ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARCO BIROLI

Ancora sulla perturbazione delle disequazioni d'evoluzione paraboliche

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 26, nº 3 (1972), p. 625-643
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1972_3_26_3_625_0>

ANCORA SULLA PERTURBAZIONE DELLE DISEQUAZIONI D'EVOLUZIONE PARABOLICHE

MARCO BIROLI (*)

§ 1. Introduziône ed enunciati.

Sia V uno spazio di Banach reale ed uniformemente convesso di norma $\| \|$, V^* il duale di V, $< , >$ la dualità entro V e V^* e $\| \|^*$ la norma duale su V^*.

Sia H uno spazio di Hilbert reale ed identificato col suo duale per il prodotto scalare $(,)$.

Supponiamo che V sia identificato con un sottospazio denso di H e che la iniezione di V in H sia compatta.

Sia poi K un insieme chiuso e convesso in H con $0 \in K$ e $A : V \longrightarrow V^*$ un operatore lineare, limitato e autoaggiunto in H, tale che

$$(1,1) \qquad \langle Av, v \rangle \geq \alpha \|v\|^2 \qquad \alpha > 0 \qquad \forall v \in V$$

Possiamo allora supporre, senza perdita di generalità, che

$$(1,2) \qquad \langle Av, v \rangle = \| v \|^2 \qquad \forall v \in V$$

Supponiamo infine che esista una base ortonormale di H, $\{v_1 , \dots , v_n , \dots\}$ formata da autovettori dell'operatore A, considerato in H, che sia pure una base di V.

Diamo ora una definizione:

DEF. I. Sia $M \in L(C(0, T; V); L^\infty(0, T; H))$ e $u(t) \in C(0, T; V)$; poniamo

$$r_t u(s) \begin{cases} = u(s) & \text{in } [0, t] \\ = 0 & \text{in }]t, T] \end{cases}$$

Pervenuto alla Redazione il 12 Luglio 1971.

(*) Istituto di Matematica del Politecnico di Milano. Lavoro eseguito usufruendo di una borsa di studio del C. N. R presso l'Università di Parigi.

Si dice che l'operatore M è di tipo locale se esiste una costante μ tale che $\forall t_0 \in [0, T]$

$$\| r_{t_0} Mu(t) \|_{L^\infty(0, T; H)} \leq \mu \| r_{t_0} u(t) \|_{L^\infty(0, T; V)}$$

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) + Mu(t) = f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1,3}$$

ove $f(t) \in L^2(0, T; H)$, $u_0 \in V$ e $M \in L(C(0, T; V); L^\infty(0, T; H))$ è di tipo locale.

Artolà, in [1], ha ottenuto il seguente risultato

Th I. *Supponiamo $Au_0 \in H$ e supponiamo che l'operatore M goda della seguente proprietà:*

Se

$$v_n(t) \to v(t) \text{ in } V \text{ su } [0, T],$$

allora

$$M v_n(t) \to Mv(t) \text{ q. o. su } [0, T] \text{ in } H.$$

Esiste allora una ed una sola soluzione di (1,3)

$$u(t) \in C(0, T; V) \quad \text{con} \quad \frac{du}{dt}(t) \in L^\infty(0, T; H).$$

Supponiamo ora che l'operatore M sia di tipo locale e si possa estendere allo spazio delle funzioni debolmente continue in V ed indichiamo, per semplicità, ancora con M tale estensione; supponiamo infine che se

$$\lim_{n \to \infty}{}^* v_n(t) = v(t) \text{ in } V \text{ uniformemente su } [0, T]$$

sia

$$\lim_{n \to \infty}{}^* Mv_n(t) = Mv(t) \text{ in } H \text{ uniformemente su } [0, T].$$

Consideriamo la disequazione d'evoluzione parabolica

$$\int_0^s \Big\{ \langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle + \\ + \langle Mu(t), v(t), - u(t) \rangle - \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \Big\} dt \geq \tag{1,4}$$

$$\geq \frac{1}{2}\{|v(s)-u(s)|^2-|v(0)-u_0|^2\} \qquad \forall s \in [0, T]$$

$$\forall v(t) \in L^2(0, T; V) \ \text{con} \ \frac{dv}{dt}(t) \in L^2(0, T; H) \quad v(t) \in K \ \text{in} \ [0, T]$$

$u(t)$ debolmente continua su $[0, T]$ in V con

$$u(t) \in K \ \text{in} \ [0, T]$$

$$u(0) = u_0$$

ove

$$f(t) \in L^2(0, T; H) \ \text{e} \ u_0 \in K.$$

Lo scopo di questo lavoro è ottenere un risultato di esistenza ed unicità ed un risultato di dipendenza continua per la soluzione del problema (1,4).

TH. II. *Sia* $u_0 \in K \cap V$ *e supponiamo che esista un operatore* $\beta : H \to H$ *di penalizzazione per* K, *tale che* $\beta = u - P_k u$ *e*

$$\langle Av, \beta v \rangle \geq 0 \qquad \forall v \in V, \ Av \in H$$

Esiste allora una ed una sola soluzione del problema (1,4) $u(t)$ *debolmente continua in* V *e tale che* $Au(t) \in L^2(0, T; H)$

TH III. *Consideriamo il problema*

$$(1,4_n) \qquad \int_0^s \Big\{\Big\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t)-u(t)\Big\rangle + \langle Au(t), v(t)-u(t)\rangle +$$
$$+ \langle Mu(t), v(t)-u(t)\rangle - \langle f_n(t), v(t)-u(t)\rangle\Big\} dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\{|v(s)-u(s)|^2-|v(0)-u_{0,n}|^2\} \qquad \forall s \in [0, T]$$

$$\forall v(t) \in L^2(0, T; V) \ \textit{con} \ \frac{dv}{dt}(t) \in L^2(0, T; H), \ v(t) \in K \ \text{su} \ [0, T]$$

$u(t)$ *debolmente continua in* V *su* $[0, T]$, $u(t) \in K$ *su* $[0, T]$, $u(0) = u_{0,n} \in K$ *ove*

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} f_n(t) = f(t) \ \text{in} \ L^2(0, T; H)$$

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} u_{0,n} = u_0 \ \text{in} \ V$$

Il problema $(1,4_n)$ *ammette una ed una sola soluzione* $u_n(t)$, *tale che*

$$\lim_{n\to 0}{}^{*}\; Au_n(t) = Au(t) \;\; in \;\; L^2(0, T; H)$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \;\; in \;\; L^2(0, T; V)$$

ove $u(t)$ *è la soluzione del problema* (1,4).

Nel § 2 si dimostra il Th. II, nel § 3 si dimostra il Th. III ed infine nel § 4 si fornisce un esempio di applicazione dei Th. II e III.

§ 2. Dimostrazione del Th. II.

Consideriamo dapprima il problema

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au(t) + Mu(t) + \dfrac{1}{\varepsilon}\beta(u(t)) = f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

e dimostriamo che esso ammette almeno una soluzione $u_\varepsilon(t) \in C(0, T; V)$ con $Au_\varepsilon(t) \in L^2(0, T; H)$.

Procediamo mediante il metodo di Faedo-Galerkin; indichiamo con V_n il sottospazio di V sotteso dai vettori $v_1, \dots, v_n$ e poniamo

$$f_n(t) = \sum_{i=1}^{n} (f(t), v_i)\, v_i, \qquad u_{0,n} \in V_n \quad \text{con} \quad \lim_{n\to\infty} u_{0,n} = u_0 \;\; \text{in} \;\; V.$$

Consideriamo il problema approssimante

$$(2.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au(t) + P_n Mu(t) + \dfrac{1}{\varepsilon} P_n\, \beta(u(t)) = f_n(t) \\ u(0) = u_{0,n} \end{cases}$$

ove con P_n si indica la proiezione di H su V_n.

Da [1] (Th. 5. III pag. 213) segue che (2.2) ha una ed una sola soluzione $u_n(t) \in C(0, T; V)$.

Determiniamo ora delle stime su $u_n(t)$.

Moltiplichiamo scalarmente l'equazione per $Au_n(t)$; si ottiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| u_n(t) \|^2 + | Au_n(t) |^2 \leq$$

$$\leq \langle f(t), Au_n(t) \rangle - \langle Mu_n(t), Au_n(t) \rangle - \frac{1}{\varepsilon} \langle \beta(u_n(t), Au_n(t) \rangle \leq$$

$$\leq |f(t)|\,|Au_n(t)| + |Mu_n(t)|\,|Au_n(t)|$$

da cui, integrando

$$\| u_n(t) \|^2 + 2\int_0^T | Au_n(t) |^2 \, dt \leq \| u_0 \| + 2\left(\int_0^T |f(t)|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T | Au_n(t) |^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ 2\left(\int_0^T | Mu_n(t) |^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T | Au_n(t) |^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \| u_0 \|^2 + \frac{1}{\delta_1}\int_0^T |f_n(t)|^2 \, dt + \delta_1 \int_0^T | Au_n(t) |^2 \, dt + \frac{1}{\delta_2}\int_0^T | Mu_n(t) |^2 \, dt +$$

$$+ \delta_2 \int_0^T | Au_n(t) |^2 \, dt \leq$$

$$\leq \| u_0 \|^2 + \frac{1}{\delta_1}\int_0^T |f_n(t)|^2 \, dt + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\left(\int_0^T | Au_n(t) |^2 \, dt\right) +$$

$$+ \frac{\mu^2}{\delta_2} \cdot T \sup_{t \in [0, T]} \| u_n(t) \|^2 + \frac{\mu^2}{\delta_2}$$

ove $\delta_1, \delta_2 > 0$ sono fissati.

Fissiamo δ_1 e δ_2 in modo che $\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} < \frac{1}{2}$ e supponiamo $T < \frac{2\delta_2}{\mu^2}$.

Si ha allora

$$\sup_{t \in [0, T]} \| u_n(t) \|^2 + \int_0^T | Au_n(t) |^2 \, dt \leq C \tag{2.3}$$

ove C è una costante che non dipende né da n né da ε.

Nel caso in cui $T \geq \frac{2\delta_2}{\mu^2}$ si riottiene (2.3) dividendo $[0, T]$ in intervalli parziali di ampiezza minore di $\frac{2\delta_2}{\mu^2}$.

Da (2.3) e (2.2) si ottiene che

$$\int_0^T \left| \frac{du_n}{dt}(t) \right|^2 dt \leq C' \tag{2.4}$$

ove C' è una costante indipendente da n, ma che dipende da ε.

Da (2.3) e (2.4) si ottiene che si può estrarre da $\{u_n(t)\}$ una sottosuccessione che, per semplicità, indichiamo ancora con $\{u_n(t)\}$, tale che

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} \frac{du_n}{dt}(t) = \frac{du_\varepsilon}{dt}(t) \text{ in } L^2(0, T; H) \tag{2.5}$$

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} Au_n(t) = Au_\varepsilon(t) \text{ in } L^2(0, T; H) \tag{2.6}$$

$$\lim_{n\to\infty}{}^{**} u_n(t) = u_\varepsilon(t) \text{ in } L^\infty(0, T; V) \tag{2.7}$$

Da (2.5) e (2.7) si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u_\varepsilon(t) \text{ in } L^2(0, T; H) \tag{2.8}$$

e quindi

$$\frac{1}{\varepsilon} | \beta(u_n(t) | \leq C''$$

(ove C'' è una costante indipendente da n, ma dipendente da ε)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varepsilon} \langle \beta(u_n(t)), u_n(t) - u_\varepsilon(t) \rangle = 0 \tag{2.9}$$

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} \frac{1}{\varepsilon} \beta(u_n(t)) = X(t) \text{ in } L^2(0, T; H) \tag{2.10}$$

Da (2.9) e (2.10) si ottiene

$$X(t) = \frac{1}{\varepsilon} \beta(u_\varepsilon(t)) \tag{2.11}$$

In base a (2.4) si ha che le funzioni $u_n(t)$ sono equicontinue in H ed in base a (2.3) si ottiene che $\forall t \in [0, T]$ la successione $\{u_n(t)\}$ è relativamente compatta in H; da ciò per il teorema di Ascoli-Arzelà vettoriale si ottiene che si può estrarre da $\{u_n(t)\}$ una sottosuccessione che, per semplicità, indichiamo ancora con $\{u_n(t)\}$, tale che

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u_\varepsilon(t) \text{ in } C(0, T; H) \tag{2.12}$$

Da (2.12), essendo le $\{u_n(t)\}$ uniformemente limitate in V, si ottiene

$$(2.13) \qquad \lim_{n \to \infty}{}^{*} u_n(t) = u_\varepsilon(t) \text{ in } V \text{ uniformemente su } [0, T].$$

Da (2.13) segue

$$(2.14) \qquad \lim_{n \to \infty}{}^{*} Mu_n(t) = Mu_\varepsilon(t) \text{ in } H \text{ uniformemente su } [0, T].$$

Da (2.5) (2.6) (2.10) (2.11) e (2.14) si deduce che $u_\varepsilon(t)$ è soluzione del problema (2.1).

Da (2.3) si ottiene poi

$$(2.15) \qquad \operatorname*{Sup}_{t \in [0, T]} \| u_\varepsilon(t) \|^2 + \int_0^T | Au_\varepsilon(t) |^2 \, dt \leq C$$

ove C non dipende da ε.

Enunciamo ora il seguente lemma la cui dimostrazione è identica a quella del teorema di Ascoli-Arzelà vettoriale

LEMMA 1. *Sia $\{v_\varepsilon(t)\}$ una successione in $C(0, T; H)$; supponiamo che vi sia una successione $\{t_m\}$ densa in $[0, T]$ tale che, $\forall m$, $\{v_\varepsilon(t_m)\}$ sia relativamente compatta in H, e che, fissato $\sigma > 0$ arbitrario, esistano δ_0 e ε_0, dipendenti da σ, in modo che*

$$| v_\varepsilon(t + \delta) - v_\varepsilon(t) | \leq \sigma \quad 0 \leq \delta \leq \delta_0 , \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 , \quad t + \delta, t \in [0, T]$$

La successione $\{v_\varepsilon(t)\}$ è allora relativamente compatta in $C(0, T; H)$.

Mostriamo ora, utilizzando il lemma 1, che la successione $\{u_\varepsilon(t)\}$ è relativamente compatta in $C(0, T; H)$.

Moltiplichiamo scalarmente l'equazione (2.1) per $(u_\varepsilon(t) - u_0)$; si ottiene

$$\frac{d}{dt} | u_\varepsilon(t) - u_0 |^2 \leq 2 \langle f(t), u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle - 2 \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle -$$
$$- 2 \langle Mu_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle - 2 \frac{1}{\varepsilon} \langle \beta u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle$$

Ricordiamo ora che $u_0 \in K$ e quindi

$$\frac{1}{\varepsilon} \langle \beta(u_\varepsilon(t)), u_0 - u_\varepsilon(t) \rangle \leq \frac{1}{\varepsilon} \langle \beta u_0 , u_0 - u_\varepsilon(t) \rangle = 0$$

da cui

$$\frac{d}{dt} | u_\varepsilon(t) - u_0 |^2 \leq 2 \langle f(t), u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle - 2 \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle -$$

$$- 2 \langle M u_\varepsilon (t), u_\varepsilon (t) - u_0 \rangle \leq$$

$$\leq K_1 \, | f(t) | + K_2 \, | A u(t) | + K_3$$

ove K_1, K_2, K_3 sono costanti indipendenti da ε.

Integrando si ottiene allora

$$| u_\varepsilon(t) - u_0 |^2 \leq K_1 \cdot t^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T | f(t) | \, dt \right)^{\frac{1}{2}} + K_2 \cdot t^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T | A u_\varepsilon(t) |^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} + K_3 \cdot t$$

In base a (2.3), $\forall \sigma > 0$, è allora possibile determinare δ_0 tale che

$$| u_\varepsilon (\delta) - u_0 | \leq \frac{\sigma}{2} \quad \text{per} \quad 0 \leq \delta \leq \delta_0$$

ove δ_0 è indipendente da u_0 che varia in un insieme limitato di V.

Osserviamo ora che si ha

$$\frac{d}{dt} (u_\varepsilon(t + \delta) - u_\varepsilon(t)) + A \, (u_\varepsilon(t + \delta) - u_\varepsilon(t)) + M u_\varepsilon(t + \delta) - M u_\varepsilon(t) +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} (\beta \, (u_\varepsilon(t + \delta) - \beta \, (u_\varepsilon(t)) = f(t + \delta) - f(t)$$

da cui moltiplicando scalarmente per $(u_\varepsilon(t + \delta) - u_\varepsilon(t))$ si ottiene

$$\frac{d}{dt} | u_\varepsilon(t + \delta) - u_\varepsilon(t) |^2 \leq 2 \langle f(t + \delta) - f(t), u_\varepsilon(t + \delta) - u_\varepsilon(t) \rangle -$$

$$- 2 \langle M u_\varepsilon(t + \delta) - M u_\varepsilon(t), u_\varepsilon (t + \delta) - u_\varepsilon(t) \rangle \leq$$

$$\leq | f(t + \delta) - f(t) | \cdot K_1' + K_2'$$

ove K_2' e K_2' sono costanti indipendenti da ε.

Integrando si ottiene allora

$$| u_\varepsilon(t + \delta) - u_\varepsilon(t) |^2 \leq 2 \, K_1' \, t^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T | f(s) |^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} + K_2' \cdot t + \frac{\sigma^2}{4}$$

Da ciò segue che

$$(2.16) \qquad | u (t + \delta) - u (t) | \leq \sigma \qquad 0 \leq \delta \leq \delta_0$$

per $t \leq \varrho$, ove ϱ dipende da σ.

Da (2.1), moltiplicando scalarmente per $u_\varepsilon(t)$, si ottiene poi

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \langle \beta u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) \rangle \, dt \leq \frac{1}{2} | u(T) |^2 + \frac{1}{2} | u_0 |^2 + T\mu \left(\operatorname*{Sup}_{t \in [0, T]} \| u(t) \| \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\operatorname*{Sup}_{t \in [0, T]} | u(t) | \right) + \left(\int_0^T | f(t) |^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\operatorname*{Sup}_{t \in [0, T]} | u(t) |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot T^{\frac{1}{2}} \leq C_1$$

dunque

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T | \beta u_\varepsilon(t) |^2 \, dt \leq C_1$$

Dalla relazione precedente segue che per quasi ogni $t \in [0, T]$

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} | \beta u_\varepsilon(t) |^2 < + \infty$$

Possiamo pertanto, fissata una successione densa in $[0, T]$ $\{s_n\}$, supporre, senza perdità di generalità, che si possa estrarre da $\{u_\varepsilon(t)\}$ una sottosuccessione, che per semplicità indichiamo ancora con $\{u_\varepsilon(t)\}$, tale che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} | \beta u_\varepsilon(s_i) | < + \infty \qquad u_\varepsilon(s_i) \in V$$

Suddividiamo l'intervallo $[0, T]$ in intervalli parziali di ampiezza minore di ϱ mediante i punti $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ appartenenti a $\{s_n\}$; è allora possibile fissare ε_0 tale che per $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon} | \beta u_\varepsilon(t_i) | \leq K \\ &\| u_\varepsilon(t_i) \| \leq C \end{aligned}\right. \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dimostriamo che, fissato $\sigma > 0$, esiste $\overline{\delta}_0$ tale che per $0 \leq \delta \leq \overline{\delta}_0$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$| u_\varepsilon(t + \delta) - u_\varepsilon(t) | \leq \sigma$$

per $t, t + \delta \in [t_i, t_{i+1}]$ $\qquad i = 1, \ldots, n - 1.$

È sufficiente dimostrare la tesi per $i = 1$; negli altri casi si procede analogamente.

Si ha

$$\frac{d}{dt} u_\varepsilon(t_1 + s) + A u_\varepsilon(t_1 + s) + M u_\varepsilon(t_1 + s) = f(t_1 + s)$$

Moltiplichiamo scalarmente per $u_\varepsilon(t_1 + s) - u_\varepsilon(t_1)$; si ha per $s > 0$ e $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\frac{1}{2} u_\varepsilon(t_1 + s) - u_\varepsilon(t_1)|^2 \leq \int_0^s |f(t_1 + \eta)| \, |u(t_1 + \eta) - u(t_1)| \, d\eta +$$

$$+ \int_0^s |Au_\varepsilon(t_1 + \eta)| \, |u_\varepsilon(t_1)| \, d\eta +$$

$$+ \int_0^s |Mu_\varepsilon(t_1 + \eta)| \, |u_\varepsilon(t_1 + \eta) - u_\varepsilon(t_1)| \, d\eta -$$

$$- \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \langle \beta u_\varepsilon(t_1 + \eta), u_\varepsilon(t_1 + \eta) - u_\varepsilon(t_1) \rangle \, d\eta$$

$$\leq K_1 s^{1/2} \left(\int_0^T |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} + K_2 s^{1/2} \left(\int_0^T |Au_\varepsilon(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$$

$$+ K_3 s - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \langle \beta u_\varepsilon(t_1 + \eta), P_k u_\varepsilon(t_1 + \eta)$$

$$- u_\varepsilon(t_1) > d\eta \leq$$

$$\leq K_1'' s^{1/2} + K_3 s - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \langle \beta u_\varepsilon(t_1 + \eta), P_k u_\varepsilon(t_1) - u_\varepsilon(t_1) \rangle \, d\eta \leq$$

$$\leq K_1'' s^{1/2} + K_3 s + K s^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\int_0^T |\beta u_\varepsilon(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \leq K_1''' s^{1/2} + K_3 s.$$

Esiste allora $\overline{\delta}_0$, che dipende solo da K, quindi da σ, tale che

$$|u_\varepsilon(t_1 + \delta) - u_\varepsilon(t_1)| \leq \sigma/2$$

per $0 \leq \delta \leq \overline{\delta}_0$, $t_1 + \delta \in [t_1, t_2]$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

Si dimostra infine, come nella parte precedente, che

$$|u_\varepsilon(t + \delta) - u_\varepsilon(t)| \leq \sigma$$

$0 \leq \delta \leq \overline{\delta}_0 \quad t, t + \delta \in [t_1, t_2], \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Si può quindi concludere che fissato $\sigma > 0$ arbitrario è possibile determinare un $\tilde{\delta}_0$ e un $\tilde{\varepsilon}_0$, dipendenti da σ, tali che

$$| u_\varepsilon (t + \delta) - u_\varepsilon (t) | \leq \sigma$$

$0 \leq \delta \leq \tilde{\delta}_0 , \quad t, t + \delta \in [0, T] \quad 0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}_0$

In base al lemma 1, possiamo allora asserire che si può estrarre da $\{u_\varepsilon (t)\}$ una successione che, per semplicità, indichiamo ancora con $\{u_\varepsilon (t)\}$ tale che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon (t) = u (t) \quad \text{in} \quad C (0, T ; H) \tag{2.17}$$

Da (2.15) si ottiene allora

$$\lim_{\varepsilon \to 0}{}^{*} u_\varepsilon (t) = u (t) \tag{2.18}$$

uniformemente su $[0, T]$ in V, da cui

$$\lim_{\varepsilon \to 0}{}^{*} Mu_\varepsilon (t) = Mu (t) \tag{2.19}$$

uniformemente su $[0, T]$ in H.

Da (2.15) si ha poi

$$\lim_{\varepsilon \to 0}{}^{*} Au_\varepsilon (t) = Au (t) \text{ in } L^2 (0, T ; H) \tag{2.20}$$

Ricordiamo ora che si ha

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T | \beta u_\varepsilon (t) |^2 \, dt \leq C_1$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \langle \beta u_\varepsilon (t), u_\varepsilon (t) \rangle \, dt \leq C_1$$

dunque

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T \langle \beta u_\varepsilon (t), u_\varepsilon (t) \rangle \, dt = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T | \beta u_\varepsilon (t) |^2 \, dt = 0$$

da cui, essendo $\beta : H \rightarrow H$ monotono,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \beta u_\varepsilon (t) = \beta u (t) = 0$$

in $L^2 (0, T ; H)$

Si può dunque affermare che

$$u(t) \in K \text{ in } [0, T]. \tag{2.21}$$

Sia ora $v(t) \in L^2(0, T; V)$ con $\frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; H)$ e $v(t) \in K$ in $[0, T]$.

Da (2.1) si ha

$$\left\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \right\rangle + \langle Au_\varepsilon(t), v(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle +$$

$$+ \langle Mu_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle - \langle f(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle \geq$$

$$\geq \left\langle \frac{dv}{dt}(t) - \frac{du_\varepsilon}{dt}(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \right\rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle \beta(v(t)) - \beta(u_\varepsilon(t)), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \frac{1}{dt} | v(t) - u_\varepsilon(t) |^2$$

Da cui, $\forall s \in [0, T]$ integrando da 0 a s, si ottiene

$$\int_0^s \left\{ \left\langle \frac{dv}{dt}, v(t) - u_\varepsilon(t) \right\rangle + \langle Au_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle + \right. \tag{2.22}$$

$$\left. + \langle Mu_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle - \langle f(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle \right\} dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \{ | v(s) - u_\varepsilon(s) |^2 - | v(0) - u_0 |^2 \}$$

In base a (2.17) (2.19) e (2.20) si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^s \left\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \right\rangle dt = \int_0^s \left\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u(t) \right\rangle dt \tag{2.23}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^s \langle Au_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle dt = \int_0^s \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle dt \tag{2.24}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^s \langle Mu_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle dt = \int_0^s \langle Mu(t), v(t) - u(t) \rangle dt \tag{2.25}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^s \langle f(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle \, dt = \int_0^s \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \, dt \tag{2.26}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} | v(s) - u_\varepsilon(s) |^2 = | v(s) - u(s) |^2 \tag{2.27}$$

Da (2.22) si ha allora

$$\int_0^s \left\{ \left\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u(t) \right\rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle + \right.$$
$$\left. + \langle Mu(t), v(t) - u(t) \rangle - \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \right\} dt \geq$$
$$\geq \frac{1}{2} \{ | v(s) - u(s) |^2 - | v(0) - u_0 |^2 \}.$$

La funzione $u(t)$ è quindi soluzioue del problema (1.4).
Passiamo ora a dimostrare che $u(t)$ è l'unica soluzione del problema (1.4).
Supponiamo che vi sia una seconda soluzione u_* di (1.4).

Poniamo

$$w(t) = \frac{u(t) + u_*(t)}{2}$$

e definiamo $w_\eta(t)$ mediante il problema

$$\begin{cases} \eta \dfrac{dw_\eta}{dt}(t) + w_\eta(t) = w(t) \\ w_\eta(o) = w(o) = u_0 \end{cases} \tag{2.28}$$

Si verifica facilmente che, [3],

$$w_\eta(t) \in L^2(0, T; V) \qquad \frac{dw_\eta}{dt}(t) \in L^2(0, T; H)$$

$$w_\eta(t) \in K \text{ in } [0, T]$$

$$\lim_{\eta \to 0} w_\eta(t) = w(t) \text{ in } C(0, T; H) \tag{2.29}$$

$$\lim_{\eta \to 0} w_\eta(t) = w(t) \text{ in } L^2(0, T; V) \tag{2.30}$$

Poniamo allora in (1.4)

$$v(t) = w_\eta(t)$$

Si ottiene

$$\int_0^s \left\{ \left\langle \frac{dw_\eta}{dt}(t), w_\eta(t) - u(t) \right\rangle + \langle Au(t), w_\eta(t) - u(t) \rangle + \right.$$

$$\left. + \langle Mu(t), w_\eta(t) - u(t) \rangle - \langle f(t), w_\eta(t) - u(t) \rangle \right\} dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} | w_\eta(s) - u(s) |^2$$

$$\int_0^s \left\{ \left\langle \frac{dw_\eta}{dt}(t), w_\eta(t) - u_*(t) \right\rangle + \langle Au_*(t), w_\eta(t) - u_*(t) \rangle + \right.$$

$$\left. + \langle Mu_*(t), w_\eta(t) - u_*(t) \rangle - \langle f(t), w_\eta(t) - u_*(t) \right\} dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} | w_\eta(s) - u_*(s) |^2$$

Facendo la semisomma delle due relazioni precedenti si ottiene

$$\int_0^s \left\{ \left\langle \frac{dw_\eta}{dt}(t), w_\eta\ t) - w(t) \right\rangle + \frac{1}{2} \langle Au(t), w_\eta(t) - u(t) \rangle + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \langle Au_*(t), w_\eta(t) - u_*(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle Mu(t), w_\eta(t) - u(t) \rangle +$$

$$\left. + \frac{1}{2} \langle Mu_*(t), w_\eta(t) - u_*(t) \rangle - \langle f(t), w_\eta(t) - w(t) \rangle \right\} dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{4} \{ | w_\eta(s) - u(s) |^2 + | w_\eta(s) - u_*(s) |^2 \}$$

Passando allora al limite per $\eta \to 0$ e tenendo conto di (2.29) e (2.30) si ottiene, essendo

$$\left\langle \frac{dw_\eta}{dt}(t), w_\eta(t) - w(t) \right\rangle \leq 0 \qquad \text{in} \qquad [0, T],$$

$$\frac{1}{2} | u(s) - u_*(s) | \leq \int_0^s \langle M(u(s) - u_*(s)), u(s) - u_*(s) \rangle \, dt \leq \tag{2.31}$$

$$\leq s \cdot \mu \cdot (\operatorname*{Sup}_{t \in [0, s]} \| u(t) - u_*(t) \|) (\operatorname*{Sup}_{t \in [0, s]} | u(t) - u_*(t) |)$$

$$\leq s \cdot \mu \cdot (\operatorname*{Sup}_{t \in [0, T]} \| u(t) - u_*(t) \|) (\operatorname*{Sup}_{t \in [0, s]} | u(t) - u_*(t) |)$$

Poniamo allora $q(s) = s\mu \cdot (\sup_{t \in [0,T]} \| u(t) - u_*(t) \|)$ e supponiamo che s sia tale che $q(s) < \frac{1}{2}$.

Da (2.31) si ha allora

$$\left(\frac{1}{2} - q(s)\right) \sup_{t \in [0,s]} | u(t) - u_*(t) | \leq 0$$

da cui

$$u(t) - u_*(t) = 0 \Longrightarrow u(t) = u_*(t) \quad \text{in} \quad [0, s]$$

Se allora $q(T) < \frac{1}{2}$ la tesi è provata. Se $q(T) \geq \frac{1}{2}$ esiste $\bar{s}$ tale che $q(\bar{s}) < \frac{1}{2}$; dividendo allora $[0, T]$ in intervalli parziali di misura inferiore a $\bar{s}$ non sovrapponentesi, si riottiene la tesi.

§ 3. Dimostrazione del Th. III.

In base al Th. II, il problema $(1,4_n)$ ammette, $\forall n$, una soluzione $u_n(t)$ e si ha

$$\int_0^s \Big\{ \Big\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u_n(t) \Big\rangle + \langle Au_n(t), v(t) - u_n(t) \rangle +$$

$$+ \langle Mu_n(t), v(t) - u_n(t) \rangle - \langle f_n(t), v(t) - u_n(t) \rangle \Big\} dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \{ | v(s) - u_n(s) |^2 - | v(0) - u_{0,n} |^2 \}$$

Procedendo allora come al § precedente si ottiene che è possibile estrarre da $\{u_n(t)\}$ una sottosuccessione $\{u_{n'}(t)\}$ tale che

(3.1) $$\lim_{n' \to \infty} u_{n'}(t) = u(t) \quad \text{in} \quad C(0, T, H)$$

Sempre procedendo come al § precedente si deduce che

$$\int_0^T | Au_n(t) |^2 dt + \| u_n(t) \|^2 \leq C$$

ove C è una costante indipendente da n.

Possiamo quindi supporre senza perdita di generalità

(3.2) $$\lim_{n'\to\infty}{}^{*}\ u_{n'}(t) = u(t) \text{ in } V \text{ uniformemente su } [0, T]$$

(3.3) $$\lim_{n'\to\infty}{}^{*}\ Au_{n'}(t) = Au(t) \text{ in } L^2(0, T; H)$$

e quindi

(3.4) $$\lim_{n'\to\infty} u_{n'}(t) = u(t) \text{ in } L^2(0, T; V)$$

(3.5) $$\lim_{n'\to\infty}{}^{*}\ Mu_{n'}(t) = Mu(t) \text{ in } H \text{ uniformemente su } [0, T]$$

Si ha allora

$$u(t) \in K \quad \text{in } [0, T]$$

e

(3.6) $$\lim_{n'\to\infty} \int_0^s \left\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u_{n'}(t) \right\rangle dt = \int_0^s \left\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u(t) \right\rangle dt$$

(3.7) $$\lim_{n'\to\infty} \int_0^s \langle Au_{n'}(t), v(t) - u_{n'}(t) \rangle\, dt = \int_0^s \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle\, dt$$

(3.8) $$\lim_{n'\to\infty} \int_0^s \langle Mu_{n'}(t), v(t) - u_{n'}(t) \rangle\, dt = \int_0^s \langle Mu(t), v(t) - u(t) \rangle\, dt$$

(3.9) $$\lim_{n'\to\infty} \int_0^s \langle f_{n'}(t), v(t) - u_{n'}(t) \rangle\, dt = \int_0^s \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle\, dt$$

Si ha allora da (3.1) (3.6) (3.7) (3.8) (3.9)

$$\int_0^s \left\{ \left\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u(t) \right\rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle + \right.$$

$$\left. + \langle Mu(t), v(t) - u(t) \rangle - \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \right\} dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \left\{ |v(s) - u(s)|^2 - |v(o) - u_0|^2 \right\}$$

Quindi $u(t)$ è soluzione del problema (1.4); dall'unicità della soluzione di (1.4) e da (3.3) e (3.4) si ha

$$\lim_{n \to \infty}{}^{*} \, A u_n(t) = A u(t) \quad \text{in} \quad L^2(0, T; H)$$

$$\lim_{n \to \infty} u_n(t) = u(t) \quad \text{in} \quad L^2(0, T; V)$$

§ 4. Esempi.

Poniamo $V = H_0^1(\Omega) \qquad H = L^2(\Omega)$ e

$$K = \{v(x) \mid v(x) \in L^2(\Omega) \quad v(x) \geq 0 \quad \text{q.o. su } \Omega\}$$

ove Ω è un aperto, di frontiera Γ, limitato in R^n.

Definiamo poi l'operatore $A : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ attraverso la seguente relazione

$$\langle Av, w \rangle = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} + a_0(x) v(x) w(x) \right\} dx$$

$\forall v(x), w(x) \in H_0^1(\Omega)$, ove

$$a_{ij}(x), a_0(x) \in L^\infty(\Omega)$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad \text{q.o. su } \Omega$$

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$$

$$\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n \quad \text{q.o. in } \Omega \text{ e}$$

$$a_0(x) \geq 0 \quad \text{q.o. in } \Omega$$

Sia ora $\omega(t)$ una funzione soddisfacente le seguenti proprietà:

(*a*) $\omega(t)$ è misurabile su $[0, T]$

(*b*) esiste $t_0 \geq 0$ tale che $t - \omega(t) \geq 0$, per $t \in [t_0, T]$ q.o. e $t - \omega(t) < 0$ su $[0, t_0[$ q.o.

Poniamo

$$-\infty < -\tau_0 = \operatorname*{Inf}_{t \in [0, t_0[} (t - \omega(t)), (t - \omega(t)) \leq T \quad \text{q.o. su } [t_0, T[$$

$$g(t, x) \in L^2(-\tau_0, 0; H_0^1(\Omega))$$

$$u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$$

Siano ora $b_i(t, x) \in L^\infty([0, T] \times \Omega)$ $\quad i = 1, \dots, n$ e poniamo

$$Mv(t, x) = \begin{cases} = \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x) \dfrac{\partial v}{\partial x_i}(t - \omega(t), x) & \text{in } [t_0, T] \times \Omega \text{ q.o.} \\ = 0 \quad \text{in } [0, t_0[\times \Omega \text{ q.o.} \end{cases}$$

È facile verificare che $M \in L(C(0, T; H_0^1(\Omega)); L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))$ ed è pseudolocale, [1]; si verifica poi senza difficoltà che se $\{v_n(t, x)\}$ è tale che

$$\lim_{n \to \infty}{}^{*} v_n(t, \cdot) = v(t, \cdot) \text{ in } H_0^1(\Omega) \text{ uniformemente su } [0, T]$$

si ha pure

$$\lim_{n \to \infty}{}^{*} Mv_n(t, \cdot) = Mv(t, \cdot) \text{ in } L^2(\Omega) \text{ uniformemente su } [0, T]$$

Sia poi

$$f_0(t, x) \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ e poniamo}$$

$$f(t, x) = \begin{cases} = f_0(t, x) \text{ in } [t_0, T] \times \Omega \quad \text{q.o.} \\ = f_0(t, x) - \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x) \dfrac{\partial u_0}{\partial x_i}(t - \omega(t), x) \quad \text{in} \quad [0, t_0[\times \Omega \text{ q.o.} \end{cases}$$

Osserviamo che un operatore di penalizzazione per K è

$$\beta(v) = v^- \qquad \forall v(t, x) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

ove

$$v^-(t, x) = \begin{cases} = v(t, x) & \text{q.o. } \{(t, x) \mid v(t, x) \leq 0\} \\ = 0 & \text{q.o. } \{(t, x) \mid v(t, x) > 0\} \end{cases}$$

Possiamo allora concludere che il problema (1.4) ha in questo caso una ed una sola soluzione $u(t, x)$ in base al Th. II.

Osserviamo che in questo caso la forma esplicita del problema (1,4) è la seguente

$$\int_0^s \int_\Omega \left\{ \frac{\partial v}{\partial t}(t, x)(v(t, x) - u(t, x)) - \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x)\right) \cdot \right.$$

$$\cdot (v(t,x) - u(t,x)) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(t - \omega(t), x)(v(t,x) - u(t,x))$$

$$- f_0(t,x)(v(t,x) - u(t,x))\} \, dt \, dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \{ \| v(s,\cdot) - u(s\cdot) \|^2_{L^2(\Omega)} - \| v(0,\cdot) - u_0(0,\cdot) \|^2_{L^2(\Omega)} \}$$

$$\forall v(t,x) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad \text{con} \quad \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

e $v(t,x) \geq 0$ q.o. su $[0, T] \times \Omega$, $u(t,\cdot)$ continua nella topologia debole di $H_0^1(\Omega)$ su $[0, T]$ con $u(t,x) = g(t,x)$ in $[-\tau_0, 0] \times \Omega$ q.o e $u(t,x) \geq 0$ q.o. in $[0, T] \times \Omega$, $u(0,x) = u_0(x)$ q.o. in Ω.

In base al Th. III la soluzione $u(t,x)$ di tale problema dipende con continuità in $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ da $f_0(t,x)$, $u_0(t,x)$ ed $u_0(x)$ considerati rispettivamente nelle topologie deboli di $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, di $L^2(-\tau_0, 0; H_0^1(\Omega))$ e di $H_0^1(\Omega)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARTOLÀ M.: *Sur les perturbations des équations d'évolution. Application à des problèmes de retard.* [Ann. Scient. Ecole Nor. Sup. 4ª serie. Torno 2º (1969) pag. 137-253].

[2] BIROLI M.: *Sulla perturbazione delle disequazioni d'evoluzione paraboliche.* [Ann. Sc. Nor. Pisa, vol. XXV, fasc. 1 (1971)].

[3] LIONS J. L.: *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linèaires.* [Coll. études math. Dunod - Gauthier - Villars (1969)].