

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GUY ROOS

Formules intégrales pour les formes différentielles sur \mathcal{C}^n , I

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 26,
n° 1 (1972), p. 171-179

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1972_3_26_1_171_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FORMULES INTEGRALES POUR LES FORMES DIFFERENTIELLES SUR \mathbb{C}^n , I.

par GUY ROOS

Les propriétés des variétés analytiques complexes q -pseudoconvexes et q -pseudoconcaves suggèrent l'utilité de disposer d'outils d'analyse, analogues à la formule de Cauchy ou à la formule de Bochner-Martinelli pour les fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes et faisant intervenir des formes différentielles ou des classes de d'' -cohomologie de type (p, q) . Une formule de ce type a été annoncée par W. KOPPELMANN [2] pour les formes de type $(0, q)$. Les noyaux introduits à cet effet par Koppelman s'avèrent provenir du noyau classique de Bochner-Martinelli par un « changement d'origine mobile », i. e. en remplaçant la forme localement intégrable $K(z)$ de Bochner-Martinelli ($z \in \mathbb{C}^n$) par son image réciproque $K(\zeta - z)$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. De plus, cette opération fournit directement les noyaux qui permettent de généraliser au cas $p \neq 0$ les formules de [2]; l'ensemble de ces formules apparaît alors comme résultant de la décomposition, suivant le type partiel en l'une des variables z, ζ , d'une formule intégrale unique dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

1. Soient X une variété à bord (orientée, de classe C^∞), B son bord, $Y = X \setminus B$; on note j l'injection de Y dans X et b_Y l'opérateur bord dans $\mathcal{D}'(Y)^{(1)}$. On notera $[c]$ (resp. $[\varphi]$) le courant défini par une chaîne c (resp. par une forme φ).

LEMME 1.1. *Soit T un courant sur X , dont le support singulier ne rencontre pas B , et soit α une forme différentielle (de classe C^∞) qui définit T au*

Pervenuto alla Redazione il 13 Gennaio 1971.

⁽¹⁾ Les notations concernant les formes différentielles et les courants sont celles de [4] ou [5]; leur signification est précisée dans le cas contraire.

voisinage de B . On a alors

$$(1.1) \quad bT = [B] \wedge w \alpha + j_* b_Y(T|_Y).$$

DÉMONSTRATION. Soit U un voisinage de B tel que $T|_U = [\alpha|_U]$ et soit (ϱ_1, ϱ_2) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U, Y) . On a alors, pour toute forme $\varphi \in \mathcal{D}(X)$,

$$\langle bT, \varphi \rangle = \langle bT, \varrho_1 \varphi \rangle + \langle bT, \varrho_2 \varphi \rangle.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \langle bT, \varrho_1 \varphi \rangle &= \langle T, d(\varrho_1 \varphi) \rangle = \int_{\bar{X}} \alpha \wedge d(\varrho_1 \varphi) = \\ &= \int_{\bar{X}} d(w \alpha \wedge \varrho_1 \varphi) - \int_Y d w \alpha \wedge \varrho_1 \varphi \\ &= \int_B w \alpha \wedge \varphi + \langle j_* b_Y(T|_Y), \varrho_1 \varphi \rangle \end{aligned}$$

et

$$\langle bT, \varrho_2 \varphi \rangle = \langle b_Y(T|_Y), (\varrho_2 \varphi)|_Y \rangle = \langle j_* b_Y(T|_Y), \varrho_2 \varphi \rangle,$$

d'où

$$\langle bT, \varphi \rangle = \int_B w \alpha \wedge \varphi + \langle j_* b_Y(T|_Y), \varphi \rangle.$$

Le lemme 1.1 généralise la relation (IX, 3 ; 24) de [5] et est implicitement utilisé dans la démonstration de nombreuses formules intégrales. On a par exemple

PROPOSITION 1.2. Soient Z une variété analytique complexe de dimension n , X une sous-variété relativement compacte à bord, de dimension réelle $2n$, de la variété C^∞ sous-jacente à Z , B le bord de X , K une forme localement intégrable de type $(n, n-1)$ sur Z , C^∞ en dehors d'un sous-ensemble discret S de Z et telle que $d[K] = d''[K] = [S]$. On a alors, pour toute fonction f , C^∞ au voisinage de X , et si $B \cap S = \emptyset$,

$$(1.2) \quad \sum_{z \in \bar{X} \cap S} f(z) = \int_B K \wedge f + \int_{\bar{X}} K \wedge d'' f$$

et en particulier, si f est holomorphe,

$$\sum_{z \in \bar{X} \cap S} f(z) = \int_B K \wedge f.$$

Soit en particulier $Z = \mathbb{C}^n$; on considère les formes différentielles

$$\|z\|^2 = \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j, \omega(z) = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n, \omega'(z) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} z_j \bigwedge_{k \neq j} dz_k$$

et

$$(1.3) \quad K(z) = \|z\|^{-2n} \omega(z) \wedge \omega'(\bar{z}) \quad (z \in \mathbb{C}^n; z \neq 0),$$

où on a désigné par $\omega'(\bar{z})$ l'image réciproque de $\omega'(z)$ par la conjugaison $z \rightarrow \bar{z}$. Il est alors bien connu que le courant $[K]$ défini par K dans \mathbb{C}^n est tel que

$$(1.4) \quad d[K] = d''[K] = \frac{(2i\pi)^n}{(n-1)!} [\{0\}];$$

appliquant la relation (1.2), on a alors

$$(1.5) \quad \int_B K \wedge f + \int_{\bar{X}} K \wedge d'' f = \begin{cases} (2i\pi)^n f(0)/(n-1)! & \text{si } 0 \in Y \\ 0 & \text{si } 0 \notin X \end{cases}$$

(formule de Bochner-Martinelli).

LEMME 1.3. *Sous les hypothèses du lemme 1.1, soit τ une application propre et C^∞ de X sur une variété sans bord. On a alors*

$$(1.6) \quad b \tau_* T = (\tau|_B) w[\alpha|_B] + (\tau|_Y)_* b_Y(T|_Y).$$

DÉMONSTRATION. On applique la relation (1.1) du lemme 1.1, d'où

$$\tau_* bT = \tau_* ([B] \wedge w[\alpha]) + (\tau|_Y)_* b_Y(T|_Y);$$

or on a

$$\tau_* bT = b\tau_* T$$

et

$$\tau_* ([B] \wedge w[\alpha]) = (\tau|_B)_* w[\alpha|_B].$$

On pose dans la suite $\sigma_n = (2i\pi)^n/(n-1)!$. On désignera par W_1' (resp. W_2') l'opérateur linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$ défini comme suit. Soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$; il existe alors une décomposition unique

$$\alpha = \sum_{p,q} \alpha_{p,q}^1 \quad (\text{resp. } \alpha = \sum_{r,s} \alpha_{r,s}^2)$$

de α comme somme de formes de type (p, q) par rapport aux variables du

dice s ; on note \bar{j} l'entier $j + n$. L'intégrale (1.9) est donc égale à

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2n} (-1)^{p+q} \int_{\zeta \in \mathcal{S}_{z, \varepsilon}} \sum_{t=1}^q \delta_1^{i_1 \dots i_{n-p} j_1 \dots j_p \bar{m}_t \bar{r}_1 \dots \bar{r}_{n-q} \bar{m}_1 \dots \widehat{\bar{m}_t} \dots \bar{m}_q} \\ & a(z, \zeta) (\bar{\zeta}_{m_t} - \bar{z}_{m_t}) dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{n-p}} \wedge d\bar{\zeta}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{\zeta}_{j_p} \wedge dz_{r_1} \wedge \dots \wedge \\ & \wedge d\bar{z}_{r_{n-q}} \wedge d\bar{\zeta}_{m_1} \wedge \dots \wedge d\widehat{\bar{\zeta}_{m_t}} \wedge \dots \wedge d\bar{\zeta}_{m_q} \wedge dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_p} \wedge d\bar{\zeta}_{i_1} \wedge \\ & \wedge \dots \wedge d\bar{\zeta}_{i_{n-p}} \wedge d\bar{z}_{m_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{m_q} \wedge d\bar{\zeta}_{r_1} \wedge \dots \wedge d\bar{\zeta}_{r_{n-q}} \\ & = \varepsilon^{-2n} \int_{\zeta \in \mathcal{S}_{z, \varepsilon}} a(z, \zeta) dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_p} \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{n-p}} \wedge d\bar{z}_{m_1} \wedge \\ & \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{m_q} \wedge d\bar{z}_{r_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{r_{n-q}} \wedge \omega(\zeta) \wedge \\ & \wedge \sum_{t=1}^q (-1)^{m_t-1} (\bar{\zeta}_{m_t} - \bar{z}_{m_t}) d\bar{\zeta}_1 \wedge \dots \wedge d\widehat{\bar{\zeta}_{m_t}} \wedge \dots \wedge d\bar{\zeta}_n \\ & \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\asymp} \varepsilon^{-2n} \alpha(z, z) \wedge \int_{\zeta \in \mathcal{S}_{z, \varepsilon}} \omega(\zeta) \wedge \sum_{t=1}^q (-1)^{m_t} (\bar{\zeta}_{m_t} - \bar{z}_{m_t}) \\ & \wedge d\bar{\zeta}_1 \wedge \dots \wedge d\widehat{\bar{\zeta}_{m_t}} \wedge \dots \wedge d\bar{\zeta}_n \\ & = \varepsilon^{-2n} \alpha(z, z) \wedge \int_{\zeta \in \mathcal{B}_{z, \varepsilon}} q (-1)^n \omega(\zeta) \wedge \omega(\bar{\zeta}) = \frac{q}{n} \sigma_n \alpha(z, z). \end{aligned}$$

PROPOSITION 1.5. *La forme $\tilde{K} = \sigma^* K$ définit dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ un courant $[\tilde{K}]$ qui vérifie les relations ⁽³⁾*

$$(1.11) \quad d[\tilde{K}] = d''[\tilde{K}] = \sigma_n [A];$$

$$(1.12) \quad d'_1[\tilde{K}] = [d'_1 K], \quad d'_2[\tilde{K}] = [d'_2 K];$$

⁽²⁾ On oriente \mathbb{C}^n par la forme $(i/2)^n \omega(z) \wedge \omega(\bar{z})$.

⁽³⁾ On munit ici $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ de l'orientation produit des orientations adoptées sur chaque facteur \mathbb{C}^n , i. e. l'orientation définie par la forme $(-1)^n \omega(z) \wedge \omega(\bar{z}) \wedge \omega(\zeta) \wedge \omega(\bar{\zeta})$.

$$(1.13) \quad d_1' [\tilde{K}] = \sigma_n [A] \circ W_2' + [d_1' \tilde{K}], \quad d_2' [\tilde{K}] = \sigma_n [A] \circ W_1' + [d_2' \tilde{K}].$$

(Les indices dans d_1 , d_2 , ... indiquent une différentiation partielle par rapport au premier ou au second facteur du produit $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$).

DÉMONSTRATION. La relation (1.11) résulte de la propriété (1.4) du courant $[K]$: soit en effet $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$; on a

$$\begin{aligned} \langle d'' [\tilde{K}], \alpha \rangle &= \int_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n} \tilde{K} \wedge d'' \alpha = \int_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n} K(\zeta - z) \wedge d'' \alpha(z, \zeta) \\ &= \int_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n} K(v) \wedge d'' \alpha(u, u + v) \\ &= \int_{u \in \mathbb{C}^n} \int_{v \in \mathbb{C}^n} K(v) \wedge d'' \alpha(u, u + v) = \sigma_n \int_{u \in \mathbb{C}^n} \alpha(u, u) = \sigma_n \int_A \alpha. \end{aligned}$$

La relation (1.11) résulte également des propriétés (1.12) et (1.13), compte tenu de $d_1' \tilde{K} + d_2' \tilde{K} = d' \tilde{K} = 0$, $d_1' \tilde{K} + d_2' \tilde{K} = d'' \tilde{K} = 0$, $W_1' + W_2' = 1$ pour les formes de type (n, n) .

Soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$. On a

$$\begin{aligned} \langle d_1 [\tilde{K}], \alpha \rangle &= \int_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n} K(\zeta - z) \wedge d_z \alpha(z, \zeta) \\ &= \int_{\zeta \in \mathbb{C}^n} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{z \in \mathbb{C}^n \setminus B_{\zeta, \varepsilon}} K(\zeta - z) \wedge d_z \alpha(z, \zeta) \right) \\ &= \int_{\zeta \in \mathbb{C}^n} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{z \in \mathbb{C}^n \setminus B_{\zeta, \varepsilon}} d_z K(\zeta - z) \wedge \alpha(z, \zeta) \right) \\ &\quad + \int_{\zeta \in \mathbb{C}^n} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{z \in S_{\zeta, \varepsilon}} K(\zeta - z) \wedge \alpha(z, \zeta) \right) \\ &= \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n} d_z K(\zeta - z) \wedge \alpha(z, \zeta) + \int_{\mathbb{C}^n} W_1' \alpha(\zeta, \zeta). \end{aligned}$$

Les relations (1.12) et (1.13) sont alors démontrées, si l'on tient compte des types des courants qui y figurent.

LEMME 1.6. Soient Z une variété C^∞ , X une sous-variété de dimension maximum et de bord B , Δ une variété sans bord plongée dans $Y = X \setminus B$ et τ une rétraction C^∞ et propre de X sur Δ ; soit V un courant sur Z dont le support singulier ne rencontre pas B et tel que $dV = [\Delta]$. On a alors, pour toute forme ψ , C^∞ au voisinage de X , la relation

$$(1.14) \quad [\psi|_\Delta] = (\tau|_B)_*(V \wedge \psi)|_B - \tau_*(wW \wedge d\psi)|_X - d\tau_*(wW \wedge \psi)|_X.$$

DÉMONSTRATION. On applique la relation (1.6) au courant $T = (V \wedge \psi)|_X$; on a, en vertu des hypothèses faites sur V ,

$$d_Y(T|_Y) = (dT)|_Y = [\Delta] \wedge \psi + wV|_Y \wedge d\psi,$$

d'où

$$d\tau_*(wV \wedge \psi)|_X = (\tau|_B)_*(V \wedge \psi)|_B - (\tau|_{Y*})(wV \wedge d\psi)|_Y - (\tau|_{Y*})([\Delta] \wedge \psi);$$

or on a $(\tau|_{Y*})([\Delta] \wedge \psi) = [\psi|_\Delta]$, car τ est une rétraction.

PROPOSITION 1.7. Soit U un ouvert relativement compact de \mathbb{C}^n , tel que \bar{U} soit une sous-variété C^∞ , de bord S . Soit γ une forme différentielle C^∞ sur \mathbb{C}^n . On a alors la relation

$$(1.15) \quad \int_{\zeta \in z+S} K(\zeta - z) \wedge \gamma(\zeta) + \int_{\zeta \in z+U} K(\zeta - z) \wedge d''\gamma(\zeta) + d'' \int_{\zeta \in z+U} K(\zeta - z) \wedge \gamma(\zeta) \\ = \begin{cases} \sigma_n \gamma(z) & \text{si } 0 \in U \\ 0 & \text{si } 0 \notin \bar{U}. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. On applique le lemme précédent à $Z = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, $X = \{(z, \zeta) : \zeta - z \in \bar{U}\}$, $B = \{(z, \zeta) : \zeta - z \in S\}$, au courant $V = [K/\sigma_n]$ et à la forme $\psi = \varrho^*\gamma$, où ϱ désigne la seconde projection de Z sur \mathbb{C}^n : $\varrho(z, \zeta) = \zeta$; on prend pour rétraction τ l'application définie par $\tau(z, \zeta) = (z, z)$. Les hypothèses du lemme 1.6 sont alors vérifiées si $0 \in U$. On a alors

$$(1.16) \quad (\tau_*(wV \wedge \psi))(z, z) = -\sigma_n^{-1} \int_{\zeta \in z+\bar{U}} K(\zeta - z) \wedge \gamma(\zeta),$$

$$(1.17) \quad (\tau_* (wV \wedge d\psi))(z, z) = -\sigma_n^{-1} \int_{\zeta \in z + \bar{U}} K(\zeta - z) \wedge d\gamma(\zeta),$$

$$(1.18) \quad ((\tau|_B)_* (V \wedge \psi)|_B)(z, z) = \sigma_n^{-1} \int_{\zeta \in z + S} K(\zeta - z) \wedge \gamma(\zeta);$$

on obtient ainsi la relation (1.15).

Pour calculer les intégrales (1.16)-(1.18), on prend les formes doubles en z, ζ associées aux formes à intégrer, et on intègre suivant la variable ζ ; l'orientation convenable est donnée par les relations (1.16)-(1.18).

Si on suppose γ de type (p, q) , la relation (1.15) s'écrit, en désignant par $K_{p,q}$ la composante $\tilde{K}_{p,q}^1$ de type (p, q) en z de $\tilde{K}(z, \zeta)$:

$$(1.19) \quad \int_{\zeta \in z + S} K_{p,q}(z, \zeta) \wedge \gamma(\zeta) + \int_{\xi \in z + U} K_{p,q}(z, \xi) \wedge d'' \gamma(\xi) + d'' \int_{\zeta \in z + U} K_{p,q-1}(z, \zeta) \wedge \gamma(\zeta) \\ = \begin{cases} \sigma_n \gamma(z) & \text{si } 0 \in U \\ 0 & \text{si } 0 \notin \bar{U}. \end{cases}$$

Dans le cas $p = 0$, la relation (1.19) est identique à la relation annoncée par Koppelman ([2], Theorem 5).

REMARQUE 1.8. La démonstration des relations intégrales (1.15) et (1.19) repose uniquement sur la propriété (1.4) du courant défini par la forme $K^{(4)}$; ces relations s'étendent donc à toute forme K de type $(n, n-1)$ possédant la propriété (1.4).

2. Soit H la forme différentielle définie dans $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ par

$$(2.1) \quad H(z) = (1-n)^{-1} \|z\|^{2-2n} \sum_{j=1}^n \bigwedge_{k \neq j} dz_k \wedge \bigwedge_{k \neq j} \bar{d}z_k.$$

La forme H définit dans \mathbb{C}^n un courant $[H]$ tel quel $d'[H] = [K]$. On montre par la même méthode que précédemment le résultat suivant:

(4) M. F. NORGUET m'a fait remarquer qu'on peut donner une démonstration plus concise de ces relations en utilisant la convolution des courants et des formes (cf. [3]); une telle démonstration est d'ailleurs essentiellement équivalente à celle donnée ici.

PROPOSITION 2.1. *Sous les hypothèses de la proposition 1.7, on a la relation*

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad & \int_{\zeta \in z+S} (K(\zeta - z) \wedge \gamma(\zeta) + H(\zeta - z) \wedge d'' \gamma(\zeta)) - \int_{\zeta \in z+U} H(\zeta - z) \wedge d' d'' \gamma(\zeta) \\
 & - d' \int_{\zeta \in z+U} H(\zeta - z) \wedge d'' \gamma(\zeta) + d'' \int_{\zeta \in z+U} K(\zeta - z) \wedge \gamma(\zeta) \\
 & = \begin{cases} \sigma_n \gamma(z) & \text{si } 0 \in U \\ 0 & \text{si } 0 \notin \bar{U}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Département de Mathématiques
 Université de Paris-VII
 2, place Jussieu
 Paris (5⁰)

REFERENCES

- [1] BOCHNER, S., *Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula*, *Ann. of Math.*, **44** (1943), 652-673.
- [2] KOPPELMANN, W., *The Cauchy integral for differential forms*, *Bull. Amer. Soc.*, **73** (1967), 554-556.
- [3] NORGUET, F., *Problèmes sur les formes différentielles et les courants*, *Ann. Inst. Fourier*, **11** (1960), 1-88.
- [4] DE RHAM, G., *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1960.
- [5] SCHWARTZ, L., *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.