ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

A. TOGNOLI

Teoremi di approssimazione per gli spazi analitici reali coerenti non immergibili in $\mathcal{R}^n$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 25, nº 3 (1971), p. 509-518
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1971_3_25_3_509_0>

TEOREMI DI APPROSSIMAZIONE PER GLI SPAZI ANALITICI REALI COERENTI NON IMMERGIBILI IN $\mathbb{R}^n$

A. Tognoli

Introduzione.

In un precedente lavoro, ([3]), si era provato che se X è uno spazio analitico reale coerente ogni cui componente connessa abbia dimensione finita e V è una varietà analitica reale allora ogni applicazione continua $\varphi : X \longrightarrow V$ può essere approssimata da applicazioni analitiche.

Da questo risultato si deduce ([3], [4], [11]) che la classificazione dei fibrati analitici reali di base X ed aventi come gruppo strutturale un gruppo di Lie L^* che sia sottogruppo di un gruppo di Lie connesso, coincide con la classificazione topologica.

Partendo da un risultato di B. Malgrange ([1]) in questo lavoro si estende il teorema di approssimazione al caso in cui X sia uno spazio analitico reale coerente qualsiasi.

Il teorema di approssimazione.

In tutto il seguito useremo le seguenti osservazioni.

Sia X uno spazio analitico reale coerente; lo spazio X è paracompatto quindi ogni sua componente connessa soddisfa al secondo assioma di numerabilità e lo spazio X è metrizzabile (vedi [2]).

Ogni componente connessa di X è unione dunque di, al più, un'infinità numerabile di componenti irriducibili (1).

Pervenuto alla Redazione il 16 Ottobre 1970.

(1) Per la decomposizione di uno spazio analitico reale coerente in componenti irriducibili vedasi [2].

Vogliamo provare il seguente

Teorema 1. *Sia X uno spazio analitico reale coerente, X' un sottospazio analitico reale coerente di X tale che* $\dim X' < +\infty$.

Siano $\varepsilon : X \to]0, +\infty[$, $f : X \to \mathbb{R}$ *due funzioni continue ed* $f_{|X'}$ *sia analitica; esiste allora una funzione analitica* $\widehat{f} : X \to \mathbb{R}$ *tale che:*

$$f_{|X'} = \widehat{f}_{|X'}\,, \quad |f(x) - \widehat{f}(x)| < \varepsilon(x),\ x \in X.$$

Premettiamo alla dimostrazione del teorema alcuni lemmi.

Lemma 1. *Sia X uno spazio metrico, S un chiuso di X,* $\varepsilon : X \to]0, +\infty[$, $f : X \to \mathbb{R}$ *due funzioni continue. Comunque si assegni un intorno U_S di S, una funzione continua* $g : S \to \mathbb{R}$ *tale che* $|g(x) - f(x)| < \varepsilon(x)$, $x \in S$, *ed una funzione continua* $\sigma : X \to]0, +\infty[$ *esiste una funzione continua* $\widehat{f} : X \to \mathbb{R}$ *tale che:*

I) $\widehat{f}_{|S} = g$

II) $\widehat{f}_{|X - U_S} = f_{|X - U_S}$

III) $|\widehat{f}(x) - f(x)| < \varepsilon(x) + \sigma(x), \ x \in X.$

Prova. Sia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una metrica che induca la topologia di X.

Per la continuità delle funzioni $f, g, \varepsilon, \sigma$ per ogni $x_0 \in S$ esiste un disco $D_{x_0} = S(x_0, \delta_{x_0})$ tale che:

1) $D_{x_0} \subset U_S\,, \ x_0 \in S$

2) $\sup\limits_{x, y \in D_{x_0}} |\varepsilon(x) - \varepsilon(y)| < \dfrac{\sigma(x_0)}{4}\,, \ \sup\limits_{x, y \in D_{x_0}} |\sigma(x) - \sigma(y)| < \dfrac{\sigma(x_0)}{4}$

3) $\sup\limits_{x, y \in D_{x_0}} |f(x) - f(y)| < \dfrac{\sigma(x_0)}{4}\,, \ \sup\limits_{x, y \in D_{x_0}} |g(x) - g(y)| < \dfrac{\sigma(x_0)}{4}.$

Sia:

$$I_{x_0} = \left] f(x_0) - \varepsilon(x_0) - \frac{1}{2}\sigma(x_0), f(x_0) + \varepsilon(x_0) + \frac{1}{2}\sigma(x_0) \right[$$

per come è definito D_{x_0} risulta:

$$f(D_{x_0}) \subset I_{x_0}\,, \ g(D_{x_0} \cap S) \subset I_{x_0}\,.$$

Consideriamo ora i chiusi disgiunti di D_{x_0}:

$$V_{x_0} = S \cap D_{x_0}\,, \quad W_{x_0} = \left\{ x \in D_{x_0} \mid d\,(x, S \cap D_{x_0}) \geq \frac{1}{4}\,\delta_{x_0} \right\}.$$

Per il teorema di Tietze esiste una funzione continua $f_{x_0} : D_{x_0} \longrightarrow I_{x_0}$ tale che: $f_{x_0}(x) = g(x)$ se $x \in S \cap D_{x_0}$, $f_{x_0}(x) = f(x)$ se $x \in W_{x_0}$.

Sia $\{D_{x_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ un ricoprimento localmente finito (in X) di S fatto con dischi del tipo descritto ed $\{f_{x_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ siano delle funzioni costruite come sopra.

Gli aperti $\{D_{x_\lambda},\ D_0 = X - S\}_{\lambda \in \Lambda}$ formano un ricoprimento aperto localmente finito di X, sia $\{\alpha_\lambda, \alpha_0\}_{\lambda \in \Lambda}$ una partizione dell'unità subordinata a detto ricoprimento.

Notiamo che essendo $D_{x_\lambda} \subset U_S, \lambda \in \Lambda$ si ha $\alpha_0(x) = 1$ se $x \in X - U_S$.

Vogliamo ora verificare che la funzione

$$\widehat{f}(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda(x) f_{x_\lambda}(x) + \alpha_0(x) f(x)$$

soddisfa alle proprietà I), II), III) ed il lemma sarà così provato.

Se $x \in S$ si ha $f_{x_\lambda}(x) = g(x)$ per ogni $\lambda \in \Lambda$ ed $\alpha_0(x) = 0$ dunque $\widehat{f}(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda(x)\, g(x) = g(x)$.

Se $x \in X - U_S$ risulta $\alpha_\lambda(x) = 0$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, $\alpha_0(x) = 1$ e quindi $\widehat{f}(x) = f(x)$.

Si ha infine:

$$(1) \qquad |\widehat{f}(x) - f(x)| = |\widehat{f}(x) - (\sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda(x) + \alpha_0(x)) f(x)| \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |f_{x_\lambda}(x) - f(x)|\, \alpha_\lambda(x).$$

Per ogni $x \in D_{x_\lambda}$ si ha:

$$|f_{x_\lambda}(x) - f(x)| < \varepsilon(x) + \sigma(x)$$

infatti

$$|f_{x_\lambda}(x) - f(x)| < \varepsilon(x_\lambda) + \frac{1}{2}\,\sigma(x_\lambda) < \varepsilon(x) + \sigma(x)$$

quindi su D_{x_λ} (e perciò su tutto X essendo $\alpha_\lambda(y) = 0$ se $y \notin D_{x_\lambda}$) il termine $\alpha_\lambda(x) \cdot |f_{x_\lambda}(x) - f(x)|$ è maggiorato da $\alpha_\lambda(x) \cdot (\varepsilon(x) + \sigma(x))$, dunque per la (1) si ha per ogni $x \in X$:

$$|\widehat{f}(x) - f(x)| < \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda(x) \cdot (\varepsilon(x) + \sigma(x)) = \varepsilon(x) + \sigma(x).$$

Il lemma è così provato.

LEMMA 2. *Sia X uno spazio analitico reale coerente, X' un sottospazio analitico reale coerente e $q = \dim X < +\infty$.*

Siano $\varepsilon : X \to]0, +\infty[$, $f : X \to \mathbb{R}$ due funzioni continue ed $f_{|X'}$ sia analitica; esiste allora una funzione analitica $\widehat{f} : X \to \mathbb{R}$ tale che:

I) $f(x) = \widehat{f}(x)$ *se* $x \in X'$

II) $|\widehat{f}(x) - f(x)| < \varepsilon(x), x \in X.$

PROVA *a*) Si può evidentemente supporre che X sia connesso. Sia $g : X \to \mathbb{R}$ una funzione analitica; dimostriamo che esiste un'applicazione analitica $\psi : X \to \mathbb{R}^{2q+2}$ tale che:

i) $\psi : X \to \psi(X)$ è un omeomorfismo
ii) ψ è un'applicazione propria regolare nei punti regolari di X
iii) $\psi(X)$ e $\psi(X')$ sono insiemi analitici reali coerenti di $\mathbb{R}^{2q+2}$
iv) esiste una funzione analitica $g' : \mathbb{R}^{2q+2} \to \mathbb{R}$ tale che $g' \circ \psi = g$.

In [6] si è provato che esiste un'applicazione analitica $\psi' : X \to \mathbb{R}^{2q+1}$ che soddisfa alle proprietà i) ed ii).

Si definisca $\psi : X \to \mathbb{R}^{2q+2}$ ponendo $\psi(x) = \psi'(x) \times g(x)$; è immediato che ψ soddisfa alle proprietà i), ii), iv); per dimostrare che ψ soddisfa la iii) si ragioni come in [4] pag. 551.

b) Assegnata l'applicazione $f : X \to \mathbb{R}$ tale che $f_{|X'}$ sia analitica esiste una funzione analitica $f' : X \to \mathbb{R}$ tale che $f'_{|X'} = f_{|X'}$ (f' esiste per la validità del teorema B nel caso reale (vedi [2])).

Notiamo con $\varphi : X \to \mathbb{R}^{2q+2}$ l'applicazione costruita nel punto *a*) prendendo $g = f'$.

Vogliamo ora provare che esiste una funzione analitica $\widehat{f}_* : \varphi(X) \to \mathbb{R}$ tale che:

$$(1) \qquad |\widehat{f}_*(\varphi(x)) - f(x)| < \varepsilon(x), x \in X, \quad \widehat{f}_{*|\varphi(X')} = f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(X')} .$$

L'esistenza di una $\widehat{f}_*$ che soddisfa la (1) prova il lemma, basta infatti porre $\widehat{f} = \widehat{f}_* \circ \varphi$ e si ha la funzione analitica cercata.

La funzione $f^{\#} = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(X) \to \mathbb{R}$ è continua e $f^{\#}_{|\varphi(X')} = p_{2q+2\,|\varphi(X')}$ (ove p_{2q+2} è la proiezione di $\mathbb{R}^{2q+2}$ sull'ultima coordinata) quindi $f^{\#}_{|\varphi(X')}$ è analitica.

Per quanto provato in [5], (per mostrare l'esistenza della $\widehat{f}_*$), basta dimostrare che esiste una funzione $C^\infty : \widetilde{f} : U(\varphi(X)) \to \mathbb{R}$, ove $U(\varphi(X))$ è un intorno di $\varphi(X)$ in $\mathbb{R}^{2q+2}$ tale che:

$$\tilde{f}_{|\varphi(X')} = f^{\#}_{|\varphi(X')}, \quad |\tilde{f}(\varphi(x)) - f(x)| < \frac{\varepsilon(x)}{2}, \; x \in X. \tag{2}$$

L'esistenza di una tale $\tilde{f}$ si prova nel modo seguente: sia $\tilde{f}' : \tilde{U}(\varphi(X)) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione analitica che estende $f^{\#}_{|\varphi(X')}$ ad un intorno $\widehat{U}(\varphi(X))$ di $\varphi(X)$ in $\mathbb{R}^{2q+2}$.

Sia W un intorno di $\varphi(X')$ in $\mathbb{R}^{2q+2}$ tale che

$$|\tilde{f}'(x) - f^{\#}(x)| < \frac{\varepsilon(\varphi^{-1}(x))}{8}, \; y \in W \cap \varphi(X).$$

Per il lemma 1 si può costruire una funzione continua $g : \mathbb{R}^{2q+2} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $g_{|W'} = \tilde{f}'_{|W'}$ ove W' è un intorno di $\varphi(X')$ in $\mathbb{R}^{2q+2}$ ed inoltre $|g(x) - f^{\#}(x)| < \dfrac{\varepsilon(\varphi^{-1}(x))}{4}$, $x \in \varphi(X)$. Si possono ora usare gli argomenti di [8], pagg. 25-28 e provare così l'esistenza di una $\tilde{f}$ soddisfacente la (2). Il lemma è così provato.

LEMMA 3. *Sia X uno spazio analitico reale coerente, X', X'' due sottospazi analitici reali coerenti di X e sia* dim $X' < +\infty$, dim $X'' < +\infty$.

Siano assegnate due funzioni continue $\varepsilon : X \longrightarrow]0, +\infty[$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo $f_{|X''}$ sia analitica.

In queste ipotesi esiste una funzione continua $\hat{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:

I) $\hat{f}_{|X''} = f_{|X''}$

II) $\hat{f}_{|X' \cup X''}$ *è analitica*

III) $|\hat{f}(x) - f(x)| < \varepsilon(x)$, $x \in X$.

PROVA. Lo spazio analitico reale $\hat{X} = X' \cup X''$ è coerente essendo unione di due spazi analitici reali coerenti (un germe di insieme analitico e coerente se e solo se lo sono le sue componenti irriducibili (vedi [12])).

Si ha dim $\hat{X} < +\infty$, quindi si può applicare il lemma 2; esiste perciò una funzione analitica $f' : \hat{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$f'_{|X''} = f_{|X''}, \; |f'(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon(x)}{2}, \; x \in \hat{X}.$$

Per il lemma 1 esiste perciò una funzione continua $\widehat{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$\widehat{f}_{|\hat{X}} = f'_{|\hat{X}} \text{ ed inoltre } |\widehat{f}(x) - f(x)| < \varepsilon(x), x \in X.$$

Il lemma è così provato.

PROVA (*del teorema* 1). Basta evidentemente dimostrare il teorema per ogni componente connessa di X, supporremo dunque X connesso. Siano $\{X_n\}_{n \in N}$ le componenti irriducibili [2] di X e poniamo $X^n = \bigcup_{i \leq n} X_i$ (se X ha solo n_0 componenti irriducibili si ponga $X_n = \emptyset$ per $n > n_0$).

Se $X_1 \subset X'$ si ponga $f_1 = f$, in caso contrario sia $f_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$(1) \qquad f_{1 \mid X_1 \cup X'} \text{ sia analitica, } f_{1 \mid X'} = f_{\mid X'}, |f_1(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon(x)}{2}, x \in X.$$

Una funzione siffatta esiste per il lemma 3.

Se $X_2 \subset X'$ si ponga $f_2 = f_1$, in caso contrario sia $f_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che:

$$(2) \quad f_{2 \mid X^2} \text{ è analitica, } f_{2 \mid X' \cup X_1} = f_{1 \mid X' \cup X_1}, |f_2(x) - f_1(x)| < \frac{\varepsilon(x)}{4}, x \in X.$$

Proseguendo così sia $f_n = f_{n-1}$ se $X_n \subset X'$ ed, in caso contrario $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione continua tale che:

$$(3) \qquad f_{n \mid X^n} \text{ è analitica, } f_{n \mid X^{n-1} \cup X'} = f_{n-1 \mid X^{n-1} \cup X'},$$

$$|f_n(x) - f_{n-1}(x)| < \frac{\varepsilon(x)}{2^n}, x \in X.$$

Evidentemente le funzioni f_n convergono ad una funzione analitica f che soddisfa alle proprietà richieste dal teorema che è così provato.

OSSERVAZIONE 1. Nel lemma 3 si è fatta l'ipotesi che la dimensione di X'' sia finita perchè in generale $X' \cap X''$ può non essere coerente pur essendolo X' ed X'' (ad esempio sia

$$X' = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid w + z(x^r + y^r) + z^3 = 0\}$$

$$X'' = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid w = 0\}$$

---

[2] Per la definizione di componente irriducibile vedasi [2].

X' ed X'' sono varietà, quindi coerenti ma $X' \cap X''$ non è coerente).

Nel lemma 3 si può sostituire l'ipotesi dim $X'' < +\infty$ con la condizione $X' \cap X''$ è coerente.

Analogamente nel teorema 1 si può sostituire l'ipotesi dim $X' < +\infty$ con la condizione che X' intersechi ogni componente irriducibile di X in uno spazio coerente.

OSSERVAZIONE 2. Nel teorema 1 se X è una sottovarietà analitica reale di $\mathbb{R}^n$ e la funzione f è C^k, $0 < k \leq +\infty$, si può chiedere che $\widehat{f}$ approssimi f insieme alle derivate parziali di ordine q, $q \leq k$, $q < +\infty$ (vedi [5]).

Siano X, V due spazi analitici reali, $\mathcal{F}_c(X, V)$, ($\mathcal{F}_a(X, V)$,) le famiglie delle applicazioni continue, (analitiche) di X in V.

In $\mathcal{F}_c(X, V)$ consideriamo la relazione di equivalenza: $f_0 \overset{\mathcal{R}_c}{\sim} f_1 \Longleftrightarrow$ esiste un'applicazione continua $\varphi\colon X \times [0, 1] \to V$ tale che $\varphi_{|X \times \{0\}} = f_0$, $\varphi_{|X \times \{1\}} = f_1$. Notiamo $\pi_c(X, V) = \mathcal{F}_c(X, V)/\mathcal{R}_c$.

In $\mathcal{F}_a(X, V)$ consideriamo la relazione di equivalenza: $f_0 \overset{\mathcal{R}_a}{\sim} f_1 \Longleftrightarrow$ esiste un'applicazione analitica $\psi\colon X \times \left]-\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}\right[\to V$ tale che $\psi_{|X \times \{0\}} = f_0$, $\psi_{|X \times \{1\}} = f_1$. Notiamo $\pi_a(X, V) = \mathcal{F}_a(X, V)/\mathcal{R}_a$.

L'immersione naturale $i\colon \mathcal{F}_a(X, V) \to \mathcal{F}_c(X, V)$ induce un'applicazione $i_*\colon \pi_a(X, V) \to \pi_c(X, V)$.

TEOREMA 2. *Sia X uno spazio analitico reale coerente V una varietà analitica reale ed X' un sottospazio analitico reale coerente di X per cui si abbia dim $X' < +\infty$.*

Sia assegnata una metrica $d\colon V \times V \to \mathbb{R}$ che sia continua rispetto alla topologia di V ed una funzione continua $\varepsilon\colon X \to]0, +\infty[$.

In queste ipotesi per ogni $f \in \mathcal{F}_c(X, V)$ tale che $f_{|X'}$ sia analitica esiste $\widehat{f} \in \mathcal{F}_a(X, V)$ per cui risulta:

I) $\qquad \widehat{f}_{|X'} = f_{|X'}$

II) $\qquad d(\widehat{f}(x), f(x)) < \varepsilon(x), \; x \in X.$

Si ha poi:

$$i_*\colon \pi_a(X, V) \to \pi_c(X, V)$$

è bigettivo.

PROVA. a) Evidentemente basta provare il teorema nel caso V sia connessa. Se dim $V = q$ possiamo supporre V sia sottovarietà analitica chiusa di $\mathbb{R}^{2q+1}$ ed in $\mathbb{R}^{2q+1}$ esista un intorno U di V che sia isomorfo ad un intorno della sezione nulla del fibrato normale dell'immersione di V in $\mathbb{R}^{2q+1}$.

È dunque definita un'applicazione $\eta: U \times [0, 1] \to U$ tale che:

$$\eta(x \times \{0\}) = x, \ x \in U; \ \eta(U \times \{1\}) = V,$$

$\eta_{|U \times \{t\}}$ è analitica per ogni $t \in [0, 1]$, $\eta(x \times \{t\}) = x$, $x \in V$, $t \in [0, 1]$.

Notiamo $p_i: \mathbb{R}^{2q+1} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 2q+1$, la proiezione di $\mathbb{R}^{2q+1}$ sulla coordinata i-esima ed $f_i: X \to \mathbb{R}$ l'applicazione $p_i \circ f$.

Per il teorema 1 esistono delle funzioni analitiche $\widehat{f_1'}, \dots, \widehat{f_{2q+1}'}$ definite su X tali che, posto $\widehat{f'} = (\widehat{f_1'}, \dots, \widehat{f_{2q+1}'}): X \to \mathbb{R}^{2q+1}$ si abbia: $\widehat{f'}_{|X'} = f_{|X'}$, $\widehat{f'}(X) \subset U$ ed inoltre, se $\widehat{f}(x) = \eta(\widehat{f'}(x) \times \{1\})$, $x \in X$, risulti:

$$d(\widehat{f}(x), f(x)) < \varepsilon(x), \ x \in X$$

(ovviamente si ha anche $\widehat{f}_{|X'} = f_{|X'}$ perchè $\eta(x_1 \times \{t\}) = x$ se $x \in X'$).

Si è così provata la prima parte del teorema.

b) Proviamo la surgettività di i_*.

Per ogni $x \in V$ sia δ_x l'estremo superiore dei raggi dei dischi di centro x che sono contenuti in U; $\delta: x \to \delta_x$ è una funzione continua.

Sia $f: X \to V$ un elemento di $\mathcal{F}_c(X, V)$, per la prima parte di questo teorema esiste un'applicazione analitica $\widehat{f}: X \to V$ tale che: $d(\widehat{f}(x), f(x)) < \delta_{f(x)}$, $x \in X$.

L'omotopia

$$\varphi(x, t) = \eta(((1-t) f(x) + t \cdot \widehat{f}(x)) \times \{1\}), \ x \in X, \ t \in [0, 1]$$

dimostra che $\widehat{f}$ è $\mathcal{R}_c$ equivalente ad f e quindi i_* è surgettivo.

c) Dimostriamo l'iniettività di i_*.

Siano f_1, f_2 due elementi di $\mathcal{F}_a(X, V)$ per cui esista un'applicazione continua $\varphi: X \times [0, 1] \to V$ tale che $\varphi_{|X \times \{0\}} = f_1$, $\varphi_{|X \times \{1\}} = f_2$; definiamo l'applicazione $\varphi': X \times \left] -\frac{1}{2}, +\frac{3}{2} \right[\to V$ ponendo:

$$\varphi'(x, t) = \begin{cases} \varphi(x, 1) \text{ se } 1 \leq t \leq \frac{3}{2} \\ \varphi(x, t) \text{ se } 0 \leq t \leq 1 \\ \varphi(x, 0) \text{ se } -\frac{1}{2} < t \leq 0 \end{cases}$$

$Y = X \times \left]-\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}\right[$ è uno spazio analitico reale coerente ed $Y' = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$ è un sottospazio analitico reale coerente ed ogni componente irriducibile Y_i di Y interseca Y' in uno spazio analitico reale coerente $\left(Y_i \text{ sarà del tipo } Y_i' \times \left]-\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}\right[\text{ con } Y_i' \text{ componente irriducibile di } X\right)$.

Per l'osservazione 1 si può perciò applicare il teorema 1; esiste quindi un'applicazione analitica $\psi' : X \times \left]-\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}\right[\to \mathbb{R}^{2q+1}$ tale che:

$$\psi'_{|(X\times\{0\})\cup(X\times\{1\})} = \varphi_{|(X\times\{0\})\cup(X\times\{1\})}, \quad \psi'\left(X \times \left]-\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}\right[\right) \subset U.$$

L'applicazione $\psi(x, t) = \eta(\psi'(x, t) \times \{1\})$, $x \in X$, $t \in \left]-\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}\right[$ è analitica e prova che f_1 è $\mathcal{R}_a$ equivalente ad f_2 e dunque i_* è iniettivo.

Il teorema è così provato.

Osservazione 3. Dalla parte *c*) della dimostrazione del teorema 2 è chiaro che vale il seguente risultato: siano X, V come nell'enunciato del teorema 2 ed X', $X' \subset X$, un sottospazio analitico reale coerente, di dimensione finita.

Siano assegnati due elementi f_1, f_2 di $\mathcal{F}_a(X, V)$ per cui esista un'applicazione continua $\varphi : X \times \left]-\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}\right[\to V$ tale che $\varphi_{|X'\times]-\frac{1}{2},+\frac{3}{2}[}$ sia analitica; si può trovare allora un'applicazione analitica $\psi : X \times \left]-\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}\right[\to V$ tale che posto $W = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup \left(X' \times \left]-\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}\right[\right)$ si abbia $\varphi_{|W} = \psi_{|W}$ e ψ si può prendere in modo che approssimi φ.

BIBLIOGRAFIA

[0] H. CARTAN, *Espaces fibres analitiques.* Symposium international de topologie algebraica 1958.

[1] B. MALGRANGE, *Sur les fonctions differentiables et les ensembles analytiques.* Bull. Soc. Math. France 91 (1963) pp. 113-127.

[2] A. TOGNOLI, *Proprietà globali degli spazi analitici reali.* Annali di Matematica LXXV (1967) pp. 143-218.

[3] A. TOGNOLI, *Sulla classificazione dei fibrati analitici reali.* Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa Vol. XXI (1967) pp. 709-744.

[4] A. TOGNOLI, *L'analogo del teorema delle matrici olomorfe invertibili nel caso analitico reale.* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa Vol. 22 (1968) pp. 537-558.

[5] A. TOGNOLI, *Le varietà analitiche reali come spazi omogenei.* Boll. U. M. I. n. 3 (1968) pp. 422-426.

[6] G. TOMASSINI - A. TOGNOLI, *Teoremi di immersione per gli spazi analitici reali.* Annali Scuola N. S. di Pisa Vol. XXI (1967) pp. 575-598.

[7] H. WHITNEY, *Analytic extension of differentiable functions defined on closed sets.* Trans. Amer. Math. Soc. (1934) pp. 63-89.

[8] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles.* Princeton Univ. Press 1951.

[9] R. NARASIMHAN, *Introduction to the theory of analytic spaces.* Lecture notes in mathematics. Springer 1966.

[10] H. GRAUERT, *Analytische faserungen uber holomorphvollstandingen Räumen.* Math. Annalen. 135 (1958) pp. 263-273.

[11] A. TOGNOLI, *Sulle classificazioni dei fibrati E-principali.* Annali della Scuola N.S. di Pisa vol. XXXIII (1969) pp. 75-86.

[12] H. CARTAN, *Varietes analytiques reel et varietes analytiques complexes.* Bull. Soc. Math. de France 85 (1957) pp. 77-100.