

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

BERNARD MAUREY

**Intégration dans les espaces  $p$ -normes**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série*, tome 26,  
n° 4 (1972), p. 911-931

<[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1972\\_3\\_26\\_4\\_911\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1972_3_26_4_911_0)>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# INTEGRATION DANS LES ESPACES $p$ -NORMES

BERNARD MAUREY

Dans la première partie de cet article (§ 1 à 6) on recherche des critères pour qu'une fonction  $f$  définie sur un espace topologique  $X$  et à valeurs dans un espace vectoriel non localement convexe  $E$  soit intégrable pour une mesure positive  $\mu$  sur  $X$ , au sens défini par Dietmar Vogt dans [1].

Le § 1 rappelle la définition de Vogt et les premières propriétés de l'espace  $L^1(X, \mu, E)$  (Th. 1).

Le § 2 concerne l'étude des fonctions à valeurs dans un sous-espace de dimension finie de  $E$ . La relation (1) p. 915 constitue l'outil essentiel pour la suite.

On obtient au § 3 un critère général d'intégrabilité (Th. 2) par une méthode d'approximation par des fonctions à valeurs dans des sous-espaces de dimension finie.

Le § 4 concerne l'application du théorème général dans le cas où  $X$  est une partie précompacte d'un espace métrique  $T$  possédant une certaine propriété (A) (p. 916). (Pratiquement,  $T$  est  $\mathbb{R}^m$  où une variété  $C^1$  compacte de dimension  $m$ ). On renforce en particulier le théorème démontré dans [3]. (Corollaire p. 920).

Le § 5 concerne l'intégration sur  $\mathbb{R}$ . On y étudie les rapports entre primitive et dérivée (Th. 5), et les conditions de Hölder vérifiées par une primitive (p. 923).

Le § 6 fournit un critère d'intégrabilité dans le cas où  $X$  est un espace métrique précompact quelconque (Th. 6).

Dans la seconde partie de l'article (§ 7 et 8) on introduit la notion (qui nous a été suggérée par M. Laurent Schwartz) de fonction continue universellement intégrable définie sur un espace compact  $X$  et à valeurs dans un espace non localement convexe  $E$ . L'étude de cette notion est faite par une méthode parallèle à celle de la première partie :

On démontre un critère général (§ 7, Th. 7), puis on étudie le cas particulier d'un espace métrique possédant une certaine propriété (B) (p. 927).

Le § 8 étudie les fonctions höldériennes définies sur  $\mathbb{R}$ . On y généralise le fait connu dans le cas où  $E$  est localement convexe qu'une fonction höldérienne d'ordre  $\beta$  appartient à  $C^\alpha \widehat{\otimes}_\varepsilon E$  pour  $\alpha$  et  $\beta$  convenables (Th. 8). On en déduit, en liaison avec la théorie des applications radonifiantes, les propriétés des trajectoires d'une  $s$  fonction aléatoire (Th. 9).

### I. La définition de D. Vogt.

Nous appellerons  $p$ -norme sur un espace vectoriel  $E$  une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+$  telle que :

$$\|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

$$\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p \quad (\text{avec } 0 < p \leq 1)$$

(Ce n'est donc pas la terminologie de D. Vogt).

D. Vogt a introduit dans [1] la notion d'intégration des fonctions à valeurs dans les espaces  $p$ -normés de la façon suivante :

Si  $E$  et  $F$  sont deux espaces  $p$ -normés, on définit sur  $E \otimes F$  une  $p$ -semi-norme par :

$$\|u\| = \inf (\sum \|x_i\|^p \cdot \|y_i\|^p)^{1/p}$$

où l'inf est pris sur l'ensemble des représentations de  $u$  de la forme

$$u = \sum x_i \otimes y_i.$$

Si l'un des deux espaces est séparé par son dual, cette  $p$  semi-norme est une  $p$ -norme. On désignera par  $E \widehat{\otimes}_p F$  le complété de  $E \otimes F$  muni de cette  $p$ -norme.

Soient alors  $E$  un espace  $p$ -normé complet et  $X$  un espace topologique séparé muni d'une mesure positive  $\mu$ . (Par mesure, nous entendrons toujours : mesure sur la tribu borélienne de  $X$ ).

On posera :

$$L^1(X, \mu, E) = E \widehat{\otimes}_p L^1(X, \mu).$$

On notera  $\|f\|_1$  la  $p$ -norme de cet espace, prolongement de celle de  $E \otimes L^1(X, \mu)$ . On désignera d'autre part par  $\widetilde{L}^1(X, \mu, E)$  l'espace des  $\mu$ -

classes de fonctions  $\mu$ -mesurables de  $X$  dans  $E$  telles que  $\int_X \|f(t)\| d\mu(t) < +\infty$ , muni de la  $p$ -norme :

$$\|f\|_p = \left( \int_X \|f(t)\|^p d\mu(t) \right)^{1/p}$$

D. Vogt a démontré dans [1] le théorème suivant :

**THÉORÈME 1 :** l'application naturelle de  $E \otimes L^1(X, \mu)$  dans  $\tilde{L}^1(X, \mu, E)$  se prolonge en une injection continue de norme  $\leq 1$  de  $L^1(X, \mu, E)$  dans  $\tilde{L}^1(X, \mu, E)$ .

Une fonction  $\mu$ -intégrable  $f$  est donc la limite  $\mu$ -presque partout d'une suite de Cauchy  $f_n$  de  $L^1(X, \mu, E)$ , et  $\mu(f) = \lim \mu(f_n)$ .

Il en résulte que si  $g \in L^1(X, \mu)$ , il est équivalent de dire que :

$$f \in L^1(X, g \mu, E)$$

ou que

$$gf \in L^1(X, \mu, E)$$

et

$$\int f(t) d(g \mu)(t) = \int g(t) f(t) d\mu(t).$$

Notons encore que si  $f \in L^1(X, \mu, E)$  et si  $g \in L^\infty(X, \mu)$ , on a  $gf \in L^1(X, \mu, E)$ , et :

$$\|gf\|_1 \leq \|g\|_\infty \cdot \|f\|_1.$$

Dans tout ce qui suit,  $E$  désignera un espace  $p$ -normé complet.

## II. Utilisation des sous-espaces de dimension finie.

Ce paragraphe repose sur le lemme suivant :

**LEMME :** Soient  $F$  un espace vectoriel de dimension finie  $r$ , et  $B$  un voisinage compact de zéro dans  $F$ . On peut trouver une base  $(z_1, \dots, z_r)$  de  $F$ , formée d'éléments de  $B$ , telle que :

$$B \subset \left\{ x = \sum_{i=1}^r \alpha_i z_i \mid |\alpha_i| \leq 1 \text{ pour chaque } i \right\}.$$

**DÉMONSTRATION :** Soit  $(y_1, \dots, y_r)$  une base de  $F$ . Désignons par  $D(x_1, \dots, x_r)$  le déterminant d'un système de vecteurs  $(x_1, \dots, x_r)$  dans cette

base. L'application  $(x_1, \dots, x_r) \mapsto D(x_1, \dots, x_r)$  est continue sur le compact  $B^n$ . Soit  $(z_1, \dots, z_r)$  un point de  $B^n$  où  $D(x_1, \dots, x_r)$  atteint son maximum.

Il est clair que  $D(z_1, \dots, z_r) \neq 0$ . Soit alors  $x \in B$ . On a  $x = \sum \alpha_i z_i$ , avec :

$$|\alpha_i| = \left| \frac{D(z_1, \dots, z_{i-1}, x, z_{i+1}, \dots, z_r)}{D(z_1, \dots, z_r)} \right| \leq 1.$$

On désignera par  $\mathcal{F}_r(X, \mu, E)$  (en abrégé :  $\mathcal{F}_r$ , s'il n'y a pas de confusion possible) l'ensemble des fonctions de  $L^1(X, \mu, E)$  prenant leurs valeurs dans un sous-espace de dimension  $r$  de  $E$ .

**COROLLAIRE :** Si  $f \in \mathcal{F}_r$ , on a  $\|f\|_1 \leq r^{1/p} \cdot \|f\|$ .

**DÉMONSTRATION :** Soit  $F$  le sous-espace de dimension  $r$  dans lequel  $f$  prend ses valeurs, et soit  $B = \{x \in F \mid \|x\| \leq 1\}$ . Soit  $(x_1, \dots, x_r)$  une base de  $F$  vérifiant la propriété du lemme précédent. Notons qu'alors  $\|x_i\| = 1$ . On peut écrire :

$$f = \sum_{i=1}^r x_i \otimes f_i, \quad \text{avec } f_i \in L^1(X, \mu).$$

On a  $|f_i(x)| \leq \|f(x)\|$ . Donc :

$$\|f\|_1^p \leq \sum_{i=1}^r \|x_i\|^p \cdot \|f_i\|^p \leq r \cdot \|f\|^p.$$

On désignera par  $F_r(X, \mu, E)$  (en abrégé :  $F_r$ ) l'ensemble des applications de  $X$  dans  $E$  de la forme :

$$f = \sum_i f_i \cdot \chi_{B_i}$$

où  $(B_i)$  est une partition borélienne finie de  $X$  et où  $f_i \in \mathcal{F}_r$ .

Si  $f \in F_r$ , on désignera par  $N(f)$  le nombre minimal d'ensembles  $B_i$  de mesure non nulle intervenant dans une décomposition de  $f$  de la forme ci dessus.

Si  $f = \sum_i f_i \chi_{B_i}$  est une décomposition de  $f$  faisant intervenir  $N(f)$  ensembles  $B_i$  de mesure non nulle, on aura en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \|f\|_1^p &\leq \sum_i \|f_i \chi_{B_i}\|_1^p \leq (N(f))^{1-p} \cdot \left( \sum_i \|f_i \chi_{B_i}\|_1 \right)^p \leq \\ &\leq r (N(f))^{1-p} \left( \sum_i \|f_i \chi_{B_i}\| \right)^p = r (N(f))^{1-p} \cdot \|f\|^p. \end{aligned}$$

Nous retiendrons cette relation :

$$(1) \quad \|f\|_1 \leq r^{1/p} \cdot (N(f))^{1/p-1} \cdot \|f\|.$$

### III. Un critère général d'intégrabilité.

Soient  $\pi$  une partition borélienne finie de  $X$  et  $g$  une fonction de  $X$  dans  $E$ . Nous dirons que  $g$  est  $r$ -subordonnée à  $\pi$ , ce que nous noterons  $g \prec_r \pi$ , si pour tout ensemble  $B$  de  $\pi$  on a  $g|_B \in \mathcal{F}_r$  (alors évidemment  $g \in E_r$ ).

Si  $f$  est une application mesurable de  $X$  dans  $E$ , nous poserons :

$$N_r(f, \pi) = \inf_{g \prec_r \pi} \|f - g\|.$$

(Bien que  $\mu$  n'apparaisse pas pour ne pas surcharger la notation, cette quantité dépend de  $\mu$ ).

**THÉOREME 2 :** Soient  $f$  une application de  $X$  dans  $E$ , et  $\mu$  une mesure positive sur  $X$ . Pour que  $f$  soit  $\mu$ -intégrable, il suffit qu'il existe une suite  $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de partitions boréliennes finies de  $X$ , telle que  $\pi_{n+1}$  soit plus fine que  $\pi_n$ , et une suite croissante d'entiers  $(a_n)$  telles que :

$$S = \sum_{n \geq 1} a_n \cdot u_n^{1-p} \cdot (N_{a_{n-1}}(f, \pi_{n-1}))^p < +\infty$$

(où  $u_n$  désigne le nombre des ensembles de  $\pi_n$ ). On a, si  $a_0 = 0$  :

$$\|f\|_1^p \leq 4S.$$

**DÉMONSTRATION :** Remarquons tout d'abord que si  $N_r(f, \pi) = 0$ , on a  $f \in E_r$  qui est évidemment intégrable. On peut donc supposer  $N_{a_n}(f, \pi_n) \neq 0$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  donné. On peut trouver pour chaque  $n$  une fonction  $f_n$  telle que  $f_n \prec_{a_n} \pi_n$ , et que :

$$\|f - f_n\| \leq (1 + \varepsilon) N_{a_n}(f, \pi_n).$$

Posons  $g_n = f_n - f_{n-1}$ . En utilisant la relation valable dans un espace  $p$ -normé :  $\|x + y\| \leq 2^{(1/p)-1} (\|x\| + \|y\|)$ , on obtient :

$$\|g_n\|^p \leq 2^{1-p} \cdot (\|f - f_n\| + \|f - f_{n-1}\|)^p \leq (1 + \varepsilon)^p \cdot 2^{1-p} \cdot (2N_{a_{n-1}}(f, \pi_{n-1}))^p.$$

(Car  $N_{a_n}(f, \pi_n) \leq N_{a_{n-1}}(f, \pi_{n-1})$ ).

On a  $g_n \prec_{2a_n} \pi_n$ . Donc, d'après la relation (1), page 915 :

$$\|g_n\|_1^p \leq 4a_n \cdot (1 + \varepsilon)^p \cdot u_n^{1-p} \cdot (N_{a_{n-1}}(f, \pi_{n-1}))^p.$$

D'après l'hypothèse, la série  $\sum g_n$  converge dans  $L^1(X, \mu, E)$ . D'autre part, la série  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge presque partout vers  $f - f_0$ . D'après le théorème

1, ceci prouve que  $f \in L^1(X, \mu, E)$ . L'inégalité  $\|f\|_1^p \leq 4S$  résulte immédiatement du calcul (car si  $a_0 = 0, f_0 = 0$ ).

REMARQUE : Le fait que  $X$  soit un espace topologique ne joue aucun rôle : on utilise seulement la tribu borélienne. Le résultat est en fait valable pour un espace mesuré  $(X, \mathcal{C}, \mu)$  quelconque, en adaptant les notions que nous avons introduites.

Nous supposons désormais que  $X$  est un espace métrique précompact muni d'une distance  $d$ . On désignera par  $\delta(A)$  le diamètre d'une partie  $A$  de  $X$ . Si  $\pi$  est une partition de  $X$ , on désignera par  $\delta(\pi)$  le sup des diamètres des ensembles de  $\pi$ . Si  $\varrho$  est un nombre  $> 0$ , on posera :

$$N_r(f, \varrho) = \sup_{\delta(\pi) \leq \varrho} N_r(f, \pi).$$

#### IV. Un cas particulier important.

Dans ce paragraphe,  $T$  désignera un espace métrique possédant la propriété suivante :

(A) : il existe un entier  $m$  et une constante  $D$ , tels que pour toute partie précompacte  $X$  de  $T$ , il existe une suite  $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de partitions boréliennes finies de  $X$ , possédant les propriétés suivantes :

Aa)  $\pi_{n+1}$  est plus fine que  $\pi_n$

Ab)  $\delta(\pi_n) \leq 2^{-n} \cdot \delta(X)$

Ac) Si  $u_n$  est le nombre des ensembles de  $\pi_n$  :

$$u_n \leq D \cdot 2^{m \cdot n}.$$

On peut prendre pour espace  $T$   $R^m$  muni d'une de ses distances usuelles. On pourra constater qu'une variété  $\mathbf{C}^1$  compacte de dimension  $m$  possède également les propriétés de l'espace  $T$ .

Dans ce qui suit,  $X$  désignera une partie précompacte de  $T$ . Si  $f$  est une application mesurable de  $X$  dans  $E$ , et  $\alpha$  un réel  $> 0$ , on pose

$$k_r^\alpha(f) = \sup_n 2^{n\alpha} \cdot N_r(f, 2^{-n}).$$

On désignera par  $\mathcal{K}_r^\alpha(X, \mu, E)$  (en abrégé :  $\mathcal{K}_r^\alpha$ ) l'ensemble des fonctions  $f$  de  $\tilde{L}^1(X, \mu, E)$  telles que  $k_r^\alpha(f) < +\infty$ . Notons que si  $g$  est une fonction de  $L^\infty(\mu)$ , on a :

$$k_r^\alpha(gf) \leq \|g\|_\infty k_r^\alpha(f).$$

**THÉORÈME 3 :** Soient  $X$  une partie précompacte de  $T$  et  $\mu$  une mesure positive sur  $X$ . Pour tout entier  $r$ , et tout nombre  $\alpha > m(1/p - 1)$ , on a :

$$\mathcal{K}_r^\alpha(X, \mu, E) \subset L^1(X, \mu, E).$$

Plus précisément :

$$\|f\|_1^p \leq \left( \frac{4r D^{1-p} 2^{2m(1-p)}}{1 - 2^{m(1-p)-p\alpha}} \right) \cdot \|f\|^{p - \frac{m}{\alpha}(1-p)} \cdot \left( \sup(\|f\|, (\delta(X))^\alpha \cdot k_r^\alpha(f)) \right)^{\frac{m}{\alpha}(1-p)}.$$

**DÉMONSTRATION :** Soit  $(\pi_n)$  une suite de partitions boréliennes de  $X$  possédant la propriété (A) ; on démontre alors le :

**LEMME :** Soient  $f \in \mathcal{K}_r^\alpha$ ,  $f_n \prec_r \pi_n$ , telles que

$$\|f - f_n\| \leq M \cdot (\delta(X))^\alpha \cdot 2^{-n\alpha}, \text{ avec } M > k_r^\alpha(f).$$

On a alors :

$$\|f - f_n\|_1^p \leq \left( \frac{4r M^p \cdot (2\delta(X))^{p\alpha} \cdot D^{1-p}}{1 - A} \right) \cdot A^{n+1}$$

avec

$$A = 2^{m(1-p)-p\alpha}.$$

**DÉMONSTRATION :** On peut trouver, par définition de  $k_r^\alpha(f)$ , pour tout  $k > n$ , une fonction  $f_k$  telle que :

$$f_k \prec_r \pi_k \quad \|f - f_k\| < M (\delta(X))^\alpha \cdot 2^{-k\alpha}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_1^p &\leq \sum_{k \geq n} \|f_{k+1} - f_k\|_1^p \leq 2r \sum_{k \geq n} D^{1-p} \cdot 2^{m(k+1)(1-p)} \cdot \|f_{k+1} - f_k\|^p \\ &\leq 2r D^{1-p} \sum_{k \geq n} 2^{m(k+1)(1-p)} \cdot 2M^p \cdot (\delta(X))^{p\alpha} \cdot 2^{-k\alpha p} \\ &\leq 4r D^{1-p} M^p (\delta(X))^{\alpha p} 2^{\alpha p} \sum_{k \geq n} 2^{(m(1-p)-\alpha p)(k+1)} \end{aligned}$$

d'où le résultat.



Achevons maintenant la démonstration du théorème 3 : Posons

$$C = \inf (\| \| f \| \| \cdot (\delta (X))^{-\alpha}, k_r^\alpha (f) )$$

et soit  $n$  tel que :

$$n \geq 1, \quad C \cdot 2^{(n-1)\alpha} \leq k_r^\alpha (f) < C \cdot 2^{n\alpha}.$$

On a :

$$\| \| f \| \| \leq (\| \| f \| \| (\delta (X))^{-\alpha} \cdot 2^{n\alpha}) \cdot (\delta (X))^{\alpha} \cdot 2^{-n\alpha}.$$

Avec :

$$\| \| f \| \| \cdot (\delta (X))^{-\alpha} 2^{n\alpha} > k_r^\alpha (f).$$

Il vient alors d'après le lemme précédent, avec  $f_n = 0$ ,  $M = \| \| f \| \| \cdot (\delta (X))^{-\alpha} \cdot 2^{n\alpha}$

$$\begin{aligned} \| f \|_1^p &\leq \frac{4r A (2\delta (X))^{p\alpha} D^{1-p}}{1-A} \cdot \| \| f \| \| (\delta (X))^{-\alpha p} \cdot 2^{n\alpha p} \cdot 2^{n(m(1-p)-p\alpha)} \\ &= \frac{4r (D2^m)^{1-p}}{1-A} \cdot \| \| f \| \| \cdot 2^{nm(1-p)}. \end{aligned}$$

Or :

$$2^{n\alpha} \leq \frac{2^\alpha k_r^\alpha (f)}{C}$$

donc :

$$\begin{aligned} \| f \|_1^p &\leq \frac{4r (D2^m)^{1-p}}{1-A} \cdot \| \| f \| \| \cdot \left( \frac{2^\alpha k_r^\alpha (f)}{C} \right)^{\frac{m}{\alpha} (1-p)} \\ &= \frac{4r (D2^{2m})^{1-p}}{1-A} \cdot \| \| f \| \|^{p - \frac{m}{\alpha} (1-p)} \cdot \{ \sup (\| \| f \| \|, (\delta (X))^\alpha k_r^\alpha (f)) \}^{\frac{m}{\alpha} (1-p)}. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du théorème. Soit  $B \subset \mathcal{K}_r^\alpha$ . On dira que  $B$  est bornée si :

$$\sup_{f \in B} k_r^\alpha (f) < + \infty.$$

**COROLLAIRE 1 :** Soit  $\alpha > m(1/p - 1)$ , et soit  $B$  une partie bornée de  $\mathcal{K}_r^\alpha$ . Si une suite  $(f_n)$  de  $B$  converge vers  $f$  dans  $\tilde{L}^1(X, \mu, E)$ , elle converge aussi vers  $f$  dans  $L^1(X, \mu, E)$ . En particulier, les topologies induites sur  $B$  par  $\tilde{L}^1(X, \mu, E)$  et  $L^1(X, \mu, E)$  sont identiques.

**DÉMONSTRATION :** Il suffit de voir que les  $g_{n,p} = f_n - f_p$  appartiennent à une partie bornée  $B'$  de  $\mathcal{K}_{2r}^\alpha$ .

Donc, d'après le théorème 3, la suite  $f_n$  est de Cauchy dans  $L^1(X, \mu, E)$ , donc convergente vers  $f$  dans  $L^1(X, \mu, E)$ .

**COROLLAIRE 2** («Théorème de Lebesgue») : Soient  $B$  une partie bornée de  $\mathcal{K}_r$ ,  $f_n$  une suite de  $B$  telle que  $\|f_n\| < g$ , avec  $g$  réelle  $\mu$ -intégrable. Si la suite  $f_n$  converge presque partout vers une fonction  $f$ , elle converge vers  $f$  dans  $L^1(X, \mu, E)$ .

**DÉMONSTRATION** : La suite  $g_n = \|f_n - f\|$  converge presque partout vers zéro, avec  $|g_n| < 2g$ , ce qui prouve que  $f_n$  tend vers  $f$  dans  $\tilde{L}^1(X, \mu, E)$  d'après le théorème de Lebesgue usuel. On conclut alors, grâce au corollaire 1.

**QUELQUES CONSÉQUENCES.**

Soit  $\mathcal{K}_r$  l'ensemble des fonctions universellement intégrables de  $X$  dans  $E$ , prenant leurs valeurs dans un sous-espace de dimension  $r$  de  $E$ .

Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures positives sur  $X$ , et  $f$  un élément de  $\tilde{L}^1(X, \mu, E)$ . On dira que  $f \in \mathcal{G}_r^\alpha(\mu, \nu)$  s'il existe une application  $x \rightarrow f_x$  de  $X$  dans  $\mathcal{K}_r$ , telle que  $(x, y) \mapsto f_x(y)$  soit  $\nu \otimes \mu$  mesurable et que :

$$I = \int_{X \times X} \frac{\|f(y) - f_x(y)\|}{(d(x, y))^{m+\alpha}} d\mu(y) d\nu(x) < +\infty.$$

Soit maintenant  $\nu$  une mesure positive sur  $T$ . On dira que  $X$  est  $\nu$ -régulier si la fonction :

$$h(x, \varepsilon) = \frac{\nu(X \cap B(x, \varepsilon))}{\varepsilon^m} \quad \text{est minorée par } \varrho > 0$$

sur  $X \times ]0, 1]$ . (avec  $B(x, \varepsilon) = \{y \in T \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ ).

On dira que  $\nu$  est régulière si toute boule ouverte de  $T$  est  $\nu$ -régulière.

**PROPOSITION** : Si  $X$  est  $\nu$ -régulier, on a pour tout  $r$  :

$$\mathcal{G}_r^\alpha(\mu, \nu) \subset L^1(X, \mu, E), \quad \text{dès que } \alpha > m(1/p - 1).$$

**DÉMONSTRATION** : Soit  $\pi = (B_j)$  une partition de  $X$  de diamètre  $\leq 2^{-k}$ , et soit  $x_j \in B_j$ . On peut trouver pour tout  $j$  et tout  $\varepsilon > 0$  un point  $z_j \in X \cap B(x_j, 2^{-k})$  tel que :

$$\begin{aligned} & \nu(X \cap B(x_j, 2^{-k})) \cdot \int_{B_j} \frac{\|f(y) - f_{z_j}(y)\|}{(d(z_j, y))^{m+\alpha}} d\mu(y) \\ & \leq (1 + \varepsilon) \int_{X \cap B(x_j, 2^{-k})} d\nu(x) \int_{B_j} \frac{\|f(y) - f_x(y)\|}{(d(x, y))^{m+\alpha}} d\mu(y). \end{aligned}$$

Soit  $g$  la fonction sur  $X$  égale à  $f_{z_j}$  sur  $B_j$ . On a  $g \prec_r \pi$  et :

$$\begin{aligned} \|f - g\| &= \sum_j \int_{B_j} \|f(y) - f_{z_j}(y)\| d\mu(y) \\ &\leq \sum_j \int_{B_j} (2 \cdot 2^{-k})^{m+\alpha} \frac{\|f(y) - f_{z_j}(y)\|}{(d(z_j, y))^{m+\alpha}} d\mu(y) \\ &\leq \frac{(1 + \varepsilon) \cdot 2^{m+\alpha} \cdot 2^{-k\alpha}}{\varrho} \cdot \sum_j \int_{X \cap B(x_j, 2^{-k})} d\nu(x) \int_{B_j} \frac{\|f(y) - f_x(y)\|}{(d(x, y))^{m+\alpha}} d\mu(y) \\ &\leq \frac{I(1 + \varepsilon) 2^{m+k}}{\varrho} \cdot 2^{-k\alpha}. \end{aligned}$$

On a donc  $k_r^\alpha(f) \leq \frac{2^{m+\alpha}}{\varrho}$ , d'où le résultat par le théorème 3.

REMARQUE 1 : On a en fait  $\|f\|_1 \leq B \cdot \sup(\|f\|, I)$ , où  $B$  est une constante dépendant de  $X, p, \alpha$  et  $\nu$ .

REMARQUE 2 : Si  $X$  est ouvert précompact quelconque,  $\nu$  régulière, et si  $\mu$  est à support compact  $K$  contenu dans  $X$ , le résultat subsiste : en effet  $K$  est contenu dans une réunion finie de boules ouvertes contenues dans  $X$ , qui sont  $\nu$ -régulières par hypothèse.

REMARQUE 3 : Par une méthode un peu différente, on peut montrer pour  $X$  précompact quelconque que :

$$\mathcal{G}_r^\alpha(\mu, \mu) \subset L^1(X, \mu, E) \quad \text{dès que } \alpha > 2m(1/p - 1).$$

Soient maintenant  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^m$ ,  $X$  un ouvert précompact et  $f$  de classe  $C^r$  sur  $X$ . On peut écrire avec les notations de [2] :

$$f(y) = \sum_{0 \leq |h| \leq r} D_h f(x) \frac{(y-x)^h}{h!} + |y-x|^r \varrho(x, y).$$

On peut énoncer :

COROLLAIRE : Supposons  $X$   $\lambda$ -régulier, et soit  $\mu$  une mesure positive sur  $X$  telle que

$$\int_{X \times X} \frac{\|\varrho(x, y)\|}{|y-x|^\beta} d\mu(y) d\lambda(x) < +\infty.$$

On a alors  $f \in L^1(X, \mu, E)$ , dès que  $r + \beta > m/p$ . De plus, si  $\mu$  est bornée et à support compact dans  $X$ , le résultat subsiste pour  $X$  ouvert quelconque.

DÉMONSTRATION : Posons

$$f_x(y) = \sum_{0 \leq |k| \leq r} D_k f(x) \frac{(y-x)^k}{k!}.$$

On a  $f_x \in \mathcal{K}_s$ , où  $s$  est le nombre des dérivées partielles d'ordre compris entre 0 et  $r$ . De plus :

$$\frac{\varrho(x, y)}{|y-x|^\beta} = \frac{f(y) - f_x(y)}{|y-x|^{m+(\beta+r-m)}} \quad \text{d'où le résultat.}$$

La deuxième partie résulte de la remarque 2 p. 920. Elle entraîne le théorème 1 de [3]. En effet, si  $K$  est le support de  $\mu$ , on peut trouver un ouvert relativement compact  $Y$  tel que  $K \subset Y \subset \bar{Y} \subset X$ . Alors :

$$A = \sup_{(x, y) \in Y \times Y} \|\varrho(x, y)\| < +\infty.$$

Soit  $\beta < m$  tel que  $r + \beta > m/p$ . Alors :

$$\int_{Y \times Y} \frac{\|\varrho(x, y)\|}{|y-x|^\beta} d\mu(y) d\lambda(x) \leq A \int_{Y \times Y} \frac{d\mu(y) d\lambda(x)}{|y-x|^\beta} < +\infty.$$

Donnons ici une définition que nous utiliserons dans la suite de cet article. Soit  $\mathcal{C}_r$  l'ensemble des fonctions continues bornées de  $X$  dans  $E$ , prenant leurs valeurs dans un sous-espace de dimension  $r$  de  $E$ , et soit  $f$  une application de  $X$  dans  $E$ . On dira que  $f \in \mathcal{C}_r^\alpha$ , s'il existe une constante  $M$  telle que :

$$\forall x \in X, \exists f_x \in \mathcal{C}_r, \forall y \in X: \|f(y) - f_x(y)\| \leq M(d(x, y))^\alpha.$$

On désignera par  $c_r^\alpha(f)$  la borne inférieure de l'ensemble des constantes  $M$  vérifiant la propriété ci-dessus. On peut noter que  $c_r^\alpha(f)$  ne dépend que des métriques sur  $X$  et sur  $E$ . Si  $\mu$  est une mesure finie, on a  $k_r^\alpha(f) \leq \|\mu\| \cdot c_r^\alpha(f)$ , donc  $\mathcal{C}_r^\alpha \subset L^1(X, \mu, E)$ , dès que  $\alpha > m(1/p - 1)$ .

## V. Intégration et dérivation sur $\mathbb{R}$ .

Dans ce paragraphe la mesure considérée sera la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ . On définit une application linéaire  $P$  de  $L_{loc}^1(E)$  dans lui-même

par :

$$Pf(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

On posera :

$$\mathcal{C}_r^\alpha(E) = \bigcap_{a < b} \mathcal{C}_r^\alpha([a, b], E).$$

**THÉORÈME 5 :** L'application  $P$  envoie  $\mathcal{C}_r^\alpha$  dans  $\mathcal{C}_{r+1}^{\alpha+1}$ , pour  $\alpha > 1/p - 1$ .  
De plus,  $f$  est la dérivée de  $Pf$ .

**DÉMONSTRATION :** Il suffit de considérer un ensemble  $[a, b]$ . Soit  $f_x \in \mathcal{C}_r$  telle que :

$$\forall y \in [a, b], \quad \|f(y) - f_x(y)\| \leq M |x - y|^\alpha$$

avec

$$M > c_{r, [a, b]}^\alpha(f).$$

Alors :

$$k_{r, [x, y]}^\alpha(f) \leq M \cdot |x - y|.$$

Donc d'après le lemme page 917 :

$$\left\| \int_x^y (f(t) - f_x(t)) dt \right\| \leq \left( \frac{4r \cdot 2^{p\alpha} \cdot A}{1 - A} \right)^{1/p} \cdot M \cdot |x - y|^{1+\alpha}.$$

Posons :

$$(Pf)_x(y) = Pf_x(y) - Pf_x(x) + Pf(x).$$

On a  $(Pf)_x \in \mathcal{C}_{r+1}$ , et la relation ci dessus s'écrit :

$$\|Pf(y) - (Pf)_x(y)\| \leq B \cdot M \cdot |x - y|^{1+\alpha}$$

d'où la première partie de l'énoncé.

De plus :

$$\left\| \frac{Pf(y) - Pf(x)}{y - x} - \frac{Pf_x(y) - Pf_x(x)}{y - x} \right\| \leq B \cdot M \cdot |x - y|^\alpha.$$

Donc :

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{Pf(y) - Pf(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{Pf_x(y) - Pf_x(x)}{y - x} = f_x(x) = f(x)$$

ce qui achève la démonstration.

Nous allons maintenant montrer que la primitive d'une fonction bornée de  $\mathcal{K}_r^\alpha([0, 1])$  est hölderienne d'un certain rapport.

Soit donc  $f \in \mathcal{K}_r^\alpha([0, 1])$ , avec  $\alpha > 1/p - 1$ . On a d'après le théorème 3 :

$$\| Pf(y) - Pf(x) \|^p \leq \frac{4r \cdot 2^{2(1-p)}}{1-A} \cdot \left( \int_x^y \|f(t)\| dt \right)^{p - \frac{1-p}{\alpha}} \cdot \left\{ \sup \left( \int_x^y \|f(t)\| dt, |y-x|^\alpha \cdot k_r^\alpha(f) \right) \right\}^{\frac{1-p}{\alpha}}.$$

Posons  $C = \sup(k_r^\alpha(f), \|f\|_\infty)$ . On aura alors : Si  $\alpha < 1$  :

$$\| Pf(y) - Pf(x) \|^p \leq \frac{4r \cdot 2^{2(1-p)}}{1-A} \cdot C^p \cdot |y-x|^{1 - \frac{1-p}{\alpha}}$$

dans ce cas,  $Pf$  est hölderienne de rapport  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p\alpha}$ . Si  $\alpha \geq 1$  :

$$\| Pf(y) - Pf(x) \|^p \leq \frac{4r \cdot 2^{2(1-p)}}{1-A} \cdot C^p \cdot |y-x|^p.$$

Dans ce cas,  $Pf$  est hölderienne de rapport 1.

### VI. Critère d'intégrabilité pour un espace métrique précompact quelconque.

Soit  $X$  un espace métrique précompact. Si  $\pi = (\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de partitions boréliennes finies de  $X$ , et si  $u_n$  est le nombre des ensembles de  $\pi_n$ , on pose :

$$M(\pi) = \limsup_n 1/n \log_2(\log_2 u_n).$$

Soit  $\Pi(X)$  l'ensemble des suites  $\pi = (\pi_n)$  de partitions boréliennes finies de  $X$ , telles que  $\pi_{n+1}$  soit plus fine que  $\pi_n$ , et que le diamètre de  $\pi_n$  soit  $\leq 2^{-n}$ . On posera :

$$\gamma(X) = \inf_{\pi \in \Pi(X)} M(\pi).$$

**THÉORÈME 6 :** Soient  $f$  une application de  $X$  dans  $E$ , et  $\mu$  une mesure positive sur  $X$ . Pour que  $f$  soit  $\mu$ -intégrable, il suffit qu'il existe un  $\varepsilon > 0$ , et  $\alpha > 0$  tels que :

$$p\alpha > 2^{\gamma(X)}$$

et à partir d'un certain rang :

$$N_n(f, (\log_2 n)^{-1/\gamma+\varepsilon}) \leq n^{-\alpha}.$$

DÉMONSTRATION : Soit  $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ , tel que :

$$p\alpha > 2\gamma+\varepsilon'.$$

On applique le théorème 2 : on choisit une suite  $\pi \in \Pi(X)$  telle que  $M(\pi) < \gamma(X) + \varepsilon'/4$ , et on prend la suite

$$a_n = 1 + [2^{2^n(\gamma+\varepsilon')}]$$

(où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ ).

On a alors :

$$N_{a_n}(f, \pi_n) \leq a_n^{-\alpha}$$

pour  $n$  suffisamment grand.

Le terme général de la série du théorème 2 possède alors un équivalent majoré pour  $n$  suffisamment grand par :

$$2^{2^n(\gamma+\varepsilon')} \cdot 2^{(1-p) \cdot 2^n(\gamma+\varepsilon'/2)} \cdot 2^{-p\alpha \cdot 2^{-(n-1)(\gamma+\varepsilon')}} = 2^{(1-p\alpha \cdot 2^{-(\gamma+\varepsilon')} \cdot 2^{2^n(\gamma+\varepsilon')} + 2^{2^n(\gamma+\varepsilon'/2)})}.$$

Cette série sera bien convergente, puisque :

$$1 < p\alpha \cdot 2^{-(\gamma+\varepsilon')}.$$

## VII. Fonctions continues universellement intégrables sur un espace compact.

Soient  $E$  un evt séparé complet et  $F$  un espace localement convexe séparé. Nous désignerons par  $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_c, E)$  l'espace des applications continues de  $F'_c$  dans  $E$  (où  $F'_c$  désigne le dual  $F'$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de  $F$ ), muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équi continues de  $F'$ . L'espace  $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_c, E)$  est complet.

On a évidemment  $F \otimes E \subset \mathcal{L}(F'_c, E)$ . Nous désignerons par  $F \otimes_\varepsilon E$  l'espace  $F \otimes E$  muni de la topologie induite par  $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_c, E)$ .

Supposons que l'identité de  $F'$  soit limite uniforme sur toute partie équi continue d'applications de rang fini continues de  $F'_c$  dans lui-même. Il est alors bien connu que

$$\mathcal{L}_\varepsilon(F'_c, E) = F \widehat{\otimes}_\varepsilon E.$$

Soient maintenant  $X$  un espace compact et  $f$  une fonction continue sur  $X$  à valeurs dans  $E$ . On dira que  $f$  est universellement intégrable (en abrégé : u. i.) si l'application linéaire  $\lambda \mapsto \int f d\lambda$  qu'elle définit trivialement sur le sous espace  $M_0$  de  $M(X)$  formé des combinaisons linéaires finies de mesures de Dirac se prolonge en une application linéaire continue de  $M_c$  dans  $E$ .

L'espace des fonctions continues u. i. est donc  $\mathcal{L}_c(M_c, E)$ , soit encore  $C(X) \widehat{\otimes}_c E$  d'après ce qui précède. Naturellement, si  $f \in C(X) \widehat{\otimes}_c E$ , le procédé de Riemann est valable pour le calcul de l'intégrale  $\int f d\lambda$ , car il revient précisément à calculer  $\int f d\lambda$  comme limite de  $\int f d\lambda_0$ , pour  $\lambda_0 \in M_0$ .

Supposons maintenant  $E$   $p$ -normé. L'espace  $C(X) \widehat{\otimes}_c E$  est alors  $p$ -normé par :

$$\|f\|_c = \sup_{\|\mu\| \leq 1} \|\mu(f)\|.$$

(Notons que cette  $p$ -norme est a priori strictement plus fine que la  $p$ -norme uniforme  $\sup_{t \in X} \|f(t)\|$ , puisque  $E$  n'est pas localement convexe).

Nous allons maintenant rechercher des critères pour qu'une application  $f \in C(X, E)$  appartienne à  $C(X) \widehat{\otimes}_c E$ .

On supposera que  $X$  est compact. On désignera par  $\mathcal{C}_r(X, E)$  l'ensemble des fonctions continues sur  $X$  prenant leurs valeurs dans un sous-espace de dimension  $r$  de  $E$ .

Soit  $\varrho = (\omega_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $X$ ,  $g$  une fonction de  $X$  dans  $E$ . On dira que  $g$  est  $r$ -subordonnée à  $\varrho$ , ce que nous noterons  $g \prec_r \varrho$ , s'il existe une décomposition de  $g$  de la forme  $\sum_{i \in I} g_i$ , avec :

$$\text{Supp}(g_i) \subset \omega_i, \quad g_i \in \mathcal{C}_r(X, E).$$

On notera :

$$M_r(f, \varrho) = \inf_{g \prec_r \varrho} \|f - g\|.$$

On appellera indice du recouvrement  $\varrho$  la quantité suivante :

$$i(\varrho) = \sup_{x \in X} \text{Card} \{i \in I \mid x \in \omega_i\}.$$

Soit  $\varrho = (\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$  un recouvrement ouvert de  $X$ , et soit  $g \prec_r \varrho$ . On définit la partition borélienne  $\pi$  formée des ensembles :

$$A_1 = \omega_1, \dots, A_{k+1} = \omega_{k+1} - \left( \bigcup_{i \leq k} \omega_i \right), \dots$$



Sur  $A_*$ ,  $g$  prend ses valeurs dans un espace de dimension  $\leq i(\varrho) \cdot r$ . Donc, d'après la relation (1) page 915, on a si  $\mu$  est une mesure finie sur  $X$ :

$$\|g\|_1^p \leq r \cdot i(\varrho) \cdot n^{1-p} \cdot \|g\|_\infty^p \cdot \|\mu\|^p.$$

**THÉORÈME 7 :** Soient  $X$  un espace compact, et  $f$  une application continue de  $X$  dans  $E$ . Pour que  $f$  soit dans  $C \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ , il suffit qu'il existe une suite croissante d'entiers  $\langle a_n \rangle$ , et une suite  $\langle \varrho_n \rangle$  de recouvrements ouverts finis de  $X$ , telle que l'indice  $i_n$  de  $\varrho_n$  et le nombre  $u_n$  d'ensembles de  $\varrho_n$  soient croissants, et que :

$$S = \sum_{n \geq 1} i_n a_n u_n^{1-p} (M_{a_{n-1}}(f, \varrho_{n-1}))^p < +\infty.$$

On a alors, si  $a_0 = 0$  :

$$\|f\|_\varepsilon^p \leq 2^{4-2p} \cdot S.$$

**DÉMONSTRATION :** Elle est essentiellement identique à celle du théorème 2. On choisit  $g_n \in \mathcal{C}_{a_n}$  telle que :

$$g_n \prec_{a_n} \varrho_n, \text{ et : } \|f - g_n\| \leq (1 + \varepsilon) \cdot M_{a_n}(f, \varrho_n).$$

On a alors :

$$g_n - g_{n-1} \prec_{a_n} \varrho_n \cup \varrho_{n-1},$$

où  $\varrho_n \cup \varrho_{n-1}$  désigne le recouvrement formé par la réunion des ouverts de  $\varrho_n$  et  $\varrho_{n-1}$ . On a :

$$\begin{aligned} \|\mu(g_n) - \mu(g_{n-1})\|^p &\leq (2i_n) a_n (2u_n)^{1-p} (1 + \varepsilon)^p \cdot \\ &\cdot \|\mu\|^p 2^{1-p} (M_{a_n}(f, \varrho_n) + M_{a_{n-1}}(f, \varrho_{n-1}))^p \leq \\ &\leq 2^{3-2p} (1 + \varepsilon)^p \|\mu\|^p \{a_{n+1} i_{n+1} (u_{n+1})^{1-p} (M_{a_n}(f, \varrho_n))^p + \\ &+ a_n i_n (u_n)^{1-p} (M_{a_{n-1}}(f, \varrho_{n-1}))^p\}. \end{aligned}$$

On a donc,

$$\|\mu(f - g_0)\|^p \leq \sum_{n \geq 1} \|\mu(g_n - g_{n-1})\|^p \leq 2^{4-2p} (1 + \varepsilon)^p \cdot S \cdot \|\mu\|^p.$$

D'où le résultat.

Soit alors  $T$  un espace métrique possédant la propriété suivante :

(B) : il existe un entier  $m$  et une constante  $D$  tels que pour toute partie compacte  $X$  de  $T$  et pour tout entier  $k$  existe un recouvrement ouvert  $\varrho$  de  $X$ , d'indice  $\leq 2^m$ , formé au plus de  $D2^{mk}$  ensembles de diamètre  $\leq (2\delta(X))2^{-k}$ .

Dans la suite,  $X$  désignera une partie compacte de  $T$ .

On désignera par  $\mathcal{R}_k(X)$  l'ensemble des recouvrements ouverts  $\varrho$  de  $X$  possédant la propriété ci-dessus. On posera si  $f$  est une application de  $X$  dans  $E$  :

$$M_r(f, k) = \sup_{\varrho \in \mathcal{R}_k} M_r(f, \varrho)$$

$$u_r^\alpha(f) = \sup_k 2^{k\alpha} \cdot (2\delta(X))^{-\alpha} \cdot M_r(f, k)$$

$$\mathcal{U}_r^\alpha(X, E) = \{f \in C(X, E) \mid u_r^\alpha(f) < +\infty\}.$$

COROLLAIRE : On a, pour  $\alpha > m(1/p - 1)$  :

$$\mathcal{U}_r^\alpha \subset C(X) \widehat{\otimes}_s E,$$

avec précisément :

$$\|f\|_s^p \leq \frac{2r D^{1-p} 2^{(m+1)(3-2p)}}{1 - 2^{m(1-p)-p\alpha}} \|f\|^{p - \frac{m}{\alpha}(1-p)} \left\{ \sup(\|f\|, (2\delta(X))^\alpha u_r^\alpha(f)) \right\}^{\frac{m}{\alpha}(1-p)}.$$

DÉMONSTRATION : Elle est analogue à celle du théorème 3.

Considérons par exemple  $\mathcal{C}_r^\alpha$  (cf. p. 921).

Soit  $\varrho \in \mathcal{R}_k$ ,  $\varrho = (\omega_i)$ . Soient  $x_i \in \omega_i$ ,  $f_{x_i} \in \mathcal{C}_r$  tels que :

$$\|f(y) - f_{x_i}(y)\| \leq M(d(x_i, y))^\alpha.$$

Soit  $\varphi_i$  une partition de l'unité subordonnée à  $\varrho$ .

On pose :

$$g(y) = \sum_i \varphi_i(y) f_{x_i}(y).$$

On a  $g \prec_r \varrho$  et :

$$f(y) - g(y) = \sum \varphi_i(y) (f(y) - f_{x_i}(y)).$$

Puisqu'il y a au plus  $2^m$  indices  $i$  tels que  $\varphi_i(y) \neq 0$ , on aura :

$$\|f(y) - g(y)\|^p \leq 2^m \cdot M^p \cdot (2\delta)^{p\alpha} \cdot 2^{-kp\alpha}.$$

On a donc bien :  $\mathcal{C}_r^\alpha \subset \mathcal{U}_r^\alpha$ , avec :

$$u_r^\alpha(f) \leq 2^{m/p} \cdot c_r^\alpha(f).$$

Notons que pour  $\alpha > m(1/p - 1)$ , on a à la fois  $\mathcal{C}_r^\alpha \subset L^1(X, \mu, E)$  pour toute  $\mu$  bornée (cf. p. 921) et  $\mathcal{C}_r^\alpha \subset C \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ . Nous savons donc que toute  $f \in \mathcal{C}_r^\alpha$  est intégrable au sens de Vogt pour toute mesure  $\mu$  bornée, et de plus (cf. p. 925) que cette intégrale peut se calculer par le procédé de Riemann. Ceci s'applique en particulier aux fonctions de classe  $C^r$ ,  $r > m(1/p - 1)$  (car  $C^r \subset \mathcal{C}_r^\alpha$ , cf. p. 921), et aux fonctions hölderiennes d'ordre  $\alpha$ ,  $\alpha > m(1/p - 1)$ , (car elles sont dans  $\mathcal{C}_1^\alpha$ ).

### VIII. Propriétés des fonctions hölderiennes sur $\mathbb{R}$ .

Désignons par  $\Gamma^\alpha$  l'espace des fonctions localement hölderiennes d'ordre  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles. Sa topologie est définie par la famille de seminormes :

$$p_K^\alpha(f) = \sup \left\{ \sup_{t \in K} |f(t)|, \sup_{x, y \in K} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \right\}$$

où  $K$  décrit l'ensemble des compacts de  $\mathbb{R}$ .

Soit d'autre part  $\Gamma^\alpha(E)$  l'espace des fonctions localement hölderiennes d'ordre  $\alpha$  à valeurs dans  $E$ , muni de la famille de  $p$ -seminormes  $q_K^\alpha$  obtenues en remplaçant  $|f(t)|$  par  $\|f(t)\|$  dans  $p_K^\alpha$ .

Soit enfin  $C^\alpha$  l'espace défini dans [4], chap. XIV, c'est à dire l'espace des fonctions dont la « dérivée d'ordre  $\alpha$  » est continue.

**THÉORÈME 8 :** Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres tels que  $0 \leq \alpha < 1 + \beta - 1/p$ , l'espace  $\Gamma^\beta(E)$  s'injecte continuellement dans  $\Gamma^\alpha \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ , donc aussi dans  $C^\alpha \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ .

**DÉMONSTRATION :** Expliquons d'abord le : « donc aussi dans  $C^\alpha \widehat{\otimes}_\varepsilon E$  ». Soit  $\alpha < 1 + \beta - 1/p$ . On peut trouver  $\alpha'$ , tel que :  $\alpha < \alpha' < 1 + \beta - 1/p$ .

Alors  $\Gamma^\beta(E) \subset \Gamma^{\alpha'} \widehat{\otimes}_\varepsilon E \subset C^\alpha \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ , puisque  $\Gamma^{\alpha'} \subset C^\alpha$ .

Soit  $h_n$  la fonction linéaire par morceaux définie par :

$$h_n(t) = 0 \quad \text{pour} \quad |t| \geq 1/2^n$$

$$h_n(0) = 1.$$

Posons  $x_{i,n} = i/2^n$ ,  $f_{i,n}(t) = h_n(t - x_{i,n})$  et :

$$f_n = \sum_{i=-4^n}^{4^n} f_{i,n} \otimes f(x_{i,n}).$$

La suite  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur tout compact.

Posons  $g_n = f_n - f_{n-1}$ . Il suffit de montrer que la série  $\sum g_n$  converge uniformément vers  $f$  sur toute partie équicontinue  $B$  de  $(\Gamma^\alpha)'$ .

Il suffit pour cela que :

$$\sup_{T \in B} \sum \| \langle T, g_n \rangle \| ^p < +\infty \quad \text{et que } f = \sum g_n \text{ sur } B.$$

Les éléments de  $B$  sont des distributions  $T$  à support dans un même compact  $K$ . Nous supposons  $K = [0, 1]$  pour simplifier. On a donc, pour  $T \in B$  :

$$\langle T, g_n \rangle = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \langle T, f_{2i-1,n} \rangle e_{i,n}$$

avec

$$e_{i,n} = f(x_{2i-1,n}) - 1/2 (f(x_{2i-2,n}) + f(x_{2i,n})).$$

Soient  $PT$  la primitive de  $T$  à support dans  $\mathbb{R}_+$ , et  $\alpha'$  tel que  $\alpha < \alpha' < 1 + \beta - 1/p$ . On sait que l'application  $T \mapsto PT$  est continue de  $(\Gamma^\alpha)'$  dans  $\text{Lip}_{1-\alpha'}(L^1)$ , donc :

$$\forall T \in B \quad \sup_{0 < t < 1} \int_0^1 \left| \frac{PT(x+t) - PT(x)}{t^{1-\alpha'}} \right| dx \leq K(\alpha, \alpha').$$

D'autre part :

$$\langle T, g_n \rangle = - \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \langle PT, f'_{2i-1,n} \rangle e_{i,n}.$$

Donc, d'après l'inégalité de Hölder :

$$\| \langle T, g_n \rangle \|^p \leq \left( \sum_{i=1}^{2^{n-1}} | \langle PT, f'_{2i-1,n} \rangle | \right)^p \left( \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \| e_{i,n} \|^{1-p} \right)^{1-p}.$$

Or :

$$\sum_{i=1}^{2^{n-1}} | \langle PT, f'_{2i-1,n} \rangle | = 2^n \cdot \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \int_{2^{i-2}/2^n}^{2^{i-1}/2^n} | PT(x + 2^{-n}) - PT(x) | dx \leq K(\alpha, \alpha') \cdot 2^{n\alpha'}.$$

D'autre part, puisque  $f \in \Gamma^\beta(E)$  :

$$\sum_{i=1}^{2^{n-1}} \|e_{i,n}\|^{1-p} \leq M^{1-p} 2^n \left(1 - \frac{\beta p}{1-p}\right).$$

Finalement :

$$\| \langle T, g_n \rangle \|^p \leq (K(\alpha, \alpha') M)^p \cdot 2^{n(1-p-p(\beta-\alpha'))}.$$

La série  $\sum g_n$  est donc convergente dans  $\Gamma^\alpha \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ .

D'autre part si  $\mu$  est une mesure de Radon à support compact dans  $[0, 1]$  :

$$\|g_n\|_1^p \leq K 2^{n(1-p-\beta p)},$$

donc  $\sum g_n$  converge dans  $L^1(X, \mu, E)$ , et  $f = \sum g_n$  car  $\sum g_n$  converge simplement vers  $f$  (Th. 1).

Finalement, les mesures à support compact étant denses dans  $(\Gamma^\alpha)'_c$ , on a bien  $f = \sum g_n$  dans  $\Gamma^\alpha \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ .

Il est enfin clair que l'application ainsi définie de  $\Gamma^\beta(E)$  dans  $\Gamma^\alpha \widehat{\otimes}_\varepsilon E$  est une injection continue, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE : On peut aussi montrer que  $\Gamma^\beta(E) \subset (L^1_{loc})^\alpha \widehat{\otimes}_p E$ , pour  $0 \leq \alpha < 1 + \beta - 1/p$ .

COROLLAIRE 1 : Soit  $f \in \Gamma^\beta(L^p(\Omega, \mu))$ , avec  $\beta > 1/p - 1$ , et  $p < 1$ . Alors  $f$  détermine une probabilité cylindrique de type  $p$  sur  $C^\alpha$  pour tout  $\alpha < 1 + \beta - 1/p$ .

DÉMONSTRATION : Voir [4], proposition (VI, 4,1).

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$  une fonction aléatoire. On dira que  $f$  est une  $s$ -fonction aléatoire ( $s \leq 1$ ), si  $f$  est dans  $\Gamma^{1/s}(L^p(\Omega, \mu))$  pour tout  $p < s$ . (C'est par exemple le cas de la fonction aléatoire du mouvement  $s$ -brownien, voir [4] chap. XV).

On dira que  $f$  est  $p$  presque sûrement dans  $(L^1_{loc})^\alpha$ , s'il existe une application  $\omega \rightarrow f_\omega$  de  $\Omega$  dans  $(L^1_{loc})^\alpha$ , et une partie convexe fermée bornée  $B$  de  $(L^1_{loc})^\alpha$  telles que :

a) Pour presque tout  $t$ ,  $f(t)$  est la variable aléatoire  $\omega \mapsto f_\omega(t)$ . (Les trajectoires sont donc presque sûrement dans  $(L^1_{loc})^\alpha$ ).

b)  $\int (j_B(f_\omega))^p d\mu(\omega) < +\infty$ ,  $j_B$  étant la jauge de  $B$ .

THÉORÈME 9 : Soit  $f$  une  $s$ -fonction aléatoire. La fonction  $f$  est  $p$ -preque sûrement dans  $(L^1_{loc})^\alpha$ , pour tout  $\alpha < 1$ , et tout  $p < s$ .

DÉMONSTRATION : Soit  $\alpha < 1$  donné et soit  $\alpha'$ ,  $\alpha < \alpha' < 1$ . On peut trouver  $p < s$  tel que :

$$\alpha' < 1 + 1/s - 1/p.$$

D'après le corollaire du théorème 8,  $f$  définit une probabilité cylindrique  $\lambda$  de type  $p$  sur  $C^{\alpha'}$ . Mais puisque l'injection :

$$C^{\alpha'} \mapsto (L_{loc}^1)^{\alpha} \text{ est } 0\text{-radonifiante}$$

(voir [4], proposition (XXV, 1 bis, 1))

on en déduit que  $\lambda$  est de Radon sur  $(L_{loc}^1)^{\alpha}$ , d'où le résultat, puisque  $(L_{loc}^1)^{\alpha}$  a ses parties compactes métrisables (voir [4], proposition (XIII, 3 1)).

*Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique  
17, rue Descartes - 75. Paris V*

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] DIETMAR VOGT : *Intégrationstheorie in  $p$ -normierten Räumen*, Math. Ann. 173 p. 219-232.
- [2] PHILIPPE TURPIN et LUCIEN WÆLBROECK : *Sur l'approximation des fonctions différentiables à valeurs dans les espaces vectoriels topologiques*, C. R. Acad. Sc., Paris t. 267 p. 94-97.
- [3] PHILIPPE TURPIN et LUCIEN WÆLBROECK : *Intégration et fonctions holomorphes dans les espaces localement pseudo-convexes*, C. R. Acad. Sc., Paris t. 267 p. 160-162.
- [4] Séminaire Laurent SCHWARTZ 1969-1970. Ecole Polytechnique, Paris.