ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

I. MOISINI

Sur certains systèmes de Pfaff de caractère trois

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 24, nº 3 (1970), p. 429-437

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1970_3_24_3_429_0>

SUR CERTAINS SYSTÈMES DE PFAFF DE CARACTÈRE TROIS

par I. Moisini

Cette Note est dédiée à l'étude de certains systèmes de Pfaff de caractère trois qui généralisent les systèmes systatiques introduits par Élie Cartan dans [1].

En calculant les caractères, on démontre que la différence entre le nombre des variables indépendantes et le nombre d'équations du système est égale au double de son genre.

Ce résultat est analogue à celui obtenu dans le cas des systèmes de caractère deux systatiques.

Pour les notations et les notions employées sans explications expresses, nous envoyons le lecteur au travail [2].

§ 1. Soit

$$(S) \qquad \omega^k = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, s)$$

un système de s équations de Pfaff indépendantes aux coefficients satisfaisant les conditions du théorème d'existence de Cartan.

Nous supposerons que

a) Le premier caractèr s_1 de (S) est égal à 3;

b) Le système (S) n'a pas d'élément caractéristique.

Pervenuto alla Redazione il 27 Gennaio 1970.

La Rédaction regrette beaucoup la mort prematurée de l'auteur de cet article, mort advenue a Jassy le 7 Decembre 1969. Pour cette raison ce travail n'à pas été revu par son auteur: la présente rédaction est due à la gentillesse et aux soins de M. le prof. Petru Caraman.

Nous dirons qu'un système (S) satisfaisant les hypothèses a) et b) est «systatique» si, étant donné un élément linéaire intégral E_1, tous les éléments intégraux à p dimensions (p étant le genre du système (S)) qui contiennent E_1 ont en commun un élément à trois dimensions au moins, contenant E_1.

On peut dire encore que dans l'élément polaire $H_\varrho - 3$ de E_1 il y a un élément caractéristique à trois dimensions au moins, E_3.

Il est évident d'après [4], que si cet élément caractéristique de $H_\varrho - 3$ avait plus de trois dimensions, on pourait trouver des éléments à trois, deux ou une dimension en involution avec tous les éléments intégraux et donc caractéristiques, ce qui contredirait l'hypothèse b). Cette définition généralise d'une façon naturelle la notion de système systatique introduite en [1] pour les systèmes de caractère deux. Nous allons l'appeler l'hypothèse c).

§ 2. Il est bien connu d'après [3] que le système, obtenu en différentiant extérieurement les équations d'un système (S) pour lequel $s_1 = 3$, se réduit à trois formes quadratiques extérieures, modulo les équations de (S), que nous allons noter $d\omega^1$, $d\omega^2$, $d\omega^3$.

Soient allors

$$\widetilde{\omega}^1 = \widetilde{\omega}^2 = \widetilde{\omega}^3 = 0 \tag{1}$$

les équations de l'élément polaire $H_\varrho - 3$, dans H_ϱ, lieu des éléments linéaires intégraux.

Soient encore

$$\widetilde{\omega}^1 = \widetilde{\omega}^2 = \widetilde{\omega}^3 = \chi^1 = \chi^2 = \cdots \cdot \chi^{\varrho-6} = 0 \tag{2}$$
$$(\varrho = n - s)$$

les équations de E_3 caractéristique pour $H_\varrho - 3$.

Prenons enfin trois nouvelles formes différentielles linéaires $\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3$, qui, avec les $\widetilde{\omega}$ et les χ, constituent un système de ϱ expressions indépendantes entre elles et des formes ω.

Introduison les équations de $H_\varrho - 3$ dans $d\omega^1, d\omega^2, d\omega^3$. Celles-ci devront se réduire (modulo $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^s$) évidemment, à des formes du deuxième degré en $\chi^1, \chi^2, \ldots, \chi^{\varrho-6}$. On aura donc

$$\left\{\begin{aligned} d\omega^1 &= \alpha_{ij}\,[\widetilde{\omega}^i\,\vartheta^j] + \overline{\alpha}_{ij}\,[\widetilde{\omega}^i\,\widetilde{\omega}^j] + [\widetilde{\omega}^i, a_l^i\,\chi^l] + a_{lm}\,[\chi^l\,\chi^m],\\ d\omega^2 &= \beta_{ij}\,[\widetilde{\omega}^i\,\vartheta^j] + \overline{\beta}_{ij}\,[\widetilde{\omega}^i\,\widetilde{\omega}^j] + [\widetilde{\omega}^i, b_i^l\,\chi^l] + b_{lm}\,[\chi^l\,\chi^m],\\ d\omega^3 &= \gamma_{ij}\,[\widetilde{\omega}^i\,\vartheta^j] + \overline{\gamma}_{ij}\,[\widetilde{\omega}^i\,\widetilde{\omega}^j] + [\widetilde{\omega}^i, c_l^i\,\chi^l] + c_{lm}\,[\chi^l\,\chi^m],\end{aligned}\right. \tag{3}$$

où $(i, j = 1, 2, 3)$ $(l, m = 1, 2, \ldots \varrho - 6)$, on somme d'après les indices.

Enfin soient

$$\tilde{\omega}^1 = \tilde{\omega}^2 = \tilde{\omega}^3 = \chi^1 = \dots = \chi^{\varrho-6} = \vartheta^1 = \vartheta^2 = 0$$

les équations de E_1.

En tenant compte de ces équations dans les formules (3) il est évident que les trois expressions linéaires $\alpha_{ij}\tilde{\omega}^j$, $\beta_{ij}\tilde{\omega}^j$, $\gamma_{ij}\tilde{\omega}^j$, $(i, j = 1, 2, 3)$ sont indépendantes, car égalées à zero, elles doivent définir $H_{\varrho-3}$. Si dans les mêmes formules (3) on met $\chi^1 = \chi^2 = \dots = \chi^{\varrho-6} = 0$, on obtient trois expressions différentielles linéaires à six variables qui ne peuvent se réduire à un nombre moindre parce que — dans ce cas — le système (S) admettrait un élément caractéristique, ce qui contredirait l'hypothèse *b*).

Faisons enfin dans (3) $\tilde{\omega}^1 = \tilde{\omega}^2 = \tilde{\omega}^3 = 0$. Dans ce cas les seconds membres de ces formules ne peuvent pas s'exprimer avec moins de $\varrho - 6$ formes χ. Cela revient à dire que les équations

$$\left\{\begin{aligned} &a_{1l}\,\chi^l = a_{2l}\,\chi^l = \dots = a_{\varrho-6\,l}\,\chi^l = 0, \\ &b_{1l}\,\chi^l = b_{2l}\,\chi^l = \dots = b_{\varrho-6\,l}\,\chi^l = 0, \\ &c_{1l}\,\chi^l = c_{2l}\,\chi^l = \dots = c_{\varrho-6\,l}\,\chi^l = 0 \end{aligned}\right. \tag{4}$$

entrainent

$$\chi^1 = \chi^2 = \dots = \chi^{\varrho-6} = 0$$

ou bien qu'entre les $3(\varrho - 6)$ premiers membres des équations (4) il y a $2(\varrho - 6)$ relations linéaires.

§ 3. Dans ce que suit, nous allons nous occuper seulement de tels systèmes (S), pour lesquelles le système (3) a la forme plus simple

$$\left\{\begin{aligned} d\omega^1 &= [\tilde{\omega}^1\,\vartheta^1] + [\tilde{\omega}^2,\, a_l\,\chi^l] + a_{lm}\,[\chi^l\,\chi^m], \\ d\omega^2 &= [\tilde{\omega}^2\,\vartheta^2] + [\tilde{\omega}^3,\, b_l\,\chi^l] + b_{lm}\,[\chi^l\,\chi^m], \\ d\omega^3 &= [\tilde{\omega}^3\,\vartheta^3] + [\tilde{\omega}^1,\, c_l\,\chi^l] + c_{lm}\,[\chi^l\,\chi^m] \end{aligned}\right. \tag{5}$$

$$(l, m = 1, 2, \dots, \varrho - 6).$$

Prenons un élément linéaire intégral générique E_1 représenté par les équations

$$\frac{\tilde{\omega}^1}{\tilde{\omega}^1_0} = \frac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}^2_0} = \frac{\tilde{\omega}^3}{\tilde{\omega}^3_0} = \frac{\vartheta^1}{\vartheta^1_0} = \frac{\vartheta^2}{\vartheta^2_0} = \frac{\chi^1}{\chi^1_0} = \frac{\chi^2}{\chi^2_0} = \dots = \frac{\chi^{\varrho-6}}{\chi^{\varrho-6}_0}\,.$$

En substituant ces équations dans les formules (5) on obtient les équations suivantes, qui représentent $H_{\varrho-3}$

$$\left\{\begin{aligned}
&\tilde\omega_0^1\,\vartheta^1-\vartheta_0^1\,\tilde\omega^1-a_l\,\chi_0^l\,\tilde\omega^2+\tilde\omega_0^2\,a_l\,\chi^l-a_{lm}\,\chi^l\,\chi^m=0,\\
&\tilde\omega_0^2\,\vartheta^2-\vartheta_0^2\,\tilde\omega^2-b_l\,\chi_0^l\,\tilde\omega^3+\tilde\omega_0^3\,b_l\,\chi^l-b_{lm}\,\chi^l\,\chi^m=0,\\
&\tilde\omega_0^3\,\vartheta^3-\vartheta_0^3\,\tilde\omega^3-c_l\,\chi_0^l\,\tilde\omega^1+\tilde\omega_0^1\,c_l\,\chi^l-c_{lm}\,\chi^l\,\chi^m=0.
\end{aligned}\right.$$

On peut tirer d'ici ϑ^1, ϑ^2, ϑ^3, en fonction des $\tilde\omega$ et des χ. En portant ces expressions dans $d\omega^1$, $d\omega^2$, $d\omega^3$ on obtient

$$\left\{\begin{aligned}
&\tilde\omega_0^1\,d\omega^1=a_l\,\chi_0^l\,[\tilde\omega^1\,\tilde\omega^2]+[(\tilde\omega_0^1\,\tilde\omega^2-\tilde\omega_0^2\,\tilde\omega^1),\,a_l\,\chi^l]+[\tilde\omega^1,\,a_{lm}\,\chi^l\,\chi_0^m]+\tilde\omega_0^1\,a_{lm}\,[\chi^l\,\chi^m],\\
&\tilde\omega_0^2\,d\omega^2=b_l\,\chi_0^l\,[\tilde\omega^1\,\tilde\omega^3]+[(\tilde\omega_0^2\,\tilde\omega^3-\tilde\omega_0^3\,\tilde\omega^2),\,b_l\,\chi^l]+[\tilde\omega^2,\,b_{lm}\,\chi^l\,\chi_0^m]+\tilde\omega_0^2\,b_{lm}\,[\chi^l\,\chi^m],\\
&\tilde\omega_0^3\,d\omega^3=c_l\,\chi_0^l\,[\tilde\omega^3\,\tilde\omega^1]+[(\tilde\omega_0^3\,\tilde\omega^1-\tilde\omega_0^1\,\tilde\omega^3),\,c_l\,\chi^l]+[\tilde\omega^3,\,c_{lm}\,\chi^l\,\chi_0^m]+\tilde\omega_0^3\,c_{lm}\,[\chi^l\,\chi^m].
\end{aligned}\right.$$

On aura les éléments caractéristiques pour $H_{\varrho-3}$ en égalant à zero les dérivées partielles des second membres des équations précédentes ; de sorte que ces $3(\varrho-6)$ dérivées partielles doivent se réduire à $\varrho-6$ seulement. Or, en prenant les dérivées par rapport aux χ on obtient les $3(\varrho-6)$ équations suivantes

$$\left\{\begin{aligned}
&\tilde\omega_0^1\,a_{1l}\,\chi^l-a_{1l}\,\chi_0^l\,\tilde\omega^1-a_1\,(\tilde\omega_0^1\,\tilde\omega^2-\tilde\omega_0^2\,\tilde\omega^1)=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\tilde\omega_0^1\,a_{\varrho-6\,l}\,\chi^l-a_{\varrho-6\,l}\,\chi^l\,\omega^1-a_{\varrho-6}\,(\tilde\omega_0^1\,\tilde\omega^2-\tilde\omega_0^2\,\tilde\omega^1)=0,\\
&\tilde\omega_0^2\,b_{1l}\,\chi^l-b_{1l}\,\chi_0^l\,\tilde\omega^2-b_1\,(\tilde\omega_0^2\,\tilde\omega^3-\tilde\omega_0^3\,\tilde\omega^2)=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\tilde\omega_0^2\,b_{\varrho-6\,l}\,\chi^l-b_{\varrho-6\,l}\,\chi^l\,\tilde\omega^2-b_{\varrho-6}\,(\tilde\omega_0^2\,\tilde\omega^3-\tilde\omega_0^3\,\tilde\omega^2)=0,\\
&\tilde\omega_0^3\,c_{1l}\,\chi^l-c_{1l}\,\chi_0^l\,\tilde\omega^3-c_1\,(\tilde\omega_0^3\,\tilde\omega^1-\tilde\omega_0^1\,\tilde\omega^3)=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\tilde\omega_0^3\,c_{\varrho-6\,l}\,\chi^l-c_{\varrho-6\,l}\,\chi_0^l\,\tilde\omega^3-c_{\varrho-6}\,(\tilde\omega_0^3\,\tilde\omega^1-\tilde\omega_0^1\,\tilde\omega^3)=0.
\end{aligned}\right.$$

Ces relations sont en nombre de $2(\varrho - 6)$ au moins, car en y faisant $\tilde{\omega}^1 = \tilde{\omega}^2 = \tilde{\omega}^3 = 0$ elles se réduisent à

$$\chi^1 = \chi^2 = \dots = \chi^{\varrho-6} = 0.$$

Donc toute relation linéaire entre les premiers membres des équation (4) doit avoir lieu entre les premiers membres des équations correspondantes (6) (divisées par $\tilde{\omega}_0^1$, $\tilde{\omega}_0^2$, ou $\tilde{\omega}_0^3$).

Prenons une relation linéaire entre les premiers membres des équations (4), soit

$$\begin{aligned}(7)\qquad & \lambda_1 a_{1l} \chi^l + \dots + \lambda_{\varrho-6} a_{\varrho-6l} \chi^l + \dots + \mu_1 b_{1l} \chi^l + \dots + \mu_{\varrho-6} b_{\varrho-6l} \chi^l + \dots \\ & \dots + \nu_1 c_{1l} \chi^l + \dots + \nu_{\varrho-6} c_{\varrho-6l} \chi^l = 0.\end{aligned}$$

Nous en déduirons pour les équations (6) trois relations linéaires correspondant aux coefficients de ω^1, ω^2, et ω^3 notamment

$$\left\{\begin{aligned} & -(\lambda_1 a_{1l} \chi^l + \dots + \lambda_{\varrho-6} a_{\varrho-6l} \chi^l) + \tilde{\omega}_0^2 (\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{\varrho-6} a_{\varrho-6}) - \\ & \qquad - \tilde{\omega}_0^3 (\nu_1 c_1 + \dots + \nu_{\varrho-6} c_{\varrho-6}) = 0, \\ & -(\mu_1 b_{1l} \chi^l + \dots + \mu_{\varrho-6} b_{\varrho-6l} \chi^l) + \tilde{\omega}_0^3 (\mu_1 b_1 + \dots + \mu_{\varrho-6} b_{\varrho-6}) - \\ & \qquad - \tilde{\omega}_0^1 (\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{\varrho-6} a_{\varrho-6}) = 0, \\ & -(\nu_1 c_{1l} \chi^l + \dots + \nu_{\varrho-6} c_{\varrho-6l} \chi^l) - \tilde{\omega}_0^1 (\nu_1 c_1 + \dots + \nu_{\varrho-6} c_{\varrho-6}) - \\ & \qquad - \tilde{\omega}_0^2 (\mu_1 b_1 + \dots + \mu_{\varrho-6} b_{\varrho-6}) = 0.\end{aligned}\right.$$

Ces relations doivent avoir lieu quels que soient $\tilde{\omega}_0^1$, $\tilde{\omega}_0^2$, $\tilde{\omega}_0^3$, $\chi_0^1, \dots, \chi_0^{\varrho-6}$. On en déduit d'ici les identitées suivantes:

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} & \lambda_1 a_{1l} \chi^l + \dots + \lambda_{\varrho-6} a_{\varrho-6l} \chi^l = 0, \\ & \mu_1 b_{1l} \chi^l + \dots + \mu_{\varrho-6} b_{\varrho-6l} \chi^l = 0, \\ & \nu_1 c_{1l} \chi^l + \dots + \nu_{\varrho-6} c_{\varrho-6} \chi^l = 0, \\ & \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{\varrho-6} a_{\varrho-6} = 0, \\ & \mu_1 b_1 + \dots + \mu_{\varrho-6} b_{\varrho-6} = 0, \\ & \nu_1 c_1 + \dots + \nu_{\varrho-6} c_{\varrho-6} = 0.\end{aligned}\right.$$

Donc chaque relation du type (7) entraine les relation de type (8). On peut donc partager les $2(\varrho - 6)$ relations (7) en trois groupes ; dans le premier groupe tous les μ, ν sont nuls, dans le second tous les λ, ν et dans le troisième tous les λ, μ.

§ 4. Soient 2α, 2β, 2γ, les rangs des formes extérieures quadratiques $a_{lm}[\chi^l \chi^m]$, $b_{lm}[\chi^l \chi^m]$, $c_{lm}[\chi^l \chi^m]$ $(l, m = 1, 2, \ldots, \varrho)$. Comme l'on sait bien [2 p. 37], dans ce cas on peut écrire

$$\begin{cases} a_{lm}[\chi^l \chi^m] = [\overset{\prime}{\chi}{}^1 \overset{\prime}{\chi}{}^2] + \cdots + [\overset{\prime}{\chi}{}^{2\alpha-1} \overset{\prime}{\chi}{}^{2\alpha}], \\ b_{lm}[\chi^l \chi^m] = [\overset{\prime\prime}{\chi}{}^1 \overset{\prime\prime}{\chi}{}^2] + \cdots + [\overset{\prime\prime}{\chi}{}^{2\beta-1} \overset{\prime\prime}{\chi}{}^{2\beta}], \\ c_{lm}[\chi^l \chi^m] = [\overset{\prime\prime\prime}{\chi}{}^1 \overset{\prime\prime\prime}{\chi}{}^2] + \cdots + [\overset{\prime\prime\prime}{\chi}{}^{2\gamma-1} \overset{\prime\prime\prime}{\chi}{}^{2\gamma}]. \end{cases}$$

Allors les relation linéaires du premier groupe de formules du type (8) sont en nombre de $\varrho - 6 - 2\alpha$, celles du second groupe en nombre de $\varrho - 6 - 2\beta$, enfin dans le troisième groupe il y a $\varrho - 6 - 2\gamma$ relation indépendantes. On a donc

$$2(\varrho - 6) = (\varrho - 6 - 2\alpha) + (\varrho - 6 - 2\beta) + (\varrho - 6 - 2\gamma)$$

ou encore

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \varrho - 6$$

d'où il résulte que les nouvelles formes χ', χ'', χ''' constituent un système de $\varrho - 6$ formes indépendantes.

Faisons encore les transformations suivantes

$$\begin{cases} \overset{\prime}{\chi}{}^1 = \overset{\prime}{\chi}{}^1 + a_2 \tilde{\omega}^2, \quad \overset{\prime}{\chi}{}^2 = \overset{\prime}{\chi}{}^2 + a_1 \tilde{\omega}^2, \quad \ldots, \quad \overset{\prime}{\chi}{}^{2\alpha} = \overset{\prime}{\chi}{}^{2\alpha} + a_{2\alpha-1} \tilde{\omega}^2, \\ \overset{\prime\prime}{\chi}{}^1 = \overset{\prime\prime}{\chi}{}^1 + b_2 \tilde{\omega}^3, \quad \overset{\prime\prime}{\chi}{}^2 = \overset{\prime\prime}{\chi}{}^2 + b_1 \tilde{\omega}^3, \quad \ldots, \quad \overset{\prime\prime}{\chi}{}^{2\beta} = \overset{\prime\prime}{\chi}{}^{2\beta} + b_{2\beta-1} \tilde{\omega}^3, \\ \overset{\prime\prime\prime}{\chi}{}^1 = \overset{\prime\prime\prime}{\chi}{}^1 + c_2 \tilde{\omega}^1, \quad \overset{\prime\prime\prime}{\chi}{}^2 = \overset{\prime\prime\prime}{\chi}{}^2 + c_1 \tilde{\omega}^1, \quad \ldots, \quad \overset{\prime\prime\prime}{\chi}{}^{2\gamma} = \overset{\prime\prime\prime}{\chi}{}^{2\gamma} + b_{2\gamma-1} \tilde{\omega}^1. \end{cases}$$

En introduisant ces formules dans les expressions (5) on obtient

$$\begin{cases} d\omega^1 = [\tilde{\omega}^1 \vartheta^1] + [\overset{\prime}{\chi}{}^1 \overset{\prime}{\chi}{}^2] + \cdots + [\overset{\prime}{\chi}{}^{2\alpha-1} \overset{\prime}{\chi}{}^{2\alpha}], \\ d\omega^2 = [\tilde{\omega}^2 \vartheta^2] + [\overset{\prime\prime}{\chi}{}^1 \overset{\prime\prime}{\chi}{}^2] + \cdots + \overset{\prime\prime}{\chi}{}^{2\beta-1} \overset{\prime\prime}{\chi}{}^{2\beta}], \\ d\omega^3 = [\tilde{\omega}^3 \vartheta^3] + [\overset{\prime\prime\prime}{\chi}{}^1 \overset{\prime\prime\prime}{\chi}{}^2] + \cdots + [\overset{\prime\prime\prime}{\chi}{}^{2\gamma-1} \overset{\prime\prime\prime}{\chi}{}^{2\gamma}]. \end{cases}$$

Enfin en faisant encore quelques transformations évidentes, on obtient les formules définitives

$$(9)\qquad \begin{cases} d\omega^1 = [\tilde{\omega}^1\, \tilde{\omega}^2] + \dots + [\tilde{\omega}^{2h-1}\, \tilde{\omega}^{2h}], \\ d\omega^2 = [\chi^1\, \chi^2] + \dots + [\chi^{2k-1}\, \chi^{2k}], \\ d\omega^3 = [\pi^1\, \pi^2] + \dots + [\pi^{r-1}\, \pi^{2r}] \end{cases}$$

$$(\varrho = 2h + 2k + 2r),$$

où évidémment les $\tilde{\omega}$ et les χ ne sont plus les mêmes que dans les formules précédentes. Ici les $\tilde{\omega}$, χ, π, constituent un système de ϱ expressions indépendantes.

§ 5. Passons maintenant au calcul des caractères du système (S) dont la fermeture est donnée par les formules (9). Nous pouvons supposer, sans affecter la généralitée que

$$h \leqq k \leqq r.$$

Le lieu des éléments intégraux en involution avec un élément linéaire intégral générique E_1 est l'élément polaire $H_{\varrho-3}$ dont les équations peuvent être supposées (voir § 2)

$$\tilde{\omega}^1 = \chi^1 = \pi^1 = 0.$$

Les conditions d'involution de deux éléments de $H_{\varrho-3}$ sont fournies par les trois expressions

$$\begin{cases} d\bar{\omega}^1 = [\tilde{\omega}^3 \tilde{\omega}^4] + \dots + [\tilde{\omega}^{2h-1}\, \tilde{\omega}^{2h}], \\ d\bar{\omega}^2 = [\chi^3\, \chi^4] + \dots + [\chi^{2k-1}\, \chi^{2k}], \\ d\bar{\omega}^3 = [\pi^3\, \pi^4] + \dots + [\pi^{2r-1}\, \pi^{2r}]. \end{cases}$$

Si $h = 1$, le lieu des éléments de $H_{\varrho-3}$ en involution avec un élément linéaire arbitraire de $H_{\varrho-3}$ est un élément à $\varrho - 5$ dimensions et l'on a donc

$$s_2 = 2.$$

Si au contraire $h > 1$, ce lieu est à $\varrho - 6$ dimensions ce qui donne

$$s_2 = 3.$$

En continuant de proche en proche on obtient

$$s_1 = s_2 = \dots = s_h = 3,$$

$$s_{h+1} = s_{h+2} = \dots = s_k = 2,$$

$$s_{k+1} = s_{k+2} = \dots = s_r = 1,$$

$$s_{r+1} = s_{r+2} = \dots = s_p = 0,$$

et la formule

$$\varrho = s_1 + s_2 + \dots + s_p + p$$

donne ici

$$2h + 2k + 2r = 3h + 2(k - h) + (r - k) + p$$

c'est-à-dire

$$p = h + k + r, \text{ donc } \varrho = 2p.$$

Donc, si un système de Pfaff (S) admettant les hypothèses *a*), *b*) et *c*) a comme fermeture un système de la forme (5) la différence entre le nombre des variables et le nombre des équations de (S) est égal au double de la dimension de l'intégrale générale.

La réciproque est aussi vraie, car, si $\beta = 2p$, l'élément polaire $H_{\varrho-3}$ admet un élément caractéristique à

$$2p - (\varrho - 3) = 3$$

dimensions au moins et le système est donc systatique.

§ 6. On voit donc que, au moins pour les systèmes (S) qui satisfont aux hypothèses *a*), *b*), et ayant la fermeture donnée par les formules (5), la généralisation de la notion de système systatique est consistente. Il se pose allors un problème que ce travail n'a pas résolu : Quels sont tous les systèmes de Pfaff de caractère $s_1 = 3$ systatiques qui jouissent aussi de la propriété que $\varrho = 2p$? Pour les trouver il faudrait connaitre une metode de réduction simultanée de trois formes quadratiques extérieures en six variables indépendantes (système au quel se réduit la fermeture (3) si on y fait $\chi^1 = \dots = \chi^{\varrho-6} = 0$), réduction de nature à simplifier ces formes.

BIBLIOGRAPHIE

1. CARTAN E., *Sur l'intégration de certains systèmes de Pfaff de caractère deux.* Bull. Soc. Math. France T. 28 (1901) p. 233-302.

2. W. SLEBODZINSKI., *Formes extérieures et leurs applications.* Vol. II Warszawa 1963.

3. I. MOISINI., *Sur les systèmes de Pfaff de caractère trois dont le système dérivé a moins de $s-3$ équations.* Analele ştiinţifice ale Universităţii « Al. I. Cuza » din Iaşi T. XIV (1968) p. 37-44.

4. I. MOISINI., *O teoremă privind sistemele Pfaff de caracter trei.* Analele ştiinţifice ale Universităţii « Al. I. Cuza » din Iaşi T. XIII (1967) p. 305-308.