ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

M. GIAQUINTA
L. PEPE

Esistenza e regolarità per il problema dell'area minima con ostacoli in *n* variabili

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 25, nº 3 (1971), p. 481-507

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1971_3_25_3_481_0>

ESISTENZA E REGOLARITÀ PER IL PROBLEMA DELL'AREA MINIMA CON OSTACOLI IN n VARIABILI

M. Giaquinta - L. Pepe [1]

In questo lavoro ci occuperemo dell'esistenza e della regolarità delle soluzioni del problema dell'area minima per le superfici cartesiane di assegnato contorno che si mantengono al di sopra di un ostacolo $\psi(x)$.

Il lavoro consta di due parti. Nella prima parte diamo dei teoremi di esistenza e unicità nelle classi delle funzioni continue e lipschitziane. Nella seconda parte daremo un teorema di regolarità $C^{1,\alpha}$, nelle ipotesi di ostacolo $\psi(x)$ regolare, sfruttando dei risultati relativi ai funzionali uniformemente ellittici con ostacoli.

Risultati per funzionali uniformemente ellittici con ostacolo si possono ritrovare in Brezis-Stampacchia [3], i quali usano metodi diversi dai nostri, nello spirito delle diseguaglianze variazionali. Risultati relativi al tipo di problema qui affrontato sono contenuti in un lavoro di H. Lewy e G. Stampacchia di prossima pubblicazione.

Ringraziamo E. De Giorgi, E. Giusti, M. Miranda coi quali abbiamo discusso i risultati di questo lavoro.

Parte I

esistenza e unicità

Notazioni. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $\bar{\Omega}$ la sua chiusura, $\partial\Omega$ la sua frontiera indicheremo con $C^0(\bar{\Omega})$ la classe delle funzioni continue su $\bar{\Omega}$, Lip $(\bar{\Omega})$ la classe delle funzioni lipschitziane su $\bar{\Omega}$ e con $\mathrm{Lip}_k(\bar{\Omega})$, $k \geq 0$, la sottoclasse delle funzioni di Lip $(\bar{\Omega})$ con costante di Lipschitz minore o uguale a k.

Pervenuto alla Redazione il 6 Ottobre 1970.

[1] Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C N.R.

(A) *Per area di Lebesgue di* $\{y = u(x)\ x \in \bar{\Omega}\}$ *intendiamo il funzionale definito su* $C^0(\bar{\Omega})$:

$$\text{area } u = \inf \left\{ \min \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} (D_i u_n)^2}\, dx \mid u_n \in \operatorname{Lip}(\bar{\Omega}), \right.$$

$$\left. u_n \longrightarrow u \text{ uniformemente} \right\}.$$

Si ricordi che se $u \in \operatorname{Lip}(\bar{\Omega})$, allora area $u = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2}\, dx$

(B) *Diremo che* $\varphi : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *verifica la B.S.C. (Bounded slope condition) con costante* k *se per ogni* $x \in \partial\Omega$ *esistono* $a, b \in \mathbb{R}^N$, *con* $|a| \leq k$ *e* $|b| \leq k$, *tali che*

$$\sum_{i=1}^{N} a_i (y_i - x_i) + \varphi(x) \leq \varphi(y) \leq \sum_{i=1}^{N} b_i (y_i - x_i) + \varphi(x)\ \forall\, y \in \partial\Omega.$$

(C) *Diremo che* Ω *aperto di* $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, *è uniformemente convesso se esiste una costante* k *non negativa e, per ogni* $x \in \partial\Omega$, *un iperpiano* π_x *di* $\mathbb{R}^N$ *passante per* x, *tale che* Ω *venga a trovarsi in uno dei due semispazi determinati da* π_x, *e per il quale valga*

$$\sup_{y \in \Omega} \frac{|x - y|^2}{\operatorname{dist}(y, \pi_x)} \leq k.$$

1. Esistenza e unicità nella classe $\operatorname{Lip}(\bar{\Omega})$.

In questo paragrafo dimostriamo il seguente teorema.

TEOREMA 1.1. *Sia* Ω *un aperto convesso limitato di* $\mathbb{R}^N$; *siano* $\varphi : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funzione che verifichi la B.S.C. e* ψ *una funzione lipschitziana su* $\bar{\Omega}$ *con* $\psi \geq \varphi$ *su* $\partial\Omega$. *Allora esiste unica* $u \in \operatorname{Lip}(\bar{\Omega})$ *che risolve il problema*

$$\text{(I)} \qquad \text{area } u = \min$$

nella classe

$$\{z \in \operatorname{Lip}(\bar{\Omega}) : z = \varphi \text{ su } \partial\Omega,\ z \geq \psi \text{ su } \bar{\Omega}\}.$$

Cominciamo col provare un principio di massimo per le soluzioni del problema (I).

Qui e nel seguito indicheremo con φ_1 e φ_2 due funzioni definite su $\partial\Omega$ e con ψ_1 e ψ_2 due funzioni di $\mathrm{Lip}(\bar\Omega)$ verificanti le relazioni $\psi_1 \leq \varphi_1$ su $\partial\Omega$, $\psi_2 \leq \varphi_2$ su $\partial\Omega$.

LEMMA 1.1. *Siano $u_1, u_2 \in \mathrm{Lip}_k(\bar\Omega)$ soluzioni del problema* (I) *rispettivamente nella classe $\{z \in \mathrm{Lip}_k(\bar\Omega)\ z = \varphi_1$ su $\partial\Omega$, $z \geq \psi_1$ su $\bar\Omega\}$ e nella classe*

$$\{z \in \mathrm{Lip}_k(\bar\Omega)\ z = \varphi_2 \text{ su } \partial\Omega,\ z \geq \psi_2 \text{ su } \bar\Omega\}.$$

Se $\varphi_1 \leq \varphi_2$ su $\partial\Omega$ e $\psi_1 \leq \psi_2$ su $\bar\Omega$, allora

$$u_1(x) \leq u_2(x) \qquad \forall\, x \in \bar\Omega. \tag{1.1}$$

Dim: Supponiamo per assurdo che $A = \{x \in \bar\Omega : u_1(x) > u_2(x)\} \neq \emptyset$.
Siano:

$$w^+ = \max(u_1, u_2)$$

$$w^- = \min(u_1, u_2)$$

evidentemente $w^+, w^- \in \mathrm{Lip}_k(\bar\Omega)$, $w^+ \geq \psi_2$ su $\bar\Omega$ e $w^+|_{\partial\Omega} = \varphi_2$, mentre $w^- \geq \psi_1$ su $\bar\Omega$ e $w^-|_{\partial\Omega} = \varphi_1$. Allora, poiché u_1 e u_2 sono soluzioni del problema (I)

$$\begin{gathered} \operatorname*{area}_{\Omega} w^+ \geq \operatorname*{area}_{\Omega} u_2 \\ \operatorname*{area}_{\Omega} w^- \geq \operatorname*{area}_{\Omega} u_1 \end{gathered} \tag{1.2}$$

d'altra parte

$$\begin{gathered} \operatorname*{area}_{\Omega} w^+ = \operatorname*{area}_{A} u_1 + \operatorname*{area}_{\Omega - A} u_2 \\ \operatorname*{area}_{\Omega} w^- = \operatorname*{area}_{A} u_2 + \operatorname*{area}_{\Omega - A} u_1 \end{gathered} \tag{1.3}$$

segue quindi dalle (1.2) e (1.3) che

$$\operatorname*{area}_{A} u_1 = \operatorname*{area}_{A} u_2 . \tag{1.4}$$

Inoltre $u_1 = u_2$ su ∂A e $u_1 \geq \psi_2$ su $\bar A$, pertanto u_1 e u_2 risolvono il problema (I) nella classe $\{z \in \mathrm{Lip}_k(\bar\Omega) : z = u_1 = u_2$ su ∂A $z \geq \psi_2$ su $\bar A\}$; ma allora, poiché il funzionale area è strettamente convesso su $\mathrm{Lip}(\bar A)$, $u_1 = u_2$ su A. Questo contraddice la definizione di A. c. v. d.

PROPOSIZIONE 1.1. *Siano* $u_1, u_2 \in \mathrm{Lip}_k(\bar{\Omega})$ *soluzioni del problema* (I) *rispettivamente nella classe* $\{z \in \mathrm{Lip}_k(\bar{\Omega})\ z = u_1$ *su* $\partial\Omega,\ z \geq \psi_1$ *su* $\bar{\Omega}\}$ *e nella classe* $\{z \in \mathrm{Lip}_k(\bar{\Omega})\ z = u_2$ *su* $\partial\Omega,\ z \geq \psi_2$ *su* $\bar{\Omega}\}$. *Allora*

$$\max_{\Omega} |u_1 - u_2| \leq \max\{\max_{\partial\Omega} |u_1 - u_2|, \max_{\bar{\Omega}} |\psi_1 - \psi_2|\}. \tag{1.5}$$

Dim: Osserviamo che $u_2 + \max\{\max_{\partial\Omega}|u_1 - u_2|, \max_{\bar{\Omega}}|\psi_1 - \psi_2|\} = u_2 + M$ risolve il problema (I) nella classe $\{z \in \mathrm{Lip}_k(\bar{\Omega}) : z = u_2 + M$ su $\partial\Omega,\ z \geq \psi_2 + M$ su $\bar{\Omega}\}$, che, inoltre

$$u_1 \leq u_2 + M \text{ su } \partial\Omega$$

$$\psi_1 \leq \psi_2 + M \text{ su } \bar{\Omega}.$$

Allora per il lemma 1.1 si ha

$$u_1 \leq u_2 + M \text{ su } \bar{\Omega}. \tag{1.6}$$

Analogamente si ottiene che

$$u_2 \leq u_1 + M \text{ su } \bar{\Omega}. \tag{1.7}$$

Dalle (16) e (17) si ricava la (1.5). c. v. d.

Riprendiamo ora ad occuparci dell'esistenza di soluzioni del problema (I), stabilendo un risultato molto importante per la dimostrazione del teorema 1.1.

PROPOSIZIONE 1.2. *Sia* Ω *convesso,* $\psi \in \mathrm{Lip}_h(\bar{\Omega})$; *sia* u *una funzione lipschitziana su* $\bar{\Omega}$, *tale che la sua restrizione a* $\partial\Omega$ *verifichi la B. S. C. con costante* k; u *risolva il problema* (I) *nelle classe* $\{z \in \mathrm{Lip}_q(\bar{\Omega}) : z = u$ *su* $\partial\Omega$ $z \geq \psi$ *su* $\bar{\Omega}\}$. *Allora* $u \in \mathrm{Lip}_{\max(h,k)}(\bar{\Omega})$.

Dim: Cominciamo con il valutare $|u(x) - u(x')|$ quando $x \in \partial\Omega$ e $x' \in \bar{\Omega}$. Siano $a, b \in \mathbb{R}^N$ con $|a| \leq k$, $|b| \leq k$ tali che valga

$$\Pi^-(y) = \sum_{i=1}^{N} a_i(y_i - x_i) + u(x) \leq u(y) \leq \sum_{i=1}^{N} b_i(y_i - x_i) + u(x) = \Pi^+(y) \qquad \forall\, y \in \partial\Omega.$$

Sia $P^+(x') = \sum_{i=1}^{N} b_i' (x_i' - \tilde{x})$ un piano per $\Pi^+ \cap \Pi^-$ tale che

$$P^+(x') \geq \Pi^+(x') \qquad \forall\, x' \in \bar{\Omega}$$

$$|\, b' \,| \geq \max(h, k).$$

Sia $\tilde{x} \in \partial\Omega$ tale che

$$\sum_{i=1}^{N} b_i' (x_i' - \tilde{x}) = |\, b' \,|\, |\, x' - \tilde{x} \,|\,.$$

Allora

$$P^+(x') - P^+(\tilde{x}) = |\, b' \,|\, |\, x' - \tilde{x} \,|$$

$$\psi(x') - \psi(\tilde{x}) \leq |\, b' \,|\, |\, x' - \tilde{x} \,|$$

e quindi, poichè $P^+(\tilde{x}) \geq \psi(\tilde{x})$, risulta

$$\psi(x') \leq P^+(x') \qquad \forall\, x' \in \Omega.$$

Allora si ha

$$\Pi^-(y) \leq u(y) \leq P^+(y) \qquad \forall\, y \in \partial\Omega$$

$$\psi(x) \leq P^+(x) \qquad \forall\, x \in \bar{\Omega}$$

e quindi per il lemma 1.1

$$\Pi^-(x') \leq u(x') \leq P^+(x') \qquad \forall\, x' \in \bar{\Omega}$$

da cui si ricava che $\forall\, x \in \partial\Omega$ e $\forall\, x' \in \bar{\Omega}$ si ha:

$$(1.8) \qquad |\, u(x') - u(x) \,| \leq \max(h, k)\, |\, x' - x \,|\,.$$

Siano ora $x, x' \in \Omega$ ed indichiamo con $\tau = x' - x$, con $\Omega_\tau = \{x + \tau, x \in \Omega\}$ con $u_\tau(x)$ la funzione definita su Ω_τ da $u_\tau(x + \tau) = u(x)$. Avremo allora che u e u_τ risolvono il problema (I) rispettivamente nelle classi

$$\{z \in \mathrm{Lip}_q(\Omega \cap \Omega_\tau) : z = u \text{ su } \partial(\Omega \cap \Omega_\tau),\ z \geq \psi \text{ su } \overline{\Omega \cap \Omega_\tau}\}$$

$$\{z \in \mathrm{Lip}(\Omega \cap \Omega_\tau) : z = u_\tau \text{ su } \partial(\Omega \cap \Omega_\tau),\ z \geq \psi_\tau \text{ su } \overline{\Omega \cap \Omega_\tau}\}$$

Poichè $x' \in \Omega \cap \Omega_\tau$, per la proposizione 1.1 esistono $y \in \partial(\Omega_\tau \cap \Omega)$ e $y' \in \Omega \cap \Omega_\tau$ tali che

$$|\, u(x') - u_\tau(x') \,| \leq \max(\,|\, u(y) - u_\tau(y) \,|,\ |\, \psi(y') - \psi_\tau(y') \,|\,)$$

ora, poichè $\circ\, y \circ y - \tau$ appartiene a $\partial\Omega_\tau$ si può applicare la (18) e concludere

$$| u(x') - u_\tau(x') | \leq \max(\max(h, k), h) \, | \tau | = \max(h, k) \, | x' - x |$$

e quindi ancora la (18) per $x, x' \in \bar{\Omega}$ c. v. d.

Dimostrazione del teorema 1.1. Sia h la costante di Lipschitz di ψ, e sia k la costante della B.S.C per φ.

Sia

$$V = \{v \in \mathrm{Lip}_{2\max(h,k)}(\bar{\Omega}) : v = \varphi \text{ su } \partial\Omega, \ v \geq \psi \text{ su } \bar{\Omega}\}.$$

La classe V è non vuota, è compatta nella topologia della convergenza uniforme per il teorema di Ascoli-Arzelá. Allora, poiché il funzionale dell'area è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza uniforme su V, esiste $u \in V$ soluzione del problema (I) in V; inoltre per la proposizione 1.2 $u \in \mathrm{Lip}_{\max(h,k)}(\bar{\Omega})$.

Sia ora z una qualunque funzione lipschitziana su $\bar{\Omega}$ con $z = \varphi$ su $\partial\Omega$ e $z \geq \psi$ su $\bar{\Omega}$; per t sufficientemente piccolo $u + t(z - u) \in V$ e quindi

(1.9) $\quad \text{area}(u + t(z - u)) \geq \text{area}\, u$ per t abbastanza piccolo.

Poiché area $(u + t(z - u))$ è una funzione convessa in t la (1.9) è vera per ogni $t \in [0, 1]$, in particolare per $t = 1$. Si ha

$$\text{area}\, z \geq \text{area}\, u$$

cioè u risolve il problema di area minima nella classe

$$\{z \in \mathrm{Lip}(\bar{\Omega}) : z = \varphi \text{ su } \partial\Omega, \ z \geq \psi \text{ su } \bar{\Omega}\}$$ c. v. d.

2. Esistenza e unicità nella classe delle funzioni continue.

In questo paragrafo proveremo il seguente teorema.

TEOREMA 2.1. *Sia Ω un aperto limitato ed uniformemente convesso di $\mathbb{R}^N$; sia φ una funzione continua su $\partial\Omega$, $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, sia $\psi \in C^0(\bar{\Omega})$ con $\psi \leq \varphi$ su $\partial\Omega$.*

Allora esiste unica $u \in C^0(\bar{\Omega})$ che risolve il problema

(I) $\quad \text{area}\, u = \min$

nella classe

$$\{f \in C^0(\bar{\Omega}) : f = \varphi \text{ su } \partial\Omega, f \geq \psi \text{ su } \bar{\Omega}\}.$$

a) Teorema di esistenza. Dimostreremo questo teorema servendoci di un procedimento di approssimazione nel quale ci sarà utile la maggiorazione stabilita nel seguente lemma.

LEMMA 2.1. *Per ogni aperto limitato e convesso $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ esiste una costante $C(\Omega)$ tale che, se u è soluzione del problema* (I) *nella classe*

$$\{z \in \operatorname{Lip}(\bar{\Omega}) : z = u \text{ su } \partial\Omega,\ z \geq \psi \text{ su } \bar{\Omega},\ \psi \in \operatorname{Lip}(\bar{\Omega})\}$$

ed $f \in C^0(\Omega)$, $f \geq \psi$ su $\bar{\Omega}$, risulta

$$\text{area } u \leq \text{area} f + c(\Omega) \max_{\partial\Omega} |u - f|. \tag{2.10}$$

Dim: Per la definizione di area di Lebesgue sarà sufficiente dimostrare la (2.10) per le $f \in \operatorname{Lip}(\bar{\Omega})$, $f \geq \psi$ su $\bar{\Omega}$.

Sia $\theta_\varepsilon(x)$ la funzione di $\bar{\Omega}$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$\theta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon \\ \dfrac{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)}{\varepsilon} & \text{se } \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon \end{cases}$$

$\theta_\varepsilon(x)$ è lipschitziana con costante $1/\varepsilon$. Indichiamo con $f_\varepsilon(x)$ la funzione

$$f_\varepsilon(x) = (1 - \theta_\varepsilon(x))\, u(x) + \theta_\varepsilon(x) f(x)$$

$f_\varepsilon(x)$ è lipschitziana ed inoltre $f_{\varepsilon|\partial\Omega} = u_{|\partial\Omega}$, $f_\varepsilon \geq \psi$.

Allora per la proprietà di minimo di u, risulta

$$\text{area } u \leq \text{area} f_\varepsilon \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$

D'altra parte

$$\text{area } f_\varepsilon \leq \text{area} f + \int_\Omega |D(f_\varepsilon - f)|\, dx.$$

Per completare la dimostrazione del lemma basterà, quindi, provare che

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\Omega |D(f_\varepsilon - f)|\, dx \leq c(\Omega) \max_{\partial\Omega} |u - f|. \tag{2.11}$$

Quasi ovunque su Ω, si ha

$$D(f_\varepsilon - f) = (1 - \theta_\varepsilon(x)) D(u - f) + (u - f) D(1 - \theta_\varepsilon(x)).$$

Per il teorema di Lebesgue

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\Omega |(1 - \theta_\varepsilon(x)) D(u - f)| \, dx = 0 \tag{2.12}$$

inoltre

$$\int_\Omega |u - f| \, |D(1 - \theta_\varepsilon(x)| \, dx \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} |u - f| \, dx \leq \sup_{\Omega - \Omega_\varepsilon} |u - f| \, \frac{\operatorname{mis}(\Omega - \Omega_\varepsilon)}{\varepsilon}$$

dove $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Ma

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{\Omega - \Omega_\varepsilon} |u - f| \, \frac{\operatorname{mis}(\Omega - \Omega_\varepsilon}{\varepsilon} = c(\Omega) \sup_{\partial\Omega} |u - f|. \tag{2.13}$$

Allora dalle (2.12) e (2.13) si ricava la (2.11) e quindi la tesi. c. v. d.

Dimostrazione del teorema di esistenza. Sia $\{\varphi_n\}$ una successione di funzioni di classe $C^2(\mathbb{R}^N)$ le cui restrizioni a $\partial\Omega$ convergono uniformemente a φ: le $\varphi_n|_{\partial\Omega}$ verificano la B. S. C. (cfr. [5]); sia $\{\psi_n\}$ una successione di funzioni lipschitziane su $\bar{\Omega}$ convergenti a ψ su $\bar{\Omega}$.

Consideriamo la successione dei problemi di minimo relativi all'ostacolo ψ_n e al dato al bordo $\varphi_n + \max_{\partial\Omega}(\varphi - \varphi_n) + \max_{\partial\Omega}(\psi_n - \psi)$ (²). Sia u_n la soluzione lipschitziana dello n-simo problema, che esiste ed è unica per il teorema 1.1.

Per la proposizione 1.1, si ha

$$\begin{aligned} \max_{\bar{\Omega}} |u_k - u_h| &\leq \max\{\max_{\partial\Omega} |\varphi_k + \max_{\partial\Omega}(\varphi - \varphi_k) + \max_{\partial\Omega}(\psi_k - \psi) - \\ &\quad - \varphi_h - \max_{\partial\Omega}(\varphi - \varphi_h) - \max_{\partial\Omega}(\psi_h - \psi)|, \max_{\bar{\Omega}} |\psi_k - \psi_h|\} \leq \\ &\leq 2 \max_{\partial\Omega} |\varphi_h - \varphi_k| + \max_{\bar{\Omega}} |\psi_k - \psi_h| \end{aligned}$$

(²) Si osservi che $\psi_n \leq \varphi_n + \max_{\partial\Omega}(\varphi - \varphi_n) + \max_{\partial\Omega}(\psi_n - \psi)$ su $\partial\Omega$.

quindi la successione $\{u_n\}$ converge uniformemente ad una funzione continua u su $\bar{\Omega}$, la quale verifica $u = \varphi$ su $\partial\Omega$ e $u \geq \psi$ su $\bar{\Omega}$.

Ancora, se $f \in C^0(\bar{\Omega})$, $f = \varphi$ su $\partial\Omega$, $f \geq \psi$ su $\bar{\Omega}$ si ha

$$\text{area}\, u \leq \text{area}\, f. \tag{2.14}$$

Infatti, posto

$$f_n = f + \max_{\bar{\Omega}} (\psi_n - \psi) \quad (\geq \psi_n)$$

per il lemma 2.1, si ha

$$\text{area}\, u_n \leq \text{area}\, f_n + c(\Omega) \max_{\partial\Omega} | u_n - f_n | =$$

$$= \text{area}\, f + c(\Omega) \max_{\partial\Omega} | \varphi_n - \varphi + \max_{\partial\Omega} (\varphi - \varphi_n) |$$

e passando al limite $n \to \infty$, poiché l'area di Lebesgue è semicontinua inferiormente per la topologia della convergenza uniforme, si ha la (2.14).
c.v.d.

Osservazione 2.1. La funzione u che compare nella dimostrazione precedente ha area finita. Infatti, fissata $f \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ $f \geq \psi$ su $\bar{\Omega}$, per il lemma 2.1

$$\text{area}\ u_n \leq \text{area}\, f + c(\Omega) \max_{\partial\Omega} | u_n - f - \max_{\bar{\Omega}} (\psi_n - \psi) |$$

da cui

$$\text{area}\, u \leq \text{area}\, f + c(\Omega) \max_{\partial\Omega} | u - f | < +\infty.$$

b) *Teorema di unicità.* Nel seguito supporremo sempre che Ω sia un aperto uniformemente convesso. Sia $f \in C^0(\bar{\Omega})$ con area $f < +\infty$, è allora noto (cfr. [5]) che l'area di $\{y = f(x)\ x \in \bar{\Omega}\}$ è data dalla variazione totale su Ω della misura vettoriale ν di componenti $\nu_i = D_i f$ $i = 1, \ldots, N$ e $\nu_{N+1} =$ misura di Lebesgue; in simboli

$$\text{area}\ f = \int_{\Omega} | d\nu_f | . \tag{2.15}$$

Cominciamo col provare un teorema di unicità per il problema dell'area minima con ostacolo più debole di quello enunciato.

PROPOSIZIONE 2.1. *Siano f, g soluzioni del problema* (I) *nella classe*

$$\{z \in C^0(\bar{\Omega}) : z = f = g \text{ su } \partial\Omega,\ z \geq \psi \text{ su } \bar{\Omega}\}.$$

Supponiamo $f \in \mathrm{Lip}(\bar{\Omega})$ *e area* $g < +\infty$. *Allora*

$$f = g \text{ su } \bar{\Omega} \tag{2.16}$$

dim: Le $D_i g$ sono misure, mentre

$$\text{area}\, f = \int_\Omega \sqrt{1 + |Df|^2}\, dx.$$

Sia μ una misura rispetto a cui siano assolutamente continue le $D_i g$ e la misura di Lebesgue. Se indichiamo con $\dot{D}_i f$ e $\dot{D}_{ig}$ le derivate (di Radom-Nikodim) di f e g rispetto a μ e con α la derivata della misura di Lebesgue rispetto a μ, l'area delle funzioni che risolvono il problema (I) si esprime come

$$\min = \int_\Omega \sqrt{\alpha^2 + \sum_{i=1}^N |\dot{D}_i f|^2}\, d\mu = \int_\Omega \sqrt{\alpha^2 + \sum_{i=1}^N |\dot{D}_i g|^2}\, d\mu.$$

La funzione $\dfrac{f+g}{2}$ è uguale a $f = g$ su $\partial\Omega$ e $\dfrac{f+g}{2} \geq \psi$ su $\bar{\Omega}$, quindi

$$\int_\Omega \sqrt{\alpha^2 + \sum_{i=1}^N \left| \dot{D}_i \frac{f+g}{2} \right|^2}\, d\mu \geq \min$$

ma d'altra parte

$$2\sqrt{\alpha^2 + \sum_{i=1}^N \left| \dot{D}_i \frac{f+g}{2} \right|^2} \leq \sqrt{\alpha^2 + \sum_{i=1}^N |\dot{D}_i f|^2} + \sqrt{\alpha^2 + \sum_{i=1}^N |\dot{D}_i g|^2} \tag{2.17}$$

quindi

$$\int_\Omega \sqrt{\alpha^2 + \sum_{i=1}^N \left| \dot{D}_i \frac{f+g}{2} \right|^2}\, d\mu = \min$$

e allora nella (2.17) vale il segno di uguaglianza μ-quasi ovunque. Indicato, allora, con Ω_0 l'insieme

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega : \alpha(x) = 0\}$$

dalla (2.17) segue che $\dot{D}f = \dot{D}g$ in $\Omega - \Omega_0$.

D'altra parte si ha

$$\int_{\Omega-\Omega_0} |d\,\nu_g| + \int_{\Omega_0} |d\,\nu_g| = \int_{\Omega-\Omega_0} |d\,\nu_f| = \min$$

$$\int_{\Omega-\Omega_0} |d\,\nu_g| = \int_{\Omega-\Omega_0} |d\nu_f|$$

da cui

(2.18)
$$\int_{\Omega_0} |Dg|\, d\mu = 0$$

poiché

$$0 = \int_{\Omega_0} |d\nu_g| \geq \int_{\Omega_0} |Dg|\, d\mu.$$

Dalla (2.18) e dal fatto che $\dot{D}f = \dot{D}g$ su $\Omega - \Omega_0$ segue che le misure $D_i f$ e $D_i g$ coincidono su Ω e quindi, poiché $f = g$ su $\partial\Omega$, vale (2.16).

c. v. d.

Conseguenze della proposizione precedente è il seguente lemma, che utilizzeremo nella dimostrazione del teorema di unicità.

LEMMA 2.2. *Siano* $\psi_1 \in C^0(\Omega)$ *e* $\psi_2 \in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$. *Siano* $f \in C^0(\overline{\Omega})$ *e* $u \in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$ *soluzioni del problema* (I) *rispettivamente nella classe* $\{z \in C^0(\overline{\Omega}) : z = f \text{ su } \partial\Omega,\ z \geq \psi_1 \text{ su } \overline{\Omega}\}$ *e nella classe* $\{z \in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega}) : z = u \text{ su } \partial\Omega,\ z \geq \psi_2 \text{ su } \overline{\Omega}\}$. *Inoltre sia, area* $f < +\infty$. *Allora, se* $f \leq u$ *su* $\partial\Omega$ *e* $\psi_1 \leq \psi_2$ *su* $\overline{\Omega}$, *si ha*

(2.19)
$$f \leq u \text{ su } \overline{\Omega}$$

e lo stesso è vero se si invertono i segni di diseguaglianza.

Dim: Sia $\{\overline{\psi}_n\}$ una successione di funzioni lipschitziane su $\overline{\Omega}$ tale che $\overline{\psi}_n \to \psi_1$ uniformemente in $\overline{\Omega}$; sia $\{f_n\} \subset \mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$ tale che $f_n \geq \psi_n$ e

$$\operatorname{area}_{\Omega} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{N} |D_i f_n|^2}\, dx.$$

Supponiamo che la (2.19) sia falsa. Posto $w = \max(u, f)$ si ha $w \neq u$. Poiché u è soluzione unica del problema dell'area minima tra le lipschitziane aventi i suoi stessi valori al bordo e $\geq \psi_2$, u è, per il lemma 2.1, soluzione dello stesso problema tra le funzioni continue aventi i suoi stessi valori al bordo e $\geq \psi_2$; e allora, per la proposizione 2.1 è unica. Quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\operatorname*{area}_{\Omega} w > \operatorname*{area}_{\Omega} u + \varepsilon$$

Poniamo $w_n = \max(u, f_n)$, w_n converge uniformemente in $\overline{\Omega}$ a w e $w_n \geq \overline{\psi}_n$; quindi si ha

$$\min_{n \to \infty} \lim \operatorname*{area}_{\Omega} w_n > \operatorname*{area}_{\Omega} u + \varepsilon$$

allora, passando eventualmente ad una sottosuccessione, possiamo supporre che per ogni n

$$\operatorname*{area}_{\Omega} w_n > \operatorname*{area}_{\Omega} u + \varepsilon.$$

Detto allora $A_n = \{x \in \Omega : f_n(x) > u(x)\}$ avremo

$$\operatorname*{area}_{\Omega} w_n = \int_{A_n} \sqrt{1 + |Df_n|^2}\, dx + \int_{\Omega - A_n} \sqrt{1 + |Du|^2}\, dx$$

quindi

$$\int_{A_n} \sqrt{1 + |Df_n|^2}\, dx > \int_{A_n} \sqrt{1 + |Du|^2}\, dx + \varepsilon \quad \forall n. \tag{2.20}$$

Poniamo $\sigma_n = \min(f_n, u)$ e $\sigma = \min(f, u)$, $\{\sigma_n\}$ converge uniformemente a σ su $\overline{\Omega}$, $\sigma = f$ su $\partial\Omega$ e $\sigma \geq \psi_1$ su $\overline{\Omega}$. Allora si ha

$$\operatorname*{area}_{\Omega} f \leq \operatorname*{area}_{\Omega} \sigma \leq \min_{n \to \infty} \lim \operatorname*{area}_{\Omega} \sigma_n \tag{2.21}$$

d'altra parte

$$\operatorname*{area}_{\Omega} \sigma_n = \int_{A_n} \sqrt{1 + |Du|^2}\, dx + \int_{\Omega - A_n} \sqrt{1 + |Df_n|^2}\, dx$$

e per la (2.20), si ha

$$\operatorname*{area}_{\Omega} \sigma_n < \operatorname*{area}_{\Omega} f_n - \varepsilon \qquad \forall n. \tag{2.22}$$

Da (2.20) e (2.22) segue allora che:

$$\operatorname*{area}_{\Omega} f < \operatorname*{area}_{\Omega} f - \varepsilon$$

che è assurdo poiché $\operatorname*{area}_{\Omega} f < + \infty$. c. v. d.

Dimostrazione del teorema di unicità: Siano $\{\varphi_n^+\}$ e $\{\varphi_n^-\}$ due successioni di funzioni continue con le loro derivate dei primi due ordini su $\mathbb{R}^N$ e tali che:

$$\varphi_n^+ \geq \varphi_{n+1}^+ \geq \varphi_{n+1}^- \geq \varphi_n^-$$

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n^+ = \lim_{n \to \infty} \varphi_n^- = \varphi \qquad \text{uniformemente su } \partial\Omega.$$

Siano $\{\psi_n^+\}$ e $\{\psi_n^-\}$ due successioni di funzioni lipschitziane su $\bar{\Omega}$ e tali che:

$$\psi_n^+ \geq \psi_{n+1}^+ \geq \psi_{n+1}^- \geq \psi_n^-$$

$$\lim_{n \to \infty} \psi_n^+ = \lim_{n \to \infty} \psi_n^- = \psi \qquad \text{uniformemente su } \bar{\Omega}.$$

Si può sempre supporre $\psi_n^+ \leq \varphi_n^+$ $(\psi_n^- \leq \varphi_n^-)$ su $\partial\Omega$.

Sia u_n^+ (u_n^-) la soluzione del problema dell'area minima nella classe delle funzioni lipschitziane $\geq \psi_n^+$ (ψ_n^-) su $\bar{\Omega}$ e che assumono i valori φ_n^+ (φ_n^-) su $\partial\Omega$.

Grazie al principio di massimo e alla convergenza uniforme dei dati, u_n^+ e u_n^- convergono, come abbiamo osservato nella dimostrazione del teorema di esistenza, uniformemente su $\bar{\Omega}$ ad una funzione continua u che risolve il problema dell'area minima relativamente all'ostacolo ψ e al dato al bordo φ.

Sia ora $v \in C^0(\bar{\Omega})$ un'altra soluzione del problema, per l'osservazione 2.1 si ha area $v < +\infty$ quindi per il lemma 2.2

$$u_n^- \leq v \leq u_n^+ \quad \text{su} \quad \bar{\Omega}$$

e al limite per $n \to \infty$

$$v = u \quad \text{su} \quad \bar{\Omega}.$$

Questo prova completamente il teorema 2.1. c. v. d.

Parte II

regolarità

Notazioni. Indichiamo con $L^p(\Omega)$ lo spazio delle funzioni misurabili tali che:

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega | u |^p \, dx \right)^{1/p} < +\infty \quad 1 < p < \infty$$

$C^k(\bar{\Omega})$ è la classe delle funzioni continue in $\bar{\Omega}$ con le derivate di ordine $\leq k$; $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ è il sottospazio delle funzioni di $C^k(\bar{\Omega})$ che hanno le derivate k-sime hölderiane con esponente α, $0 < \alpha < 1$.

Il completamento di $C^k(\bar{\Omega})$ rispetto alla norma

$$\| u \|_{H^{k,p}(\Omega)} = \left\{ \sum_{|i| \leq k} \| D^i u \|^p_{L^p(\Omega)} \right\}^{1/p} \qquad 1 < p < +\infty$$

$i = (i_1, \ldots, i_N)$ lo indichiamo con $H^{k,p}(\Omega)$.

Il completamento di $C_0^k(\bar{\Omega})$, funzioni di $C^k(\bar{\Omega})$ a supporto compatto in Ω, rispetto alla norma $\| \ \|_{H^{k,p}(\Omega)}$ lo indichiamo con $H_0^{k,p}(\Omega)$.

Diciamo infine che $u \in H^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ se per ogni $x \in \Omega$ esiste un intorno $V(x) \subset \Omega$ tale che $u \in H^{k,p}(V(x))$.

Sia E un sottoinsieme chiuso di $\bar{\Omega}$; una funzione $u \in H^{1,2}(\Omega)$ si dice non negativa su E nel senso di H^1 se esiste una successione $\{u_n\}$ di funzioni $C^1(\Omega)$ $(C^\infty(\Omega))$ tale che: (i) $u_n \geq 0$ *su E,* (ii) $u_n \to u$ *in $H^{1,2}(\Omega)$ per $n \to \infty$. Più in generale diciamo che, per $u \in H^{1,2}(\Omega)$ e $v \in H^{1,2}(\Omega)$, $u \geq v$ su E nel senso di $H^{1,2}$ se $u - v \geq 0$ su E nel senso di $H^{1,2}$.*

Si vede che (ad es. cfr. [4]) la diseguaglianza $u \geq \psi$ su E nel senso di $H^{1,2}$ implica che $u \geq \psi$ è soddisfatta per tutti i punti di E eccetto al più un insieme di capacità zero e che l'insieme $\{u \in H^{1,2}(\Omega) : u - \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega), u \geq \psi\}$ è un insieme chiuso e convesso di $H^{1,2}(\Omega)$.

1. Funzionali uniformemente ellittici.

Sia $f(x, p)$ una funzione definita in $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N$ a valori in $\mathbb{R}$ tale che

(a_1) $\qquad f(x,p) \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$ (3).

(a_2) Esistono ν, $\lambda \in \mathbb{R}$ $(0 < \nu < \lambda)$ tali che

$$\nu |p|^2 \leq f(x,p) \leq \lambda(|p|^2 + 1)$$

$$\nu |\xi|^2 \leq \sum_{i,J=1}^N f_{p_i p_J}(x,p)\, \xi_i \xi_J \leq \lambda |\xi|^2 \qquad \forall\, x \in \bar{\Omega} \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^N \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N$$

---

(3) Si noti che nel seguito non si userà mai l'esistenza delle derivate $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

$$(a_3) \qquad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \, \partial p_i} \right| \leq M \, | \, p \, | \qquad \forall \, x \in \bar{\Omega} \quad \forall \, p \in \mathbb{R}^N \qquad M = \text{costante positiva.}$$

Siano ancora φ e ψ due funzioni appartenenti ad $H^{1,2}(\Omega)$, con $\varphi(x) \geq \psi(x)$ su $\partial\Omega$.

È ben noto (cfr. ad es. [6]), in queste ipotesi, che il funzionale

$$F(u) = \int_\Omega f(x, Du)\, dx$$

è fortemente continuo e, quindi, debolmente semicontinuo inferiormente su $H^{1,2}(\Omega)$. Con i metodi diretti del calcolo delle variazioni si dimostra allora facilmente che il funzionale $F(u)$ ammette minimo unico nella classe $A = \{u \in H^{1,2}(\Omega) : u - \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega) \; u \geq \psi \text{ su } \bar{\Omega}\}$.

Introduciamo la seguente funzione:

$$g(x, u) = \max\left(0, \, -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi)}{\partial p_i}\right) \max(0, \psi - u).$$

LEMMA 1.1. *Sia $\{\psi_n\}$ una successione di funzioni di $H^{2,2}(\Omega)$ convergente a ψ in $H^{2,2}(\Omega)$; sia $\{u_n\}$ una successione di funzioni di $H^{1,2}(\Omega)$ convergenti a u in $H^{1,2}(\Omega)$. Allora*

$$\int_\Omega g(x, u_n)\, dx \to \int_\Omega g(x, u)\, dx.$$

Dim: Si ha:

$$\int_\Omega | g(x, u_n) - g(x, u) | \, dx =$$

$$= \int_\Omega \left| \max\left(0, \, -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi_n)}{\partial p_i}\right) \max(0, \psi_n - u_n) - \right.$$

$$\left. - \max\left(0, \, -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi)}{\partial p_i}\right) \max(0, \psi - u) \right| dx \leq$$

$$\leq \int_\Omega \max\left(0, \, -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi_n)}{\partial p_i}\right) | \psi_n - \psi + u_n - u | \, dx +$$

$$+ \int_\Omega \max(0, \psi - u) \left| \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi_n)}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi)}{\partial p_i} \right| dx \leq$$

$$\leq \left(\int_\Omega \left[\max \left(0, - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi_n)}{\partial p_i} \right]^2 \right) \right)^{1/2} \left(\int_\Omega | \psi_n - \psi + u_n - u |^2 \, dx \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_\Omega [\max(0, \psi - u)]^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left| \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi_n)}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi)}{\partial p_i} \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Osservando ora che:

$$\int_\Omega \left| \max \left(0, - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi_n)}{\partial p_i} \right) \right|^2 dx \quad \text{è limitato}$$

$$\int_\Omega | \psi_n - \psi + u_n - u |^2 \, dx \longrightarrow 0$$

e che

$$\left| \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi_n)}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi)}{\partial p_i} \right|^2$$

converge a zero puntualmente ed è maggiorata da una funzione di $L^1(\Omega)$, si ottiene

$$\int_\Omega | g(x, u_n) - g(x, u) | \, dx \longrightarrow 0$$

cioè la tesi. c. v. d.

Come conseguenza del lemma 1.1 si ha che il funzionale

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega \{ f(x, Du) + g(x, u) \} \, dx$$

è fortemente continuo (quindi, perchè convesso, debolmente semicontinuo inferiormente) in $H^{1,2}(\Omega)$. Segue allora che $\mathcal{F}(u)$ ammette minimo unico nella classe $\mathcal{A} = \{ v \in H^{1,2}(\Omega) ; v - \varphi \in H_0^1(\Omega) \}$.

TEOREMA 1.1. *Sia* $\psi \in H^{2,2}(\Omega)$ *e sia* $\varphi \in H^{1,2}(\Omega)$ *con* $\varphi \geq \psi$ *su* $\partial\Omega$. *Sia* u *la soluzione del problema*

$$F(u) = \int_\Omega f(x, Du) \, dx = \min \tag{I}$$

nella classe $A = \{ u \in H^{1,2}(\Omega) : u - \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega), u \geq \psi$ *su* $\bar{\Omega} \}$. *Sia* v *la solu-*

zione del problema

$$\text{(II)} \qquad \mathcal{F}(v) = \int_{\Omega} \{f(x, Dv) + g(x, v)\}\, dx = \min$$

nella classe $\mathcal{A} = \{v \in H^{1,2}(\Omega) : v - \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)\}$.

Allora $u = v$

Dim: Cominciamo col far vedere che per ogni $w \in H^{1,2}(\Omega)$, $w \geq \psi$ su $\partial\Omega$

$$\text{(1.1)} \qquad \mathcal{F}(w \vee \psi) \leq \mathcal{F}(w) \ (^4).$$

Supponiamo, prima, che $w \in C^\infty(\bar{\Omega})$ e $\psi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, allora;

$$\mathcal{F}(w \vee \psi) = \int_{\{w \geq \psi\}} f(x, Dw)\, dx + \int_{\{w < \psi\}} f(x, D\psi)\, dx .$$

D'altra parte, sfruttando la convessità di f rispetto a p e integrando per parti, si ha:

$$\int_{w<\psi\}} \{f(x, D\psi) - f(x, Dw)\}\, dx \leq \int_{\{w<\psi\}} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f(x, D\psi)}{\partial p_i} (D_i \psi - D_i w)\, dx =$$

$$= - \int_{\{w<\psi\}} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi)}{\partial p_i} (\psi - w)\, dx \leq$$

$$\leq \int_{\{w<\psi\}} \left\{\left(- \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi)}{\partial p_i}\right) \vee 0 \right\} (\psi - w)\, dx = \int_{\{w<\psi\}} g(x, w)\, dx$$

da cui segue la (1) per $w, \psi \in C^\infty$.

Siano ora $w \in H^{1,2}(\Omega)$ e $\psi \in H^{2,2}(\Omega)$ con $w \geq \psi$, esistono due successioni $\{w_n\}$ e $\{\psi_n\}$ di funzioni $C^\infty(\bar{\Omega})$ tali che $w_n \geq \psi_n$ su $\partial\Omega$, $w_n \to w$ in $H^{1,2}(\Omega)$ e $\psi_n \to \psi$ in $H^{2,2}(\Omega)$. Infatti poichè $w - \psi \geq 0$ esiste una successione $\{u_n\} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ tale che $u_n \to w - \psi$ in $H^{1,2}(\Omega)$ e $u_n \geq 0$ su $\partial\Omega$; basterà allora prendere $w_n = u_n + \psi_n$.

Tenendo ora conto che $w_n \vee \psi_n$ converge in $H^{1,2}(\Omega)$ a $w \vee \psi$, $\mathcal{F}(v)$ è fortemente continuo in $H^{1,2}(\Omega)$, $\psi_n \to \psi$ in $H^{2,2}$ e del lemma 1.1, passando al limite su

$$\mathcal{F}(w_n \vee \psi_n) \leq \mathcal{F}(w_n)$$

si ottiene la (1.1) per ogni $w \in H^{1,2}(\Omega)$ e $w \geq \psi$ su $\partial\Omega$.

Sia ora v la soluzione del problema (II) in $\mathcal{A}$; per la (1.1)

$$\mathcal{F}(v \vee \psi) \leq \mathcal{F}(v).$$

---

(4) $(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x))$.

Dall'unicità della soluzione del problema (II) in $\mathcal{A}$ segue allora che $v \vee \psi = v$ cioè $v \geq \psi$. Ma se $v \geq \psi$, $\mathcal{F}(v) = F(v)$ e quindi v minimizza F in A. D'altra parte il problema (I) in A ha soluzione unica, allora $v = u$.

c. v. d.

Lo studio della regolarità della soluzione del problema (I) è ora ricondoto allo studio della regolarità del minimo del funzionale $\mathcal{F}(u)$. Come è ormai standard si studierà separatamente la regolarità all'interno e quella al bordo

Per lo studio della regolarità all'interno sarà utile una formulazione locale del teorema 2.2; per questo diamo la seguente definizione.

Definizione 1.1. *Diremo che* $u \in H^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *è minimale per* $\mathcal{F}$ *in* Ω *se per ogni* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

$$\mathcal{F}_{\operatorname{supp}\varphi}(u) = \int_{\operatorname{supp}\varphi} \left\{ f(x, Du) + g(x, u) \right\} dx \leq$$

$$\leq \int_{\operatorname{supp}\varphi} \left\{ f(x, D(u + \varphi)) + g(x, u + \varphi) \right\} dx = \mathcal{F}_{\operatorname{supp}\varphi}(u + \varphi).$$

Analogamente diremo che $u \in H^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *è minimale (con ostacolo* ψ*) per* F *in* Ω *se* $u \geq \psi$ *e per ogni* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *con* $u + \varphi \geq \psi$

$$F_{\operatorname{supp}\varphi}(u) \leq F_{\operatorname{supp}\varphi}(u + \varphi).$$

OSS. 1.1. $u \in H^{1,2}(\Omega)$ è minimale per $\mathcal{F}(F)$ in Ω se e solo se u minimizza $\mathcal{F}(F)$ su ogni $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ (cioè $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$) tra le funzioni di $H^{1,2}(\Omega_0)$ che hanno su $\partial\Omega_0$ la stessa traccia di u.

Possiamo allora enunciare il seguente teorema.

TEOREMA 1.2. $u \in H^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *è minimale (con ostacolo* ψ*) per* F *in* Ω *se e solo se è minimale per* $\mathcal{F}$ *in* Ω.

Regolarità dell'interno.

TEOREMA 1.3. *Sia* $u \in H^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *minimale per*

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega \{ f(x, Du) + g(x, u) \} \, dx$$

in Ω, *con* $\psi \in H^{2,p}(\Omega)$, $p > N$. *Allora* u *appartiene ad* $H^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Dimostreremo il teorema 1.3 facendo vedere che le u minimali per $\mathcal{F}$ sono limiti di successioni di funzioni regolari, minimali per funzionali approssimanti $\mathcal{F}$.

Cominciamo col fare alcune considerazioni. Sia $\theta(t)$ la funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

posto

$$\tau(x) = \max\left(0, -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi)}{\partial p_i}\right)$$

si ha

$$g(x, u) = \max(0, \psi - u) \cdot \tau(x) = \tau(x) \int_{-\infty}^{\psi - u} \theta(t)\, dt.$$

Sia $\{\theta_n(t)\}$ una successione di funzioni di classe C^1 su $\mathbb{R}$ tali che:

(i) $0 \leq \theta_n(t) \leq 1$ per ogni n e per ogni $t \in \mathbb{R}$

(ii) $\theta_n(t) = 1$ per $t > \frac{1}{n}$, $\theta_n(t) = 0$ per $t < -\frac{1}{n}$

(iii) $\theta'_n(t) \geq 0$

poniamo

$$g_n(x, u) = \tau(x) \int_{-\infty}^{\psi - u} \theta_n(t)\, dt$$

ovviamente si ha

(b_1) $|g^{(n)}(x, u)| \leq \tau(x)\,|u| + (1 + |\psi|)\,\tau(x)$

(b_2) $g^{(n)}(x, u)$ è di classe C_1 rispetto a u, inoltre

$$\left|\frac{\partial g^{(n)}}{\partial u}\right| \leq \tau(x).$$

Osserviamo ancora che per la condizione (iii), $g^{(n)}(x, u)$ è convessa in u, quindi il funzionale

$$\mathcal{F}^{(n)}(u) = \int_{\Omega} \{f(x, Du) + g^{(n)}(x, u)\}\, dx$$

ammette unico minimo nella classe $\mathcal{A} = \{u \in H^{1,2}(\Omega)\, u - \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)\}$.

Con le notazioni precedenti vale la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.1. *Sia* $u_n \in H^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *soluzione dell'equazione di Eulero*

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^N f_{p_i}(x, Dv)\, D_i \varphi + g_v^{(n)}(x, v)\, \varphi \right\} dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.2}$$

relativa al funzionale

$$\mathcal{F}^{(n)}(v) = \int_\Omega \{ f(x, Dv) + g^{(n)}(x, v) \}\, dx$$

con $\psi \in H^{2,p}(\Omega)$, $p > N$. *Allora* $u_n \in H^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Inoltre per ogni coppia di aperti $\Omega_1 \subset\subset \Omega_0 \subset\subset \Omega$ *si ha la maggiorazione*

$$\| u_n \|_{H^{2,p}(\Omega_1)} \le c \tag{1.3}$$

dove c *è una costante che dipende da* $N, \nu, \lambda\, M, \Omega_0, \Omega_1, p, \| \psi \|_{H^{2,p}(\Omega)}$ *e da* $\| u_n \|_{H^{1,2}(\Omega_0)}$.

Dim. Usando la tecnica standard dei rapporti incrementali (vedi ad es. Morrey [6] pag. 34-39) si ottiene che $u_n \in H^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, che per ogni coppia di aperti $\Omega_1 \subset\subset \Omega_0 \subset\subset \Omega$ vale la maggiorazione

$$\| u_n \|_{H^{2,2}(\Omega_1)} \le c(N, \nu, \lambda, M, \Omega_1, \Omega_0) \{ \| u_n \|_{H^{1,2}(\Omega_0)} + \| \psi \|_{H^{2,2}(\Omega_0)} \}, \tag{1.4}$$

e che, per ogni $S = 1, \dots, N$ la funzione $v = D_S u_n$ è soluzione dell'equazione lineare ellittica a coefficienti discontinui

$$\int_{\Omega_1} \sum_{iJ=1}^N f_{p_i p_J}(x, D u_n(x))\, D_i v\, D_J \varphi\, dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^N G_i D_i \varphi\, dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_1) \tag{1.5}$$

con

$$G_i = \delta_{is}\, g_v^{(n)}(x, u_n) - f_{p_i x_s}(x, Du_n). \tag{1.6}$$

Poniamo

$$q_0 = 2 \quad q_{k+1} = q_k^* \ (^5).$$

(5) q_k^* è l'esponente di Sobolev relativo a q, $\dfrac{1}{q_k^*} = \dfrac{1}{q_k} = \dfrac{1}{N}$, se $q_k < N$, $q_k^* = p$ se $q_k \ge N$.

e, fissata una sfera $B_R \subset\subset \Omega_1$

$$R_k = R\left(1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^k}\right).$$

Si ha la maggiorazione

$$\| Du_n \|_{L^{q_k}(B_{R_k})} \leq c(N, \nu, \lambda, M, B_R, B_{R_k}, q_k, k)\{\| u_n \|_{H^{1,2}(\Omega_0)} + \| \psi \|_{H^{2,p}(\Omega_0)}\} \tag{1.7}$$

Infatti, per induzione su k, la (1.7) è vera per $k = 0$. Supponiamo la (1.7) vera per k, poichè la $D_s u_n$, $s = 1, \dots, N$, verifica l'equazione (1.5) e $G_i \in L^{q_k}(B_{R_k})$

$$\| G_i \|_{L^{q_k}(B_{R_k})} \leq c\{\| \psi \|_{H^{2,q_k}(B_{R_k})} + \| Du_n \|_{L^{q_k}(B_{R_k})}\} \tag{1.8}$$

per noti risultati di regolarità (cfr. [8]) si ha che $D_s u_n \in L^{q_k^*}(B_{R_{k+1}})$, $s = 1, \dots, N$, e

$$\| D_s u_n \|_{L^{q_k^*}(B_{R_{k+1}})} \leq c\{\| Du_n \|_{H^{1,2}(B_R)} + \| G_i \|_{L^{q_k}(B_{R_k})}\}$$

da cui la (1.7), tenendo conto di (1.4) e (1.8).

Sia ora $\bar{k}$ tale che $q_{\bar{k}+1} \geq N$, allora, poichè $D_s u_n$ $s = 1 \dots N$ verifica l'equazione (1.5) e ovviamente $G_i \in L^q(B_{R_{\bar{k}+1}})$, esiste (cfr. [8]) α, $0 < \alpha \leq 1$, tale che $D^s u_n \in C^{0,\alpha}(B_{R_{\bar{k}+2}})$ $s = 1 \dots N$ ed inoltre

$$\| D_s u_n \|_{C^{0,\alpha}(B_{R_{\bar{k}+2}})} \leq c\{\| u_n \|_{H^{1,2}(B_R)} + \| \psi \|_{H^{2,p}(B_R)}\}. \tag{1.9}$$

Ma allora i coefficienti $f_{p_i p_J}(x, Du_n(x))$ dell'equazione (1.5) sono continui, quindi per i risultati sulla teoria L^p per equazioni lineari a coefficienti continui ([1], [2]) si ha

$$D_i(D_s u_n) \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) \qquad s = 1, \dots, N$$

cioè $u_n \in H^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ e vale la maggiorazione

$$\| D_i D_s u \|_{L^p(B_R)} \leq c\{\| D_s u_n \|_{H^{1,2}(B_{2R})} + \| G_i \|_{L^p(B_{2R})}\} \tag{1.10}$$

dove c è una costante che dipende da N, ν, λ, M, R, p e dal modulo di continuità di $f_{p_i p_J}(x, Du_n)$, cioè della norma di $D_s u_n$ in $C^{0,\alpha}(B_{2R})$, e quindi in definitiva dalla $\| u_n \|_{H^{2,2}}$, e dalla $\| \psi \|_{H^{2,2}}$. Tenendo allora conto delle (1.9), (1.10), (a_3), (b_2), (1.7) e (1.4) si ottiene la (3). c. v. d.

Siano ora in grado di dare la dimostrazione del teorema 1.3.

Dimostrazione del teorema 1.3. Sia $u \in H^{1,2}_{\rm loc}(\Omega)$ minimale per $\mathcal{F}$ in Ω; preso $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ sia u_n la soluzione del problema

$$\mathcal{F}^{(n)}_{\Omega_0}(v) = \int_{\Omega_0} \{f(x, Dv) + g^{(n)}(x, v)\}\, dx = \min$$

nella classe

$$\mathcal{A}_u = \{ v \in H^{1,2}(\Omega_0) : v - u \in H^{1,2}_0(\Omega_0)\}.$$

Per la proposizione 1.1, se $\Omega_1 \subset\subset \Omega_0$ allora $u_n \in H^{2,p}(\Omega_1)$.

Per le (a_2) e (b_1)

$$\| u_n \|_{H^{1,2}(\Omega_0)} \leq c(N, \nu, \lambda, \Omega_0 \{ \| u \|_{H^{1,2}(\Omega_0)} + \| \psi \|_{H^{2,2}(\Omega_6)} + 1 \} \tag{1.11}$$

infatti

$$\nu \int_{\Omega_0} | Du_n |^2\, dx - \int_{\Omega_0} \tau\, | u_n |\, dx - \int_{\Omega_0} \tau\, (| \psi | + 1)\, dx \leq$$

$$\leq \int_{\Omega_0} \Big\{ f(x, Du_n) + g^{(n)}(x, u_n) \} \, dx \leq \int_{\Omega_0} \{ f(x, Du) + g^{(n)}(x, u) \}\, dx \leq$$

$$\leq \lambda \int_{\Omega_0} (| Du^2 | + 1)\, dx + \int_{\Omega_0} \tau\, | u |\, dx + \int_{\Omega_0} \tau\, (| \psi | + 1)$$

da cui $\forall\, \varepsilon > 0$

$$\nu \int_{\Omega_0} | Du_n |^2\, dx - \varepsilon \int_{\Omega_0} | u - u_n |^2\, dx \leq \lambda \int_{\Omega_0} | Du |^2\, dx + \lambda\, | \Omega_0 | +$$

$$+ 2 \int_{\Omega_0} \tau\, | u |\, dx + 2 \int_{\Omega_0} \tau\, (1 + | \psi |)\, dx + \varepsilon^{-1} \int_{\Omega_0} \tau^2\, dx$$

da cui, tenendo conto della diseguaglianza di Poincaré $(u - u_n \in H^{1,2}_0(\Omega_0))$ e scegliendo ε abbastanza piccolo si ottiene la (1.11).

Per la (1.11) la successione $\{u_n\}$ è equilimitata in $H^{1,2}(\Omega_0)$, quindi esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ convergente debolmente in $H^{1,2}(\Omega_0)$ ad una $v \in \mathcal{A}_\mu$; e si ha

$$\int_{\Omega_0} f(x, Dv)\, dx \leq \min_{k \to \infty} \lim \int_{\Omega_0} f(x, Du_{n_k})\, dx \tag{1.12}$$

$$\int_{\Omega_0} g(x, v)\, dx \leq \lim_{k \to \infty} \int_{\Omega_0} g^{(n_k)} x, u_{n_k})\, dx\,. \tag{1.13}$$

La (1·12) è conseguenza del fatto che $\int\limits_{\Omega_0} f(x, Dw)\, dx$ è debolmente semicontinuo inferiormente in $H^{1,2}(\Omega_0)$. Resta da provare la (1.13).

Ricordando la definizione di $g^{(n_k)}(x, w)$ si ha

$$\left| \int\limits_{\Omega_0} g^{(n_k)}(x, u_{n_k}) - \int\limits_{\Omega_0} g(x, v) \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\Omega_0} \tau(x) \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\psi - u_{n_k}} \theta_{n_k}(t) - \theta(t))\, dt - \int\limits_{\psi - u_{n_k}}^{\psi - v} \theta(t)\, dt \right\} dx \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega_0} \tau(x) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} | \theta_{n_k} - \theta |\, dt\, dx + \int\limits_{\Omega_0} \tau(x) | v - u_{n_k} |\, dx \leq$$

$$\leq \| \tau \|_{L^2(\Omega)} \left\{ \int\limits_{-1}^{1} | \theta_{n_k} - \theta |\, dt \operatorname{mis}(\Omega_0) + \left(\int\limits_{\Omega_0} | v - u_{n_k} |^2\, dx \right)^{1/2} \right\}.$$

Poiché θ_n converge puntualmente a θ, per il teorema di Lebesgue

$$\int\limits_{-1}^{1} | \theta_{n_k} - \theta |\, d\, t \rightarrow 0 \qquad \text{per } n_k \rightarrow \infty$$

d'altra parte $u_{n_k} \rightharpoonup v$ in $H^{1,2}(\Omega_0)$: questo dimostra la (1.13).

Analogamente si verifica che:

$$\int\limits_{\Omega_0} g(x, w)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{\Omega_0} g^{(n)}(x, w)\, dx. \tag{1 14}$$

Dalle (1.12), (1.13) e (1.14) segue che v è minimale per $\mathcal{F}$ in Ω_0, infatti per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)$

$$\int\limits_{\operatorname{supp} \varphi} \left\{ f(x, Dv) + g(x, v) \right\} dx \leq \min_{k \to \infty} \lim \int\limits_{\operatorname{supp} \varphi} \left\{ f(x, Du_{n_k}) + g^{(n_k)}(x, u_{n_k}) \right\} dx \leq$$

$$\leq \min_{k \to \infty} \lim \int\limits_{\operatorname{supp} \varphi} \left\{ f(x, Dv + D\varphi) + g^{(n_k)}\, x, v + \varphi) \right\} dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi} \{ f(x, Dv + D\varphi) + g(x, v + \varphi)\, dx.$$

Inoltre $v = u$ su $\partial\Omega_0$, ne segue che $v = u$ su Ω_0. Ancora, per l'unicità, tutta la successione $\{u_n\}$ converge debolmente a u.

Dalla (1.3) e dalla (1.11) segue che, se $\Omega_1 \subset\subset \Omega_0$

$$\| u_n \|_{H^{2,p}(\Omega_1)} \leq c$$

dove c è una costante che dipende da $N, \nu, \lambda, M, \Omega_1, \Omega_0, p, \| \psi \|_{H^{2,p}(\Omega_0)}$ e da $\| u \|_{H^{1,2}(\Omega_0)}$; cioè $\{u_n\}$ è equimilitata in $H^{2,p}(\Omega_1)$. Allora esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ che converge debolmente in $H^{2,p}(\Omega_1)$ a una $w\ (\in H^{2,p}(\Omega_1))$; poiché $\{u_n\}$ converge in $H^{1,2}(\Omega_0)$ a u, segue che $w = u$, su Ω_1, cioè $u \in H^{2,p}(\Omega_1)$. La tesi segue allora dall'arbitrarietà di Ω_1. c. v. d.

Regolariàà al bordo (6). Per la regolarità di$\partial\ \Omega$, mediante un opportuno cambiamento di variabili l'equazione (2) si riduce localmente ad una equazione nella $w_n = u_n - \varphi$, verificata su una semisfera $B_R^+ = \{x \in \mathbb{R}^N \| x \| < R\, x_N \geq 0\}$ e la w_n è nulla sulla parte piatta $\{x_N = 0\}$ di B_R^+.

L'equazione trasformata ha le stesse proprietà dell'originale, eccetto che per gli andamenti. Facendo i rapporti incrementali, nella direzione tangenziale, come per l'interno, si mostra che $D_s w_n \in H^{1,2}(B_r^+)\ r < R,\ s = 1 \ldots N-1$ e che $v_n = D_s w_n$ soddisfa l'equazione trasformata di (5). Poiché si ha già la differenziabilità all'interno, per l'ellitticità, si risolve l'equazione in $D_N D_N w_n$ e si vede che $D_N w_n \in H^{1,2}(B_r^+)$ e verifica la trasformata di (5).

Da qui e dai risultati all'interno segue che $v_n = D_s u_n \in H^{1,2}(\Omega)$ e che v_n verifica l'equazione (5) (cfr. [6]). Ora, con un discorso analogo a quello della proposizione 2.1, utilizzando i risultati di regolarità relativi al problema di Dirichlet (cfr. [8], [1], [2]) per equazioni lineari ellittiche si ottiene che $u_n \in H^{2,p}(\Omega)$ e che

$$\| u_n \|_{H^{2,p}(\Omega)} \leq c\,(N, \nu, \lambda, p, \| \psi \|_{H^{2,p}(\Omega)}, \| \varphi \|_{H^{2,p}(\Omega)}, \| u_n \|_{H^{1,2}(\Omega)}).$$

D'altra parte

$$\| u_n \|_{H^{1,2}(\Omega)} \leq c\,(\nu, \lambda, M, |\,\Omega\,|)\,\{\| \varphi \|_{H^{1,2}(\Omega)} + \| \psi \|_{H^{2,2}(\Omega)} + 1\}$$

quindi si vede (si confronti la dimostrazione del teorema 2.1) che una sottosuccessione di $\{u_n\}$, u_{n_k}, converge debolmente in $H^{2,p}(\Omega)$ e converge proprio al minimo u del funzionale $\mathcal{F}(u)$ in $\mathcal{A} = \{u \in H^{1,2}(\Omega) : u - \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)\}$, cioè $u \in H^{2,p}(\Omega)$.

Concludendo, possiamo enunciare i seguenti teoremi:

---

(6) Essendo il procedimento ormai standard, diamo solo la traccia, della dimostrazione.

TEOREMA 1.4. *Sia* $u \in H^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *minimale (con ostacolo* ψ*) per il funzionale*

$$F(u) = \int_\Omega f(x, Du)\, dx$$

con $\psi \in H^{2,p}(\Omega)$, $p > N$. *Allora* $u \in H^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

In particolare $u \in C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, con $\alpha = 1 - \dfrac{N}{p}$.

TEOREMA 1.5. *Sia* Ω *di classe* C^2. *Siano* $\varphi(x)$ *e* $\psi(x)$ *due funzioni appartenenti ad* $H^{2,p}(\Omega)$ $(p > N)$, *con* $\varphi(x) \geq \psi(x)$ *su* $\partial\Omega$. *Sia u il minimo del funzionale*

$$F(u) = \int_\Omega f(x, Du)\, dx$$

nella classe $A = \{v \in H^{1,2}(\Omega) : v - \varphi \in H^{1,2}_0(\Omega),\ v \geq \psi \text{ su } \overline{\Omega}\}$. *Allora* $u \in H^{2,p}(\Omega)$.

In particolare $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ con $\alpha = 1 - \dfrac{N}{p}$.

2. Regolarità per il problema dell'area.

Sfruttando i risultati del paragrafo precedente, si dimostrano i seguenti teoremi di regolarità relativi al problema dell'area minima con ostacolo.

TEOREMA 2.1. *Sia u una funzione localmente lipschitziana minimale (con ostacolo* ψ*) per il funzionale*

$$\text{area } u = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2}\, dx.$$

Supponiamo $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$. *Allora per ogni* α, $0 \leq \alpha < 1$, *u appartiene a* $C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

TEOREMA 2.2. *Sia* Ω *un aperto uniformemente convesso con frontiera di classe* C^2, φ *la restrizione a* $\partial\Omega$ *di una funzione di classe* C^2, $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ $\varphi \geq \psi$ *su* $\partial\Omega$. *Sia* $u \in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$ *la soluzione del problema*

$$\text{area } u = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2}\, dx = \min$$

nella classe $\{z \in \mathrm{Lip}(\bar{\Omega}) : z = \varphi$ *su* $\partial\Omega$ $z \geq \psi$ *su* $\bar{\Omega}\}$. *Allora per ogni* α, $0 \leq \alpha < 1$, u *appartiene a* $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Dim. del teorema 2.1. Fissato $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, $u \in \mathrm{Lip}(\bar{\Omega}_0)$ è soluzione del problema dell'area minima nella classe $\{z \in \mathrm{Lip}(\bar{\Omega}_0)$ $z = u$ su $\partial\Omega_0$ $z \geq \psi$ su $\bar{\Omega}_0\}$.

Sia k la costante di Lipschitz della u.

Indichiamo con $f(p)$ una funzione di classe $C^2(\mathbb{R}^N)$, che coincida con $\sqrt{1 + \Sigma p_i^2}$ per $|p| < 2k$ ed inoltre tale che esistano m, M, ν, λ costanti positive per cui

$$m|p|^2 \leq f(p) \leq M(|p|^2 + 1 \qquad \forall\, p \in \mathbb{R}^N$$

$$\nu|\xi|^2 \leq f_{p_i p_j}(p)\, \xi_i \xi_j \leq \lambda |\xi|^2 \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N$$

$u \in \mathrm{Lip}(\bar{\Omega}_0)$ è l'unica soluzione del problema

$$F(u) = \int_{\Omega} f(Du)\, dx = \min \tag{2.1}$$

nella classe $\{z \in \mathrm{Lip}(\bar{\Omega}_0)$ $z = \varphi$ su $\partial\Omega_0$, $z \geq \psi$ su $\bar{\Omega}_0\}$, in quanto u è minimo relativo interno per $F(u)$ ed il funzionale $F(u)$ è strettamente convesso.

Inoltre u è soluzione del problema (2.1) nella classe $A = \{v \in H^{1,2}(\Omega_0) :$ $v - u \in H_0^{1,2}(\Omega_0)$ $v \geq \psi$ su $\bar{\Omega}_0\}$, poiché $F(u)$ è fortemente continuo in $H^{1,2}(\Omega)$ e $\mathrm{Lip}(\Omega_0)$ è denso in A. Allora per il teorema 1.4 del paragrafo precedente $u \in C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per ogni α, $0 \leq \alpha < 1$. c. v. d.

Dim. del teorema 2.2. La dimostrazione è analoga a quella del teorema 2.1: si sfrutta il teorema 1.5 del paragrafo precedente.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. AGMON-A. DOUGIS-L. NIRENBERG - *Estimates near the boundary for solution of elliptic partial differential equations satisfying general boundary condition I.* Comm. Pure Appl. Math. vol. XII (1959).

[2] S. AGMON-A. DOUGIS-L. NIRENBERG - Idem II, Comm. Pure Appl. Math. vol. XVII (1964).

[3] H. BREZIS-G. STAMPACCHIA - *Sur la régularité de la solutions d'inéquations elliptiques.* Bull. Soc. Math. de France, 96 (1968).

[4] H. LEWY-G. STAMPACCHIA - *On the regularity of the solutions of a variational inequality.* Comm. Pure Appl. Math. vol. XXII (1969).

[5] M. MIRANDA - *Un teorema di esistenza e unicità per il problema dell'area minima in n variabili.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 1965.

[6] C. B. MORREY - *Multiple Integrals in the Calculus of Variations.* Springer-Verlag (1966).

[7] J. C. C. NITCHE - *Variational problems with inequalities as boundary conditions.* Arch. Rat. Mech. Anal. (1969).

[8] G. STAMPACCHIA - *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus.* Anu. Inst. Fourier t. 15 (1965).