

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

ANNA MARIA MICHELETTI

## **Metrica per famiglie di domini limitati e proprietà generiche degli autovalori**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 26,  
n° 3 (1972), p. 683-694*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1972\\_3\\_26\\_3\\_683\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1972_3_26_3_683_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# METRICA PER FAMIGLIE DI DOMINI LIMITATI E PROPRIETÀ GENERICHE DEGLI AUTOVALORI

di ANNA MARIA MICHELETTI

## Introduzione.

Nello studiare la continuità dell' $n$ -esimo autovalore dell'operatore di Laplace  $-\Delta_\Omega$  relativo ad un aperto limitato  $\Omega$  con dati di Dirichlet nulli, considerato come funzione dell'aperto  $\Omega$ , Courant introduce una nozione di vicinanza tra due domini basata su un diffeomorfismo del tipo  $I + \psi$  con  $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^m)$ , che trasforma l'uno nell'altro.

Lo scopo di questo lavoro è inquadrare questa nozione in un ambito più generale introducendo una distanza vera e propria tra i domini che sarà chiamata « distanza di Courant ». Sulla base di questa distanza si riprendono i risultati del lavoro precedente [1] e si arriva a formulare il seguente risultato: preso un aperto campione  $\Omega_0$ , limitato e introdotta la distanza di Courant nella famiglia degli aperti ad esso diffeomorfi, risulta di prima categoria l'insieme degli aperti  $\Omega$  per i quali l'operatore di Laplace  $-\Delta_\Omega$  non ha autovalori tutti semplici.

§ 1. Data un'applicazione di  $\mathbb{R}^m$  in sè, per semplicità di notazione, conviene considerare la sua derivata prima, seconda, ...,  $r$ -sima, rispettivamente come un'applicazione lineare, bilineare, ...,  $r$ -lineare definita in ciascun punto e introdurre per queste le norme consuete<sup>(1)</sup>. Indichiamo con  $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^m)$  lo spazio di Banach delle applicazioni di  $\mathbb{R}^m$  in sè con derivate prime, seconde, ...,  $r$ -esime continue e limitate dotate della norma:

$$\|f\|_{\mathcal{C}^r} = \sup_x \max [ \|f(x)\|, \|f^{(1)}(x)\|, \dots, \|f^{(r)}(x)\| ].$$

---

Pervenuto alla Redazione il 12 Luglio 1971.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C. N. R.

<sup>(1)</sup> Partendo dalla seguente norma di  $\mathbb{R}^m$ :  $\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$

DEFINIZIONE: Sia  $\mathcal{F}^r$  l'insieme delle applicazioni di  $\mathbb{R}^m$  in sè tali che

i) sono del tipo  $I + f$  dove  $f \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^m)$  e inoltre  $\|f(x)\|$  e  $\|f^{(i)}(x)\|$  tendono a zero per  $\|x\| \rightarrow +\infty$  ( $i = 1, \dots, r$ )

ii) sono invertibili come diffeomorfismi di classe  $\mathcal{C}^r$ .

Una forma  $k$ -lineare su  $\mathbb{R}^m$ ,  $S$ , dipendente da  $x$  e avente come argomenti  $y_1, \dots, y_k$  verrà indicata con la notazione

$$S(x)[y_1][y_2], \dots, [y_k].$$

LEMMA 1. Siano  $F$  e  $G$  due applicazioni di  $\mathbb{R}^m$  in sè tali che  $F$  è differenziabile in un intorno del punto  $x$  fino all'ordine  $r$  e  $G$  è differenziabile in un intorno di  $F(x)$  fino all'ordine  $r$ . Allora il differenziale  $r$ -simo di  $G \circ F$  in  $x$  è dato dalla somma di un numero finito di applicazioni  $r$ -lineari su  $\mathbb{R}^m$  del tipo

$$(h_1, h_2, \dots, h_r) \rightarrow G^k(F(x)) [F^{(\lambda_1)}(x) [h_1] [h_1] \dots [h_{\lambda_1}] \dots \\ \dots [F^{(\lambda_k)}(x) [h_{r-\lambda_k+1}] \dots [h_r]]$$

dove  $k = 1, \dots, r$  e  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = r$ .

Procediamo per induzione su  $r$ . La nostra affermazione è banalmente vera per  $r = 1$ . Vediamo ora che se è vero per  $r - 1$  è vero anche per  $r$ .

Questa è una ovvia conseguenza dell'osservazione che un'applicazione di  $\mathbb{R}^m$  in  $\mathcal{L}((\mathbb{R}^m)^{r-1}; \mathbb{R}^m)$  del tipo

$$x \rightarrow G^{(k)}(F(x)) [F^{(\lambda_1)}(x)] \dots [F^{(\lambda_k)}(x)]$$

dove  $k = 1, \dots, r - 1$  e  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = r - 1$ , ha come differenziale in  $x$  l'applicazione  $r$ -lineare su  $\mathbb{R}^m$

$$G^{(k+1)}(F(x)) [F^{(\lambda_1)}(x)] [F^{(\lambda_2)}(x)] \dots [F^{(\lambda_k)}(x)] + \\ + G^{(k)}(F(x)) [F^{(\lambda_1+1)}(x)] \dots [F^{(\lambda_k)}(x)] + \dots + G^{(k)}(F(x)) [F^{(\lambda_1)}(x)] \dots [F^{(\lambda_k+1)}(x)].$$

LEMMA 2. Siano  $f$  e  $g$  in  $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^m)$  e sia  $\psi = f \circ (I + g)$ .

Allora si ha per ogni  $x$  di  $\mathbb{R}^m$

$$\|\psi(x)\| = \|f(x + g(x))\|$$

$$\|\psi^{(1)}(x)\| \leq \|f^{(1)}(x + g(x))\| [1 + \|g^{(1)}(x)\|]$$

$$\begin{aligned} \|\psi^{(i)}(x)\| &\leq \|f^{(1)}(x + g(x))\| \|g^{(i)}(x)\| + \\ &+ \sum_{j=2}^i \|f^{(j)}(x + g(x))\| a_j(\|g^{(1)}(x)\|, \dots, \|g^{(i-1)}(x)\|) \end{aligned}$$

per  $i = 2, \dots, r$  dove  $a_j$  è un polinomio.

Questa affermazione è una ovvia conseguenza del Lemma 1.

**TEOREMA.**  $\mathcal{F}^r$  è un gruppo.

Dal lemma 2 segue immediatamente che se  $F$  e  $G$  sono in  $\mathcal{F}^r$  anche  $F \circ G$  è in  $\mathcal{F}^r$ .

Vediamo che se  $F = I + f \in \mathcal{F}^r$  anche  $I + g = F^{-1} \in \mathcal{F}^r$ . Basta vedere che  $\|g(y)\|$  e  $\|g^{(i)}(y)\|$  tendono a zero per  $\|y\| \rightarrow +\infty$   $i = 1, \dots, r$ .

Procediamo per induzione su  $r$ .

Poniamo  $y = F(x)$ . Dalla relazione  $-f(x) = g(y)$  si ha che  $\sup_{y \in \mathbb{R}^m} \|g(y)\| < +\infty$ . Poiché  $\|y\| - \|g(y)\| \leq \|x\|$  si ha che  $\|x\| \rightarrow +\infty$  per  $\|y\| \rightarrow +\infty$ . Allora da  $-f(x) = g(y)$  segue che  $\|g(y)\| \rightarrow 0$  per  $\|y\| \rightarrow +\infty$ .

Dal lemma 2 si ha

$$\|g^{(1)}(y)\| \leq \|f^{(1)}(x)\| [1 + \|g^{(1)}(y)\|]$$

quindi

$$\|g^{(1)}(y)\| [1 - \|f^{(1)}(x)\|] \leq \|f^{(1)}(x)\|.$$

Per  $\|y\|$  opportunamente grande si ha

$$0 \leq \|g^{(1)}(y)\| \leq \frac{\|f^{(1)}(x)\|}{1 - \|f^{(1)}(x)\|}.$$

Quindi  $\|g^{(1)}(y)\| \rightarrow 0$  per  $\|y\| \rightarrow +\infty$ .

Allora  $\mathcal{F}^0$  e  $\mathcal{F}^1$  sono gruppi, inoltre se  $\mathcal{F}^{r-1}$  è un gruppo, anche  $\mathcal{F}^r$  lo è. Infatti dal lemma 2, per  $\|y\|$  opportunamente grande si ha

$$0 \leq \|g^{(r)}(y)\| \leq \frac{\sum_{j=2}^r \|f^{(j)}(x)\| a_j(\|g^{(1)}(y)\|, \dots, \|g^{(r-1)}(y)\|)}{1 - \|f^{(1)}(x)\|}.$$

**LEMMA 3.** Per ogni  $r \in \mathbb{N}$  e per ogni  $s \in \mathbb{N} - \{0\}$  esiste una costante  $k(r, s) \in \mathbb{R}^+$  che gode della seguente proprietà: se le applicazioni  $f_1, \dots, f_n$  di  $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^m)$  sono tali che  $\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{\mathcal{C}^r} < \alpha$  con  $0 < \alpha < s$ , allora  $F = (I + f_n) \circ \dots \circ (I + f_1)$  è tale che  $\|F - I\|_{\mathcal{C}^r} \leq \alpha k(r, s)$ .

Procediamo per induzione su  $r$ . Per semplificare le notazioni poniamo

$$F_i = (I + f_i) \circ \dots \circ (I + f_1) \quad \text{quindi} \quad F_n = F.$$

Dalla definizione di  $F$  si ha

$$(1) \quad \begin{aligned} F - I &= f_1 + f_2 \circ (I + f_1) + \dots + f_n \circ (I + f_{n-1}) \circ \dots \circ (I + f_1) = \\ &= f_1 + f_2 \circ F_1 + \dots + f_n \circ F_{n-1}. \end{aligned}$$

Allora  $\|F - I\|_{\mathcal{C}^0} \leq \alpha$ , quindi  $k(0, s) = 1$  per ogni  $s \in N - \{0\}$ .  
Da (1) e dal lemma 2 segue che

$$\begin{aligned} \sup_x \|(F - I)^{(1)}(x)\| &\leq \|f_1\|_{\mathcal{C}^1} + \|f_2\|_{\mathcal{C}^1} [1 + \|f_1\|_{\mathcal{C}^1}] + \dots \\ &\dots + \|f_n\|_{\mathcal{C}^1} [1 + \|f_{n-1}\|_{\mathcal{C}^1}] \dots [1 + \|f_1\|_{\mathcal{C}^1}] \leq \alpha e^\alpha. \end{aligned}$$

Allora  $\|F - I\|_{\mathcal{C}^1} \leq \alpha e^s$ , quindi  $k(1, s) = e^s$  per ogni  $s \in N - \{0\}$ .

Dimostriamo che se la nostra proposizione vale per  $r - 1$ , vale anche per  $r$ . Valutiamo  $\|(F_n - I)^{(r)}(x)\|$ . È ovvio che

$$(2) \quad (F_n - I)^{(r)}(x) = (F_{n-1} - I)^{(r)}(x) + (f_n \circ F_{n-1})^{(r)}(x).$$

Dal lemma 2, dato che  $r \geq 2$ , si ha che

$$\begin{aligned} \|(f_n \circ F_{n-1})^{(r)}(x)\| &\leq \|f_n^{(1)}(F_{n-1}(x))\| \|(F_{n-1} - I)^{(r)}(x)\| + \\ &+ \sum_{j=2}^r \|f_n^{(j)}(F_{n-1}(x))\| a_j (\|(F_{n-1} - I)^{(1)}(x)\|, \dots, \|(F_{n-1} - I)^{(r-1)}(x)\|). \end{aligned}$$

Per l'ipotesi di induzione  $\|(F_{n-1} - I)^{(i)}(x)\| \leq \|(F_{n-1} - I)\|_{\mathcal{C}^{r-1}} \leq \alpha k(r-1, s)$  ( $i = 1, \dots, r-1$ ) per cui tenendo presente che  $a_j$  è un polinomio (dipendente da  $r$ ) dove  $j = 2, \dots, r$  si ha che esiste una costante  $L(r, s)$  tale che

$$(3) \quad \begin{aligned} \|(f_n \circ F_{n-1})^r(x)\| &\leq \|f_n^{(1)}(F_{n-1}(x))\| \|(F_{n-1} - I)^{(r)}(x)\| + \\ &+ L(r, s) \sum_{j=2}^r \|f_n^{(j)}(F_{n-1}(x))\| \leq \|f_n\|_{\mathcal{C}^r} \|(F_{n-1} - I)^{(r)}(x)\| + \\ &+ (r-1) L(r, s) \|f_n\|_{\mathcal{C}^r}. \end{aligned}$$

Poniamo  $(r-1)L(r, s) = M(r, s)$ . Da (2) e (3) si ha

$$\|(F_n - I)^{(r)}(x)\| \leq [1 + \|f_n\|_{\mathcal{C}^r}] \|(F_{n-1} - I)^{(r)}(x)\| + M(r, s) \|f_n\|_{\mathcal{C}^r}.$$

Dopo aver ripetuto  $n-1$  volte questo procedimento si ha

$$\begin{aligned} \|(F_n - I)^{(r)}(x)\| &\leq [1 + \|f_n\|_{\mathcal{C}^r}] \dots [1 + \|f_2\|_{\mathcal{C}^r}] \|f_1\|_{\mathcal{C}^r} + \\ &+ [1 + \|f_n\|_{\mathcal{C}^r}] \dots [1 + \|f_2\|_{\mathcal{C}^r}] M(r, s) \|f_2\|_{\mathcal{C}^r} + \dots \\ &\dots + M(r, s) \|f_n\|_{\mathcal{C}^r} \leq \max[M(r, s), 1] e^\alpha \alpha. \end{aligned}$$

Quindi  $k(r, s) = \max[M(r, s), 1] e^s$ .

LEMMA 4. Sia  $F$  in  $\mathcal{F}^r$ . Poniamo  $f = F - I$  e  $f_\tau = f \circ \tau$  dove con  $\tau$  si indica la traslazione in  $\mathbb{R}^m$  individuata dal vettore  $\tau$ . Allora se  $\|\tau\| \rightarrow 0$   $\|f_\tau - f\|_{\mathcal{C}^r} \rightarrow 0$ .

Infatti si definisce la funzione  $\varrho: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\begin{aligned} \varrho(x, \tau) = \max \{ \|f(x + \tau) - f(x)\|, \|f^{(1)}(x + \tau) - f^{(1)}(x)\|, \dots \\ \dots, \|f^{(r)}(x + \tau) - f^{(r)}(x)\| \}. \end{aligned}$$

La nostra affermazione è una semplice conseguenza delle seguenti proprietà di  $\varrho$ :

i)  $\varrho(x, \tau)$  tende a zero per  $\|x\| \rightarrow +\infty$ , uniformemente al variare di  $\tau$  in un intorno limitato dell'origine.

ii)  $\varrho$  è continua e  $\varrho(x, 0) = 0$  per ogni  $x$  di  $\mathbb{R}^m$ .

LEMMA 5. Siano  $G$  e  $F$  in  $\mathcal{F}^r$  e  $\gamma$  in  $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^m)$ . Se  $\|\gamma\|_{\mathcal{C}^r} \rightarrow 0$  allora anche  $\|G \circ (F + \gamma) - G \circ F\|_{\mathcal{C}^r} \rightarrow 0$ .

Procediamo per induzione su  $r$ . Per  $r=0$  la nostra affermazione è ovvia, vediamo che se vale per  $r-1$ , vale anche per  $r$ .

Dal lemma 1 sappiamo che la derivata  $r$ -sima di  $G \circ (F + \gamma) - G \circ F$  è la somma di un numero finito di applicazioni  $r$ -lineari del tipo

$$\begin{aligned} G^k(F(x) + \gamma(x)) [F^{(\lambda_1)}(x) + \gamma^{(\lambda_1)}(x)] \dots [F^{(\lambda_k)}(x) + \gamma^{(\lambda_k)}(x)] - \\ - G^k(F(x)) [F^{(\lambda_1)}(x)] \dots [F^{(\lambda_k)}(x)] \quad \text{dove } k = 1, \dots, r \text{ e } \lambda_1 + \dots + \lambda_k = r. \end{aligned}$$

Tenendo presente che  $\|F^{(\lambda_1)}(x)\| \|F^{(\lambda_2)}(x)\| \dots \|F^{(\lambda_k)}(x)\| \leq (\|F - I\|_{\mathcal{C}^r} + 1)^k$ , si ha che la norma di un'applicazione di questo tipo si può maggiorare con la seguente espressione.

$$\sup_x \|G^{(k)}(F(x) + \gamma(x)) - G^k(F(x))\| (\|F - I\|_{\mathcal{C}^r} + 1)^k + \\ + \|\gamma\|_{\mathcal{C}^r} p(\|F - I\|_{\mathcal{C}^r}, \|G - I\|_{\mathcal{C}^r}, \|\gamma\|_{\mathcal{C}^r})$$

dove  $p$  è un polinomio. Da questa maggiorazione e dal lemma 4 segue subito la nostra affermazione.

Sia  $F \in \mathcal{F}^r$  e siano rispettivamente  $(I + f_n) \circ \dots \circ (I + f_1)$  e  $(I + g_m) \circ \dots \circ (I + g_1)$  fattorizzazioni in  $\mathcal{F}^r$  di  $F$  ed  $F^{-1}$ .

*Poniamo*

$$d(I, F) = \inf. \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{\mathcal{C}^r} + \inf. \sum_{i=1}^m \|g_i\|_{\mathcal{C}^r}$$

dove gli estremi inferiori s'intendono rispettivamente in relazione alle fattorizzazioni di  $F$  ed  $F^{-1}$  in  $\mathcal{F}$ . Inoltre definiamo per ogni  $F$  e  $G$  di  $\mathcal{F}^r$

$$d(F, G) = d(I, G \circ F^{-1}).$$

È ovvio che  $d$  è invariante a destra, cioè per ogni  $F, G, H$  di  $\mathcal{F}^r$

$$d(F, G) = d(F \circ H, G \circ H).$$

Verifichiamo che  $d$  è una distanza in  $\mathcal{F}^r$ .

i)  $d(F, G) = 0 \implies F = G$ .

Infatti  $d(F, G) = 0$  significa che esiste una successione di fattorizzazioni di  $G \circ F^{-1}$  in  $\mathcal{F}^r$ ,

$$G \circ F^{-1} = (I + g_{n, s_n}) \circ \dots \circ (I + g_{n, 1})$$

tali che

$$\delta(n) = \sum_{i=1}^{s_n} \|g_{n, i}\|_{\mathcal{C}^r} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Dal lemma 3 si ha che per  $n$  abbastanza grande (in modo che sia  $\delta(n) < 1$ )  $\|G \circ F^{-1} - I\|_{\mathcal{C}^r} \leq K(r, 1) \delta(n)$  perciò  $\|G \circ F^{-1} - I\|_{\mathcal{C}^r} = 0$ , quindi  $F = G$ .

ii)  $d(F, G) = d(G, F)$ .

È una ovvia conseguenza della definizione

$$\text{iii) } d(F, G) \leq d(F, H) + d(H, G).$$

Questa affermazione segue dalla relazione;

$$d(I, M \circ N) \leq d(I, M) + d(I, N)$$

valida per ogni  $M$  e  $N$  di  $\mathcal{F}^r$ . E questa è una banale conseguenza del fatto che tra le fattorizzazioni di  $M \circ N$  in  $\mathcal{F}^r$  ci sono quelle ottenute componendo una fattorizzazione di  $M$  in  $\mathcal{F}^r$  e una fattorizzazione di  $N$  in  $\mathcal{F}^r$ .

**TEOREMA 2.**  $\mathcal{F}^r$  è un gruppo metrico.

Vediamo ora che con la metrica precedentemente definita il gruppo  $\mathcal{F}^r$  è topologico.

Per i risultati della teoria dei gruppi topologici [3] basta che sia verificata la seguente condizione: per ogni  $F$  di  $\mathcal{F}^r$ , se  $d(I, H) \rightarrow 0$  anche  $d(I, F^{-1} \circ H \circ F) \rightarrow 0$ .

Affinché  $d(I, F^{-1} \circ H \circ F) \rightarrow 0$  è sufficiente che tenda a zero  $\|F^{-1} \circ H \circ F - I\|_{\mathcal{C}^r} + \|F^{-1} \circ H^{-1} \circ F - I\|_{\mathcal{C}^r} = \|F^{-1} \circ (F + h \circ F) - I\|_{\mathcal{C}^r} + \|F^{-1} \circ (F + k \circ F) - I\|_{\mathcal{C}^r}$  dove  $h = H - I$  e  $k = H^{-1} - I$ .

Se  $d(I, H) \rightarrow 0$ , dal lemma 3 segue che  $\|h\|_{\mathcal{C}^r}$  e  $\|k\|_{\mathcal{C}^r}$  tendono a zero, dal lemma 2 segue che anche  $\|h \circ F\|_{\mathcal{C}^r}$  e  $\|k \circ F\|_{\mathcal{C}^r}$  tendono a zero, e dal lemma 5 segue la nostra condizione.

**COROLLARIO 1.** La topologia indotta nel gruppo topologica  $\mathcal{F}^r$  dalla metrica  $d$  coincide con la topologia che ha come base d'intorni dell'identità in  $\mathcal{F}^r$

$$E(\varepsilon) = \{F \in \mathcal{F}^r : \|F - I\|_{\mathcal{C}^r} + \|F^{-1} - I\|_{\mathcal{C}^r} < \varepsilon\}.$$

Infatti, sia

$$S(\varepsilon) = \{F \in \mathcal{F}^r : d(I, F) < \varepsilon\}$$

dalla definizione della metrica  $d$  e dal lemma 3 si ha, per  $\varepsilon < 1$

$$E(\varepsilon) \subset S(\varepsilon) \subset E(2k(r, 1)\varepsilon).$$

**TEOREMA 3.** Il gruppo metrico  $\mathcal{F}^r$  è completo.

Sia  $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di Cauchy in  $\mathcal{F}^r$ , allora  $d(I, H_n)$  è limitato, quindi per il lemma 3 esiste  $L$  tale che per ogni  $n$

$$\|I - H_n\|_{\mathcal{C}^r} + \|I - H_n^{-1}\|_{\mathcal{C}^r} \leq L.$$



Dal lemma 2 e dalla limitatezza di  $\{\|I - H_n\|_{\mathcal{C}^r}\}_{n \in N}$  segue che esiste  $M$  tale che per ogni  $m$  e  $n$

$$\|H_m - H_n\|_{\mathcal{C}^r} = \|(H_m \circ H_n^{-1} - I) \circ H_n\|_{\mathcal{C}^r} \leq M \|H_m \circ H_n^{-1} - I\|_{\mathcal{C}^r}.$$

Allora, dato che  $\{H_n\}_{n \in N}$  è di Cauchy in  $\mathcal{F}^r$ , dal lemma 3 segue che  $\{H_n - I\}_{n \in N}$  è di Cauchy in  $\mathcal{C}^r(R^m)$ , quindi converge in  $\mathcal{C}^r(R^m)$  ad un elemento che indichiamo con  $H - I$ .

È banale che  $\|H(x) - x\|$  e  $\|(H - I)^{(i)}(x)\|$  tendono a zero per  $\|x\| \rightarrow +\infty$  per  $i = 1, \dots, r$ . Infatti vale la maggiorazione

$$\|H(x) - x\| \leq \|H(x) - H_n(x)\| + \|H_n(x) - x\| \leq \|H - H_n\|_{\mathcal{C}^r} + \|H_n(x) - x\|.$$

Per le derivate si procede nello stesso modo.

Similmente si dimostra che  $H_n^{-1} - I$  converge in  $\mathcal{C}^r(R^m)$  ad un elemento che si indica con  $G - I$ . Vediamo che  $G^{-1} = H$ . Basta vedere che  $\|G \circ H - I\|_{\mathcal{C}^r} = 0$  e  $\|H \circ G - I\|_{\mathcal{C}^r} = 0$ . Infatti per il lemma 2 si ha

$$\begin{aligned} \|G \circ H - I\|_{\mathcal{C}^r} &\leq \|(G - H_n^{-1}) \circ H\|_{\mathcal{C}^r} + \|H_n^{-1} \circ H - I\|_{\mathcal{C}^r} \leq \\ &\leq c \|G - H_n^{-1}\|_{\mathcal{C}^r} + \|H_n^{-1} \circ (H_n + H - H_n) - H_n^{-1} \circ H_n\|_{\mathcal{C}^r} \end{aligned}$$

dove  $c$  è una costante dipendente da  $\|H - I\|_r$ . Dal lemma 5 e dalla convergenza in  $\mathcal{C}^r(R^m)$  di  $\{H_n^{-1} - I\}_{n \in N}$  a  $G - I$  e di  $\{H_n - I\}_{n \in N}$  a  $H - I$  segue che il secondo membro di questa maggiorazione tende a zero. Nello stesso modo si ha  $\|H \circ G - I\|_{\mathcal{C}^r} = 0$ . Quindi  $H \in \mathcal{F}^r$ .

È ovvio che  $\{H_n\}_{n \in N}$  converge ad  $H$  in  $\mathcal{F}^r$ . Infatti si ha

$$\begin{aligned} d(H_n, H) &\leq \|H \circ H_n^{-1} - I\|_{\mathcal{C}^r} + \|H_n \circ H^{-1} - I\|_{\mathcal{C}^r} \leq \|(H - H_n) \circ H_n^{-1}\|_{\mathcal{C}^r} + \\ &+ \|(H_n - H) \circ H^{-1}\|_{\mathcal{C}^r}. \end{aligned}$$

Da questa maggiorazione, dal lemma 2 e dalla limitatezza di  $\{\|I - H_n^{-1}\|_{\mathcal{C}^r}\}_{n \in N}$  segue la nostra affermazione.

§ 2. Fissiamo un aperto campione  $\Omega_0$  di  $R^m$ , limitato connesso, la cui frontiera è una varietà  $m - 1$  dimensionale di classe 3.

Definiamo la famiglia di insiemi

$$X(\Omega_0) = \{F(\Omega_0) \mid \mathbb{R}^m : F \in \mathcal{F}^3\}.$$

È ovvio che se  $\Omega \in X(\Omega_0)$ , è ancora un aperto limitato connesso la cui frontiera è una varietà  $m - 1$  dimensionale di classe  $\mathcal{C}^3$ .

Si osservi che vale il seguente:

LEMMA 6. Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^m$  e sia

$$\mathcal{G}(\Omega) = \{F \in \mathcal{F}^r : F(\Omega) = \Omega\}.$$

Allora  $\mathcal{G}(\Omega)$  è un sottogruppo chiuso di  $\mathcal{F}^r$ .

Dimostriamo che se la successione  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{G}(\Omega)$  converge ad  $F$  in  $\mathcal{F}^r$ , allora  $F$  è in  $\mathcal{G}(\Omega_0)$ , il resto è ovvio. Se  $\{F_n\}$  converge ad  $F$  in  $\mathcal{F}^r$ , in particolare per il lemma 3 si ha che

$$\|F_n \circ F^{-1} - I\|_{\mathcal{C}^0} + \|F \circ F_n^{-1} - I\|_{\mathcal{C}^0} \rightarrow 0.$$

Dato che  $\|F \circ F_n^{-1} - I\|_{\mathcal{C}^0} \rightarrow 0$ , per ogni  $x \in \Omega$  la successione  $\{F(F_n^{-1}(x))\}_{n \in \mathbb{N}} \subset F(\Omega)$  converge ad  $x \in \Omega$ , quindi  $\Omega \subset \overline{F(\Omega)}$ . Dato che  $\|F_n \circ F^{-1} - I\|_{\mathcal{C}^0} \rightarrow 0$ , per ogni  $x \in \Omega$ , la successione  $\{F_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$  converge ad  $F(x) \in F(\Omega)$ , quindi  $F(\Omega) \subset \overline{\Omega}$ . Poiché  $F$  è un diffeomorfismo, si ha  $F(\Omega) = \Omega$ .

Per abbreviare le notazioni, poniamo da ora in poi  $\mathcal{G}(\Omega_0) = \mathcal{G}$  ed  $X(\Omega_0) = X$ .

Sia  $\Omega \in X$ , per come è stato definito  $X$ , esiste  $F \in \mathcal{F}^3$  tale che  $F(\Omega_0) = \Omega$ . Indichiamo con  $\chi: X \rightarrow \mathcal{F}^3/\mathcal{G}$  l'applicazione che ad  $\Omega$  associa  $F \circ \mathcal{G}$ . È ovvio che l'applicazione  $\chi$  è iniettiva e surgettiva.

Questa applicazione  $\chi$  ci permette di introdurre una metrica in  $X$  in modo da poter dimostrare che è di I categoria il sottoinsieme di  $X$  costituito dagli  $\Omega$ , tali che lo spettro dell'operatore di Laplace  $-\Delta_\Omega$  relativo ad  $\Omega$  con dati di Dirichlet nulli, non ha autovalori tutti semplici. Allora conviene osservare che

LEMMA 7. Lo scarto  $\delta$  in  $\mathcal{F}^3/\mathcal{G}$

$$\delta(F \circ \mathcal{G}, H \circ \mathcal{G}) = \inf_{G, \tilde{G} \in \mathcal{G}} d(F \circ G, H \circ \tilde{G})$$

è una metrica. La topologia indotta da  $\delta$  coincide con la topologia quoziente di  $\mathcal{F}^3/\mathcal{G}$  e lo spazio metrico  $\mathcal{F}^3/\mathcal{G}$  è completo.

Dimostriamo la completezza, il resto è banale.

Dobbiamo dimostrare che se  $\{F_n \circ \mathcal{G}\}_{n \in \mathbb{N}}$  è di Cauchy in  $\mathcal{F}^3/\mathcal{G}$  allora  $\{F_n \circ \mathcal{G}\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge in  $\mathcal{F}^3/\mathcal{G}$ . Basta dimostrare che esiste una sottosuccessione di  $\{F_n \circ \mathcal{G}\}_{n \in \mathbb{N}}$  che converge. Dato che  $\{F_n \circ \mathcal{G}\}_{n \in \mathbb{N}}$  è di Cauchy, esiste una sua sottosuccessione  $\{F_\nu \circ \mathcal{G}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  tale che

$$\delta(F_\nu \circ \mathcal{G}, F_{\nu+1} \circ \mathcal{G}) < \frac{1}{2^\nu}.$$

Vediamo ora che esiste una successione  $\{H_\nu\}_{\nu \in N}$  in  $\mathcal{F}^3$  tale che

- i)  $H_\nu \in F_\nu \circ \mathcal{G}$
- ii)  $d(H_\nu, H_{\nu+1}) < \frac{1}{2^\nu}$ .

Procediamo per induzione. Per la definizione di  $\delta$  dato che  $\delta(F_1 \circ \mathcal{G}, F_2 \circ \mathcal{G}) < \frac{1}{2}$  esistono  $H_1 \in F_1 \circ \mathcal{G}$  e  $H_2 \in F_2 \circ \mathcal{G}$  tali che  $d(H_1, H_2) < \frac{1}{2}$ . Dato  $H_\nu \in F_\nu \circ \mathcal{G}$ , vediamo che esiste  $H_{\nu+1}$  con le proprietà richieste. Poiché  $\delta(F_\nu \circ \mathcal{G}, F_{\nu+1} \circ \mathcal{G}) < \frac{1}{2^\nu}$ , esistono  $G_1$  e  $G_2$  in  $\mathcal{G}$  tali che  $d(F_\nu \circ G_1, F_{\nu+1} \circ G_2) < \frac{1}{2^\nu}$ . Sia  $G_3$  tale che  $F_\nu \circ G_1 = H_\nu \circ G_3$  allora assumiamo  $H_{\nu+1} = F_{\nu+1} \circ G_2 \circ G_3^{-1}$ , infatti

$$d(H_\nu, F_{\nu+1} \circ G_2 \circ G_3^{-1}) = d(H_\nu \circ G_3, F_{\nu+1} \circ G_2) = d(F_\nu \circ G_1, F_{\nu+1} \circ G_2).$$

È facile vedere che  $\{H_\nu\}_{\nu \in N}$  è di Cauchy in  $\mathcal{F}^3$ . Infatti per  $i < j$

$$d(H_i, H_j) \leq \sum_{n=i}^{j-1} d(H_n, H_{n+1}) \leq \frac{1}{2^i} + \dots + \frac{1}{2^j} \leq \frac{1}{2^{i+1}}.$$

Essendo  $\mathcal{F}^3$  completo, si ha che  $\{H_\nu\}_{\nu \in N}$  converge in  $\mathcal{F}^3$ . Poiché l'applicazione canonica  $\pi: \mathcal{F}^3 \rightarrow \mathcal{F}^3/\mathcal{G}$  è continua si ha che anche  $\pi(H_\nu) = F_\nu \circ \mathcal{G}$  converge in  $\mathcal{F}^3/\mathcal{G}$ .

A questo punto conviene considerare nello spazio  $X$  la metrica  $d$  indotta dalla bigezione  $\chi$  di  $X$  in  $\mathcal{F}^3/\mathcal{G}$ . Quindi

$$d(\Omega_1, \Omega_2) = \delta(\chi(\Omega_1), \chi(\Omega_2))$$

per mezzo di questa metrica  $d$ , che chiameremo « di Courant »  $X$  è divenuto uno spazio metrico completo.

**TEOREMA 4.** *Nello spazio metrico completo  $X$  con la « metrica di Courant »  $\delta$ , è di I categoria il sottoinsieme costituito dagli aperti limitati  $\Omega$ , tali che lo spettro dell'operatore di Laplace  $-\Delta_\Omega$  relativo ad  $\Omega$  con dati di Dirichlet nulli non ha autovalori tutti semplici.*

Indichiamo con  $A_n$  il sottoinsieme di  $X$  così definito  $A_n = \{\Omega \in X: -\Delta_\Omega \text{ ha semplici i primi } n \text{ autovalori}\}$ . Indichiamo con  $A$  l'insieme degli  $\Omega \in X$  tali che  $-\Delta_\Omega$  ha autovalori tutti semplici.

È banale che

$$A = \bigcap_{n \in N} A_n \quad \text{e} \quad \mathcal{C}A = \bigcup_{n \in N} \mathcal{C}A_n.$$

Se dimostriamo che gli  $A_n$  sono sottoinsiemi aperti e densi in  $X$ , allora  $\mathcal{C}A_n$  sono sottoinsiemi chiusi e privi di punti interni dello spazio metrico completo  $\chi$  e, quindi  $\mathcal{C}A$  è di I categoria.

Dimostriamo che  $A_n$  è aperto. Sia  $\tilde{\Omega} \in A_n$ .

Per un noto risultato di Courant<sup>(2)</sup> si ha che esiste  $\varepsilon > 0$  tale che ogni  $\Omega$ , immagine di  $\tilde{\Omega}$  mediante un'applicazione  $I + \psi$  di  $\mathbb{R}^m$  in sé con  $\|\psi\|_{\mathcal{C}^1} < \varepsilon$ , ha ancora semplici i primi  $n$  autovalori. Poniamo

$$B(\tilde{\Omega}, r) = \{\Omega : d(\Omega, \tilde{\Omega}) < r\}.$$

Dalla definizione di  $d$ , dalle proprietà di gruppo metrico di  $\mathcal{F}^3$  e dal lemma 3, si ha che esiste  $r$  tale che ogni  $\Omega$  di  $B(\tilde{\Omega}, r)$  è immagine di  $\tilde{\Omega}$  mediante un'applicazione  $I + \psi$  con  $\|\psi\|_{\mathcal{C}^1} < \varepsilon$ .

Dimostriamo che  $A_n$  è denso in  $X$ .

Sia  $\tilde{\Omega} \in X$ , consideriamo  $B(\tilde{\Omega}, r)$  dobbiamo dimostrare che in  $B(\tilde{\Omega}, r)$  c'è almeno un elemento  $\Omega$  di  $A_n$ . Da un risultato del mio precedente lavoro<sup>(3)</sup> si ha che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\Omega$ , immagine di  $\tilde{\Omega}$  mediante un'applicazione  $I + \psi$  di  $\mathbb{R}^m$  in sé con  $\|\psi\|_{\mathcal{C}^3} < \varepsilon$  tale che  $\Omega$  ha tutti gli autovalori semplici. È chiaro che se  $\varepsilon < 1$  si può facilmente scegliere  $I + \psi$  in modo che stia in  $\mathcal{F}^3$ . A questo punto dalla definizione di  $d$ , e dalle proprietà di gruppo metrico di  $\mathcal{F}^3$  segue che esiste  $\varepsilon$  tale che il nostro  $\Omega$  appartenga ad  $B(\tilde{\Omega}, r)$ .

Pisa, Università.

---

<sup>(2)</sup> [2] pag. 423.

<sup>(3)</sup> [1] Teorema C.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] MICHELETTI A. M. « *Perturbazione dello spettro dell'operatore di Laplace, in relazione ad una variazione del campo* ». Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 1972. Vol. XXVI, Fasc. I.
- [2] COURANT R., HILBERT D. « *Methods of Mathematical Physics* » vol. I Interscience New York, 1953.
- [3] KELLEY « *General Topology* » Van Nostrand New York, 1955.