ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LAMBERTO CATTABRIGA

Moltiplicatori di Fourier e teoremi di immersione per certi spazi funzionali. II

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 25, nº 2 (1971), p. 325-346

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1971_3_25_2_325_0>

MOLTIPLICATORI DI FOURIER E TEOREMI DI IMMERSIONE PER CERTI SPAZI FUNZIONALI. II

di Lamberto Cattabriga

Questa nota prosegue lo studio iniziato nella nota [4], della quale conserva le notazioni. La numerazione dei paragrafi, delle formule e delle note a piè di pagina è data in continuazione a quella della nota indicata.

Nel n. 6 si completano fra l'altro certi risultati del n. 4 di [4]: il corollario 6.6, unitamente al corollario 4.1, costituisce una generalizzazione di un classico teorema di S. L. Sobolev. Il n. 7 contiene una applicazione degli spazi funzionali considerati qui e in [4] allo studio della regolarità delle soluzioni di certi tipi di equazioni a derivate parziali. Operatori differenziali dei tipi qui considerati e di tipi simili sono stati studiati, anche con diversi punti di vista, da vari Autori: J. Friberg [5], G. G. Kazaryan [6], [7], V. P. Mihailov [10], [11], S. M. Nikol'skiĭ [12], L. R. Volevič - S. G. Gindikin [14] (32). Il teorema 7.6 estende al caso $p \neq 2$ un teorema di questi ultimi Autori. Lo schema di dimostrazione di alcuni dei risultati di questo numero segue in parte quello di teoremi di tipo simile esposti in [13]. Nel n. 5 si provano alcuni risultati riguardanti moltiplicatori di tipo (p, q) utilizzati poi nei numeri successivi. Per la loro dimostrazione ci si fonda su un teorema di P. I. Lizorkin [8], [9].

5. Lemma 5.1. *Se* $\mathfrak{P} \in \mathcal{P}_*^n$, $R(\xi) = \Sigma_{\mathbf{s}}\, c_{\mathbf{s}} \,|\, \xi^{\mathbf{s}} \,|$ (33), *ove* $c_{\mathbf{s}}$ *sono costanti*

Pervenuto alla Redazione il 2 Settembre 1970.

(32) Risultati riguardanti particolari operatori di questo tipo si trovano anche in [1] e [2].

(33) Per $\mathbf{s} \in S_+^n$ si intende che $\xi^{\mathbf{s}} = \prod_{1}^{n}{}_j\, \xi_j^{s_j}$, $|\xi^{\mathbf{s}}| = \prod_{1}^{n}{}_j\, |\xi_j|^{s_j}$,

$$\xi_j^{s_j} = \begin{cases} \xi_j^{s_j} & \text{se} \quad \xi_j \geq 0 \\ e^{-i\pi s_j}\, |\xi_j|^{s_j} & \text{se} \quad \xi_j < 0 \end{cases}$$

positive ed i multi-indici $\mathbf{s}$ *rispetto a cui è eseguita la somma finita appartengono tutti a* $\mathbb{P}$, *allora la funzione* $[R(\xi)]^{\delta_1}[(\delta_2 P)(\xi)]^{-1}$, $0 < \delta_1 \leq \delta_2$, *è un moltiplicatore in* Ψ *ed un moltiplicatore di tipo* (p, q) *per* $1 < p < \infty$, $q = p/(1 - p\eta)$ *qualunque sia* $\eta \in [(\delta_2 - \delta_1) h^{-1}(\mathbb{P}), (\delta_2 - \delta_1) k^{-1}(\mathbb{P})] \cap [0, p^{-1}[$.

DIMOSTRAZIONE. Tenuto conto della iv) del lemma 3.2 e del lemma 3.5, per provare che la funzione considerata è un moltiplicatore in Ψ basta provare che lo è la funzione $[R(\xi)]^{\delta_1}$. Una qualunque derivata di tale funzione è combinazione lineare a coefficienti costanti di prodotti di potenze di $R(\xi)$ con esponente reale e di funzioni del tipo $\prod_1^n {}_j |\xi_j|^{r_j}$ con r_j reali. D'altra parte qualuque sia $\varrho > 0$ è

$$c \, \Sigma_{\mathbf{s}} |\xi^{\varrho \mathbf{s}}| \leq [R(\xi)]^\varrho \leq c' \, \Sigma_{\mathbf{s}} |\xi^{\varrho \mathbf{s}}| \tag{5.1}$$

con c, c' costanti positive dipendenti soltanto da ϱ, $N(\mathbb{P})$ ed i coefficienti $c_{\mathbf{s}}$. Il fatto che $R(\xi)$ sia un moltiplicatore in Ψ segue allora subito dal lemma 2.1.

Se $\mathbf{k}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}$, ossia se essi hanno componenti eguali a zero od a uno, è

$$|D^{\mathbf{k}}\{[R(\xi)]^{\delta_1}[(\delta_2 P)(\xi)]^{-1}\}| \leq c \sum_{\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{k}} |D^{\mathbf{b}}[R(\xi)]^{\delta_1}| \; |D^{\mathbf{c}}[(\delta_2 P)(\xi)]^{-1}|$$

e per $\xi \in E^n \setminus A$

$$|D^{\mathbf{b}}[R(\xi)]^{\delta_1}| \leq c \sum_{\nu=1}^{|\mathbf{b}|} [R(\xi)]^{\delta_1 - \nu} \sum_{\substack{\mathbf{h}^1+\ldots+\mathbf{h}^\nu=\mathbf{b} \\ \mathbf{h}^i \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{0}\}}} \prod_{j=1}^{\nu} |D^{\mathbf{h}^j} R(\xi)|$$

e per (3.5)

$$|D^{\mathbf{c}}[(\delta_2 P)(\xi)]^{-1}| \leq c \, |\xi^{-\mathbf{c}}| \, [(\delta_2 P)(\xi)]^{-1}.$$

D'altra parte, come per la (3.4), è

$$|\xi^{\mathbf{h}^i}| \; |D^{\mathbf{h}^i} R(\xi)| \leq c \, R(\xi) \qquad \xi \in E^n \setminus A$$

onde

$$|\xi^{\mathbf{b}}| \, |D^{\mathbf{b}}[R(\xi)]^{\delta_1}| \leq c \, [R(\xi)]^{\delta_1}$$

e per la (5.1) con δ_1 in luogo di ϱ

$$\begin{aligned} |\xi^{\mathbf{k}+\eta \mathbf{e}}| \; |D^{\mathbf{k}}\{[R(\xi)]^{\delta_1}[(\delta_2 P)(\xi)]^{-1}\}| \leq \\ \leq c \, \Sigma_{\mathbf{s}} |\xi^{\delta_1 \mathbf{s}+\eta \mathbf{e}}| \, [(\delta_2 P)(\xi)]^{-1} \leq c \qquad \xi \in E^n \setminus A \end{aligned} \tag{5.2}$$

per ogni η tale che $\delta_1 \mathbf{s} + \eta \mathbf{e} \in \delta_2 \mathbb{P}$ ossia tali cha $\eta \mathbf{e} \in (\delta_2 \mathbb{P})^{\delta_1 \mathbf{s}}$. La dimostrazione del lemma si completa poi ragionando come nella dimostrazione del corollario 3.3.

LEMMA 5.2. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n_*$, $Q(\xi) = \Sigma_{\mathbf{s}} c_{\mathbf{s}} | \xi^{\mathbf{s}} |$, *ove* $c_{\mathbf{s}}$ *sono costanti reali e tutti i multi-indici* $\mathbf{s}$ *rispetto a cui è eseguita la somma finita appartengono a* $\mathbb{P}$, *ed esiste una costante positiva* C *tale che*

$$Q(\xi) \geq C\ P(\xi) \qquad \forall\ \xi \in E^n, \tag{5.3}$$

allora qualunque sia $\mathbf{r} \in \delta \mathbb{P}_0$, $\delta > 0$, *la funzione* $\xi^{\mathbf{r}} [Q(\xi)]^{-\delta}$ *è un moltiplicatore in* Ψ *ed un moltiplicatore di tipo* (p, q) *per* $1 < p < \infty$, $q = p/(1 - p\eta)$ *con* $\eta = 0$ *se* $\mathbf{r} \in (\delta \dot{\mathbb{P}})^+$ *e con qualunque* $\eta \in [h^{-1}((\delta \mathbb{P})^{\mathbf{r}}), k^{-1}((\delta \mathbb{P})^{\mathbf{r}})] \cap [0, p^{-1}[$ *se* $\mathbf{r} \in \delta \mathbb{P}_0 \setminus (\delta \dot{\mathbb{P}})^+$. *Lo stesso risultato sussiste per la funzione* $| \xi^{\mathbf{r}} | [Q(\xi)]^{-\delta}$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si conduce come quella del teorema 3.1. Per provare che la funzione $[Q(\xi)]^{-\delta}$ è un moltiplicatore in Ψ si applica il lemma 2.1, tenendo conto che qualunque sia $\varrho > 0$ per la (5.3) è

$$[Q(\xi)]^{-\varrho} \leq C [P(\xi)]^{-\varrho} \leq C' | \xi^{\mathbf{s}^l} | \qquad l = 1, \ldots, N(\mathbb{P}).$$

Se $\mathbf{k}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}$ è poi per $\xi \in E^n \setminus A$

$$| D^{\mathbf{b}} \xi^{\mathbf{r}} | \leq C | \xi^{\mathbf{r}-\mathbf{b}} |,$$

$$| D^{\mathbf{a}} Q(\xi) | \leq C | \xi^{-\mathbf{a}} | \Sigma_{\mathbf{s}} | \xi^{\mathbf{s}} | \leq C' | \xi^{-\mathbf{a}} | P(\xi),$$

$$| D^{\mathbf{c}} [Q(\xi)]^{-\delta} | \leq C | \xi^{-\mathbf{c}} | \sum_{\nu=1}^{|\mathbf{c}|} [Q(\xi)]^{-\nu-\delta} [P(\xi)]^{\nu},$$

dalle quali per la (5.3)

$$| \xi^{\mathbf{k}} | \, | D^{\mathbf{k}} \{ \xi^{\mathbf{r}} [Q(\xi)]^{-\delta} \} | \leq C | \xi^{\mathbf{r}} | [P(\xi)]^{-\delta} \qquad \xi \in E^n \setminus A.$$

È poi

$$[P(\xi)]^{\delta} = \left[\sum_{l=1}^{N(\mathbb{P})} | \xi^{\mathbf{s}^l} | \right]^{\delta} \geq C(\mathbb{P}, \delta) \sum_{l=1}^{N(\mathbb{P})} | \xi^{\delta \mathbf{s}^l} | = C(\mathbb{P}, \delta) (\delta P)(\xi)$$

onde

$$| \xi^{\mathbf{k}+\eta\mathbf{e}} | \, | D^{\mathbf{k}} \{ \xi^{\mathbf{r}} [Q(\xi)]^{-\delta} \} | \leq C' | \xi^{\mathbf{r}+\eta\mathbf{e}} | [(\delta P)(\xi)]^{-1}. \tag{5.4}$$

La dimostrazione si conclude come quella del teorema 3.1 con $(\delta P)(\xi)$ in luogo di $P(\xi)$ utilizzando il teorema di Lizorkin [9] sui moltiplicatori di tipo (p, q).

OSSERVAZIONE. Se $\delta = 1$ la tesi del lemma continua a valere anche se $Q(\xi) = \Sigma_{\mathbf{s}} c_{\mathbf{s}} \xi^{\mathbf{s}}$ con $c_{\mathbf{s}}$ costanti complesse e $| Q(\xi) | \geq C\ P(\xi)\ \forall\ \xi \in E^n$.

COROLLARIO 5.1. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n_*$ *e* $Q(\xi)$ *ed* $R(\xi)$ *soddisfano alle condizioni dei lemmi* 5.2 *e* 5.1 *rispettivamente allora la funzione* $[R(\xi)]^{\delta_1}[Q(\xi)]^{-\delta_2}$, $0 < \delta_1 \leq \delta_2$ *è un moltiplicatore in* Ψ *ed un moltiplicatore di tipo* (p, q) *per* $1 < p < \infty$, $q = p/(1 - p\eta)$ *qualunque sia* $\eta \in [(\delta_2 - \delta_1)\, h^{-1}(\mathbb{P}), (\delta_2 - \delta_1)\, k^{-1}(\mathbb{P})] \cap [0, p^{-1}[$.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che per $\xi \in E^n \setminus A$ e $\mathbf{k}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}$ è

$$| \xi^{\mathbf{k}+\eta\mathbf{e}} | \; | D^{\mathbf{k}} \{ [R(\xi)]^{\delta_1} [Q(\xi)]^{-\delta_2} \} | \leq$$

$$\leq C \sum_{\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{k}} | \xi^{\mathbf{b}+\eta\mathbf{e}} | \; | D^{\mathbf{b}} \{ [R(\xi)]^{\delta_1} [(\delta_2 P)(\xi)]^{-1} \} | \cdot$$

$$\cdot | \xi^{\mathbf{c}} | \; | D^{\mathbf{c}} \{ (\delta_2 P)(\xi) [Q(\xi)]^{-\delta_2} \} | \leq C'$$

tenuto conto della (5.2) e della (5.4) con $\delta = \delta_2$ ed $\mathbf{r} \in (\delta_2 \mathbb{P})^+$, ed applicare il teorema di Lizorkin precedentemente citato.

COROLLARIO 5.2. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n_*$ *per la funzione* $(\delta_1 P)(\xi)[P(\xi)]^{-\delta_2}$, $0 < \delta_1 \leq \delta_2$, *valgono le stesse conclusioni del corollario* 5.1.

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il lemma 5.2 con $\delta = \delta_2$ e $Q(\xi) = P(\xi)$ ponendovi $\mathbf{r} = \delta_1 \mathbf{s}^l$, $l = 1, \ldots, N(\mathbb{P})$, e notare che $h^{-1}((\delta_2 \mathbb{P})^{\delta_1 \mathbf{s}^l}) \leq (\delta_2 - \delta_1)\, h^{-1}(\mathbb{P})$ e $k^{-1}((\delta_2 \mathbb{P})^{\delta_1 \mathbf{s}^l}) \geq (\delta_2 - \delta_1)\, k^{-1}(\mathbb{P})$, le eguaglianze verificandosi per qualche l.

COROLLARIO 5.3. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n_*$ *la funzione* $[P(\xi)]^{-\delta}$, $\delta > 0$, *è un moltiplicatore in* Ψ *ed un moltiplicatore di tipo* (p, q) *per* $1 < p < \infty$, $q = p/(1 - p\eta)$ *qualunque sia* $\eta \in [\delta h^{-1}(\mathbb{P}), \; \delta k^{-1}(\mathbb{P})] \cap [0, p^{-1}[$.

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il lemma 5.2 con $Q(\xi) = P(\xi)$, $\mathbf{r} = \mathbf{o}$, osservando che $h^{-1}(\delta \mathbb{P}) = \delta h^{-1}(\mathbb{P})$ e $k^{-1}(\delta \mathbb{P}) = \delta k^{-1}(\mathbb{P})$.

LEMMA 5.3. *Sia* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ *e* $Q(\xi) = \Sigma_{\mathbf{s}}\, a_{\mathbf{s}}\, \xi^{\mathbf{s}}$, *ove* $a_{\mathbf{s}}$ *sono costanti complesse ed i multi-indici* $\mathbf{s}$ *rispetto a cui è eseguita la somma (finita) appartengono tutti a* $\mathbb{P}$; *esistano inoltre due costanti positive* C *ed* R *tali che*

$$| Q(\xi) | \geq C \; P^+(\xi) \qquad \forall\, \xi \in E^n, \; | \xi | > R. \tag{5.5}$$

Sia $\zeta \in C_0^\infty(E^n)$, $0 \leq \zeta(\xi) \leq 1$, $\zeta(\xi) = 1$ *se* $| \xi | \leq M$, $M > R$, $\zeta(\xi) = 0$ *se* $|\xi| \geq 2M$, *allora la funzione* $\xi^{\mathbf{r}}(1 - \zeta(\xi))[Q(\xi)]^{-1}$ *è un moltiplicatore in* Ψ *ed un moltiplicatore di tipo* (p, q) *per* $1 < p < \infty$, $q = p/(1 - p\eta)$ *con* $\eta = 0$ *se* $\mathbf{r} \in \dot{\mathbb{P}}^+$ *e con qualunque* $\eta \in [0, k^{-1}(\mathbb{P}^{\mathbf{r}})] \cap [0, p^{-1}[$ *se* $\mathbf{r} \in \mathbb{P} \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$. *Lo stesso risultato vale se a* $\xi^{\mathbf{r}}$ *si sostituisce* $| \xi^{\mathbf{r}} |$ *o* $\prod_{1}^{n}{}_j (1 + \xi_j^2)^{r_j/2}$.

DIMOSTRAZIONE. Per il lemma 2.1 la funzione considerata è un moltiplicatore in Ψ, poichè per $|\xi| \leq R$ essa è nulla con tutte le sue derivate e per $|\xi| > R$ il suo modulo e quello di ciascuna delle sue derivate si possono maggiorare con combinazioni lineari di termini del tipo $|\xi^{\mathbf{t}}|\,[P^{+}(\xi)]^{-m}$ $\mathbf{t} \in S^n$, m intero positivo, e quindi con combinazioni lineari di potenze di ξ.

Dalle ii) e v) del lemma 3.1 segue che

$$P^{+}(\xi) \geq \sum_{1}^{n}{}_{j} |\xi_j|^{m_j}, \qquad \xi \in E^n,$$

onde

$$P^{+}(\xi) \geq C' \quad \text{se } |\xi| > R$$

e quindi per la (5.5)

$$P(\xi) = 1 + P^{+}(\xi) \leq C'' \,|Q(\xi)|, \qquad |\xi| > R. \tag{5.6}$$

Se $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}$ e $\xi \in E^n \setminus A$, $|\xi| > R$, è a causa della (5.6), come già nella dimostrazione del lemma 5.2 a causa della (5.3)

$$|D^{\mathbf{b}} \xi^{\mathbf{r}}|\;|D^{\mathbf{c}} [Q(\xi)]^{-1}| \leq C\,|\xi^{\mathbf{r}-\mathbf{b}-\mathbf{c}}|\,[P(\xi)]^{-1}$$

mentre poi se $\mathbf{a} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{o}\}$ è $D^{\mathbf{a}}(1 - \zeta(\xi)) = 0$ sia per $|\xi| \leq M$ che per $|\xi| \geq 2M$. Pertanto se $\mathbf{k} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{k} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ avremo

$$|\xi^{\mathbf{k}+\eta\mathbf{e}}|\;|D^{\mathbf{a}}(1 - \zeta(\xi))|\;|D^{\mathbf{b}} \xi^{\mathbf{r}}|\;|D^{\mathbf{c}} [Q(\xi)]^{-1}| \leq C' \sup_{\substack{M \leq |\xi| \leq 2M \\ \xi \in E^n \setminus A}} |\xi^{\mathbf{r}+\mathbf{a}+\eta\mathbf{e}}|\,[P(\xi)]^{-1} \leq C$$

e dunque per gli η indicati nell'enunciato e qualunque sia $\mathbf{k} \in \mathcal{V}$

$$|\xi^{\mathbf{k}+\eta\mathbf{e}}|\;|D^{\mathbf{k}} \{\xi^{\mathbf{r}}(1 - \zeta(\xi))\,[Q(\xi)]^{-1}\}| \leq C\,(|\xi^{\mathbf{r}+\eta\mathbf{e}}|\,[P(\xi)]^{-1} + 1), \qquad \xi \in E^n \setminus A.$$

La dimostrazione si conclude poi come quella del teorema 3.1.

COROLLARIO 5.4. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_{*}^{n}$ *e per un* $M > 0$ $\zeta(\xi)$ *soddisfa alle condizioni per essa indicate nel lemma precedente, allora per la funzione* $\xi^{\mathbf{r}}(1 - \zeta(\xi)) \cdot$ $\cdot [P(\xi)]^{-1}$, $\mathbf{r} \in \mathbb{P}_0$, *valgono le stesse conclusioni del lemma precedente.*

COROLLARIO 5.5. *Nelle stesse ipotesi del lemma precedente se inoltre* $R(\xi) = \Sigma_{\mathbf{s}}\, a_{\mathbf{s}}\, |\xi^{\mathbf{s}}|$, *ove* $a_{\mathbf{s}}$ *sono costanti complesse ed i multi-indici rispetto a cui è eseguita la somma (finita) appartengono tutti a* $\delta \mathbb{P}_0$, $0 < \delta \leq 1$, *la funzione* $(1 - \zeta(\xi))\, R(\xi)\, [P(\xi)]^{-1}$ *è un moltiplicatore in* Ψ *ed un moltiplicatore* *di tipo* (p, q), *per* $1 < p < \infty$, $q = p/(1 - p\eta)$ *qualunque sia* $\eta \in [0, (1 - \delta) k^{-1}(\mathbb{P})] \cap [0, p^{-1}[$.

OSSERVAZIONE 5.1. Ragionando come nella dimostrazione del teorema 3.2 si vede che se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ allora le funzioni $R(\xi)$ e $Q(\xi)$ che figurano rispettivamente nei lemmi 5.1 e 5.2 nonchè nei corollari 5.1 e 5.5 possono anche essere della forma

$$\Sigma_{\mathbf{s}}\, c_{\mathbf{s}} \prod_{j=1}^{n} (1 + \xi_j^2)^{s_j/2}, \qquad \xi \in E^n. \tag{5.7}$$

Similmente alle funzioni $(\delta_1 P)(\xi)$, $(\delta_2 P)(\xi)$, $P(\xi)$ che compaiono nel lemma 5.1 e nei corollari 5.2 e 5.3 si possono sostituire le funzioni $(\delta_1 P)_1(\xi)$, $(\delta_2 P)_1(\xi)$, $P_1(\xi)$ rispettivamente. I risultati delle proposizioni citate restano invariati; si deve soltanto ricordare che essendo $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ è $h^{-1}(\mathbb{P}) = h^{-1}(\delta\,\mathbb{P}) = 0$ per ogni $\delta > 0$. Inoltre, se le funzioni $R(\xi)$ e $Q(\xi)$ sono della forma (5.7), si sono eseguite le sostituzioni sopra indicate ed in luogo della funzione $\xi^{\mathbf{r}}$, $\mathbf{r} \in S_+^n$, figura la funzione $\prod_{j=1}^{n} (1 + \xi_j^2)^{r_j/2}$, allora le funzioni considerate nelle proposizioni citate sono anche moltiplicatori in $\mathcal{S}$.

LEMMA 5.4. *Per ogni* $h \in E^n$ *la funzione* $P_1(\xi + h)[P_1(\xi)]^{-1}$, $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$, *è un moltiplicatore di tipo* (p, p), $1 < p < \infty$, *ed è*

$$M_p^p\left(P_1(\xi + h)[P_1(\xi)]^{-1}\right) \leq c_p \prod_{j=1}^{n} (1 + h_j^2)^{1/2} P_1(h),$$

con c_p *costante positiva dipendente soltanto da* $\mathbb{P}$ *e* p. *Lo stesso risultato vale per la funzione* $P_1(\xi)[P_1(\xi + h)]^{-1}$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathbf{k} \in \mathcal{V}$ e $\xi \in E^n$ è infatti

$$\left| D^{\mathbf{k}} \prod_{j=1}^{n} (1 + \xi_j^2)^{r_j/2} \right| \leq c \prod_{j=1}^{n} (1 + \xi_j^2)^{(r_j - k_j)/2}$$

e quindi

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + \xi_j^2)^{k_j/2} \,|\, D^{\mathbf{k}} P_1(\xi) \,| \leq c\, P_1(\xi)$$

onde per $\mathbf{c} \in \mathcal{V}$ è

$$|\, D^{\mathbf{c}} [P_1(\xi)]^{-1} \,| \leq c \prod_{j=1}^{n} (1 + \xi_j^2)^{-c_j/2} [P_1(\xi)]^{-1}.$$

D'altra parte per ogni $\xi, h \in E^n$ e per qualunque ϱ reale è

$$(1 + (\xi_j + h_j)^2)^\varrho \leq c_\varrho (1 + h_j^2)^{|\varrho|}(1 + \xi_j^2)^\varrho \text{ (34)}$$

e quindi

$$C\,[P_1(h)]^{-1} \leq P_1(\xi + h)\,[P_1(\xi)]^{-1} \leq C'\, P_1(h) \tag{5.8}$$

con C e C' costanti positive indipendenti da h. Per $\mathbf{k} \in \mathcal{V}$ e $\xi, h \in E^n$ è allora

$$|\xi^{\mathbf{k}}|\,|D^{\mathbf{k}}\{P_1(\xi + h)\,[P_1(\xi)]^{-1}\}| \leq C' \sum_{\substack{\mathbf{b},\,\mathbf{c} \in \mathcal{V} \\ \mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{k}}} \prod_1^n{}_j (1 + \xi_j^2)^{b_j/2}\, |D^{\mathbf{b}} P_1(\xi + h)| \cdot$$

$$\cdot \prod_1^n{}_j (1 + \xi_j^2)^{c_j/2}\, |D^{\mathbf{c}}\,[P_1(\xi)]^{-1}| \leq C \prod_1^n{}_j (1 + h_j^2)^{1/2}\, P_1(\xi + h)\,[P_1(\xi)]^{-1} .$$

Basta allora ricordare la (5.8) ed il teorema di Lizorkin [8] sui moltiplicatori di tipo (p, p). Per provare il lemma per la funzione $P_1(\xi)\,[P_1(\xi + h)]^{-1}$ si ragiona allo stesso modo osservando che

$$|\xi^{\mathbf{k}}|\,|D^{\mathbf{k}}\{P_1(\xi)\,[P_1(\xi + h)]^{-1}\}| \leq C \prod_1^n{}_j (1 + h_j^2)^{1/2}\, P_1(\xi)\,[P_1(\xi + h)]^{-1} .$$

COROLLARIO 5.6. *Per ogni* $p \in]1, \infty[$ *le funzioni* $P_1(\xi)$ *e* $[P_1(\xi)]^{-1}$, $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$, *sono funzioni peso del tipo indicato dalla definizione* 13.2 *di* [15].

DIMOSTRAZIONE. Basta ricordare che le funzioni indicate sono moltiplicatori in $\mathcal{S}$ e che è

$$\prod_1^n{}_j (1 + h_j^2)^{1/2}\, P_1(h) \leq C \prod_1^n{}_j (1 + h_j^2)^{(m_j+1)/2} \leq C\,(1 + |h|^2)^{n(m+1)/2}$$

con $m = \max_j m_j = \max_j (\max_l s_j^l)$.

6. DEFINIZIONE 6.1. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$, δ *è un numero reale diverso da zero e* $1 < p < \infty$, *indichiamo con* $L_p^{\delta\mathbb{P}}(E^n) = L_p^{\delta\mathbb{P}}$ *lo spazio vettoriale sul corpo complesso costituito dalle* $u \in \mathcal{S}'$ *tali che* $\mathcal{F}^{-1}([(|\delta|P)_1(\xi)]^{\operatorname{sgn}\delta}\,\tilde{u}) \in L_p$ (35). *Por-*

---

(34) Si veda per es. [13] p. 56, lemma 0.1.

(35) Ricordiamo che $(|\delta|P)_1(\xi) = \sum_{2}^{N(\mathbb{P})}{}_l \prod_1^n{}_j (1 + \xi_j^2)^{|\delta| s_j^l/2}$.

remo

$$\| u \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}} = \| \mathcal{F}^{-1} ([(\,|\,\delta\,|\,P)_1 (\xi)]^{\operatorname{sgn} \delta}\, \tilde{u}) \|_{L_p} . \tag{6.1}$$

Converremo inoltre che $L_p^{o\mathbb{P}}(E^n) = L_p(E^n)$ *e* $\| u \|_{L_p^{o\mathbb{P}}} = \| u \|_{L_p}$.

Questa definizione per $\delta > 0$ è in accordo con la definizione 4.1 poiché per $\delta > 0$, $\delta\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$. Dal corollario 5.6 segue che gli spazi $L_p^{\delta\mathbb{P}}$ ora definiti costituiscono un particolare tipo di spazi H_p^{μ} introdotti da L. R. Volevic-B. P. Paneyah [15]. Basterà prendere $\mu(\xi) = [(\,|\,\delta\,|\,P)_1\,(\xi)]^{\operatorname{sgn}\delta}$ per $\delta \neq 0$ e $\mu(\xi) = 1$ per $\delta = 0$. I risultati di [15] assicurano quindi che ogni spazio $L_p^{\delta\mathbb{P}}$ con la norma (6.1) è uno spazio di Banach e che $\mathcal{S} \subset L_p^{\delta\mathbb{P}} \subset \mathcal{S}'$ con immersioni continue, $\mathcal{S}$ riuscendo anche denso in ogni $L_p^{\delta\mathbb{P}}$. Si vede subito inoltre che il duale di $L_p^{\delta\mathbb{P}}$ ed $L_{p'}^{(-\delta)\mathbb{P}}$ sono isomorfi.

LEMMA 6.1. $L_p^{\delta\mathbb{P}}$, $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$, *$\delta$ reale,* $1 < p < \infty$, *coincide con lo spazio delle* $u \in \mathcal{S}'$ *tali che* $\mathcal{F}^{-1}([P_1(\xi)]^{\delta}\,\tilde{u}) \in L_p$ *e l'applicazione*

$$u \to \| \mathcal{F}^{-1}([P_1(\xi)]^{\delta}\,\tilde{u}) \|_{L_p}$$

è una norma in $L_p^{\delta\mathbb{P}}$ *equivalente alla* (6.1).

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che per il lemma 5.1 ed il corollario 5.2, con $\delta_1 = \delta_2 = |\,\delta\,|$, tenuto conto inoltre dell'osservazione 5.1, le funzioni $[P_1(\xi)]^{|\delta|}\,[(\,|\,\delta\,|\,P)_1(\xi)]^{-1}$ e $(\,|\,\delta\,|\,P)_1(\xi)\,[P_1(\xi)]^{-|\delta|}$ sono moltiplicatori in $\mathcal{S}$ e moltiplicatori di tipo (p, p), $1 < p < \infty$.

TEOREMA 6.1. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$, $1 < p < \infty$, $\alpha > \beta$, *è continua l'immersione di* $L_p^{\alpha\mathbb{P}}$ *in* $L_q^{\beta\mathbb{P}}$ *per qualunque* $q = p/(1 - p\eta)$, $\eta \in [0, (\alpha - \beta)\, k^{-1}(\mathbb{P})] \cap [0, p^{-1}[$.

DIMOSTRAZIONE. Per il lemma 6.1 il teorema segue dal fatto che per il corollario 5.3 e l'osservazione 5.1 la funzione $[P_1(\xi)]^{\beta - \alpha}$ è un moltiplicatore in $\mathcal{S}$ ed un moltiplicatore di tipo (p, q) per i p e q indicati.

TEOREMA 6.2. *Se* $\mathbb{R}$, $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$, *$\delta$ reale,* $\mathbb{R} \subset |\,\delta\,|\,\mathbb{P}$, $1 < p < \infty$, *allora*

$$L_p^{\delta\mathbb{P}} \subset L_p^{\mathbb{R}} \text{ se } \delta > 0 \quad \text{e} \quad L_p^{(-1)\mathbb{R}} \subset L_p^{\delta\mathbb{P}} \text{ se } \delta < 0$$

con immersioni continue.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che per il lemma 5.1 con $|\delta|\mathbb{P}$ in luogo di $\mathbb{P}$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$, $R(\xi) = R_1(\xi)$, tenuto conto dell'osservazione 5.1, la funzione $R_1(\xi)[(|\delta| P)_1(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in $\mathcal{S}$ ed un moltiplicatore di tipo (p, p), $1 < p < \infty$.

TEOREMA 6.3. *Se* $u \in L_p^{\delta\mathbb{P}}$, δ *reale,* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$, $1 < p < \infty$, *ed* $\mathbf{r}$ *è un multi-indice di interi non negativi, allora*

$$D^{\mathbf{r}} u \in L_p^{(\delta - k_{\mathbf{r}})\mathbb{P}} \quad e \quad \| D^{\mathbf{r}} u \|_{L_p^{(\delta - k_{\mathbf{r}})\mathbb{P}}} \leq C \| u \|_{L_p^{\delta\mathbb{P}}},$$

ove $k_{\mathbf{r}} = k(\mathbb{P}, \mathbf{r})$ (36).

DIMOSTRAZIONE. È $\sum_{1}^{n}{}_j\, a_j r_j \leq k_{\mathbf{r}}$ il segno eguale verificandosi per almeno un $\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$. È dunque $\mathbf{r} \in (k_{\mathbf{r}}\dot{}\,\mathbb{P})^+$. Per il lemma 5.2 con $Q(\xi) = P_1(\xi)$ e $\delta = k_{\mathbf{r}}$, tenuto conto dell'osservazione 5.1, la funzione $(i\xi)^{\mathbf{r}} [P_1(\xi)]^{-k_{\mathbf{r}}}$ è un moltiplicatore in $\mathcal{S}$ ed un moltiplicatore di tipo (p, p), $1 < p < \infty$. Il teorema segue allora subito utilizzando il lemma 6.1.

OSSERVAZIONE 6.1. Se $\delta > k_{\mathbf{r}}$ il risultato del teorema 6.3 segue anche dai teoremi 4.4 e 6.2 poiché in tal caso è $(\delta - k_{\mathbf{r}})\mathbb{P} \subset (\delta\mathbb{P})^{\mathbf{r}}$.

LEMMA 6.2. *Sia* $u = \Sigma_{\mathbf{r}} D^{\mathbf{r}} u_{\mathbf{r}}$, $u_{\mathbf{r}} \in L_p$, $1 < p < \infty$, *la somma (finita) essendo eseguita rispetto ad arbitrari multi-indici* $\mathbf{r}$ *di interi non negativi, allora qualunque siano* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ *e* $\delta < 0$ *tali che ogni* $\mathbf{r}$ *rispetto a cui è eseguita la somma mediante la quale è espresso* u *appartenga a* $|\delta|\mathbb{P}$ *è* $u \in L_p^{\delta\mathbb{P}}$ *e*

$$\| u \|_{L_p^{\delta\mathbb{P}}} \leq C\, \Sigma_{\mathbf{r}} \| u_{\mathbf{r}} \|_{L_p}.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che per ciascuno degli $\mathbf{r}$ indicati la funzione $(i\xi)^{\mathbf{r}} [(|\delta| P)_1(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in $\mathcal{S}$ e per il teorema 3.2 un moltiplicatore di tipo (p, p), $1 < p < \infty$ (37).

LEMMA 6.3. *Se* $u \in L_p^{\delta\mathbb{P}}$, $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$, δ *reale,* $1 < p < \infty$, *allora* $u \in \mathcal{D}'_{L_p}$.

---

(36) $k(\mathbb{P}, \mathbf{r})$ è stato definito nel n. 3. Si veda anche il lemma 3.1.

(37) Il lemma segue anche dal teorema 6.3 con $\delta = 0$. Risulta qui $\delta \leq -\max_{\mathbf{r}} k_{\mathbf{r}}$.

DIMOSTRAZIONE. Per $\delta \geq 0$ è infatti sempre $u \in L_p$, come segue dal teorema 4.9 e dal corollario 4.1 ([38]). Se $\delta < 0$ sia m un intero positivo pari tale che $\sum_1^n {}_j\, s_j \leq m$ per ogni $\mathbf{s} \in |\delta|\, \mathbb{P}$. Dal teorema 3.2 e dal corollario 3.5 ([39]) segue che la funzione $(|\delta|\, P)_1(\xi) \left[\sum_1^n {}_j (1 + \xi_j^2)^{m/2}\right]^{-1}$ è un moltiplicatore in $\mathcal{S}$ ed un moltiplicatore di tipo (p, p), onde se $u \in L_p^{\delta \mathbb{P}}$

$$\mathcal{F}^{-1}\left((|\delta|\, P)_1(\xi) \left[\sum_1^n {}_j (1 + \xi_j^2)^{m/2}\right]^{-1} [(|\delta|\, P)_1(\xi)]^{-1}\, \tilde{u}\right) = v \in L_p$$

e quindi

$$u = \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_1^n {}_j (1 + \xi_j^2)^{m/2}\, \tilde{v}\right) = \sum_1^n {}_j (1 - D_{x_j}^2)^{m/2}\, v \in \mathcal{D}'_{L_p}.$$

TEOREMA 6.4. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$, $\delta \leq 0$, $|\delta|\, s_j^l$, $l = 1, \dots, N(\mathbb{P})$, $j = 1, \dots, n$, *sono tutti interi non negativi, allora* $L_p^{\delta \mathbb{P}}$, $1 < p < \infty$, *coincide con lo spazio delle* $u \in \mathcal{S}'$ *tali che*

$$u = \sum_1^{N(\mathbb{P})} {}_l\, D^{|\delta|\, \mathbf{s}^l}\, u_l \tag{6.2}$$

per opportune $u_l \in L_p$ *e* $\sum_1^{N(\mathbb{P})} {}_l \| u_l \|_{L_p}$ *è una norma in* $L_p^{\delta \mathbb{P}}$ *equivalente alla* (6.1).

DIMOSTRAZIONE. Se u è rappresentata dalla (6.2) allora per il lemma 6.2 $u \in L_p^{\delta \mathbb{P}}$ e $\| u \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}} \leq C \sum_1^{N(\mathbb{P})} {}_l \| u_l \|_{L_p}$.

Viceversa se $u \in L_p^{\delta \mathbb{P}}$ per il corollario 3.5 ed il teorema 2.2 è $\mathcal{F}^{-1}([(|\delta|\, P)(\xi)]^{-1}\, \tilde{u}) \in \Phi'_p$. Esiste dunque una $v \in L_p$ tale che $\|v\|_{L_p} \leq c\, \| u \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}}$ e per ogni $\varphi \in \Phi$

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}((|\delta|\, P)(\xi)\, \tilde{v}), \varphi \rangle = \sum_1^{N(\mathbb{P})} {}_l \langle D^{|\delta|\, \mathbf{s}^l}\, \mathcal{F}^{-1}(|\xi^{|\delta|\, \mathbf{s}^l}|\, (i\xi)^{-|\delta|\, \mathbf{s}^l}\, \tilde{v}), \varphi \rangle =$$

$$= \sum_1^{N(\mathbb{P})} {}_l (-1)^{|\delta| \sum_1^n {}_j s_j^l} \langle \mathcal{F}^{-1}(|\xi^{|\delta|\, \mathbf{s}^l}|\, (i\xi)^{-|\delta|\, \mathbf{s}^l}\, \tilde{v}), D^{|\delta|\, \mathbf{s}^l}\, \varphi \rangle.$$

([38]) Si osservi che attualmente è $h^{-1}(\delta \mathbb{P}) = 0$.

([39]) Oppure dai teoremi 2.1 e 2.2 di [3].

D'altra parte essendo le funzioni $|\xi^{|\delta|\mathbf{s}^l}|(i\xi)^{-|\delta|\mathbf{s}^l}$, $l = 1, \ldots, N(\mathbb{P})$, moltiplicatori in Ψ e moltiplicatori di tipo (p,p), $1 < p < \infty$, esistono delle $u_l \in L_p$ tali che $\| u_l \|_{L_p} \leq c \| v \|_{L_p}$ e

$$\langle u_l, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}(|\xi^{|\delta|\mathbf{s}^l}|(i\xi)^{-|\delta|\mathbf{s}^l}\tilde{v}), \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \Phi.$$

È dunque $\sum_{1}^{N(\mathbb{P})} {}_l \| u_l \|_{L_p} \leq c \| u \|_{L_p^{\delta\mathbb{P}}}$ e

$$\langle u - \sum_{1}^{N(\mathbb{P})} {}_l D^{|\delta|\mathbf{s}^l} u_l, \varphi \rangle = 0 \qquad \forall \varphi \in \Phi.$$

La (6.2) segue allora dal teorema 1.1 tenuto conto che per il lemma 6.3 è

$$u - \sum_{1}^{N(\mathbb{P})} {}_l D^{|\delta|\mathbf{s}^l} u_l \in \mathcal{D}'_{L_p} \subset \mathcal{N}.$$

DEFINIZIONE 6.2. *Se Ω è un aperto di E^n, $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$, $1 < p < \infty$ e δ è un reale indichiamo con $L^{\delta\mathbb{P}}_{p\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ lo spazio delle $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tali che per ogni $\omega \in C_0^\infty(\Omega)$ la distribuzione ωu, posta eguale a zero su $E^n \setminus \operatorname{supp}\omega$, appartenga ad $L_p^{\delta\mathbb{P}}(E^n)$. In $L^{\delta\mathbb{P}}_{p\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ considereremo, com'è naturale, la topologia generata dalla famiglia di seminorme*

$$\| \omega u \|_{L_p^{\delta\mathbb{P}}}$$

per ogni $\omega \in C_0^\infty(\Omega)$.

Per il corollario 5.6, applicando un risultato di [15] ([40]) agli spazi $L_p^{\delta\mathbb{P}}$ δ reale, $1 < p < \infty$, si può affermare che per ogni $\omega \in C_0^\infty(\Omega)$ l'applicazione $u \to \omega u$ è continua da $L_p^{\delta\mathbb{P}}(E^n)$ in sé. Con ragionamenti di tipo abituale si vede che con la topologia indicata nella definizione 6.2 lo spazio $L^{\delta\mathbb{P}}_{p\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ è uno spazio di Frèchet e che è continua l'immersione di $C^\infty(\Omega)$, dotato della sua topologia abituale, in $L^{\delta\mathbb{P}}_{p\,\mathrm{loc}}(\Omega)$. È chiaro inoltre come dai teoremi 6.1 e 6.2 seguano i

COROLLARIO 6.1. *Se $\alpha > \beta$ è continua l'immersione di $L^{\alpha\mathbb{P}}_{p\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ in $L^{\beta\mathbb{P}}_{q\,\mathrm{loc}}(\Omega)$, per $1 < p < \infty$, $q = p/(1 - p\eta)$, qualunque sia $\eta \in [0, (\alpha - \beta) k^{-1}(\mathbb{P})] \cap$ $\cap [0, p^{-1}[$.*

([40]) Si veda p. 70.

COROLLARIO 6.2. *Se* $\mathbb{R}$, $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$, δ *reale,* $\mathbb{R} \subset |\delta| \mathbb{P}$, $1 < p < \infty$, *allora* $L^{\delta \mathbb{P}}_{p\,\mathrm{loc}}(\Omega) \subset L^{\mathbb{R}}_{p\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ *se* $\delta > 0$, $L^{(-1)\mathbb{R}}_{p\,\mathrm{loc}}(\Omega) \subset L^{\delta \mathbb{P}}_{p\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ *se* $\delta < 0$ *con immersioni continue.*

TEOREMA 6.5. *Se* $u \in L^{\delta \mathbb{P}}_{p\,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$, δ *reale,* $1 < p < \infty$, *ed* $\mathbf{r}$ *è un multi-indice di interi non negativi, allora* $D^{\mathbf{r}} u \in L^{(\delta - k_{\mathbf{r}})\mathbb{P}}_{p\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ *ed è continua l'applicazione* $u \longrightarrow D^{\mathbf{r}} u$ *da* $L^{\delta \mathbb{P}}_{p\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ *ad* $L^{(\delta - k_{\mathbf{r}})\mathbb{P}}_{p\,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo anzitutto che se $\omega \in C_0^\infty(\Omega)$ è $\omega u \in L^{\delta \mathbb{P}}_p(E^n)$ e quindi per il teorema 6.3

$$D^{\mathbf{s}}(\omega u) \in L^{(\delta - k_{\mathbf{s}})\mathbb{P}}_p , \qquad \| D^{\mathbf{s}}(\omega u) \|_{L^{(\delta - k_{\mathbf{s}})\mathbb{P}}_p} \leq C \, \| \omega u \|_{L^{\delta \mathbb{P}}_p} ,$$

qualunque sia il multi-indice $\mathbf{s}$ di interi non negativi. Procediamo per induzione su $|\mathbf{r}| = r_1 + \dots + r_n$. Se $|\mathbf{r}| = 1$ è

$$\omega D^{\mathbf{r}} u = D^{\mathbf{r}}(\omega u) - u \, D^{\mathbf{r}} \omega \in L^{(\delta - k_{\mathbf{r}})\mathbb{P}}_p ,$$

per quanto si è ora osservato e poiché tenuto conto del teorema 6.1 $u D^{\mathbf{r}} \omega \in L^{\delta \mathbb{P}}_p \subset L^{(\delta - k_{\mathbf{r}})\mathbb{P}}_p$; inoltre

$$\| \omega D^{\mathbf{r}} u \|_{L^{(\delta - k_{\mathbf{r}})\mathbb{P}}_p} \leq C (\| \omega u \|_{L^{\delta \mathbb{P}}_p} + \| u D^{\mathbf{r}} \omega \|_{L^{\delta \mathbb{P}}_p}) \leq C' \, \| \omega' u \|_{L^{\delta \mathbb{P}}_p}$$

con $\omega' \in C_0^\infty(\Omega)$, $\omega'(x) = 1$ per $x \in \operatorname{supp} \omega$ e C' dipendente da ω.

Se $|\mathbf{r}| > 1$ è

$$\omega D^{\mathbf{r}} u = D^{\mathbf{r}}(\omega u) - \sum_{\substack{|\mathbf{s}| < |\mathbf{r}| \\ \mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{r}}} \frac{\mathbf{r}!}{\mathbf{s}!\,\mathbf{t}!} D^{\mathbf{t}} \omega \, D^{\mathbf{s}} u . \tag{6.3}$$

Per l'ipotesi di induzione è $D^{\mathbf{s}} u \in L^{(\delta - k_{\mathbf{s}})\mathbb{P}}_{p\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ ed è continua l'applicazione $u \longrightarrow D^{\mathbf{s}} u$ da $L^{\delta \mathbb{P}}_{p\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ ad $L^{(\delta - k_{\mathbf{s}})\mathbb{P}}_{p\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ se $|\mathbf{s}| < |\mathbf{r}|$. Per il corollario 6.1, tenuto conto che è $k_{\mathbf{s}} < k_{\mathbf{r}}$, è pure $D^{\mathbf{s}} u \in L^{(\delta - k_{\mathbf{r}})\mathbb{P}}_{p\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ e l'applicazione $u \longrightarrow D^{\mathbf{s}} u$ è continua anche da $L^{\delta \mathbb{P}}_{p\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ ad $L^{(\delta - k_{\mathbf{r}})\mathbb{P}}_{p\,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Il teorema segue allora subito dalla (6.3) e dalla osservazione premessa.

COROLLARIO 6.3 *Se* $u = \Sigma_{\mathbf{r}} D^{\mathbf{r}} u_{\mathbf{r}}$, $u_{\mathbf{r}} \in L_{p\,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, *la somma (finita) essendo eseguita rispetto ad arbitrari multi-indici di interi non negativi, allora qualunque sia* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ *e* $\delta \leq -\max_{\mathbf{r}} k_{\mathbf{r}}$ *è* $u \in L^{\delta \mathbb{P}}_{p\,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. Dal teorema 6.5 con $\delta=0$ segue che $D^{\mathbf{r}} u_{\mathbf{r}} \in L_{p\,\mathrm{loc}}^{-k_{\mathbf{r}}\,\mathbb{P}}(\Omega)$. Si utilizza poi il corollario 6.1.

COROLLARIO 6.4. *Sia Ω' un aperto di E^n la cui chiusura sia compatta e contenuta nell'aperto Ω ed u una arbitraria distribuzione in Ω, allora qualunque sia $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ e $p \in]1, \infty[$, esiste un $\delta \leq 0$ tale che la restrizione di u ad Ω' appartenga ad $L_{p\,\mathrm{loc}}^{\delta\,\mathbb{P}}(\Omega')$.*

DIMOSTRAZIONE. Il corollario segue subito dal corollario precedente poiché la restrizione di u ad Ω' si può scrivere come somma finita di derivate di funzioni continue in Ω'.

LEMMA 6.4. *Se $u \in \mathcal{D}'_{L_q, \alpha}$ (41), $\alpha \geq 0$, $1 < q < \infty$, allora per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ è $u * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(E^n)$ e per ogni multi-indice $\mathbf{k}$ di interi non negativi $(1 + |x|)^{-\alpha} \cdot D^{\mathbf{k}}(u * \varphi) \in L_q$.*

DIMOSTRAZIONE. Dalla (1.2′) segue che esistono un intero $m \geq 0$ e delle funzioni $u_{\mathbf{l}}$, $|\mathbf{l}| \leq m$ tali che $(1 + |x|)^{\alpha q'/q} u_{\mathbf{l}} \in L_q$, $u = \sum_{|\mathbf{l}| \leq m} D^{\mathbf{l}}[(1 + |x|)^{\alpha q'} u_{\mathbf{l}}]$. Per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ è quindi

$$(u * \varphi)(x) = \langle u_y, \varphi(x + y) \rangle =$$

$$= \sum_{|\mathbf{l}| \leq m} (-1)^{|\mathbf{l}|} \int_{E^n} (1 + |y|)^{\alpha q'/q}\, \overline{u_{\mathbf{l}}}(y) (1 + |y|)^{\alpha} D^{\mathbf{l}} \varphi(x + y)\, dy$$

ed essendo evidentemente

$$1 + |y| \leq (1 + |x + y|)(1 + |x|)$$

è

$$(1 + |x|)^{-\alpha} |(u * \varphi)(x)| \leq$$

$$\leq \sum_{|\mathbf{l}| \leq m} \int_{E^n} (1 + |y|)^{\alpha q'/q} |u_{\mathbf{l}}(y)| (1 + |x + y|)^{\alpha} |D^{\mathbf{l}} \varphi(x + y)|\, dy$$

onde

$$\|(1 + |x|)^{-\alpha} (u * \varphi)\|_{L_q} \leq \sum_{|\mathbf{l}| \leq m} \|(1 + |y|)^{\alpha q'/q} u_{\mathbf{l}}\|_{L_q} \|(1 + |x|)^{\alpha} D^{\mathbf{l}} \varphi\|_{L_1}.$$

---

(41) Gli spazi $\mathcal{D}_{L_q, \alpha}$ e $\mathcal{D}'_{L_q, \alpha}$ sono stati definiti nel n. 1.

Allo stesso modo si ragiona su

$$D^{k}(u * \varphi)(x) = \sum_{|l| \leq m} (-1)^{|l|} \int_{E^n} (1 + |y|)^{\alpha q'} \overline{u}_l(y)\, D^{l+k} \varphi(x+y)\, dy .$$

COROLLARIO 6.5. *Se* $u \in \mathcal{N}$ *allora per ogni* $\varphi \in \mathcal{S}$ *è* $u * \varphi \in \mathcal{N} \cap \mathcal{C}^{\infty}(E^n)$.

DIMOSTRAZIONE. Ricordando la definizione di $\mathcal{N}$ (42), se $u \in \mathcal{N}$ esistono $\alpha \in [0, 1[$ e $q \in]1, \alpha^{-1}[$ tali che $u \in \mathcal{D}'_{L_q, \alpha}$. Per il lemma precedente è allora $u * \varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(E^n)$ e $u * \varphi = (1 + |x|)^{\alpha} v$, $v \in L_q$, onde $u * \varphi \in \mathcal{D}'_{L_q, \alpha} \subset \mathcal{N}$.

TEOREMA 6.6. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$, $f \in \mathcal{N}$ *ed* $f \in W_p^{\mathbb{P}+}$, $1 < p < \infty$, *allora* $f \in L^{\mathbb{P}}_{p\,\mathrm{loc}}(E^n)$.

DIMOSTRAZIONE. Esiste un $M > 0$ tale che supp $\tilde{f} \cap \{\xi \in E^n ; |\xi| > M\} \neq \varnothing$ altrimenti sarebbe supp $\tilde{f} = \{0\}$; f sarebbe allora un polinomio e non potrebbe quindi appartenere ad $\mathcal{N}$ (43). Con tale scelta di M sia $\zeta(\xi)$ una funzione soddisfacente alle condizioni indicate nel lemma 5.3. Per il corollario 5.5, con $\mathbb{P} = \mathbb{P}^+$, $R(\xi) = P(\xi)$ e $\delta = 1$, la funzione $(1 - \zeta(\xi))\, P(\xi)\, [P^+(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, p), $1 < p < \infty$. Dal fatto che $\mathcal{F}^{-1}(P^+(\xi) \tilde{f}) \in \Phi'_p$ segue allora che anche $\mathcal{F}^{-1}(P(\xi)(1 - \zeta(\xi)) \tilde{f}) \in \Phi'_p$ ossia che $\mathcal{F}^{-1}((1 - \zeta)\tilde{f}) \in W_p^{\mathbb{P}}$. D'altra parte per il corollario 6.5 è $f * \mathcal{F}^{-1}(\zeta) \in \mathcal{N} \cap \mathcal{C}^{\infty}$ onde pure $\mathcal{F}^{-1}((1 - \zeta)\tilde{f}) = f - f * \mathcal{F}^{-1}(\zeta) \in \mathcal{N}$. Per il teorema 4.9 è quindi $\mathcal{F}^{-1}((1 - \zeta)\tilde{f}) \in L_p^{\mathbb{P}}(E^n)$. Il teorema segue allora osservando che evidentemente è $f * \mathcal{F}^{-1}(\zeta) \in L^{\mathbb{P}}_{p\,\mathrm{loc}}(E^n)$.

Il teorema ora provato consente di completare alcuni risultati del n. 4 relativi ad $f \in \mathcal{N}$ appartenenti anche a $W_p^{\mathbb{P}}$, con $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n_*$, $1 < p < \infty$, quando sia $h(\mathbb{P}) \leq p$. Si ha per esempio a completamento del corollario 4.1 il

COROLLARIO 6.6. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n_*$, $h(\mathbb{P}) \leq p$, $f \in \mathcal{N}$ *ed* $f \in W_p^{\mathbb{P}}$, $1 < p < \infty$, *allora* $f \in L_{q\,\mathrm{loc}}(E^n)$ *per ogni* $q \in [1, \infty[$; *se anche* $k(\mathbb{P}) < p$, *allora* f *coincide quasi ovunque con una funzione continua su* E^n *e localmente hölderiana, con esponente di hölderianità eguale a quello indicato nel teorema* 4.12.

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema 6.6, tenuto conto del teorema 4.6, è $f \in L^{\mathbb{P}_0}_{p\,\mathrm{loc}}(E^n)$. Osservato che attualmente è sempre $k(\mathbb{P}) \leq p$, poichè $k(\mathbb{P}) \leq$

---

(42) Si veda il lemma 1.9.

(43) Si veda il corollario 1.8.

$\leq h(\mathbb{P})$ [44], la prima affermazione del corollario segue dal corollario 6.1 con $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ e dalla continuità della immersione di $L_{r\,\mathrm{loc}}(E^n)$ in $L_{s\,\mathrm{loc}}(E^n)$ se $s < r$. La seconda affermazione del corollario segue invece dal fatto che $\omega f \in L_p^{\mathbb{P}_0}(E^n)$ per ogni $\omega \in \mathcal{C}_0^\infty(E^n)$ e dal teorema 4.12 poichè è $h(\mathbb{P}_0) = \infty$.

7. Sia $\mathbb{P}(D) = \Sigma_{\mathbf{s}}\, a_{\mathbf{s}}\, D^{\mathbf{s}}$ un polinomio differenziale a coefficienti complessi costanti $a_{\mathbf{s}}$. Sia $\mathbb{P}$ il poliedro convesso di S_+^n inviluppo convesso dell'insieme $\{\mathbf{s} \in S_+^n\,;\, a_{\mathbf{s}} \neq 0\} \cup \{\mathbf{o}\}$. Seguendo [10], [11], [14], chiameremo $\mathbb{P}$ *poliedro caratteristico* di $\mathbb{P}(D)$. Indicheremo con H_1 la seguente ipotesi su $\mathbb{P}(D)$

H_1) i) *il poliedro caratteristico* $\mathbb{P}$ *di* $\mathbb{P}(D)$ *appartiene a* $\mathcal{P}^n$.

ii) *esistono due costanti* $C > 0$ *ed* $R \geq 0$ *tali che*

$$|\mathbb{P}(i\xi)| \geq C\; P^+(\xi) \qquad \forall\, \xi \in E^n,\ |\xi| > R.$$

TEOREMA 7.1. *Se* $\mathbb{P}(D)$ *è un polinomio differenziale a coefficienti complessi costanti soddisfacente alla* H_1 *con* $R = 0$, *allora da* $u \in \Phi'$, $\mathbb{P}(D)u \in W_p^{\delta \mathbb{P}^+}$, $\delta \geq 0$, $1 < p < \infty$, *segue* $u \in W_p^{(\delta+1)\mathbb{P}^+}$ *e*

$$\|u\|_{W_p^{(\delta+1)\mathbb{P}^+}} \leq c\, \|\mathbb{P}(D)\,u\|_{W_p^{\delta\mathbb{P}^+}}$$

con c indipendente da u.

DIMOSTRAZIONE. Basta provare che la funzione $((\delta+1)P^+)(\xi)[(\delta P^+)(\xi)\cdot \cdot\mathbb{P}(i\xi)]^{-1}$ [45] è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, p). Ciò d'altra parte segue dal fatto che tale funzione è somma delle

$$\frac{|\xi^{(\delta+1)\mathbf{s}^l}|}{(\delta P^+)(\xi)\,\mathbb{P}(i\xi)} = \frac{|\xi^{\delta\mathbf{s}^l}|}{(\delta P^+)(\xi)} \cdot \frac{|\xi^{\mathbf{s}^l}|}{\mathbb{P}(i\xi)} \qquad l = 2, \ldots, N(\mathbb{P}),$$

ove entrambi i fattori a secondo membro sono moltiplicatori in Ψ e moltiplicatori di tipo (p, p), il primo per il teorema 3.1 ed il secondo per l'osservazione al lemma 5.2.

Da questo teorema, utilizzando i corollari 4.1 e 4.3, ed i teoremi 4.10,

---

(44) Si veda il lemma 3.1, iv).

(45) È $(\delta P^+)(\xi) = \sum_{l=2}^{N(\mathbb{P})} |\xi^{\delta \mathbf{s}^l}|$. Se $\delta = 0$ si intende che $(\delta P^+)(\xi) \equiv 1$.

4.11 e 4.12, si traggono teoremi di regolarizzazione e formule di maggiorazione per le $u \in \mathcal{N}$ tali che $\mathbb{P}(D)\, u \in W_p^{\delta \mathbb{P}^+}$, $\delta \geq 0$, $1 < p < \infty$.

TEOREMA 7.2. *Sia* $\mathbb{P}(D)$ *un polinomio differenziale a coefficienti complessi costanti soddisfacente all'ipotesi* H_1 *e sia* $u \in \mathcal{S}'$, $\mathbb{P}(D)\, u \in L_p^{\delta \mathbb{P}}(E^n)$, δ *reale,* $1 < p < \infty$, *allora* $u \in L_{p\,\mathrm{loc}}^{(\delta+1)\,\mathbb{P}}(E^n)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia ancora ζ la funzione indicata nel lemma 5.3. Per ipotesi è $\mathcal{F}^{-1}([P_1(\xi)]^\delta\, \mathbb{P}(i\xi)\, \tilde{u}) \in L_p$. Per il lemma 5.3 la funzione $(1-\zeta(\xi))\cdot$ $\cdot P_1(\xi)\,[\mathbb{P}(i\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in $\mathcal{S}$ ed un moltiplicatore di tipo (p, p), $1 < p < \infty$. Ne segue che $\mathcal{F}^{-1}([P_1(\xi)]^{\delta+1}(1-\zeta)\,\tilde{u}) \in L_p$, ossia che $\mathcal{F}^{-1}((1-\zeta)\,\tilde{u}) \in L_p^{(\delta+1)\,\mathbb{P}}(E^n)$ e

$$\| \mathcal{F}^{-1}((1-\zeta)\,\tilde{u}) \|_{L_p^{(\delta+1)\,\mathbb{P}}} \leq c\, \| \mathbb{P}(D)\, u \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}}. \tag{7.1}$$

Dalla

$$u = \mathcal{F}^{-1}((1-\zeta)\,\tilde{u}) + u * \mathcal{F}^{-1}(\zeta)$$

segue allora il teorema tenuto conto che $u * \mathcal{F}^{-1}(\zeta) \in \mathcal{C}^\infty(E^n)$, perché convoluzione di $u \in \mathcal{S}'$ con $\mathcal{F}^{-1}(\zeta) \in \mathcal{S}$.

COROLLARIO 7.1. $\mathbb{P}(D)$ *soddisfi alla ipotesi* H_1 *e sia* $u \in \mathcal{S}'$ *e* $\mathbb{P}(D)\, u \in$ $\in \mathcal{D}_{L_p}$, $1 < p < \infty$, *allora* $u \in \mathcal{C}^\infty(E^n)$.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che $\mathbb{P}(D)\, u \in \mathcal{D}_{L_p}$ implica $\mathbb{P}(D)\, u \in L_p^{m \mathbb{P}}$ per ogni intero $m \geq 0$ ed applicare il teorema precedente.

Se $u \in \mathcal{E}'$, ossia è una distribuzione a supporto compatto, il risultato del teorema 7.2 può essere completato con l'aggiunta di formule di maggiorazione per la u e le sue derivate. Si utilizza il seguente

LEMMA 7.1. *Sia* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$, K *un compatto di* E^n *ed* M *un numero* > 0. *Sia inoltre* $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(E^n)$, $0 \leq \zeta(\xi) \leq 1$, $\zeta(\xi) = 1$ *per* $|\xi| \leq M$ *e* $\zeta(\xi) = 0$ *per* $|\xi| \geq 2M$. *Se* $u \in L_p^{\delta \mathbb{P}}(E^n)$, δ *reale,* $1 < p < \infty$, supp $u \subset K$ *allora*

$$c' \| \mathcal{F}^{-1}((1-\zeta)\,\tilde{u}) \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}} \leq \| u \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}} \leq c'' \| \mathcal{F}^{-1}((1-\zeta)\,\tilde{u}) \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}}$$

con c' *e* c'' *costanti positive indipendenti da* u (46).

---

(46) Per gli spazi H^s un lemma di questo tipo è stato provato in [13] p. 425.

DIMOSTRAZIONE. La funzione $1-\zeta$ è certamente un moltiplicatore in $\mathcal{S}$ ed un moltiplicatore di tipo (p,p), $1<p<\infty$. Pertanto se $\mathcal{F}^{-1}([P_1(\xi)]^\delta \tilde{u}) \in L_p$ è pure $\mathcal{F}^{-1}((1-\zeta)[P_1(\xi)]^\delta \tilde{u}) \in L_p$, ossia $\mathcal{F}^{-1}((1-\zeta)\tilde{u}) \in L_p^{\delta \mathbb{P}}$ e

$$\| \mathcal{F}^{-1}((1-\zeta)\tilde{u}) \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}} \leq c \| u \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}} .$$

Osserviamo che essendo u a supporto compatto, $\tilde{u}(\xi)$ si può prolungare su tutto $\mathbb{C}^n$ con una funzione analitica intera di tipo esponenziale che indicheremo con $\tilde{u}(z)$, $z=\xi+i\tau$. Se $\delta \geq 0$ ed $u \in L_p^{\delta \mathbb{P}}$ è $u \in L_p$ ed anche $u \in L_1$. Per ogni multi-indice $\mathbf{r}$ di interi non negativi sarà quindi

$$D_\xi^{\mathbf{r}} \tilde{u}(z) = \int_K e^{-i\langle x,z\rangle} (-ix)^{\mathbf{r}} u(x)\, dx$$

dalla quale per la diseguaglianza di Hölder

$$|D_\xi^{\mathbf{r}} \tilde{u}(z)| \leq A(\mathbf{r})\, e^{B|\tau|} \| u \|_{L_p} \leq A(\mathbf{r})\, e^{B|\tau|} \| u \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}}, \tag{7.2}$$

ove $A(\mathbf{r})$ dipende oltre che da $\mathbf{r}$ anche da K e B dipende da K. Se $\delta<0$, allora, come si rileva dalla dimostrazione del lemma 6.3, esiste $v \in L_p$ tale che

$$u = \sum_1^n {}_j (1-D_{x_j}^2)^{m/2} v, \qquad \| v \|_{L_p} \leq c \| u \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}},$$

con m intero positivo pari tale che $\sum_1^n {}_j s_j \leq m$ per ogni $\mathbf{s} \in |\delta|\,\mathbb{P}$. Se $\eta(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(E^n)$ ed $\eta=1$ in un intorno di K è quindi $u=\eta \sum_1^n {}_j (1-D_{x_j}^2)^{m/2} v$, onde

$$D_\xi^{\mathbf{r}} \tilde{u}(z) = \int v(x) \sum_1^n {}_j (1-D_{x_j}^2)^{m/2} (\eta\, e^{-i\langle x,z\rangle} (-ix)^{\mathbf{r}})\, dx$$

da cui per la diseguaglianza di Hölder:

$$|D_\xi^{\mathbf{r}} \tilde{u}(z)| \leq A(\mathbf{r}) \sum_1^n {}_j (1+|z_j|^2)^{m/2} e^{B|\tau|} \| u \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}} \tag{7.2'}$$

con $A(\mathbf{r})$ e B costanti del tipo di quelle che figurano nella (7.2).

Per provare la parte destra della maggiorazione indicata nel lemma procediamo per assurdo, supponendo che non esista alcuna costante positiva $c(p, \mathbb{P}, K, \zeta)$ per cui essa sia soddisfatta da ogni $u \in L_p^{\delta \mathbb{P}}$ con supp $u \subset K$. Per ogni numero naturale ν esisterà allora una $u_\nu \in L_p^{\delta \mathbb{P}}$ con supp $u \subset K$ tale che

$$\| u_\nu \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}} > \nu \| \mathcal{F}^{-1} ((1 - \zeta) \tilde{u}_\nu) \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}} .$$

Possiamo supporre che sia $\| u_\nu \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}} = 1$ onde

$$\| \mathcal{F}^{-1} ((1 - \zeta) \tilde{u}_\nu) \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}} < \nu^{-1} .$$

La successione $\mathcal{F}^{-1} ((1 - \zeta) \tilde{u}_\nu)$ converge dunque a zero in $L_p^{\delta \mathbb{P}}$ e quindi in $\mathcal{S}'$. Convergerà perciò a zero in $\mathcal{S}'$ anche la successione $(1 - \zeta) \tilde{u}_\nu (\xi)$ onde $\lim\limits_{\nu \to \infty} \tilde{u}_\nu (\xi) = 0$ sull'insieme $\{\xi \in E^n ; | \xi | > 2M\}$. D'altra parte dalle (7.2) e (7.2′) segue che le funzioni $\tilde{u}_\nu (z)$ sono uniformemente limitate su ogni compatto di $\mathbb{C}^n$. Esiste allora una sottosuccessione della successione $\tilde{u}_\nu$, che indicheremo ancora con $\tilde{u}_\nu (z)$, che converge uniformemente su ogni compatto di $\mathbb{C}^n$. Il suo limite sarà quindi una funzione analitica in $\mathbb{C}^n$ la quale per quanto precede non potrà essere che identicamente nulla. Consideriamo ora le funzioni

$$U_\nu (x) = \mathcal{F}^{-1} ([P_1 (\xi)]^\delta \zeta (\xi) \tilde{u}_\nu) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} [P_1 (\xi)]^\delta \zeta (\xi) \tilde{u}_\nu (\xi) \, d\xi .$$

Se r è un intero positivo dalle (7.2), (7.2′) segue che

$$\left(1 + \sum_1^n{}_j | x_j |^r\right) | U_\nu (x) | \leq C_r$$

con C_r costante indipendente da ν. Se si sceglie r in modo che $pr > n$ le U_ν riusciranno tutte maggiorate da una stessa funzione di L_p, mentre poi ancora per le (7.2) e (7.2′) e per il fatto che $\lim\limits_{\nu \to \infty} \tilde{u}_\nu (\xi) = 0$ per ogni $\xi \in E^n$ è $\lim\limits_{\nu \to \infty} U_\nu (x) = 0$ su E^n. Ne segue che

$$\lim_{\nu \to \infty} \| \mathcal{F}^{-1} (\zeta \tilde{u}_\nu) \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}} = \lim_{\nu \to \infty} \| U_\nu \|_{L_p} = 0.$$

Se dunque la parte destra della maggiorazione enunciata non si verificasse esisterebbe una successione di $u_\nu \in L_p^{\delta \mathbb{P}}$ con supp $u_\nu \subset K$ tali che

$$1 = \| u_\nu \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}} \leq \| \mathcal{F}^{-1} ((1 - \zeta) \tilde{u}_\nu) \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}} + \| \mathcal{F}^{-1} (\zeta \tilde{u}_\nu) \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}}$$

con l'ultimo membro tendente a zero per $\nu \to \infty$. Ciò conclude la prova del lemma.

TEOREMA 7.3. *Sia* $\mathbb{P}(D)$ *un polinomio differenziale a coefficienti complessi costanti soddisfacente all'ipotesi* H_1 *ed* $\mathbf{r}$ *un multi-indice di interi non negativi, allora per ogni compatto* K *di* E^n, *ogni* δ *reale ed ogni* $u \in \mathcal{E}'$ *con* supp $u \subset K$ *e* $\mathbb{P}(D)\, u \in L_p^{\delta \mathbb{P}}$, $1 < p < \infty$, *è* $D^{\mathbf{r}} u \in L_p^{(\delta + 1 - k_{\mathbf{r}})\mathbb{P}}$ *e*

$$\| D^{\mathbf{r}} u \|_{L_p^{(\delta + 1 - k_{\mathbf{r}})\mathbb{P}}} \leq C \, \| \mathbb{P}(D)\, u \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}}$$

con C *dipendente da* K *e* δ, *ma non da* u.

DIMOSTRAZIONE. Il teorema segue dal teorema 7.2, dalla (7.1) tenuto conto del lemma 7.1 e dal teorema 6.3.

Seguendo Volevic-Gindikin [14] diamo la

DEFINIZIONE 7.1. *Un poliedro* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ *si dice completo se*

$$\mathbf{r} \in S_+^n, \quad \mathbf{r} < \mathbf{s} \in \mathbb{P} \Longrightarrow \mathbf{r} \in \mathbb{P} \setminus \dot{\mathbb{P}}^+ \text{ (47)}.$$

La condizione che $\mathbb{P}$ sia completo implica che la normale esterna a $\mathbb{P}$ in ogni punto di $\dot{\mathbb{P}}^+$ che appartenga ad uno solo degli iperpiani di appoggio a $\mathbb{P}$ forma con gli assi coordinati angoli inferiori a $\pi/2$, ossia ha coseni direttori tutti positivi

Indicheremo con H_2 la seguente ipotesi su $\mathbb{P}(D)$:

H_2) i) $\mathbb{P}(D)$ *soddisfa alla ipotesi* H_1

ii) *il polinomio caratteristico di* $\mathbb{P}(D)$ *è completo.*

Osserviamo che dal teorema 5 di [14] si trae che affinché un polinomio differenziale $\mathbb{P}(D)$ soddisfacente alla ipotesi H_1 sia ipoellittico è necessario e sufficiente che il suo poliedro caratteristico sia completo, ossia che esso soddisfi alla ipotesi H_2 (48). I polinomi soddisfacenti alla ipotesi H_2 sono stati chiamati da J. Friberg [5] multi-quasi-ellittici. Particolari polinomi di questo tipo erano stati studiati in [1] e [2].

---

(47) Se $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in S^n$ con $\mathbf{r} < \mathbf{s}$ si intende che è $r_j \leq s_j$, $j = 1, \dots, n$ ed $r_j < s_j$ per almeno uno di tali j.

(48) Si veda anche [5].

Se $\mathbb{P}(D)$ è un polinomio differenziale a coefficienti complessi costanti, $g \in \mathcal{C}^\infty(E^n)$ ed $u \in \mathcal{D}'$ poniamo

$$[\mathbb{P}(D), g]\, u = \mathbb{P}(D)(gu) - g\, \mathbb{P}(D)\, u.$$

TEOREMA 7.4. *Sia $\mathbb{P}(D)$ un polinomio differenziale a coefficienti complessi costanti soddisfacente alla ipotesi H_2, K un compatto di E^n, $g \in \mathcal{C}^\infty(E^n)$ e δ un numero reale; allora esiste una costante C dipendente da K, g, δ ed un numero $d > 0$ dipendente soltanto da $\mathbb{P}(D)$ tale che per ogni $u \in \mathcal{E}'$ con* supp $u \subset K$ *e* $\mathbb{P}(D)\, u \in L_p^{\delta \mathbb{P}}$

$$\| [\mathbb{P}(D), g]\, u \|_{L_p^{(\delta + d)\mathbb{P}}} \leq C \, \| \mathbb{P}(D)\, u \|_{L_p^{\delta \mathbb{P}}} .$$

DIMOSTRAZIONE. $[\mathbb{P}(D), g]\, u$ è combinazione lineare con coefficienti in $\mathcal{C}^\infty(E^n)$ di un numero finito di derivate $D^{\mathbf{r}} u$ con $\mathbf{r} < \mathbf{s}$ per almeno un $\mathbf{s} \in \mathbb{P}$. Essendo $\mathbb{P}$ completo, da ciò segue che tutti tali $\mathbf{r} \in \mathbb{P} \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$ e quindi che per essi è $k_{\mathbf{r}} < 1$. Posto $d = \min\limits_{\mathbf{r}} (1 - k_{\mathbf{r}})$, il minimo essendo eseguito rispetto agli $\mathbf{r}$ indicati, il teorema segue dal teorema 7.3 tenuto conto del teorema 6.1 con $\alpha = \delta + 1 - k_{\mathbf{r}}$ e $\beta = \delta + d$.

TEOREMA 7.5. *Se $\mathbb{P}(D)$ soddisfa alla ipotesi H_2, allora qualunque sia l'aperto $\Omega \subset E^n$ ed $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathbb{P}(D)\, u \in L_{p\,\mathrm{loc}}^{\delta \mathbb{P}}(\Omega)$, δ reale, $1 < p < \infty$, implica $\mathbb{P}(D)(\omega\, u) \in L_p^{\delta \mathbb{P}}$ per ogni $\omega \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\omega' \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, $\omega' \equiv 1$ in un intorno di supp ω, ed Ω' un intorno aperto di supp ω' la cui chiusura sia compatta e contenuta in Ω. Sia $u' = \omega' u$. Intendendo di porre $\omega u = 0$ fuori di supp ω e $\omega' u = 0$ fuori di supp ω' è $u' \in \mathcal{E}'$, $\omega u = \omega u'$, $\omega\, \mathbb{P}(D)\, u = \omega\, \mathbb{P}(D)\, u'$ e $u' = \omega' u \,|_{\Omega'}$ avendo indicato con $u\,|_{\Omega'}$ la restrizione di u ad Ω'. Per il corollario 6.4 esiste un λ reale tale che $u\,|_{\Omega'} \in L_{p\,\mathrm{loc}}^{\lambda \mathbb{P}}(\Omega')$ onde $u' \in L_p^{\lambda \mathbb{P}}$ e quindi per il teorema 6.3 $\mathbb{P}(D)\, u' \in L_p^{(\lambda - 1)\mathbb{P}}$. Da quanto sopra segue inoltre che $[\mathbb{P}(D), \omega]\, u = [\mathbb{P}(D), \omega]\, u'$ onde

$$\mathbb{P}(D)(\omega\, u) = [\mathbb{P}(D), \omega]\, u' + \omega\, \mathbb{P}(D)\, u. \tag{7.3}$$

Poiché anche $\mathbb{P}(D)(\omega\, u') \in L_p^{(\lambda - 1)\mathbb{P}}$ dalla (7.3), tenuto conto del teorema 6.1, segue che $\mathbb{P}(D)(\omega\, u) \in L_p^{\lambda_0 \mathbb{P}}$ con $\lambda_0 = \min(\lambda - 1, \delta)$. Se $\lambda - 1 \geq \delta$ il teorema è provato. Se $\lambda - 1 < \delta$, applicando ad u' il teorema 7.4 risulta

$[\mathfrak{P}(D), \omega]\, u' \in L_p^{(\lambda - 1 + d)\mathfrak{P}}$ onde posto $\lambda_1 = \min(\lambda - 1 + d, \delta)$ dalla (7.3) e dal teorema 6.1 segue che $\mathfrak{P}(D)(\omega u) \in L_p^{\lambda_1 \mathfrak{P}}$, ove ora $\lambda_1 > \lambda - 1$. Poiché ciò vale per ogni $\omega \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ è pure $\mathfrak{P}(D)\, u' \in L_p^{\lambda_1 \mathfrak{P}}$. Iterando il procedimento si giunge allora a provare il teorema.

TEOREMA 7.6. *Se* $\mathfrak{P}(D)$ *soddisfa alla ipotesi* H_2, *allora qualunque sia l'aperto* $\Omega \subset E^n$ *ed* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathfrak{P}(D)\, u \in L_{p\,\mathrm{loc}}^{\delta \mathfrak{P}}(\Omega)$, *δ reale,* $1 < p < \infty$, *implica* $u \in L_{p\,\mathrm{loc}}^{(\delta + 1)\mathfrak{P}}(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema 7.5 è $\mathfrak{P}(D)(\omega u) \in L_p^{\delta \mathfrak{P}}$ per ogni $\omega \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Applicando a $\omega u \in \mathcal{E}'$ il teorema 7.3 si ha $\omega u \in L_p^{(\delta + 1)\mathfrak{P}}$ e ciò prova il teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] CATTABRIGA, L., *Su una classe di polinomi ipoellittici*, Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, 36, 1966.

[2] CATTABRIGA, L., *Complementi alla mia nota : Su una classe di polinomi ipoellittici*, Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, 37, 1967.

[3] CATTABRIGA, L., *Alcuni teoremi di immersione per spazi funzionali generalizzanti gli spazi di S. L. Sobolev*, Annali dell'Univ. di Ferrara, Sez. VII, 12, 1967.

[4] CATTABRIGA, L., *Moltiplicatori di Fourier e teoremi di immersione per certi spazi funzionali*, Annali Sc. Normale Sup. di Pisa, 24, 1970.

[5] FRIBERG, J., *Multiquasielliptic polynomials*, Annali Sc. Normale Sup. di Pisa, 21, 1967.

[6] KAZARYAN, G. G., *Ob ocenkah proizvodnyh čerez differencial'nye operatory*, Sib. Mat. J., 11, 1970.

[7] KAZARYAN, G. G., *Ocenka v L_p smešannyh proizvodnyh čerez differencial'nye mnogocleny*, Trudy MIAN, 105, 1969.

[8] LIZORKIN, P. I., *Obobščennoe liuvillevskoe differencirovanie i funkcional'nye prostranstva $L_p^r(E_n)$. Teoremy vloženiya*, Matem. Sb., 60, 1963.

[9] LIZORKIN, P. I., *O mul'tiplikatorah integralov Fur'e v prostranstvah $L_{p,\vartheta}$*, Trudy MIAN, 89, 1967.

[10] MIHAILOV, V. P., *O povedenii na beskonecnosti nekotoryh klassov mnogoclenov*, Doklady Akad. Nauk SSSR, 164, 1965.

[11] MIHAILOV, V. P., *O povedenii na beskonecnosti odnogo klassa mnogoclenov*, Trudy MIAN, 91, 1967.

[12] NIKOL'SKIĬ, S. M., *Pervaya kraevaya zadaca dlya obščego lineinogo uravneniya*, Doklady Akad. Nauk SSSR, 146, 1962.

[13] TRÈVES, F., *Linear partial differential equations with constant coefficients*, Gordon and Breach, 1966.

[14] VOLEVIČ, L. R. - GINDIKIN, S. G., *Ob odnom klasse gipoellipticeskih polinomov*, Matem. Sb., 75, 1968.

[15] VOLEVIČ, L. R. - PANEYAH, B. P., *Nekotorye prostranstva obobščennyh funkciĭ i teoremy vloženiya*, Uspehi Matem. Nauk, 20, 1965.

Istituto matematico, Università di Ferrara