mathcal{R}}_V)$ e $(W, \underline{\mathcal{R}}_W)$ due varietà affini; ad ogni morfismo $(\varphi, \varphi^*): (V, \underline{\mathcal{R}}_V) \rightarrow (W, \underline{\mathcal{R}}_W)$ corrisponde un omomorfismo di \mathbb{R} -algebre

$$\widehat{\varphi}: \Gamma_W(\underline{\mathcal{R}}_W) \rightarrow \Gamma_V(\underline{\mathcal{R}}_V).$$

e viceversa.

Si dimostra inoltre che (φ, φ^*) è un isomorfismo se e solo se $\widehat{\varphi}$ lo è.

PROVA. E' evidente che (φ, φ^*) definisce un omomorfismo

$$\widehat{\varphi}: \Gamma_W(\underline{\mathcal{R}}_W) \rightarrow \Gamma_V(\underline{\mathcal{R}}_V).$$

Viceversa, dato $\widehat{\varphi}$, è definito un morfismo

$$(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\varphi}^*): (\text{Spec } \Gamma_V(\underline{\mathcal{R}}_V), \overline{\Gamma_V(\underline{\mathcal{R}}_V)}) \rightarrow (\text{Spec } \Gamma_W(\underline{\mathcal{R}}_W), \overline{\Gamma_W(\underline{\mathcal{R}}_W)}).$$

Notiamo che $(V, \underline{\mathcal{R}}_V)$ e $(W, \underline{\mathcal{R}}_W)$ sono contenuti in $(\text{Spec } \Gamma_V(\underline{\mathcal{R}}_V), \overline{\Gamma_V(\underline{\mathcal{R}}_V)})$ e in $(\text{Spec } \Gamma_W(\underline{\mathcal{R}}_W), \overline{\Gamma_W(\underline{\mathcal{R}}_W)})$ rispettivamente, quindi $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\varphi}^*)$ induce per restrizione il morfismo (φ, φ^*) cercato ⁽⁵⁾.

⁽⁵⁾ Per i dettagli della costruzione si veda il paragrafo 5.

Inoltre, se $\widehat{\varphi}$ è un isomorfismo, ha un inverso $\widehat{\varphi}^{-1}$ e quindi anche (φ, φ^*) ha un inverso; vale ovviamente anche il viceversa.

Si può ora dimostrare anche per il caso reale il Teorema A. Vedremo in seguito come invece non valga il teorema B.

TEOREMA 1. *Sia $(V, \underline{\mathcal{R}}_V)$ una varietà affine, $\underline{\mathcal{F}}$ un fascio coerente su V , allora, dato un punto x di V la spiga $\underline{\mathcal{F}}_x$ di $\underline{\mathcal{F}}$ nel punto x è generata come $(\underline{\mathcal{R}}_V)_x$ -modulo da $\Gamma_V(\underline{\mathcal{F}})$.*

PROVA. Consideriamo una realizzazione di V in \mathbb{R}^n . Prolungando $\underline{\mathcal{F}}$ per zero fuori di V si ottiene un fascio coerente su \mathbb{R}^n , e ci riduciamo quindi a dimostrare il teorema per $V = \mathbb{R}^n$. Per definizione di coerenza esiste un ricoprimento finito $\{U_i\}_{i=1, \dots, p}$ di \mathbb{R}^n , con $U_i = \mathbb{R}_{q_i}^n$, $q_i \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, tale che su ogni U_i si ha una successione esatta

$$(\underline{\mathcal{R}}_V)^{n_i} \rightarrow (\underline{\mathcal{R}}_V)^{m_i} \xrightarrow{\pi_i} \underline{\mathcal{F}}|_{U_i} \rightarrow 0.$$

Il teorema è banalmente vero per ogni aperto del ricoprimento.

Consideriamo ora un elemento $\gamma_x \in \underline{\mathcal{F}}_x$, $x \in U_1$. Per ogni i esiste un aperto non vuoto $V_i \subset U_i$ e una sezione $\beta_i \in \Gamma_{V_i}((\underline{\mathcal{R}}_V)^{m_i})$ tale che $\pi_i(\beta_i)$ è un rappresentante di γ_x . Esistono quindi dei polinomi senza zeri comuni e non nulli su x : h_2, \dots, h_p tali che

$$(h_2, \dots, h_p)^N \cdot \beta_i \in \Gamma_V((\underline{\mathcal{R}}_V)^{m_i}).$$

Le sezioni

$$\pi_i((h_2, \dots, h_p)^N \cdot \beta_i)$$

si estendono tutte a una sezione globale ψ , e si ha quindi

$$\gamma_x = \frac{1}{(h_2, \dots, h_p)^N} \cdot \psi.$$

§ 2. Ideali reali.

DEFINIZIONE 1. Diciamo che un ideale \mathfrak{I} di un anello R (commutativo, con unità) è *reale* se verifica la seguente condizione

(α) dato un numero finito di elementi comunque scelti in R , g_1, \dots, g_p , tali che

$$\sum_1^p g_i^2 \in I,$$

allora ogni g_i appartiene a \mathbb{I} .

DEFINIZIONE 2. Un anello R , commutativo con unità, che sia un \mathbb{R} -modulo, si dice *reale* se verifica la seguente condizione

(β) comunque scelti $g_1, \dots, g_p \in R$ tali che

$$\sum_1^p g_i^2 = 0$$

allora

$$g_1 = \dots = g_p = 0.$$

Ricordiamo che, per un risultato di Risler ([5]) un ideale reale di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ è l'ideale di tutti i polinomi nulli su una sottovarietà di \mathbb{R}^n .

PROPOSIZIONE 1. Sia \mathfrak{m} un ideale massimale di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. Allora

1. Se \mathfrak{m} è un ideale reale, definisce un punto reale, e inoltre esiste un solo ideale massimale $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ in $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ tale che

$$(1) \quad \mathfrak{m}_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] = \mathfrak{m}.$$

2. Se \mathfrak{m} è massimale non reale allora $V(\mathfrak{m}) = \emptyset$ e esistono due ideali massimali $\mathfrak{m}_{1\mathbb{C}}, \mathfrak{m}_{2\mathbb{C}}$ in $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ tali che

$$\mathfrak{m}_{i\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] = \mathfrak{m}$$

PROVA. Sia \mathfrak{m} un ideale massimale reale di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. Allora $V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$ per l'osservazione precedente, e definisce un punto reale (per la massimalità). Da questo segue che l'ideale massimale $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ che definisce il punto reale in \mathbb{C}^n è unico.

Osserviamo inoltre che, ovviamente, vale anche l'implicazione contraria, cioè se un ideale massimale \mathfrak{m} in $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ è tale che esiste un solo ideale massimale in $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ che verifica (1), allora questo ideale \mathfrak{m} è reale.

Infatti se \mathfrak{m} non fosse reale non avrebbe zeri reali, quindi $\mathfrak{m} \otimes \mathbb{C}$ si annullerebbe in due punti; esisterebbero quindi due ideali massimali che verificano la (1).

Sia ora \mathfrak{m} un ideale massimale non reale. Allora $V(\mathfrak{m}) = \emptyset$ (dalla prima parte della dimostrazione o anche direttamente in modo ovvio: sia $V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$. Supponiamo $V(\mathfrak{m}) = \{x\}$; allora, poichè \mathfrak{m} non è reale, esiste in \mathfrak{m} un elemento del tipo

$$g = \sum_1^h g_i^2$$

con almeno un $g_i \notin \mathfrak{m}$. Quindi l'ideale che definisce $\{x\}$ sarà un ideale $\mathfrak{m}_{\mathbb{R}} \ni g_i$, contro la massimalità di \mathfrak{m} (6).

Dimostriamo che esiste più di un ideale massimale in $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ su \mathfrak{m} che verifica (1).

Infatti, ne esiste certamente uno per questioni di dipendenza intera. Ma se ne esistesse uno solo, dalla prima parte del teorema, \mathfrak{m} definirebbe un punto reale, contro il fatto che $V(\mathfrak{m}) = \emptyset$. Ne esistono quindi due, perché gli ideali massimali che verificano la (1) costituiscono un'orbita del gruppo di Galois di \mathbb{C} su \mathbb{R} ([10], Pag. 185).

COROLLARIO 1. *Gli ideali massimali nella classe degli ideali reali sono massimali nell'anello $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.*

PROVA. Sia \mathfrak{m} un ideale massimale tra gli ideali massimali reali. Allora \mathfrak{m} , essendo reale definisce una sottovarietà V di \mathbb{R}^n .

Si vede ovviamente che V è ridotta a un punto reale; e per la proposizione 1 \mathfrak{m} è massimale.

COROLLARIO 2. *Gli ideali massimali reali di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ corrispondono biunivocamente ai punti di \mathbb{R}^n .*

PROVA. Abbiamo visto (Prop. 1) che un ideale massimale reale definisce un punto reale. Dato poi un punto $x \in \mathbb{R}^n$, sia \mathfrak{m}_x l'ideale reale di tutte le funzioni nulle su x , \mathfrak{m}_x contiene quindi le funzioni coordinate, ed è dunque massimale.

OSSERVAZIONE. Nel caso degli ideali primi non si può dare una casistica, come nel caso degli ideali massimali, basata sul numero degli ideali primi che « stanno sopra » il primo dato. Infatti, basta considerare alcuni semplici esempi :

1. Sia $\mathfrak{I}_1 = (X^4 + Y^2 + X^2) \subset \mathbb{R}[X, Y]$

(6) Per la costruzione dell'ideale reale associato a un ideale dato si veda il teorema 1 di questo paragrafo.

\mathfrak{I}_1 è un ideale primo non reale con luogo di zeri non vuoto, ma definisce in \mathbb{C}^2 una varietà irriducibile, e quindi esiste su \mathfrak{I}_1 un solo primo complesso.

2. Sia $\mathfrak{I}_2 = (X^2 + Y^2) \subset \mathbb{R}[X, Y]$. \mathfrak{I}_2 ha le stesse proprietà di \mathfrak{I}_1 , ma su \mathfrak{I}_2 esistono due primi complessi.

3. Sia $\mathfrak{I}_3 = (X^2 + Y^2 + Z^2) \subset \mathbb{R}[X, Y, Z]$. \mathfrak{I}_3 è un ideale primo, non reale, con luogo di zeri non vuoto, ma $\mathfrak{I}_3 \otimes \mathbb{C}$ è un ideale primo in $\mathbb{C}[X, Y, Z]$.

4. Sia infine $\mathfrak{I}_4 = (X^2 + Y^2 + 1)$, ideale primo non reale, con luogo di zeri vuoto, ed esiste un solo primo complesso su \mathfrak{I}_4 in $\mathbb{C}[X, Y]$.

OSSERVAZIONE. Se un ideale $\tilde{\mathfrak{p}}$ di $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ è invariante per coniugio, $\tilde{\mathfrak{p}}$ è del tipo $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}$, con \mathfrak{p} ideale di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

PROPOSIZIONE 2. Dato un ideale primo reale \mathfrak{p} di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ l'ideale $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}$ è primo, ed è l'unico ideale primo tale che

$$\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C} \cap \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] = \mathfrak{p}.$$

PROVA. Dimostriamo che sotto queste ipotesi $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}$ è un ideale primo. Sia per assurdo $fg \in \mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}$ con $f, g \notin \mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}$, $f_1, g_1 \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

$$f = f_1 + if_2 \quad \text{con} \quad f_1 \text{ o } f_2 \notin \mathfrak{p}$$

$$g = g_1 + ig_2 \quad \text{con} \quad g_1 \text{ o } g_2 \notin \mathfrak{p}$$

$$(fg)(\overline{fg}) = (f_1 g_1 - f_2 g_2)^2 + (f_2 g_1 + f_1 g_2)^2 =$$

$$= f_1^2 g_1^2 + f_2^2 g_2^2 + f_2^2 g_1^2 + f_1^2 g_2^2 \in \mathfrak{p}$$

ma per ipotesi \mathfrak{p} è un ideale reale quindi ogni $f_i, g_i \in \mathfrak{p}$, assurdo perché \mathfrak{p} è primo.

Nelle ipotesi dette $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}$ è l'unico ideale primo di $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ tale che

$$(*) \quad \mathfrak{p} \otimes \mathbb{C} \cap \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] = \mathfrak{p}.$$

Infatti, $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}$ è il minimo ideale che contiene \mathfrak{p} in $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ e quindi, per ogni altro ideale \mathfrak{P} di $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ che verifica la condi-

zione (*), si ha

$$\mathfrak{P} \supset \mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}$$

allora per un noto teorema di algebra commutativa $\mathfrak{P} = \mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}$ ([8] pag. 61).

OSSERVAZIONE: Possiamo ancora notare che se si considera un ideale primo $\mathfrak{p} \subset \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, l'ideale $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}$ di $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ coincide con il suo radicale. Infatti, siano g_1, \dots, g_k i generatori (che possiamo prendere reali) di $r(\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C})$; allora per ogni $i = 1, \dots, k$ esiste $r_i \in \mathbb{N}$ tale che $g_i^{r_i} \in \mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}$, ed essendo g_i reale, $g_i^{r_i} \in \mathfrak{p}$. Quindi, poiché \mathfrak{p} è un ideale primo, $\forall i, g_i \in \mathfrak{p}$ e dunque $g_i \in \mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}$. Si conclude allora che

$$\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C} = r(\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}).$$

Dato un ideale $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, che non sia reale, tale che $V(\mathfrak{I}) \neq \emptyset$, gli si può associare un ideale reale $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$ tale che

$$V(\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}) = V(\mathfrak{I}).$$

L'ideale $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$ è il minimo ideale reale che contiene \mathfrak{I} .
Si ha il seguente

TEOREMA 1. *Dato un ideale $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ tale che $V(\mathfrak{I}) \neq \emptyset$, l'insieme*

$$\mathfrak{I}_{\mathbb{R}} = \{a \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \mid a^{2k} + \sum a_i^2 \in \mathfrak{I}\} (*)$$

è un ideale reale che contiene l'ideale dato, ed è il minimo ideale reale tale che

$$(r(\mathfrak{I}))_{\mathbb{R}} = \mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$$

(dove con $r(\mathfrak{I})$ si indica il radicale dell'ideale \mathfrak{I}).

PROVA. Vediamo come prima cosa che l'insieme

$$\mathfrak{I}_{\mathbb{R}} = \{a \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \mid a^{2k} + \sum a_i^2 \in \mathfrak{I}\}$$

è un ideale.

Se a è un elemento di $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$, allora esistono $k > 0$ e $a_i \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ tale che

$$a^{2k} + \sum a_i^2 \in \mathfrak{I} (*).$$

Sia $b \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, e dimostriamo che $ab \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$; infatti, basta moltiplicare (*) per b^{2^k} e otteniamo la relazione

$$(ab)^{2^k} + \sum b^{2^k} a_i^2 \in \mathbb{I}$$

quindi $ab \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$.

Siano poi $a, b \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$. Vogliamo dimostrare che esistono $K > 0$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ tali che

$$(a - b)^{2^k} + \sum \alpha_i^2 \in \mathbb{I}.$$

Poiché a e b appartengono a $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ valgono le seguenti relazioni

$$a^{2^{k_1}} + \sum a_i^2 \in \mathbb{I}$$

$$b^{2^{k_2}} + \sum b_i^2 \in \mathbb{I}$$

Sia $k_1 \geq k_2$ e consideriamo $k > k_1 + 1$. Si ha

$$(1) \quad (a - b)^{2^k} = a^{2^k} + b^{2^k} + \sum_1^{2^k-1} (-)^h \binom{2^k}{h} a^h b^{2^k-h}$$

$$(2) \quad (a + b)^{2^k} = a^{2^k} + b^{2^k} + \sum_1^{2^k-1} \binom{2^k}{h} a^h b^{2^k-h}$$

Sommando la (1) con (2) si ha una relazione in cui rimangono solo i termini in cui h è pari, ma in ognuno di essi si ha

$$h > 2^{k_1} \text{ o } 2^k - h > 2^{k_2}.$$

Quindi se $h > 2^{k_1}$, a verifica alla relazione

$$a^h + \sum a^{h-2^{k_1}} a_i^2 \in \mathbb{I}$$

e allora

$$a^h b^{2^k-h} + \sum a^{h-2^{k_1}} b^{2^k-h} a_i^2 \in \mathbb{I}.$$

Se invece $2^k - h > 2^{k_2}$

$$b^{2^k-h} + \sum b^{2^k-h-2^{k_2}} b_i^2 \in \mathbb{I}$$

e allora

$$a^h b^{2^k-h} + \sum a^h b^{2^k-h-2^{k_2}} b_i^2 \in \mathbb{I}.$$

Abbiamo quindi

$$(a - b)^2 + (a + b)^2 = \lambda - \sum \alpha_i^2, \quad \lambda \in \mathfrak{I}.$$

Quindi si ha $(a - b) \in \mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$, $(a + b) \in \mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$. $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$ è quindi un ideale di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

Vogliamo ora dimostrare che è $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$ reale.

Sia $g = \sum g_i^2 \in \mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$. Se $g \in \mathfrak{I}$, per costruzione ogni $g_i \in \mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$. Se $g \notin \mathfrak{I}$, si ha però

$$g^{2^k} + \sum \alpha_i^2 = (\sum g_i^2)^{2^k} + \sum \alpha_i^2 \in \mathfrak{I}$$

quindi ogni $g_i \in \mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$.

Inoltre $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$ è il minimo ideale reale che contiene \mathfrak{I} , perché ogni altro ideale reale che contiene \mathfrak{I} deve contenere tutti gli elementi di $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$.

Dimostriamo l'ultima affermazione dell'enunciato, cioè

$$(r(\mathfrak{I}))_{\mathbb{R}} = \mathfrak{I}_{\mathbb{R}}.$$

Basta dimostrare che $(r(\mathfrak{I}))_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$ ma questo si ha immediatamente osservando che

$$(*) \quad r(\mathfrak{I}) \subset \mathfrak{I}_{\mathbb{R}};$$

quindi l'ideale reale associato al radicale è contenuto in $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$. Essendo $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$ il minimo ideale reale che contiene \mathfrak{I} si ha l'uguaglianza.

Dimostriamo la (*):

Sia $x \in r(\mathfrak{I})$. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x^n \in \mathfrak{I}$

Dobbiamo distinguere due casi

1. $n = 2m \implies x^m \in \mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$; se m è pari si prosegue, se m è dispari, si passa al punto seguente.

$$2. n = 2m + 1 \implies x \cdot x^{2m+1} \in \mathfrak{I}_{\mathbb{R}} \implies x^{m+1} \in \mathfrak{I}_{\mathbb{R}}.$$

Proseguendo il ragionamento, si arriva alla conclusione cercata.

OSSERVAZIONE. Dato un ideale primo dell'anello $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, l'ideale reale associato può non essere primo, come si può notare dal seguente esempio:

si consideri il polinomio $P \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$

$$P = (X - 1)^2 X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Sfruttando un risultato di Oka ([6]) si dimostra che P è un polinomio irriducibile, quindi l'ideale (P) è primo.

Il luogo dei punti dove P si annulla in \mathbb{R}^3 è dato da

$$A = \{0, 0, 0\} \cup \{1, 0, 0\}.$$

Dunque l'ideale reale di tutti i polinomi nulli su A non è primo.

DEFINIZIONE 3. Un ideale $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ si dice *definite* se il suo radicale $r(\mathfrak{I})$ coincide con l'ideale reale associato; in altre parole, si può dire che un ideale \mathfrak{I} è *definite* se, dato un qualunque elemento $g \in \mathfrak{I}$, tale che

$$g = \sum_1^m g_i^2$$

per ogni g_i , $g_i \notin \mathfrak{I}$, esiste $k_i \in \mathbb{N}$ tale che

$$g_i^{k_i} \in \mathfrak{I}.$$

PROPOSIZIONE 3. Dato un ideale $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, \mathfrak{I} non reale e tale che $V(\mathfrak{I}) \neq \emptyset$, ad esso si può associare un ideale *definite* \mathfrak{I}_D , tale che

$$r(\mathfrak{I}_D) = \mathfrak{I}_{\mathbb{R}}.$$

PROVA. Consideriamo l'insieme

$$\mathfrak{I}_D = \{a \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \mid a^2 + \sum \alpha_i^2 \in \mathfrak{I}\}.$$

Si verifica che \mathfrak{I}_D è un ideale (vedi la dimostrazione del Teorema 1 di questo paragrafo). \mathfrak{I}_D non è in generale un ideale reale, ma si può dimostrare che $r(\mathfrak{I}_D)$ è reale. Infatti: sia $g \in r(\mathfrak{I}_D)$

$$g = \sum_1^m g_i^2$$

allora esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$g^k \in \mathfrak{I}_D$$

quindi

$$g^{2k} + \sum \alpha_j^2 = (\sum g_j^2)^{2k} + \sum \alpha_j^2 \in \mathfrak{I}$$

per definizione di \mathfrak{I}_D .

Quindi ogni $g_i^k \in \mathfrak{I}_D$ e quindi $g_i \in r(\mathfrak{I}_D)$.

Inoltre $r(\mathfrak{I}_D) = \mathfrak{I}_R$. Basta provare che

$$(1) \quad r(\mathfrak{I}_D) \subset \mathfrak{I}_R$$

ed essendo \mathfrak{I}_R il minimo ideale reale che contiene \mathfrak{I} , si ha l'asserto, ma la (1) è conseguenza immediata delle definizioni.

Vediamo ora che la proprietà per un ideale di essere reale è stabile per passaggio al quoziente e al localizzato.

PROPOSIZIONE 4. *Sia \mathfrak{I}_V un ideale di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, $\mathcal{P}_V = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{I}_V$, e $p: \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathcal{P}_V$ la proiezione canonica. Se \mathfrak{I} è un ideale reale di \mathcal{P}_V , allora $\widehat{\mathfrak{I}} = p^{-1}(\mathfrak{I})$ è un ideale reale di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.*

Si ha inoltre che l'ideale generato dall'immagine nella proiezione p di un ideale reale di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ è un ideale reale.

PROVA. Sia

$$h = \sum h_i^2 \in \widehat{\mathfrak{I}} = p^{-1}(\mathfrak{I}), \quad h_i \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n].$$

Si ha allora che

$$p(\sum h_i^2) = \sum p(h_i)^2 \in \mathfrak{I}.$$

Poiché \mathfrak{I} per ipotesi è reale si ha che $p(h_i) \in \mathfrak{I}$, $i = 1, \dots, q$, perciò

$$h_i \in p^{-1}(p(h_i)) \subset p^{-1}(\mathfrak{I}) = \widehat{\mathfrak{I}}.$$

$\widehat{\mathfrak{I}}$ è quindi un ideale reale.

Consideriamo ora un ideale $\widehat{\mathfrak{I}}$ di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, $\widehat{\mathfrak{I}}$ reale. Dimostriamo che $(p(\widehat{\mathfrak{I}}))$ è un ideale reale di \mathcal{P}_V . Infatti, sia

$$\bar{g} = \sum \bar{g}_i^2$$

un elemento di $(p(\widehat{\mathfrak{I}}))$, cioè

$$\bar{g} = g + \mathfrak{I}_V, \quad g \in \widehat{\mathfrak{I}}.$$

Inoltre, per ogni i , si ha

$$\bar{g}_i = g_i + \mathfrak{I}_V, \quad g_i \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$$

quindi

$$\bar{g} = \sum g_i^2 + \mathfrak{I}_V, \quad \sum g_i^2 \in \widehat{\mathfrak{I}}.$$

Poiché $\widehat{\mathfrak{I}}$ è reale, si ha l'asserto.

COROLLARIO 3. *Sia V una sottovarietà affine di \mathbb{R}^n , e $\mathcal{P}_V = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{I}_V$ sia il suo anello di coordinate. Si ha allora che un ideale \mathfrak{I} di \mathcal{P}_V è l'ideale di tutte le funzioni di \mathcal{P}_V nulle su W , sottovarietà di V , se e solo se \mathfrak{I} è reale.*

PROVA. Se \mathfrak{I} è l'ideale di tutte le funzioni di \mathcal{P}_V nulle su W , è chiaro che \mathfrak{I} è un ideale reale.

Viceversa, sia \mathfrak{I} un ideale reale di \mathcal{P}_V ; per la proposizione precedente, l'ideale $\widehat{\mathfrak{I}} = p^{-1}(\mathfrak{I})$ è reale, e quindi $\widehat{\mathfrak{I}}$ è l'ideale di tutte le funzioni di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ nulle su una sottovarietà W di V .

Sia ora $\bar{g} \in \mathcal{P}_V$, \bar{g} sia nulla su W ; vogliamo dimostrare che $\bar{g} \in \mathfrak{I}$.

Sia $g + h$ un rappresentante di \bar{g} , $h \in \mathfrak{I}_V$. Risulta che $g + h$ è nullo su W , quindi $g + h \in \widehat{\mathfrak{I}}$, e allora

$$\bar{g} = p(g + h) \in p(\widehat{\mathfrak{I}}) = \mathfrak{I}.$$

PROPOSIZIONE 5. *Dato un ideale reale \mathfrak{I} di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, e l'insieme N moltiplicativamente chiuso di tutti i polinomi di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ mai nulli su \mathbb{R}^n , l'ideale generato da \mathfrak{I} in $(\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n])_N$ mediante l'applicazione canonica è un ideale reale, e ogni ideale reale di $(\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n])_N$ proviene da un ideale reale di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.*

PROVA. Sia \mathfrak{I} un ideale reale di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ e \mathfrak{I}_N sia l'ideale generato da \mathfrak{I} in $(\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n])_N = \mathcal{R}_{\mathbb{R}^n}$. Sia poi

$$g = \sum g_i^2 \in \mathfrak{I}_N.$$

$$g = \frac{a}{b} \quad a \in \mathfrak{I}, \quad b \in N.$$

Allora $\sum b^2 g_i^2 \in \mathfrak{I}$, quindi $bg_i \in \mathfrak{I}$.

Si conclude che $g_i = \frac{a_i}{b} \in \mathfrak{I}_N$, $a_i \in \mathfrak{I}$.

Viceversa, poiché ogni ideale di $\mathcal{R}_{\mathbb{R}^n}$ proviene da un ideale di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, considerato un ideale reale \mathbb{I}_N di $\mathcal{R}_{\mathbb{R}^n}$, si deve dimostrare che l'ideale \mathbb{I} da cui \mathbb{I}_N proviene è reale. Infatti sia $a = \sum a_i^2 \in \mathbb{I}$. Allora $\sum \frac{a_i^2}{1} = \frac{a}{1} \in \mathbb{I}_N$ quindi $\frac{a_i}{1} \in \mathbb{I}_N$ poiché \mathbb{I}_N è reale. Allora $a_i \in \mathbb{I}$, per ogni i .

COROLLARIO 4. *Un ideale \mathbb{I}_N di $\mathcal{R}_{\mathbb{R}^n}$ è l'ideale di tutte le funzioni nulle su una sottovarietà di \mathbb{R}^n se e solo se \mathbb{I}_N è reale.*

PROVA. In un senso il corollario è ovvio. Sia \mathbb{I} l'ideale di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ da cui proviene l'ideale \mathbb{I}_N dato.

Poiché \mathbb{I}_N è reale, \mathbb{I} è reale, per la proposizione precedente. Quindi \mathbb{I} è l'ideale di tutti i polinomi nulli su una sottovarietà W di \mathbb{R}^n . Sia ora

$$g = \frac{a}{b} \in \mathcal{R}_{\mathbb{R}^n} \quad a \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n], \quad b \in N.$$

g sia nullo su W . Dobbiamo dimostrare che $g \in \mathbb{I}_N$. Infatti, dal fatto che $\frac{a}{b}$ è nullo su W segue che a è nullo su W , quindi $a \in \mathbb{I}$ e si conclude che $\frac{a}{b} = g \in \mathbb{I}_N$.

PROPOSIZIONE 6. *L'operazione di passaggio all'ideale reale associato ad un ideale dato e la localizzazione commutano, cioè, dato un ideale $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ e un sistema moltiplicativamente chiuso $N \subset \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vale*

$$(\mathbb{I}_N)_{\mathbb{R}} = (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_N.$$

PROVA. Poiché $(\mathbb{I}_N)_{\mathbb{R}}$ è il minimo ideale reale che contiene \mathbb{I}_N , basta dimostrare che

$$\mathbb{I}_N \subset (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_N \subset (\mathbb{I}_N)_{\mathbb{R}}.$$

Infatti $(\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_N$ è reale per la proposizione 5 e dalla minimalità di $(\mathbb{I}_N)_{\mathbb{R}}$ si ha l'asserto.

Dimostriamo quindi $\mathbb{I}_N \subset (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_N$. Sia $\frac{a}{b} \in \mathbb{I}_N$, cioè $a \in \mathbb{I}$, $b \in N$, allora $a \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ e quindi $\frac{a}{b} \in (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_N$.

Inoltre $(\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_N \subset (\mathbb{I}_N)_{\mathbb{R}}$; infatti sia $\frac{a}{b} \in (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_N$, $a \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$, $b \in N$.

Si ha quindi che a verifica la seguente relazione, per $k \in \mathbb{N}$, e $a_i \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, $i = 1, \dots, h$:

$$a^{2k} + \sum a_i^2 \in \mathbb{I}.$$

Allora

$$\frac{a^{2k}}{b^2} + \frac{a_i^2}{b^2} \in \mathbb{I}_N$$

quindi $\frac{a}{b} \in (\mathbb{I}_N)_{\mathbb{R}}$.

Osserviamo che buona parte di quanto abbiamo dimostrato in questo paragrafo per l'anello $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vale per un anello qualsiasi, commutativo con unità.

Vogliamo ora studiare il legame tra la dimensione di Krull di un ideale primo \mathfrak{p} (reale o tale che $V(\mathfrak{p}) \neq \emptyset$) e la dimensione reale della varietà definita da \mathfrak{p} . E' ben noto che, nel caso complesso, la dimensione algebrica dell'ideale e la dimensione complessa della varietà coincidono. Vediamo ora che nel caso reale si ha un analogo risultato, pur di considerare l'ideale reale che definisce la varietà. Se invece si considera un ideale primo non reale si ha ovviamente

$$\dim_K \mathfrak{p} \geq \dim_{\mathbb{R}} V(\mathfrak{p}).$$

TEOREMA 2. *Un ideale primo $\mathfrak{p} \subset \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ è reale se e solo se*

$$\dim_K \mathfrak{p} = \dim_{\mathbb{R}} V(\mathfrak{p}).$$

PROVA. Sia \mathfrak{p} un ideale primo reale. Per il teorema di Cohen-Seidenberg si ha

$$\dim_K \mathfrak{p} = \dim_K \mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}.$$

Ma si ha anche

$$\dim_K \mathfrak{p} \otimes \mathbb{C} = \dim_{\mathbb{C}} V(\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}).$$

Poiché \mathfrak{p} è reale $V(\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C})$ è la complessificata di V e si ha ([3])

$$\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} \tilde{V} \quad (\tilde{V} = V(\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}))$$

e si conclude

$$\dim_K \mathfrak{p} = \dim_{\mathbb{R}} V.$$

Vediamo ora di dimostrare che se un ideale primo \mathfrak{p} è tale che

$$\dim_K \mathfrak{p} = \dim_{\mathbb{R}} V$$

\mathfrak{p} è reale.

Basta cioè dimostrare che, se \mathfrak{p} non è reale,

$$\dim_K \mathfrak{p} > \dim_{\mathbb{R}} V.$$

Infatti, sia $\mathfrak{p}_{\mathbb{R}}$ l'ideale reale associato a \mathfrak{p} , che definisce quindi la stessa varietà V .

Si consideri una componente prima $\mathfrak{q}_{\mathbb{R}}$ della decomposizione minimale di $\mathfrak{p}_{\mathbb{R}}$ tale che

$$\dim_K \mathfrak{q}_{\mathbb{R}} = \dim_{\mathbb{R}} V.$$

Abbiamo quindi

$$\dim_K \mathfrak{p} > \dim_K \mathfrak{q}_{\mathbb{R}} = \dim_{\mathbb{R}} V.$$

Un'altra caratterizzazione degli ideali reali è la seguente:

TEOREMA 3. *Sia \mathfrak{p} un ideale in $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$; \mathfrak{p} è reale se e solo se la varietà complessa \tilde{V} definita in \mathbb{C}^n dall'ideale $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}$ ha un punto reale non singolare.*

PROVA. Sia \mathfrak{p} un ideale primo reale. Allora $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}$ è un ideale primo, che definisce una varietà irriducibile \tilde{V} (che è la complessificata della varietà V definita da \mathfrak{p} in \mathbb{R}^n).

Ovviamente, \tilde{V} ha almeno un punto reale non singolare, perché la parte reale di \tilde{V} è densa in \tilde{V} , (siamo nella topologia di Zariski) mentre i punti singolari di \tilde{V} hanno codimensione almeno uno.

Dimostriamo ora che, se la parte reale ha un punto che non è singolare per la varietà complessa $V(\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C})$, l'ideale \mathfrak{p} è reale.

Infatti vale ([7])

$$\dim_{\mathbb{R}} V(\mathfrak{p}) = \dim_K \mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}$$

se $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}$ è primo.

Se invece $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}$ non è primo, esiste una componente prima minimale \mathfrak{q} di $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}$ per cui vale

$$\dim_{\mathbb{R}} V(\mathfrak{p}) = \dim_K \mathfrak{q}$$

come segue dal teorema 2, quindi in ambedue i casi si può concludere che \mathfrak{p} è reale.

OSSERVAZIONE 1. E' possibile definire in altro modo la dimensione algebrica di un ideale primo reale, cioè:

DEFINIZIONE 4. *Diciamo dimensione reale di un ideale primo reale \mathfrak{p} la massima lunghezza delle catene massimali di ideali primi reali di inizio \mathfrak{p} .*

Indicheremo la dimensione reale di \mathfrak{p}

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{p}.$$

Si può allora completare la trattazione data dal Teorema 2 con il seguente Corollario :

COROLLARIO 5. *Se \mathfrak{p} è un ideale reale,*

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{p} = \dim_K \mathfrak{p}.$$

PROVA. Se \mathfrak{p} è reale, abbiamo visto che

$$\dim_K \mathfrak{p} = \dim_{\mathbb{R}} V(\mathfrak{p}) = m.$$

Ma in V possiamo considerare una sottovarietà irriducibile Z di dimensione topologica $m - 1$ (basta passare alla varietà complessificata) che sarà definita da un ideale primo reale di dimensione di Krull $m - 1$. Proseguendo in questo modo, si avrà

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{p} \geq \dim_K \mathfrak{p}.$$

Ma in generale si ha

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{p} \leq \dim_K \mathfrak{p}.$$

Quindi si può concludere che

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{p} = \dim_K \mathfrak{p} = \dim_{\mathbb{R}} V(\mathfrak{p}).$$

OSSERVAZIONE 2. Notiamo che la dimensione topologica di una varietà reale può essere non costante e anche non localmente costante, come si vede dai seguenti semplici esempi :

1) nell'anello $\mathbb{R}[X, Y]$ consideriamo l'ideale reale $(X^2 + Y^2 - X^2)$. La varietà da esso definita ha dimensione topologica che non è costante, ma è localmente costante.

2) Nell'anello $\mathbb{R}[X, Y, Z]$ consideriamo l'ideale reale $(Z(X^2 + Y^2) - X^3)$. La varietà da esso definita in \mathbb{R}^3 ha dimensione topologica non localmente costante.

§ 3. Rappresentazioni affini.

Sia ora \mathcal{R} un anello commutativo con identità che sia un \mathbb{R} -modulo.

DEFINIZIONE 1. Diremo *rappresentazione affine* di \mathcal{R} il dato delle cose seguenti

- a. un sottoanello di \mathcal{R} , \mathcal{P} che sia finitamente generato.
 - b. un sistema moltiplicativamente chiuso $N \subset \mathcal{P}$ tale che $\mathcal{R} = (\mathcal{P})_N$.
- Richiediamo inoltre che
- c. Un elemento $g \in \mathcal{P}$, sia un elemento di N se e solo se g non è contenuto in alcun ideale reale massimale di \mathcal{P} .

Sia V una varietà affine, \mathcal{R}_V l'anello delle funzioni regolari su V .

Assegnata una immersione di V in \mathbb{R}^n sia $\mathcal{P}_V = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]/\mathbb{I}_V$ l'anello delle funzioni regolari di V che sono restrizione di funzioni polinomiali di \mathbb{R}^n , ed N sia costituito dagli elementi di \mathcal{P}_V che non si annullano mai su V .

Si ha allora

PROPOSIZIONE 1. Sia \mathcal{R} un anello reale, \mathcal{R} è isomorfo all'anello delle funzioni regolari di una varietà affine se e solo se \mathcal{R} ammette una rappresentazione affine.

PROVA. Se \mathcal{R} ammette la rappresentazione affine $\mathcal{R} = (\mathcal{P})_N$, allora $\mathcal{P} \simeq \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]/\mathbb{I}_V = \mathcal{P}_V$ (poichè \mathcal{P} è finitamente generato). Di più, essendo \mathcal{R} un anello reale, tale è anche \mathcal{P} , perciò l'ideale \mathbb{I}_V risulta reale e \mathcal{P} è isomorfo all'anello \mathcal{P}_V delle funzioni regolari della varietà affine V che sono restrizione di funzioni polinomiali di \mathbb{R}^n .

Le funzioni regolari di V si ottengono localizzando \mathcal{P}_V per l'insieme N' delle funzioni che non si annullano mai su V (vedi Lemma 2 del § 1); ma i punti di V corrispondono agli ideali reali massimali di $\mathcal{P}_V = \mathcal{P}$, per cui, nell'identificazione di \mathcal{P} con \mathcal{P}_V , N si identifica con N' e risulta quindi

$$\mathcal{R}_V = (\mathcal{P}_V)_{N'} \simeq \mathcal{R} = (\mathcal{P})_N.$$

Viceversa: sia \mathcal{R} l'anello delle funzioni regolari della varietà affine V ; si realizzi V in uno spazio affine \mathbb{R}^n e sia \mathbb{I}_V l'ideale di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ che definisce V .

Risulta allora

$$\mathcal{R} \simeq (\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]/\mathbb{I}_V)_{N'}$$

dove N' è l'insieme degli elementi di $\mathcal{P}_V = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]/\mathbb{I}_V$ che non si annullano mai su V .

Si è così trovata una rappresentazione affine di \mathcal{R} e la proposizione è dimostrata.

OSSERVAZIONE. Assegnata astrattamente la varietà affine $(V, \underline{\mathcal{R}}_V)$, dare una realizzazione di V in uno spazio affine \mathbb{R}^n equivale a dare una rappresentazione affine

$$\mathcal{R}_V = \Gamma_V(\underline{\mathcal{R}}_V) = (\mathcal{P})_N$$

di \mathcal{R}_V , ed in più a scegliere i generatori di \mathcal{P} (cioè a dare l'isomorfismo $\mathcal{P} \simeq \frac{\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]}{\mathbb{I}}$).

Dato un morfismo (φ, φ^*) fra due varietà affini $(V, \underline{\mathcal{R}}_V)$, $(W, \underline{\mathcal{R}}_W)$ aventi come anelli di funzioni regolari \mathcal{R}_V e \mathcal{R}_W , e fissate due rappresentazioni affini $\mathcal{R}_V = (\mathcal{P}_V)_{N_V}$, $\mathcal{R}_W = (\mathcal{P}_W)_{N_W}$, il morfismo (φ, φ^*) è individuato da $\widehat{\varphi}^*: \mathcal{P}_W \rightarrow \mathcal{R}_V$ ($\widehat{\varphi}^*$ è indotto da φ^*), ma in generale non si avrà $\widehat{\varphi}^*(\mathcal{P}_W) \subset \mathcal{P}_V$.

In particolare, se (φ, φ^*) è un isomorfismo, non è detto che $\widehat{\varphi}^*$ induca un isomorfismo tra \mathcal{P}_W e \mathcal{P}_V .

Osserviamo che se $\widehat{\varphi}^*(\mathcal{P}_W) \subset \mathcal{P}_V$ allora φ è restrizione di un'applicazione polinomiale fra gli spazi affini in cui sono realizzati V , W e viceversa.

Sia $(V, \underline{\mathcal{R}}_V)$ una varietà affine, $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{I}}$ una famiglia finita di chiusi di V ; abbiamo visto che $V - \bigcup S_\lambda$ con la struttura di spazio con fascio di anelli indotta da V è isomorfo ad una varietà affine.

Vogliamo ora provare che non si ha lo stesso risultato se la famiglia $\{S_\lambda\}$ non è finita.

PROPOSIZIONE 2. Sia $(V, \underline{\mathcal{R}}_V)$ una varietà affine e $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{I}}$ una famiglia di chiusi di V .

Sia $S = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{I}} S_\lambda$, $W = V - S$ e $(W, \underline{\mathcal{R}}_W)$ lo spazio con fascio di anelli ottenuto restringendo $\underline{\mathcal{R}}_V$ a W .

Condizione necessaria e sufficiente perchè $(W, \underline{\mathcal{R}}_W)$ sia isomorfo ad una varietà affine è che esistano $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{I}$ tali che $S = \bigcup_{i=1}^q S_{\lambda_i}$.

PROVA: Come abbiamo già osservato, se $S = \bigcup S_{\lambda_i}$ allora $(W, \underline{\mathcal{R}}_W)$ è una varietà affine.

Viceversa: supponiamo che $(W, \underline{\mathcal{R}}_W)$ sia una varietà affine. Osserviamo che $\Gamma_W(\underline{\mathcal{R}}_W) = \mathcal{R}_W$ è l'anello delle funzioni regolari su W , e, essendo W affine, esiste una rappresentazione affine $\mathcal{R}_W = (\mathcal{P}_W)_{N_W}$ di \mathcal{R}_W . Per ipotesi \mathcal{P}_W è finitamente generato, quindi, se $\mathcal{P}_W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, con A_n sottoanelli e sotto \mathbb{R} -moduli di \mathcal{P}_W , esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{P}_W = \bigcup_{i=1}^{n_0} A_i$ (infatti, se $\alpha_1, \dots, \alpha_s$

sono i generatori di \mathcal{P}_W , essi appartengono a qualche A_n e quindi con un numero finito di A_n si genera \mathcal{P}_W).

Supponiamo quindi, per assurdo, che non esistano $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{R}$ che verifichino alle proprietà dette. Allora esistono dei punti $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tali che (eliminati eventualmente degli S_i inessenziali) si abbia

$$x_n \in S_n, \quad x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} S_i.$$

Sia ora A_n l'anello degli elementi di \mathcal{P}_W che sono funzioni regolari su $V - \bigcup_1^n S_i$.

Risulta quindi $\mathcal{P}_W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, ma si ha l'assurdo osservando che $A_n \not\subset A_m$ per $n \neq m$. Dimostriamo anzi che $A_n \subset A_{n+1} \forall n$ e che $A_n \not\subset A_{n+1}$.

Notiamo infatti che \mathcal{P}_W corrisponde all'anello delle funzioni polinomiali (rispetto a una certa immersione di W in \mathbb{R}^m) ristretta a W .

Ne segue che, mediante gli elementi di \mathcal{P}_W , si può costruire una immersione propria di W in \mathbb{R}^m e quindi, per ogni $x \in V - W$ deve esistere un elemento di \mathcal{P}_W che ha un polo in x .

Le funzioni di A_n non hanno certamente poli su x_{n+1} perchè sono regolari su x_{n+1} mentre in A_{n+1} esiste almeno una funzione che ha un polo su x_{n+1} , quindi $A_n \not\subset A_{n+1}$ e la proposizione è dimostrata.

§ 4. Complessificazione di una varietà algebrica reale.

Sia (V, \mathcal{R}_V) una varietà affine reale; supponiamo che sia assegnata una realizzazione di V in \mathbb{R}^n . Si consideri \mathbb{R}^n canonicamente immerso in \mathbb{C}^n .

DEFINIZIONE 1. Dicesi *complessificazione* della sottovarietà affine V di \mathbb{R}^n la più piccola varietà affine \tilde{V} di \mathbb{C}^n che contiene V .

OSSERVAZIONE 1. La complessificazione della sottovarietà V di \mathbb{R}^n esiste sempre unica, ed è l'intersezione di tutte le sottovarietà affini di \mathbb{C}^n contenenti V .⁽⁷⁾

OSSERVAZIONE 2. La complessificazione \tilde{V} di $V \subset \mathbb{R}^n$ è una varietà affine di \mathbb{C}^n trasformata in sè dall'antiinvoluzione indotta dal coniugio.

⁽⁷⁾ Si ricordi che l'intersezione di una famiglia qualsiasi di varietà affini di \mathbb{C}^n è una sottovarietà affine di \mathbb{C}^n , per la noetherianità di $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

OSSERVAZIONE 3. Si ha ([3])

$$\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} \tilde{V}.$$

OSSERVAZIONE 4. Sia $\mathcal{R}_V = (\mathcal{P}_V)_{N_V}$ la rappresentazione affine dell'anello delle funzioni regolari associata all'immersione di V in \mathbb{R}^n .

Risulta allora

$$\mathcal{P}_{\tilde{V}} \simeq \mathcal{P}_V \otimes \mathbb{C}$$

ove $\mathcal{P}_{\tilde{V}}$ è l'anello $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/\mathbb{I}_{\tilde{V}}$ con $\mathbb{I}_{\tilde{V}}$ ideale di tutti i polinomi nulli su \tilde{V} .

Si hanno infatti le successioni esatte

$$0 \rightarrow \mathbb{I}_V \rightarrow \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathcal{P}_V \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathbb{I}_V \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathcal{P}_{\tilde{V}} \rightarrow 0$$

poichè \mathbb{C} è un \mathbb{R} -modulo piatto.

Si osservi a tale scopo che i polinomi di $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ nulli su V , (e quindi su \tilde{V}), sono esattamente quelli dell'ideale $\mathbb{I}_V \otimes \mathbb{C}$. Infatti, gli elementi di $\mathbb{I}_V \otimes \mathbb{C}$ sono tutti e soli quelli della forma $p + iq$ con $p, q \in \mathbb{I}_V \subset \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. Dunque se $\varphi \in \mathbb{I}_V \otimes \mathbb{C}$, φ è nullo su V .

Viceversa, sia $p + iq \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ e nullo su V . Allora $p/V = q/V = 0$ cioè $p, q \in \mathbb{I}_V$, quindi $p + iq \in \mathbb{I}_V \otimes \mathbb{C}$:

DEFINIZIONE 2. Date due immersioni $V \subset \mathbb{R}^n$, $V' \subset \mathbb{R}^m$, della varietà affine (V, \mathcal{R}_V) , diciamo che le due immersioni sono associate a complessificazioni isomorfe se esiste un isomorfismo φ di varietà algebriche complesse,

$$\varphi: \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}'$$

fra le complessificate associate alle immersioni, che prolunga l'applicazione identica $V \rightarrow V$.

PROPOSIZIONE 1. Data una varietà affine reale (V, \mathcal{R}_V) , ed una rappresentazione affine $\mathcal{R}_V = (\mathcal{P}_V)_{N_V}$, tutte le realizzazioni di V che inducono la stessa rappresentazione affine sono associate a complessificazioni isomorfe.

Viceversa, se due realizzazioni $V \subset \mathbb{R}^n$, $V' \subset \mathbb{R}^m$ sono associate a complessificazioni isomorfe, allora le due rappresentazioni affini di \mathcal{R}_V , associate alle due immersioni, sono isomorfe.

PROVA. Date due realizzazioni $V \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ associate alla stessa rappresentazione affine $\mathcal{K}_V = (\mathcal{P}_V)_{N_V}$ della varietà affine reale data $(V, \underline{\mathcal{K}}_V)$, si ha che l'anello \mathcal{P}_V delle funzioni polinomiali di \mathbb{R}^n ristrette a V è isomorfo all'anello \mathcal{P}'_V delle funzioni polinomiali di \mathbb{R}^m ristrette a V , e quindi

$$\mathcal{P}_V \otimes \mathbb{C} \simeq \mathcal{P}'_V \otimes \mathbb{C}.$$

Segue quindi l'isomorfismo tra le complessificate \tilde{V} e \tilde{V}' di V relative alle due immersioni.

Viceversa, date due realizzazioni di $(V, \underline{\mathcal{K}}_V)$ tali che le complessificate siano isomorfe, si ha

$$\mathcal{P}_{\tilde{V}} = \mathcal{P}_V \otimes \mathbb{C} \simeq \mathcal{P}_{\tilde{V}'} = \mathcal{P}_{V'} \otimes \mathbb{C}$$

ove \mathcal{P}_V e $\mathcal{P}_{V'}$ sono gli anelli delle funzioni polinomiali ristrette a V di \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m rispettivamente.

Ma l'isomorfismo $\mathcal{P}_{\tilde{V}} \simeq \mathcal{P}_{\tilde{V}'}$, deriva dall'applicazione identica $V \rightarrow V$ e induce quindi un isomorfismo

$$\mathcal{P}_V \rightarrow \mathcal{P}_{V'},$$

e si ha la tesi.

PROPOSIZIONE 2. Sia

$$\varphi: (V, \underline{\mathcal{K}}_V) \rightarrow (W, \underline{\mathcal{K}}_W)$$

un morfismo tra varietà affini reali.

Siano $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^m$ due realizzazioni di V e W , e siano \tilde{V} , \tilde{W} le complessificazioni di V e W relative alle immersioni date.

Si dimostra allora che il morfismo φ si estende a un morfismo

$$\tilde{\varphi}: \tilde{U}_V \rightarrow \tilde{W}$$

dove \tilde{U}_V è un intorno di Zariski di V in \tilde{V} .

Inoltre, date due estensioni

$$\tilde{\varphi}: \tilde{U}_V \rightarrow \tilde{W}$$

$$\tilde{\varphi}': \tilde{U}'_V \rightarrow \tilde{W}$$

si ha

$$\tilde{\varphi}|_{\tilde{U}_V \cap \tilde{U}_V'} = \tilde{\varphi}'|_{\tilde{U}_V \cap \tilde{U}_V'}$$

PROVA. Consideriamo le funzioni coordinate y_1, \dots, y_m di \mathbb{R}^m , e le funzioni regolari

$$\varphi_i = y_i \cdot \varphi.$$

Supponiamo per ora V irriducibile.

Osserviamo che, se sono dati due aperti U_1 e U_2 di V e due funzioni regolari g_1, g_2 .

$$g_i: U_i \rightarrow \mathbb{R} \quad i = 1, 2$$

e se g_1 e g_2 si estendono a funzioni regolari

$$\tilde{g}_i: \tilde{U}_i \rightarrow \mathbb{C} \quad i = 1, 2$$

dove \tilde{U}_i è un intorno di U_i in \tilde{V} e, inoltre, se

$$g_1|_{U_1 \cap U_2} = g_2|_{U_1 \cap U_2}$$

si ha allora

$$\tilde{g}_1|_{\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2} = \tilde{g}_2|_{\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2}$$

Infatti $\tilde{g}_1 - \tilde{g}_2$ è nulla su $U_1 \cap U_2$ quindi è nulla su V , e dunque risulta nulla sulla complessificata.

Si ha allora

$$\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2 \quad \text{su} \quad \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2.$$

Dunque, poichè ogni punto x di V ha un intorno in \tilde{V} ove le funzioni φ_i si estendono, per il ragionamento precedente le estensioni si incollano e definiscono una estensione $\tilde{\varphi}_i$ di φ_i .

Sia \tilde{U}_V un intorno di V in \tilde{V} in cui siano definite tutte le $\tilde{\varphi}_i$; esse definiscono un morfismo

$$\tilde{\varphi}: \tilde{U}_V \rightarrow \tilde{W}.$$

Si è così provata la prima parte della proposizione.

La dimostrazione della seconda parte segue immediatamente ricordando che ogni funzione regolare nulla su V è nulla su \tilde{V} .

Se V è riducibile si estende φ alla complessificata di ogni componente irriducibile; per l'unicità dell'estensione si ottiene la $\tilde{\varphi}$ desiderata.

LEMMA 1. *Nelle ipotesi della proposizione 2 esiste un intorno \tilde{U}'_V di V in \tilde{V} che è massimo, rispetto alla seguente proprietà: esiste un morfismo $\tilde{\varphi}' : \tilde{U}'_V \rightarrow \tilde{W}$ di varietà complesse, estensione del morfismo*

$$\varphi : V \rightarrow W.$$

PROVA. Sia $\{\tilde{V}_\lambda\}_{\lambda \in A}$ la famiglia degli aperti di \tilde{V} per cui esiste una estensione di φ

$$\tilde{\varphi}_\lambda : \tilde{V}_\lambda \rightarrow \tilde{W}.$$

Sia $\tilde{U}'_V = \bigcup_{\lambda \in A} \tilde{V}_\lambda$. \tilde{U}'_V è un aperto di \tilde{V} e $\{\tilde{V}_\lambda\}_{\lambda \in A}$ è un ricoprimento di \tilde{U}'_V , quindi esiste un sottoricoprimento finito $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_p$ di \tilde{U}'_V .

Evidentemente \tilde{U}'_V soddisfa alla condizione di massimalità richiesta.

Basta quindi provare che due estensioni $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ di φ definite su \tilde{V}_1, \tilde{V}_2 definiscono un morfismo, ottenuto per prolungamento,

$$\varphi_{12} : \tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_2 \rightarrow \tilde{W}.$$

Basta perciò provare che

$$\tilde{\varphi}_1|_{\tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2} = \tilde{\varphi}_2|_{\tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2}$$

e questo è stato provato nella proposizione 2.

DEFINIZIONE 3. *Sia (X, \mathcal{R}_X) una prevarietà algebrica reale, $(\tilde{X}, \mathcal{R}_{\tilde{X}})$ una prevarietà algebrica complessa tale che $X \subset \tilde{X}$ ⁽⁸⁾. $(\tilde{X}, \mathcal{R}_{\tilde{X}})$ si dice *complessificazione* di (X, \mathcal{R}_X) se per ogni $x \in X$ esiste un intorno affine U_x di*

⁽⁸⁾ Cioè è definita una immersione

$$i : X \rightarrow \tilde{X}.$$

x in X e un intorno affine \tilde{U}_x di x in \tilde{X} in modo che valga la seguente condizione:

β) esista un isomorfismo $i: \tilde{U}_x \rightarrow \tilde{V}_x \subset \mathbb{C}^n$ fra \tilde{U}_x e la varietà affine complessa \tilde{V}_x di \mathbb{C}^n (n dipendente da x) tale che \tilde{V}_x sia la complessificata di $i(U_x)$ (rispetto all'immersione $U_x \subset \mathbb{R}^n$).

DEFINIZIONE 4. Data una prevarietà algebrica reale $(X, \underline{\mathcal{R}}_X)$, diremo che una sua complessificazione $(\tilde{X}, \underline{\mathcal{R}}_{\tilde{X}})$ è di tipo minimale se ogni componente irriducibile \tilde{X}_i di \tilde{X} è tale che $\dim_{\mathbb{C}} \tilde{X}_i = \dim_{\mathbb{R}} \tilde{X}_i \cap X$.

OSSERVAZIONE. Se \tilde{X} è una complessificazione di tipo minimale di X , allora ogni funzione regolare su un intorno \tilde{U}_x di X in \tilde{X} , e nulla su X , è identicamente nulla.

LEMMA 2. Sia $(X, \underline{\mathcal{R}}_X)$ una prevarietà algebrica reale, $(\tilde{X}, \underline{\mathcal{R}}_{\tilde{X}})$ una sua complessificazione, $(W, \underline{\mathcal{R}}_W)$ una varietà affine e $(\tilde{W}, \underline{\mathcal{R}}_{\tilde{W}})$ una sua complessificazione. Ogni morfismo

$$\varphi: X \rightarrow W$$

si estende ad un morfismo

$$\tilde{\varphi}: \tilde{X}' \rightarrow \tilde{W}$$

dove \tilde{X}' è un intorno di X in \tilde{X} .

Se inoltre $(\tilde{X}, \underline{\mathcal{R}}_{\tilde{X}})$ è una complessificazione di tipo minimale, e se

$$\tilde{\varphi}'': \tilde{X}'' \rightarrow \tilde{W}$$

è un'altra estensione di φ a un intorno \tilde{X}'' in X in \tilde{X} , allora risulta

$$\tilde{\varphi}'|_{\tilde{X}' \cap \tilde{X}''} = \tilde{\varphi}''|_{\tilde{X}' \cap \tilde{X}''}.$$

PROVA. Possiamo sempre considerare un intorno $\hat{\tilde{X}}$ di X in \tilde{X} tale che $\hat{\tilde{X}}$ sia una complessificazione di tipo minimale, quindi basta provare il lemma in questa ipotesi.

Siano $W \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{W} \subset \mathbb{C}^n$ realizzazioni di W e \tilde{W} , e siano

$$y_1 = \{x_1\}, \dots, y_n = \{x_n\}$$

le funzioni coordinate di \mathbb{R}^n , ristrette a W .

Le funzioni

$$\varrho_i = y_i \circ \varphi = \varphi^*(x_i)$$

sono funzioni regolari su X .

Sia $\{U_j\}_{j=1, \dots, p}$ un ricoprimento aperto affine di X e $\{\tilde{U}_j\}_{j=1, \dots, p}$ sia una famiglia di aperti di \tilde{X} in modo tale che le coppie U_j, \tilde{U}_j soddisfino alla condizione β) della definizione 3.

Le funzioni ϱ_i si estendono, per ogni aperto U_j , ad un intorno massimale \tilde{U}'_j di U_j in \tilde{X} . Poiché le ϱ_i sono definite e regolari su X , si ha che $\tilde{U}' = \bigcup_{j=1}^p \tilde{U}'_j$ è un intorno di X in \tilde{X} a cui si possono estendere le ϱ_i , $i = 1, \dots, n$; essendo X una complessificazione di tipo minimale, dette estensioni nel comune campo di definizione non dipendono dall'indice j .

Si definisce quindi un'estensione $\tilde{\varphi}$ di φ

$$\tilde{\varphi}: \tilde{U}' \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$$\tilde{\varphi}: p \mapsto (\tilde{\varrho}_1(p), \dots, \tilde{\varrho}_n(p)).$$

Il lemma è così provato.

TEOREMA 1. *Ogni prevarietà algebrica reale ammette una complessificazione. Date due prevarietà algebriche reali (X, \mathcal{R}_X) , (Y, \mathcal{R}_Y) , due loro complessificazioni $(\tilde{X}, \mathcal{R}_{\tilde{X}})$, $(\tilde{Y}, \mathcal{R}_{\tilde{Y}})$ ed un morfismo*

$$\varphi: X \rightarrow Y,$$

esiste una estensione di φ

$$\tilde{\varphi}: \tilde{U}'_X \rightarrow \tilde{Y}$$

dove \tilde{U}'_X è un intorno di X in \tilde{X} .

Due tali estensioni coincidono in un intorno di Zariski di X in \tilde{X} .

PROVA. Sia $\{U_i\}_{i=1, \dots, p}$ un ricoprimento aperto affine di X . Per ogni U_i consideriamo una realizzazione U'_i , e sia \tilde{U}'_i il suo complessificato rispetto a detta realizzazione;

$$\varrho_i: U'_i \rightarrow U_i$$

siano le immersioni.

Siano poi

$$U_{12} = \varrho_1^{-1}(\varrho_2(U'_2) \cap U_1) \subset U'_1$$

$$U_{21} = \varrho_2^{-1}(\varrho_1(U'_1) \cap U_2) \subset U'_2.$$

E' definito allora l'isomorfismo

$$\varrho_{12}: U'_{12} \rightarrow U'_{21}$$

$$\varrho_{12} = \varrho_2^{-1} \cdot \varrho_1.$$

Il morfismo ϱ_{12} si estende, per il Lemma 3, ad un morfismo

$$\tilde{\varrho}_{12}: \tilde{U}'_{12} \rightarrow \tilde{U}'_{21}$$

definito su un intorno di U'_{12} in \tilde{U}'_1 (U'_{12} e U'_{21} sono affini, poiché sono aperti in varietà affini. E' poi conseguenza del Lemma 2 che un complessificato di U'_{12} (o di U'_{21}) si possa identificare con un intorno di U'_{12} (o di U'_{21}) in \tilde{U}'_1 (o \tilde{U}'_2)).

Sia ora \tilde{X}_{12} lo spazio ottenuto incollando \tilde{U}'_1 e \tilde{U}'_2 mediante $\tilde{\varrho}_{12}$.

Lo spazio \tilde{X}_{12} ha in modo naturale struttura di prevarietà algebrica complessa tale che le immersioni di \tilde{U}'_1 e \tilde{U}'_2 in \tilde{X}_{12} siano morfismi (anzi, isomorfismi locali).

Sia infatti $x \in \tilde{X}_{12}$; se x proviene da \tilde{U}'_1 ma non da \tilde{U}'_2 (o viceversa), x ha un intorno isomorfo ad un aperto di \tilde{U}'_1 (o \tilde{U}'_2). Se x proviene da un punto $x' \in \tilde{U}'_1$ e da un punto $x'' \in \tilde{U}'_2$, allora esistono due intorni $B_{x'}$, $B_{x''}$ di x' e x'' che sono trasformati uno nell'altro da $\tilde{\varrho}_{12}$; si può anzi supporre che $\tilde{\varrho}_{12}: B_{x'} \rightarrow B_{x''}$ sia un isomorfismo.

Dunque x ha un intorno isomorfo a $B_{x'} \cong B_{x''}$.

Si è così provato che \tilde{U}'_1 e \tilde{U}'_2 inducono su \tilde{X}_{12} una struttura di prevarietà algebrica complessa.

Si può ora procedere ad incollare \tilde{U}'_3 a \tilde{X}_{12} (è possibile farlo nel modo sopra indicato, perché non abbiamo sfruttato l'ipotesi che gli aperti siano affini, ma solo che avessero un complessificato).

Procedendo in questo modo, dopo $p - 1$ passi, si ottiene una prevarietà algebrica complessa \tilde{X} .

E' immediato dalla costruzione che \tilde{X} è una complessificata di X .

Essendo gli \tilde{U}'_i complessificati di tipo minimale degli U'_i la prevarietà \tilde{X} risulta essere una complessificata di tipo minimale di X .

Abbiamo così provato la prima parte del teorema.

Sia ora $\varphi: X \rightarrow Y$ un morfismo e \tilde{X} , \tilde{Y} due complessificazioni di X e di Y . Vogliamo provare che esiste una estensione

$$\tilde{\varphi}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$$

di φ ad un intorno \tilde{X}' di X in \tilde{X} .

Per il lemma 2 sappiamo che il fatto è vero se Y è affine. Supponiamo ora \tilde{X} minimale, consideriamo un ricoprimento aperto affine $\{W_i\}_{i=1, \dots, p}$ di Y e siano

$$\psi_i: \varphi^{-1}(W_i) \rightarrow W_i$$

le restrizioni di φ .

Possiamo allora estendere le ψ_i e le estensioni $\tilde{\psi}_i$ così costruite per ogni aperto affine danno per incollamento l'estensione cercata.

Il teorema è ora completamente provato.

OSSERVAZIONE 1. Siano X_1, X_2 due varietà algebriche, $\varrho_{12}: X_1' \rightarrow X_2$ un morfismo fra l'aperto X_1' di X_1 e l'aperto $X_2' = \varrho_{12}(X_1')$ di X_2 . Supponiamo che $\varrho_{12}: X_1' \rightarrow X_2'$ sia un isomorfismo.

Sia X_{12} lo spazio quoziente $(X_1 \amalg X_2) / \mathcal{R}$ ove $x \sim y \iff x \in X_1', \varrho_{12}(x) = y$.

Lo spazio quoziente X_{12} è dotato in modo naturale di struttura di pre-varietà algebrica.

Sia $\Delta_{12} =$ diagonale di $X_{12} \times X_{12}$; dette $p_i: X_i \rightarrow X_{12}$, $\hat{X}_i = p_i(X_i)$, $i = 1, 2$ le proiezioni di X_i sul quoziente risulta:

$$X_{12} \times X_{12} = \hat{X}_1 \times \hat{X}_1 \cup \hat{X}_1 \times \hat{X}_2 \cup \hat{X}_2 \times \hat{X}_1 \cup \hat{X}_2 \times \hat{X}_2$$

$$\Delta_{12} = \hat{\Delta}_{11} \cup \hat{\Delta}_{21} \cup \hat{\Delta}_{22} \cup \hat{\Delta}_{12}$$

ove

$$\hat{\Delta}_{ij} = \Delta_{12} \cap \hat{X}_i \times \hat{X}_j.$$

Osserviamo che per provare che Δ_{12} è chiuso basta far vedere che $\Delta_{12} \cap \hat{X}_i \times \hat{X}_j$ è chiuso in $\hat{X}_i \times \hat{X}_j$ per ogni i, j (infatti gli insiemi $X_i \times X_j$ danno un ricoprimento aperto di $X_{12} \times X_{12}$).

Per ipotesi X_1 ed X_2 sono varietà e $p_i: X_i \rightarrow p_i(X_i) \subset X_{12}$ sono isomorfismi quindi $\hat{\Delta}_{ii}$ è chiuso in $\hat{X}_i \times \hat{X}_i$, $i = 1, 2$.

Resta dunque da vedere se $\hat{\Delta}_{12}$ e $\hat{\Delta}_{21}$ sono chiusi in $\hat{X}_1 \times \hat{X}_2$ e $\hat{X}_2 \times \hat{X}_1$.

Osserviamo che: $\hat{\Delta}_{12} = \{(x, y) \in X_{12} \times X_{12} \mid x = p_1(x'), y = p_2(y'), y' = \varrho_{12}(x')\}$.

Se $\Gamma_{12} = \{(x', y') \in X_1 \times X_2 \mid y' = \varrho_{12}(x')\}$ è il grafico di ϱ_{12} si ha dunque $\hat{\Delta}_{12} = p_1 \times p_2(\Gamma_{12})$.

Essendo $p_i: X_i \rightarrow p_i(X_i)$ degli isomorfismi per dimostrare che $\hat{\Delta}_{12}$ è un chiuso di $X_1 \times X_2$ basta provare che Γ_{12} è un chiuso di $X_1 \times X_2$ (osserviamo anzi che Δ_{12} è chiuso se e solo se Γ_{12} e Γ_{21} sono chiusi).

Si supponga ora che X_1, X_2 siano due varietà algebriche reali e ϱ_{12} sia tale che X_{12} sia una varietà algebrica. Siano \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 due varietà algebriche complesse che siano due complessificazioni di X_1, X_2 , $\tilde{\varrho}_{12}: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2 \subset \tilde{X}_2$ un'estensione di ϱ_{12} e \tilde{X}_{12} la prevarietà ottenuta incollando \tilde{X}_1 a \tilde{X}_2 tramite $\tilde{\varrho}_{12}$.

Vogliamo ora provare che \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 si possono scegliere in modo tale che \tilde{X}_{12} sia una varietà algebrica, complessa (la quale sarà una complessificazione di X_{12}).

Come già osservato \tilde{X}_{12} sarà una varietà se i grafici $\tilde{\Gamma}_{12}, \tilde{\Gamma}_{21}$ di $\tilde{\varrho}_{12}, \tilde{\varrho}_{21}$ sono dei chiusi di $\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2$.

Il grafico Γ_{12} di ϱ_{12} è una sottovarietà algebrica reale chiusa di $X_1 \times X_2$; sia $\hat{\Gamma}_{12}$ una sua complessificata.

Si può supporre, eventualmente sostituendo \tilde{X}_i con un intorno di X_i in \tilde{X}_i , che $\hat{\Gamma}_{12}$ sia una sottovarietà algebrica chiusa di $\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2$. $\hat{\Gamma}_{12}$ definisce, in un intorno \tilde{U}'_1 di X_1 in \tilde{X}_1 un morfismo $\hat{\varrho}_{12}: \tilde{U}'_1 \rightarrow \tilde{U}'_2$ che estende ϱ_{12} ; usando quindi $\hat{\varrho}_{12}, \tilde{U}'_1, \tilde{U}'_2$ si costruisce una complessificazione \tilde{X}_{12} di X_{12} che è una varietà algebrica.

Si è quindi provato:

TEOREMA 2. *Sia $(X, \underline{\mathcal{R}}_X)$ una varietà algebrica reale, allora $(X, \underline{\mathcal{R}}_X)$ ammette una complessificata $(\tilde{X}, \underline{\mathcal{R}}_{\tilde{X}})$ che è una varietà algebrica complessa.*

OSSERVAZIONE 2. *Data una prevarietà algebrica reale $(X, \underline{\mathcal{R}}_X)$, siano $(\tilde{X}', \underline{\mathcal{R}}_{\tilde{X}'})$ e $(\tilde{X}'', \underline{\mathcal{R}}_{\tilde{X}''})$ due sue complessificazioni; esiste allora un isomorfismo*

$$\tilde{\varphi}: \tilde{U}'_X \rightarrow \tilde{U}''_X$$

tra due intorni di X in \tilde{X}' e \tilde{X}'' che estende il morfismo identità

$$\varphi: X \rightarrow X.$$

Si ha quindi, come nel caso affine, che la complessificata è unica come germe intorno ad X .

OSSERVAZIONE 3. *Data una prevarietà algebrica reale $(X, \underline{\mathcal{R}}_X)$ e una sua complessificata $(\tilde{X}, \underline{\mathcal{R}}_{\tilde{X}})$, esiste, su un intorno \tilde{X}' di X in \tilde{X} , una ap-*

plicazione

$$\sigma: \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X}'$$

tale che

i) $\sigma \circ \sigma = \text{identità}$

ii) $\{x \in \tilde{X}' \mid \sigma(x) = x\} = X$

iii) σ è antiregolare (cioè, se localmente \tilde{X} è realizzato in \mathbb{C}^n , allora $C\sigma$ è regolare, dove C è l'automorfismo indotto dal coniugio).

L'esistenza di σ si prova osservando che, fissata una immersione delle carte \tilde{U}'_i in \mathbb{C}^n (vedi teorema 1), il coniugio induce su \tilde{U}'_i una applicazione σ che verifica alle proprietà prima dette. Si osserva poi che se σ' è una applicazione che verifica alle stesse proprietà, risulta che $\sigma' \circ \sigma$ è regolare e $(\sigma' \circ \sigma)|_X = \text{identità}$, da cui $\sigma' \circ \sigma = \text{identità}$, poiché la complessificata è di tipo minimale. Perciò $\sigma' = \sigma^{-1} = \sigma$.

Dall'unicità di σ si deduce che le antiinvoluzioni definite su \tilde{U}'_i dal coniugio definiscono per incollamento una antiinvoluzione

$$\sigma: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$$

con le proprietà cercate.

OSSERVAZIONE 4. Sia $\varphi: X \rightarrow Y$ un morfismo tra prevarietà algebriche reali, \tilde{X}, \tilde{Y} siano due loro complessificate. Siano

$$\sigma: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$$

$$\sigma': \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$$

due antiinvoluzioni che hanno le proprietà dell'osservazione 3, e $\tilde{\varphi}$

$$\tilde{\varphi}: \tilde{U}_X \rightarrow \tilde{U}_Y$$

sia una estensione di φ a due intorni di X, Y in \tilde{X} e \tilde{Y} .

Si scelgano \tilde{U}_X e \tilde{U}_Y in modo che

$$\sigma(\tilde{U}_X) = \tilde{U}_X$$

$$\sigma(\tilde{U}_Y) = \tilde{U}_Y$$

(è possibile, basta prendere ad esempio

$$\tilde{U}'_X = \tilde{U}_X \cap \sigma(\tilde{U}_X)$$

e si supponga che \tilde{U}_X sia una complessificazione di tipo minimale.

Si ha allora

$$\tilde{\varphi} \circ \sigma = \sigma' \circ \tilde{\varphi}.$$

(Basta vedere che si ha il risultato nel caso affine, e sfruttare la minimalità).

§ 5. Le varietà algebriche reali come schemi.

a. Il caso affine.

Sia $(V, \underline{\mathcal{R}}_V)$ una varietà affine reale, $\mathcal{R}_V = \Gamma_V(\underline{\mathcal{R}}_V)$ l'anello delle funzioni regolari su V e $\text{Spec } \mathcal{R}_V$ lo spettro primo di \mathcal{R}_V .

TEOREMA 1. *Si hanno i risultati seguenti:*

a) *gli ideali massimali di \mathcal{R}_V sono in corrispondenza biunivoca con i punti di V .*

b) *Data una realizzazione di V in uno spazio affine \mathbb{R}^n , sia \tilde{V} la complessificazione di V rispetto a questa realizzazione. I punti di $\text{Spec } \mathcal{R}_V$ sono allora in corrispondenza biunivoca con le sottovarietà \tilde{W} di \tilde{V} tali che*

- i) \tilde{W} è invariante per coniugio
- ii) $\tilde{W} \cap V \neq \emptyset$
- iii) *detto $\mathfrak{I}_{\tilde{W}}$ l'ideale di \tilde{W} in $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ allora $\mathfrak{I}_{\tilde{W}} \cap \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ è un ideale primo.*

PROVA. Sia \mathcal{P}_V l'anello delle funzioni polinomiali di \mathbb{R}^n ristrette a V e $\text{Spec } \mathcal{P}_V$ sia l'insieme degli ideali primi di \mathcal{P}_V .

Se \mathfrak{p} è un ideale primo di \mathcal{P}_V , allora $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}$ è un ideale che coincide con il suo radicale (vedi § 2) e quindi individua una sottovarietà affine $X_{\mathfrak{p}}$ di \tilde{V} che è invariante per coniugio.

Si ha dunque una applicazione iniettiva J

$$J: \text{Spec } \mathcal{P}_V \rightarrow \{\text{sottovarietà affini di } \tilde{V} \text{ invarianti per coniugio}\}$$

L'immersione $\mathcal{P}_V \rightarrow \mathcal{R}_V$ definisce una applicazione

$$\pi: \text{Spec } \mathcal{R}_V \rightarrow \text{Spec } \mathcal{P}_V$$

che risulta iniettiva ([8]).

Sia ora \mathfrak{p} un punto chiuso di $\text{Spec } \mathcal{R}_V$, $\pi(\mathfrak{p})$ è un punto chiuso di $\text{Spec } \mathcal{P}_V$ quindi $J(\pi(\mathfrak{p}))$ è formato da un punto di V oppure da due punti complessi coniugati di \tilde{V} (vedi § 2).

Per provare l'affermazione a) del teorema basta verificare che $J(\pi(\mathfrak{p}))$ non può essere formato da una coppia di punti di \tilde{V} .

Se infatti x_1, x_2 fosse una tale coppia in \tilde{V} corrispondente all'ideale \mathfrak{p} , esisterebbe un elemento φ di N_V , ($N_V \subset \mathcal{P}_V$, $N_V = \{\varphi \in \mathcal{P}_V \mid \varphi \text{ mai nulla su } V\}$), tale che $\varphi(x_1) = 0$, $\varphi(x_2) = 0$.

Risulterebbe dunque $\varphi \in \mathfrak{p}$, φ invertibile, e questo è assurdo.

Osserviamo ora che ogni sottovarietà \tilde{W} di \tilde{V} soddisfacente alle condizioni i), ii), iii) proviene tramite $J \circ \pi$ da un ideale primo di $\text{Spec } \mathcal{R}_V$, e da uno solo, perchè $J \circ \pi$ è iniettiva.

Infatti $\mathfrak{p}' = I_{\tilde{W}} \cap \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ è primo per ipotesi e proviene da un ideale primo \mathfrak{p}'' di \mathcal{R}_V ; viceversa se \tilde{W} è una sottovarietà affine di \tilde{V} tale che $\tilde{W} \cap V = \emptyset$, allora l'ideale di \mathcal{R}_V ad esso associato è tutto \mathcal{R}_V (poichè in questo caso esiste $\varphi \in N_V$ tale che $\varphi|_{\tilde{W}} \equiv 0$).

E' poi chiaro che se \tilde{W} è tale che $\mathbb{1}_{\tilde{W}} \cap \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ non è primo, allora $\tilde{W} \notin \text{Im}(J \circ \pi)$.

Il teorema è così provato.

COROLLARIO 1. *Sia \mathfrak{p} un ideale di \mathcal{R}_V . Se \mathfrak{p} è un ideale massimale, \mathfrak{p} è reale.*

PROVA. E' immediata conseguenza del teorema 1.

DEFINIZIONE 1. *Data una varietà affine $(V, \underline{\mathcal{R}}_V)$ diciamo *schema affine, associato a V , lo schema affine**

$$(\text{Spec } \mathcal{R}_V, \hat{\mathcal{R}}_V), \quad \mathcal{R}_V = \Gamma_V(\underline{\mathcal{R}}_V).$$

TEOREMA 2. *Sia $(V, \underline{\mathcal{R}}_V)$ una varietà affine reale, $(\text{Spec } \mathcal{R}_V, \hat{\mathcal{R}}_V)$ lo schema affine associato, $i: V \rightarrow \text{Spec } \mathcal{R}_V$ l'immersione naturale; allora i risulta essere un isomorfismo (di spazi con fasci di anelli) di V su $(i(V), \hat{\mathcal{R}}_{V|i(V)})$.*

PROVA. Basta dimostrare che ogni sezione su un aperto di V del fascio $\underline{\mathcal{R}}_V$ si può estendere ad una sezione di $\hat{\mathcal{R}}$, definita su un intorno dell'aperto in $\text{Spec } \mathcal{R}_V$ e che, viceversa, ogni sezione di $\hat{\mathcal{R}}_V$ su V può essere considerata come sezione di $\underline{\mathcal{R}}_V$. Quest'ultimo fatto è ovvio, poichè, per definizione, un elemento $g \in \Gamma_{\hat{\mathcal{V}}_\varphi}(\hat{\mathcal{R}}_V)$, ($\hat{\mathcal{V}}_\varphi$ aperto di $\text{Spec } \mathcal{R}_V$) è del tipo $g = k|_{\varphi^r}$ con k elemento di \mathcal{P}_V .

Per dimostrare la prima asserzione, consideriamo un aperto $V_f \subset V \subset \mathbb{R}^n$ e un elemento $g \in \Gamma_{V_f}(\underline{\mathcal{R}}_V)$;

Sia \tilde{V} una complessificazione di V e \tilde{U} un intorno di V_f a cui si estenda g .

Esiste allora $\varphi \in \mathcal{P}_V$ tale che valga

$$\tilde{V}_\varphi \subset \tilde{U}, \quad \tilde{V}_\varphi \supset V_f.$$

Si ha quindi su \tilde{V}_φ

$$g = \frac{h'}{\varphi^r}$$

e da ciò si conclude la dimostrazione.

DEFINIZIONE 2. Dicesi *schema reale associato a* $(V, \underline{\mathcal{R}}_V)$ (varietà affine) il sottospazio di $\text{Spec } \mathcal{R}_V$ formato dagli ideali primi reali. Denoteremo lo schema reale di V con

$$\text{Spec}_{\mathbb{R}} \mathcal{R}_V.$$

Su $\text{Spec}_{\mathbb{R}} \mathcal{R}_V$ considereremo il fascio

$$\underline{\hat{\mathcal{R}}}_V|_{\text{Spec}_{\mathbb{R}} \mathcal{R}_V} = \underline{\mathcal{R}}_V^{\mathbb{R}}.$$

TEOREMA 3. *I punti chiusi di $\text{Spec}_{\mathbb{R}} \mathcal{R}_V$ sono in corrispondenza biunivoca con i punti di V e inoltre i punti di $\text{Spec}_{\mathbb{R}} \mathcal{R}_V$ sono in corrispondenza biunivoca con le sottovarietà irriducibili di V .*

PROVA. Il teorema segue dai risultati del § 1.

OSSERVAZIONE. Ogni aperto di $\text{Spec } \mathcal{R}_V$ che contiene V (*) è $\text{Spec } \mathcal{R}_V$. Infatti ogni chiuso contiene un punto chiuso, e gli unici punti chiusi di $\text{Spec } \mathcal{R}_V$ sono gli ideali massimali (che definiscono i punti di V).

(*) per abbreviare la terminologia, diremo che $\text{Spec } \mathcal{R}_V$ contiene V , invece di specificare che $\text{Spec } \mathcal{R}_V$ contiene gli ideali massimali relativi ai punti di V .

b. Il caso generale.

DEFINIZIONE 3. Diciamo *schema* ⁽⁸⁾ associato a una varietà algebrica reale $(X, \underline{\mathcal{R}}_X)$ uno schema $(\check{X}, \underline{\mathcal{R}}_{\check{X}})$ è una immersione

$$j: (X, \underline{\mathcal{R}}_X) \rightarrow (\check{X}, \underline{\mathcal{R}}_{\check{X}})$$

in modo tale che esistano

a. un ricoprimento affine

$$\{U_i\}_{i=1, \dots, N} \text{ di } X$$

b. un ricoprimento affine

$$\{\check{U}_i\}_{i=1, \dots, N} \text{ di } \check{X}$$

in modo tale che $j(U_i) \subset \check{U}_i$ e che il diagramma seguente

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{i} & \text{Spec } \mathcal{R}_{U_i} \\ \downarrow j & \nearrow i' & \\ \check{U}_i & & \end{array}$$

risulti commutativo (ove i' è l'isomorfismo identità ed i è l'immersione definita nel teorema 2).

TEOREMA 4. Data una varietà algebrica reale $(X, \underline{\mathcal{R}}_X)$, esiste uno schema $(\check{X}, \underline{\mathcal{R}}_{\check{X}})$ associato a $(X, \underline{\mathcal{R}}_X)$.

PROVA. Dato un ricoprimento affine $\{U_i\}$ di X , si usi il Lemma 5 del § 1 per associare al morfismo

$$\varrho_{ij}: U_i' \rightarrow U_j'$$

⁽⁸⁾ Indicheremo con « schema » il preschema della terminologia classica, secondo le notazioni attualmente usate.

di incollamento tra due aperti affini U_i', U_j' di U_i, U_j un morfismo di \mathbb{R} -algebre e quindi di schemi

$$e_{ij}^*: \text{Spec } \Gamma_{U_i'}(\underline{\mathcal{R}}_X) \rightarrow \text{Spec } \Gamma_{U_j'}(\underline{\mathcal{R}}_X).$$

L'esistenza dei morfismi e_{ji}^* ed il fatto che essi verifichino la condizione di transitività permette dunque la costruzione di $(\check{X}, \check{\mathcal{R}}_X)$, per incollamento degli schemi affini $\text{Spec } \Gamma_{U_i}(\underline{\mathcal{R}}_X)$.

TEOREMA 5. *Ogni morfismo tra varietà algebriche reali*

$$(\varphi, \varphi^*): (X, \underline{\mathcal{R}}_X) \rightarrow (Y, \underline{\mathcal{R}}_Y)$$

delle quali $(\check{X}, \check{\mathcal{R}}_X)$, $(\check{Y}, \check{\mathcal{R}}_Y)$ sono due schemi associati, si estende ad un morfismo

$$(\check{\varphi}, \check{\varphi}^*): (\check{X}', \check{\mathcal{R}}_{X'}) \rightarrow (\check{Y}, \check{\mathcal{R}}_Y)$$

definito su un intorno \check{X}' di X in \check{X} .

PROVA. Si consideri un ricoprimento affine $\{U_i\}_{i=1, \dots, N}$ di X e uno $\{V_i\}_{i=1, \dots, N}$ di Y , tali che

$$\varphi(U_i) \subset V_i.$$

Poichè φ è un morfismo di varietà algebriche reali, per ogni $i=1, \dots, N$

$$\varphi_i = \varphi|_{U_i}: U_i \rightarrow V_i$$

è un morfismo di varietà affini, e quindi si estende ad un morfismo

$$\hat{\varphi}_i: (\text{Spec } \mathcal{R}_{U_i}, \hat{\mathcal{R}}_{U_i}) \rightarrow (\text{Spec } \mathcal{R}_{V_i}, \hat{\mathcal{R}}_{V_i})$$

tra gli schemi affini associati.

Viene quindi definito un morfismo tra gli schemi $(\check{X}', \check{\mathcal{R}}_{X'})$, $(\check{Y}, \check{\mathcal{R}}_Y)$.

§ 6. Osservazioni finali.

a. Sulla non nullità dei gruppi di coomologia delle varietà affini.

Sia $(V, \underline{\mathcal{R}}_V)$ una varietà affine reale; vogliamo provare che, in generale, si ha

$$H^1(V, \underline{\mathcal{R}}_V) \neq 0.$$

Premettiamo la seguente

OSSERVAZIONE. Sia $\{U_i\}_{i=1,2}$ un ricoprimento affine di V , e sia g_{12} un cociclo definito su $U_1 \cap U_2 = U_{12}$. g_{12} è bordo se e solo se g_{12} si estende ad un cociclo \hat{g}_{12} definito su un intorno \hat{U}_{12} di U_{12} , nello schema affine \hat{V} associato a V , $\hat{U}_{12} = \hat{U}_1 \cap \hat{U}_2$, con \hat{U}_1 e \hat{U}_2 intorni di U_1 e U_2 in \hat{V} .

Infatti, sia g_{12} un cociclo che può essere esteso nel modo indicato. Allora

$$V \subset \hat{U}_1 \cup \hat{U}_2 \subset \hat{V}$$

e quindi per l'osservazione fatta nel paragrafo precedente,

$$\hat{U}_1 \cup \hat{U}_2 = \hat{V}.$$

Si ha quindi che g_{12} è bordo perché i gruppi di coomologia $H^p(\hat{V}, \underline{\mathcal{R}}_V)$ di uno schema affine, per $p \geq 1$, sono nulli ([9]). Ne segue che anche g_{12} è un bordo.

Viceversa, sia g_{12} bordo, cioè

$$g_{12} = h_1 - h_2$$

h_i funzione definita su U_i ; le h_i possono quindi essere estese ad un intorno \hat{U}_i di U_i in \hat{V} , e quindi g_{12} si può estendere ad un cociclo \hat{g}_{12} definito su $\hat{U}_1 \cap \hat{U}_2$.

Sia ora $(\varphi) \in \text{Spec } \mathcal{R}_V$, φ è quindi irriducibile, e inoltre φ abbia luogo di zeri formato da due componenti disgiunte $V_1(\varphi)$, $V_2(\varphi)$, cioè

$$V_1(\varphi) \subset S_1 = V - U_1$$

$$V_2(\varphi) \subset S_2 = V - U_2$$

$$U_i = V_{f_i}, f_i \in \mathcal{R}_V, S_1 \cap S_2 = \emptyset, U_1 \cup U_2 = V.$$

Consideriamo dunque la sezione $\frac{1}{\varphi} \in \Gamma_{U_1 \cap U_2}(\underline{\mathcal{R}}_V)$ che è un cociclo definito su $U_1 \cap U_2$; vediamo che $\frac{1}{\varphi}$ non può essere esteso ad un intorno \hat{U}_{12} del tipo indicato nella osservazione precedente. Infatti, ogni intorno di U_1 (o U_2) in \hat{V} è costituito dagli ideali primi di \mathcal{R}_V che hanno zeri su U_1

(o su U_2); allora (φ) appartiene ad ogni intorno di U_1 , e così pure ad ogni intorno di U_2 in \hat{V} , quindi $(\varphi) \in \hat{U}_1 \cap \hat{U}_2$ e si conclude che il cociclo $\frac{1}{\varphi}$ non può essere esteso. Dall'osservazione si ha allora:

$$H^1(V, \underline{\mathcal{R}}_V) \neq 0.$$

(Ad esempio, si consideri $\varphi \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$,

$$\varphi = (X - 1)^2 X^2 + Y^2 + Z^2$$

la quale si annulla in $\{(0, 0, 0)\} \cup \{(1, 0, 0)\}$).

b. Sulla immergibilità di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$.

Sia $X = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Consideriamo ora le funzioni

$$\chi_{ik} = \frac{x_i x_k}{\sum_{j=0}^n x_j^2}.$$

Abbiamo cioè $(n + 1)^2$ funzioni che verificano a

1. $\chi_{ik} = \chi_{ki}$
2. $\chi_{ik} \cdot \chi_{ej} = \chi_{ie} \cdot \chi_{kj}$
3. $\sum_0^n \chi_{jj} = 1.$

Se ne deduce quindi che

$$\chi_{ii} = \frac{\chi_{ie}^2}{\chi_{ee}}.$$

Vogliamo verificare che l'applicazione χ data dalle χ_{ik} è un isomorfismo di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sulla sottovarietà di $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$ definita dalle equazioni 1, 2, 3.

Per questo, basta provare:

i) che l'applicazione χ è iniettiva.

ii) l'esistenza di una applicazione ϱ_σ , differenziabile, che renda commutativo il seguente diagramma

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{R}^{(n+1)^2} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \varrho_\sigma \\ \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{R}^{(n+1)^2} \end{array}$$

per ogni automorfismo σ di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ indotto da una trasformazione ortogonale su $\mathbb{R}^{(n+1)}$. Infatti con questo si prova che, se lo Jacobiano della χ non ha rango massimo in un punto non lo ha in nessun punto, e quindi l'applicazione non sarebbe iniettiva se non avesse rango massimo in ogni punto.

Per verificare l'iniettività, consideriamo due punti $(x_0, \dots, x_n), (x'_0, \dots, x'_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Consideriamo anzi

$$X = \left(\frac{x_0}{\sum_0^n x_i^2}, \dots, \frac{x_n}{\sum_0^n x_i^2} \right) = (X_0, \dots, X_n)$$

$$X' = \left(\frac{x'_0}{\sum_0^n (x'_i)^2}, \dots, \frac{x'_n}{\sum_0^n (x'_i)^2} \right) = (X'_0, \dots, X'_n).$$

Sia $X \neq X'$ e, per ogni coppia di indici i, k ,

cioè

$$\chi_{ik}(X) = \chi_{ik}(X')$$

$$X_i X_k = X'_i X'_k.$$

Quindi, in particolare si avrà, tenendo conto di 1, 2, 3

$$X_i^2 = X_i'^2$$

$$X_i = \pm X'_i$$

$$X_k = \pm X'_k$$

e cioè, $\forall i$, o $X_i = X'_i$, o $X_i = -X'_i$ e si conclude $X = X'$.

Per dimostrare poi l'esistenza di una applicazione $\varrho: \mathbb{R}^{(n+1)^2} \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1)^2}$ che renda commutativo il diagramma (*) si considera la trasformazione

$$y_i = \sum a_{ij} x_j$$

con (a_{ij}) matrice ortogonale.

Si ha allora

$$\chi'_{ik} = \frac{\sum_{j,e} a_{ij} a_{ke} x_j x_e}{\sum_0^n x_j^2} = \sum_{j,e} a_{ij} a_{ke} \chi_{je}$$

dove χ'_{ik} sono le coordinate di $\varrho_*(\chi(x))$.

Si ha quindi, in corrispondenza a una trasformazione ortogonale su \mathbb{R}^{n+1} una trasformazione lineare su $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$.

Vediamo ora che le χ_{ik} definiscono una applicazione surgettiva sulla sottovarietà di $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$ definita dalle equazioni 1, 2, 3.

Infatti, sia $A \in \mathbb{R}^{(n+1)^2}$ (indicheremo con $N = (n+1)^2$), $A = (a_1, \dots, a_N)$, A che verifichi alle equazioni 1, 2, 3. Verifichiamo che A è immagine di un punto X di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $X = (x_0, \dots, x_n)$.

Dato A , supponiamo che

$$a_i = \chi_{i-1, i-1}(X) \quad i = 1, \dots, n+1$$

allora, $\forall i$, $a_i > 0$ ed esiste j tale che $a_j > 0$.

Allora si ha che $|x_i| = \sqrt{a_{i+1}}$.

Restano dunque da determinare i segni delle x_i . Si considerino allora le a_k corrispondenti a χ_{jk} (j indice della coordinata $a_j > 0$). Determiniamo dunque il punto X nel modo seguente: la coordinata x_j con segno positivo,

x_k ($k \neq j$) con il segno determinato da $\chi_{ik} = \frac{x_j x_k}{\sum_0^n x_i^2}$.

Analogo ragionamento si può fare per immergere $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ con la struttura reale soggiacente in $\mathbb{R}^{2(n+1)^2}$, anzi si può vedere, tenendo conto del numero di relazioni tra le χ_{jk} , che in questo caso hanno la forma

$$\chi_{ik} = \frac{\overline{z_i z_k}}{\sum_{j=0}^n z_j \overline{z_j}}$$

che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ si può immergere in $\mathbb{R}^{2(n+1)^2 - (n^2 + n + 1)}$.

c. *Controesempio al teorema: Dato un morfismo di varietà algebriche reali*

$$\varphi: X \rightarrow X'$$

che sia un isomorfismo analitico, φ è anche un isomorfismo algebrico.

Basta considerare il seguente esempio:

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi(x) = x^3 + x + 1$$

che è un isomorfismo analitico ma non algebrico.

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. P. SERRE, *Faisceaux algébriques cohérents*. Ann. of Maths 61, 1955.
- [2] J. P. SERRE, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*. Annales de l'Institut Fourier. Tome VI (1956).
- [3] H. WHITNEY, *Elementary structure of real algebraic varieties*. Ann. of Maths. 66, N. 3, (1957).
- [4] M. ARTIN, *On the solution of analytic equations*. Inventiones math. 5 (1968).
- [5] J. J. RISLER, *Une caractérisation des idéaux des variétés algébriques réelles*. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271 (9 décembre 1970).
- [6] S. S. ABHYANKAR, *Concepts of order and rank on a complex space and a condition for normality*. Math. Ann. 141 (1960).
- [7] A. TOGNOLI, *Proprietà globali degli spazi analitici reali*. Ann. di Matem. pura ed appl. (IV), Vol. LXXV (1967).
- [8] M. F. ATIYAH, I. G. MACDONALD, *Introduction to commutative algebra*. Addison Wesley (1969).
- [9] J. DIEUDONNÉ, *Algebraic geometry*. Adv. Math. (1969).
- [10] D. MUMFORD, *Introduction to algebraic geometry* (preliminary version of first 3 chapters), Harvard University.