ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LAMBERTO CATTABRIGA

Moltiplicatori di Fourier e teoremi di immersione per certi spazi funzionali

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 24, nº 1 (1970), p. 111-158

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1970_3_24_1_111_0>

MOLTIPLICATORI DI FOURIER E TEOREMI DI IMMERSIONE PER CERTI SPAZI FUNZIONALI (*)

LAMBERTO CATTABRIGA

Teoremi di immersione per spazi di funzioni definite sullo spazio euclideo n-dimensionale E^n sono stati recentemente ottenuti da vari Autori utilizzando teoremi su moltiplicatori di Fourier. Ricordiamo qui L. R. Volevič-B. P. Paneyah [20], P. I. Lizorkin [10], P. I. Lizorkin-S. M. Nikol'skiĭ [13], M. D. Ramanzanov [16]. Ci serviamo qui di alcuni risultati riguardanti certi moltiplicatori di Fourier per ottenere teoremi di immersione simili a quelli di S. L. Sobolev per un tipo di spazi di funzione generalizzate che contiene come caso particolare un tipo già introdotto in [14], [13], [3]. A differenza di [20] le funzioni usate qui come moltiplicatori di Fourier non sono moltiplicatori nello spazio $\mathcal{S}$ delle funzioni indefinitamente differenziabili in E^n ed ivi a decrescenza rapida, poichè a tali funzioni si consente di non essere indefinitamente differenziabili in tutto E^n. Dai teoremi di immersione provati si traggono formule di maggiorazione per norme di funzioni ordinarie e di loro derivate mediante somme di norme di derivate assegnate alle quali in certi casi si aggiunge una norma della funzione stessa.

I risultati principali, esposti nel n. 4, completano ed estendono i risultati presentati in [3] e [4]. Lo spazio funzionale indicato con $L_p^{\mathfrak{P}}$ coincide con quello definito in [13] e rappresenta una generalizzazione degli spazi L_p^r studiati da vari Autori fra i quali ricordiamo A. P. Calderón [2], P. I. Lizorkin [10], [11] (1). I corollari 4.3 e 4.4 contribuiscono anche a rispondere

Pervenuto alla Redazione il 26 Novembre 1969.

(*) Lavoro eseguito con contributo del C. N. R.

(1) Rinviamo ad [1] per una ampia bibliografia su questi spazi. Si veda anche il cap. 9 di [15].

ad un problema posto da V. P. Il'in [9]. Alcuni risultati del tipo di quelli qui provati sono stati ottenuti anche da R. S. Strichartz [18]. Essi riguardano funzioni definite in un dominio di E^n; nel caso in cui tale dominio coincida con E^n essi possono dedursi da quelli qui provati per lo spazio $L_p^{\mathbb{P}}$.

Il n. 3 è dedicato allo studio di certe funzioni e delle loro trasformate (inverse) di Fourier. Utilizzando un teorema di Lizorkin [12] si prova che queste funzioni sono moltiplicatori di tipo (p, q) per precisati p e q; si prova inoltre che le loro trasformate (inverse) di Fourier hanno certe potenze integrabili su E^n e si valutano certe norme di loro incrementi, fondandosi anche su un risultato di Calderòn [2]. Con l'aiuto dei risultati del n. 3 si provano quelli del n. 4.

Il n. 2 contiene alcuni teoremi riguardanti moltiplicatori di tipo (p,q) del tipo di quelli studiati nel n. 3. Il n. 1 si occupa di certi spazi di funzioni fondamentali e generalizzate già definiti e studiati in [10] nonchè di alcune loro relazioni con altri spazi di funzioni e di distribuzioni. Una parte dei risultati dei nn. 1 e 2 è stata esposta in [5].

1. Con E^n indichiamo lo spazio euclideo reale n-dimensionale, di elementi $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Sia $|\xi|^2 = \sum_1^n{}_j \xi_j^2$, $\delta = \min\{\min_j |\xi_j|, 1\}$ ed $A = \left\{\xi \in E^n; \prod_1^n{}_j \xi_j = 0\right\}$. Per ogni $\xi \in E^n \setminus A$ ed ogni intero non negativo k poniamo

$$M_k(\xi) = \max\{(1 + |\xi|^2)^{k/2}, \delta^{-k}\} \text{ (}^2\text{)}.$$

Tutte le funzioni $M_k(\xi)$ così definite sono continue su $E^n \setminus A$ ed ivi è $1 = M_0(\xi) < M_1(\xi) < \dots < M_k(\xi) < M_{k+1}(\xi) < \dots$.

Sia $\mathcal{S}$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni a valori complessi indefinitamente differenziabili su E^n ed ivi a decrescenza rapida e Ψ il sottospazio di $\mathcal{S}$ costituito da tutte le funzioni $\psi \in \mathcal{S}$ nulle con tutte le loro derivate su A e tali che risultino limitate su $E^n \setminus A$ tutte le funzioni

$$M_k(\xi)\, D^{\mathbf{l}}\, \psi(\xi) \qquad k = 0, 1, \dots$$

ove $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$, $l_j = 0, 1, \dots$ per $j = 1, \dots, n$ (3), $D^{\mathbf{l}} = \partial^{|\mathbf{l}|}/\partial\xi_1^{l_1} \dots \partial\xi_n^{l_n}$, $|\mathbf{l}| = l_1 + \dots + l_n$. Lo spazio Ψ con la topologia generata dalla successione di

---

(2) Si potrebbe completare la definizione delle funzioni $M_k(\xi)$ su tutto E^n ponendole eguali a $+\infty$ su A.

(3) Diremo anche che $\mathbf{l}$ è un multi-indice di interi non negativi.

norme

$$\| \psi \|_k = \sup_{|l| \leq k} \sup_{\xi \in E^n \setminus A} M_k(\xi) \, | D^l \Psi(\xi) |, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

è uno spazio numerabilmente normato e completo ed uno spazio fondamentale nel senso di I. M. Gel'fand e G. E. Šilov (4).

LEMMA 1.1. *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *risulta* $M_k(\xi) > \varepsilon M_{k+1}(\xi)$, $k = 0, 1, \ldots$ *per ogni* $\xi \in E^n \setminus A$ *che verifichi una almeno delle* $| \xi | > \varepsilon^{-k}$, $M_k(\xi) > \varepsilon^{-k}$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $\xi \in E^n \setminus A$ è $M_{k+1}(\xi) = [M_k(\xi)]^{1+1/k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Se $\xi \in E^n \setminus A$ è tale che $M_k(\xi) > \varepsilon^{-k}$ è quindi

$$M_k(\xi) < \varepsilon M_{k+1}(\xi) \qquad k = 1, 2, \ldots;$$

se $| \xi | > \varepsilon^{-k}$ è

$$M_k(\xi) \geq (1 + | \xi |^2)^{k/2} \geq 1 + | \xi |^k > \varepsilon^{-k} \qquad k = 2, \ldots$$

e

$$M_1(\xi) \geq | \xi | > \varepsilon^{-1}$$

e quindi ancora $M_k(\xi) < \varepsilon M_{k+1}(\xi)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Per $k = 0$ e $\xi \in E^n \setminus A$ tale che $| \xi | > \varepsilon^{-1}$ risulta $M_0(\xi) = 1 < \varepsilon M_1(\xi)$. Nessuno degli $\xi \in E^n \setminus A$ soddisfa alla $M_0(\xi) > \varepsilon^{-1}$ se $\varepsilon \in]0, 1[$, mentre tutti gli $\xi \in E^n \setminus A$ soddisfano a tale disuguaglianza se $\varepsilon > 1$. In quest'ultimo caso è $M_0(\xi) < \varepsilon M_1(\xi)$ per ogni $\xi \in E^n \setminus A$.

Questo lemma, per noti teoremi sugli spazi numerabilmente normati (5), assicura che

COROLLARIO 1.1. *Lo spazio* Ψ *è perfetto. Le funzioni a supporto compatto appartenenti a* Ψ *ne costituiscono un sottospazio denso.*

Per $\psi \in \Psi$ poniamo

$$\widehat{\psi}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{E^n} e^{i \langle x, \xi \rangle} \, \psi(\xi) \, d\xi$$

ove $x \in E^n$ ed $\langle x, \xi \rangle = \sum_{1}^{n} {}_j \, x_j \xi_j$. Indichiamo con Φ il sottospazio di $\mathcal{S}$ co-

(4) Si veda [8] cap. II, § 1

(5) Si veda [8] cap. II, § 2.

stituito dalle $\varphi \in \mathcal{S}$ tali che $\varphi = \widehat{\psi}$, $\psi \in \Psi$; è allora

$$\psi(\xi) = \int_{E^n} e^{-i\langle x, \xi\rangle} \varphi(x)\, dx = \widetilde{\varphi}(\xi),\ \xi \in E^n .$$

Scriveremo anche $\widetilde{\varphi} = \mathcal{F}\varphi$ e $\widehat{\psi} = \mathcal{F}^{-1}\psi$, indicando con $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{F}^{-1}$ la trasformazione di Fourier e la sua inversa. L'applicazione $\psi \longrightarrow \mathcal{F}^{-1}\psi$ è un isomorfismo algebrico di Ψ su Φ. In Φ consideriamo come topologia quella che resta definita scegliendo come intorni dell'origine, le immagini degli intorni dell'origine in Ψ rispetto all'applicazione $\mathcal{F}^{-1}$. Tale topologia è la più fine fra le topologie in Φ, compatibili con la struttura di spazio vettoriale, rispetto alle quali l'isomorfismo $\psi \longrightarrow \mathcal{F}^{-1}\psi$ riesce continuo. L'applicazione $\mathcal{F}$ è anch'essa un isomorfismo di Φ su Ψ, rispetto alla loro struttura di spazi vettoriali topologici. Anche Φ è quindi uno spazio numerabilmente normato completo e perfetto ed uno spazio fondamentale. Per $\varphi \in \Phi$ porremo quindi

$$\| \varphi \|_k = \| \widetilde{\varphi} \|_k , \qquad k = 0, 1, \dots .$$

La topologia di Ψ è più fine di quella indotta in esso da $\mathcal{S}$, poichè qualunque sia $k = 0, 1, \dots$ è $M_k(\xi) \geq (1 + |\xi|^2)^{k/2}$ per ogni $\xi \in E^n \setminus A$. Anche la topologia introdotta ora in Φ è quindi più fine di quella in esso indotta da $\mathcal{S}$. La restrizione a Φ od a Ψ di ogni funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}$ è quindi un funzionale lineare continuo su Φ o rispettivamente su Ψ.

Da P. I. Lizorkin [10] sono stati provati i seguenti risultati sugli spazi Φ e Ψ

LEMMA 1.2. *La funzione* $(i\xi)^{\mathbf{r}} = \prod_1^n{}_j (i\xi_j)^{r_j}$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, r_j *reali qualunque, è un moltiplicatore in* Ψ, *ossia l'applicazione* $\psi \longrightarrow (i\xi)^{\mathbf{r}}\psi$ *è lineare e continua da* Ψ *in sé.*

LEMMA 1.3. *Per ogni* $\varphi \in \Phi$ *ed ogni* $\mathbf{l} = (l_1, \dots l_n)$, l_j *interi non negativi, è*

$$\int_{E^m} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n} \varphi(x)\, dx' = 0,$$

ove E^m *è un qualunque sottospazio coordinato di* E^n *di dimensione* $m \leq n$ *e* dx' *è l'elemento di volume in esso.*

LEMMA 1.4. *L'applicazione $\varphi \to \tau_h \varphi = \varphi(x+h)$, $h \in E^n$, è lineare e continua da Φ in sè.*

Con $\mathcal{D}_{L_{p,\alpha}}$, $\alpha \geq 0$, $1 \leq p < \infty$, indichiamo lo spazio vettoriale (sul corpo complesso) costituito da tutte le funzioni ζ a valori complessi indefinitamente differenziabili su E^n e tali che

$$\| D^{\mathbf{l}} \zeta \|_{L_p(E^n), \alpha} = \left\{ \int_{E^n} | D^{\mathbf{l}} \zeta |^p (1 + |x|)^{\alpha p} \, dx \right\}^{1/p} < \infty$$

per ogni $\mathbf{l} = (l_1, \dots l_n)$, l_j interi non negativi. Con la topologia definita dalle norme

$$\sup_{|\mathbf{l}| \leq m} \| D^{\mathbf{l}} \zeta \|_{L_p(E^n), \alpha}, \qquad m = 0, 1, \dots$$

$\mathcal{D}_{L_{p,\alpha}}$ è uno spazio numerabilmente normato e completo (6). Scriveremo $\mathcal{D}_{L_p}$ anzichè $\mathcal{D}_{L_{p},0}$. Si prova facilmente (7) che

LEMMA 1.5. $\mathcal{C}_0^\infty(E^n)$ (8) *(e quindi $\mathcal{S}$) è denso in ciascuno dei $\mathcal{D}_{L_{p},\alpha}$.*
Per il seguito è fondamentale il seguente

LEMMA 1.6. *Se $\varphi \in \mathcal{S}$, esiste una successione di elementi di Φ convergente φ secondo tutte le topologie indotte in $\mathcal{S}$ da ciascuno dei $\mathcal{D}_{L_{p},\alpha}$ con $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1 - 1/p = 1/p'$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mu \in \mathcal{C}_0^\infty(E^1)$ eguale ad uno per $|\tau| \leq 1$, nulla per $|\tau| \geq 2$ e $\mu(-\tau) = \mu(\tau)$. Sia poi $\mu_\varepsilon(\tau) = \mu(\tau\, \varepsilon^{-1})$ e $\lambda_\varepsilon(\xi) = \prod_1^n{}_j \,[1 - \mu_\varepsilon(\xi_j)]$, $\varepsilon > 0$. È

$$\Lambda_\varepsilon = \operatorname{supp} \lambda_\varepsilon \subset \{\xi \in E^n ; |\xi_j| \geq \varepsilon, j = 1, \dots, n\} \subset E^n \setminus A.$$

In Λ_ε è quindi $\delta = 1$ se $\varepsilon \geq 1$ e $\delta \geq \varepsilon$ se $\varepsilon < 1$. Qualunque sia k intero non negativo avremo dunque

$$M_k(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{k/2} \qquad \forall\, \xi \in \Lambda_\varepsilon$$

---

(6) Esso è infatti uno spazio del tipo $K_p\{M_m\}$ studiato in [7], cap. 3.

(7) Basta ripetere con opportune semplici varianti la dimostrazione del teorema 49, p. 86, di [7].

(8) Con $\mathcal{C}_0^\infty(E^n)$ indichiamo lo spazio di tutte le funzioni indefinitamente differenziabili su E^n ed ivi a supporto compatto.

se $\varepsilon \geq 1$, mentre se $\varepsilon < 1$ sarà

$$M_k(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{k/2} \qquad \forall\, \xi \in \Lambda_\varepsilon,\ |\xi| \geq (\varepsilon^{-2} - 1)^{1/2}$$

$$M_k(\xi) \leq \varepsilon^{-k} \qquad \forall\, \xi \in \Lambda_\varepsilon,\ |\xi| < (\varepsilon^{-2} - 1)^{1/2}.$$

Se $\varphi \in \mathcal{S}$ è $\lambda_\varepsilon \widetilde{\varphi} \in \mathcal{S}$, poichè λ_ε è una funzione indefinitamente differenziabile a crescenza lenta, e supp $\lambda_\varepsilon \widetilde{\varphi} \subset \Lambda_\varepsilon$ e quindi se $\varepsilon \geq 1$ ed $\mathbf{l}$ un multi-indice di interi non negativi

$$\sup_{\xi \in E^n \setminus \Lambda} M_k(\xi)\, |D^{\mathbf{l}}(\lambda_\varepsilon \widetilde{\varphi})(\xi)| = \sup_{\xi \in \Lambda_\varepsilon} M_k(\xi)\, |D^{\mathbf{l}}(\lambda_\varepsilon \widetilde{\varphi})(\xi)| =$$

$$= \sup_{\xi \in E^n} (1 + |\xi|^2)^{k/2}\, |D^{\mathbf{l}}(\lambda_\varepsilon \widetilde{\varphi})(\xi)| < \infty$$

e se $\varepsilon < 1$

$$\sup_{\xi \in E^n \setminus \Lambda} M_k(\xi)\, |D^{\mathbf{l}}(\lambda_\varepsilon \widetilde{\varphi})(\xi)| = \sup_{\xi \in \Lambda_\varepsilon} M_k(\xi)\, |D^{\mathbf{l}}(\lambda_\varepsilon \widetilde{\varphi})(\xi)| \leq$$

$$\leq \max \left\{ \sup_{|\xi| \geq (\varepsilon^{-2}-1)^{1/2}} (1 + |\xi|^2)^{k/2}\, |D^{\mathbf{l}}(\lambda_\varepsilon \widetilde{\varphi})(\xi)|, \right.$$

$$\left. \varepsilon^{-k} \sup_{|\xi| < (\varepsilon^{-2}-1)^{1/2}} |D^{\mathbf{l}}(\lambda_\varepsilon \widetilde{\varphi})(\xi)| \right\} < \infty .$$

Qualunque sia $\varepsilon > 0$ è dunque $\lambda_\varepsilon \widetilde{\varphi} \in \Psi$.

Sia e un sottoinsieme dell'insieme $\{1, \dots, n\}$. Poniamo $x = (x', x'')$ con $x' = (x_{k_1}, \dots, x_{k_r}) \in E'$, $x'' = (x_{h_1}, \dots, x_{h_s}) \in E''$, $k_1, \dots, k_r \in e$, $h_1, \dots, h_s \in \{1, \dots, n\} \setminus e$ (⁹).

È

$$\lambda_\varepsilon \widetilde{\varphi} - \widetilde{\varphi} = \sum_{e \neq \emptyset} (-1)^{\nu(e)} \widetilde{\varphi} \prod_{j \in e} \mu_\varepsilon(\xi_j)$$

con $\nu(e)$ numero degli elementi di e, e quindi

$$\mathcal{F}^{-1}(\lambda_\varepsilon \widetilde{\varphi})(x) - \varphi(x) = \sum_{e \neq \emptyset} (-1)^{\nu(e)} \varphi * [\mathop{\times}_{j \notin e} \delta(x_j) \mathop{\times}_{j \in e} \widehat{\mu_\varepsilon}(x_j)] =$$

$$= \sum_{e \neq \emptyset} (-1)^{\nu(e)} \int_{E'} \varphi(x' - y', x'') \prod_{j \in e} \widehat{\mu}_\varepsilon(y_j)\, dy'$$

(⁹) Se $e = \emptyset$ si intende che sia $E'' = E^n$ e per $e = \{1, \dots, n\}$ che $E' = E^n$.

e per ogni multi-indice $\mathbf{l}$ di interi non negativi

$$D^{\mathbf{l}} \mathcal{F}^{-1}(\lambda_\varepsilon \widetilde{\varphi})(x) - D^{\mathbf{l}} \varphi(x) = \sum_{e \neq \emptyset} (-1)^{\nu(e)} \int_{E'} D^{\mathbf{l}} \varphi(x' - y', x'') \prod_{j \in e} \widehat{\mu}_\varepsilon(y_j)\, dy'.$$

Osserviamo che per $x \in E^n$ ed $\alpha \geq 0$ è

$$C'(1 + |x|)^\alpha \leq (1 + |x|^2)^{\alpha/2} \leq C''(1 + |x|)^\alpha$$

con C' e C'' dipendenti soltanto da α,

$$1 + |x|^2 \leq (1 + |x'|^2)(1 + |x''|^2),\ 1 + |x'|^2 \leq \prod_{j \in e}(1 + x_j^2),\ x' \in E',\ x'' \in E''$$

ed inoltre

$$1 + |x'|^2 \leq 2(1 + |y'|^2)(1 + |x' - y'|^2),\ x', y' \in E'.$$

Risulta dunque per ogni multi-indice $\mathbf{l}$ di interi non negativi

$$|D^{\mathbf{l}} \mathcal{F}^{-1}(\lambda_\varepsilon \widetilde{\varphi})(x) - D^{\mathbf{l}} \varphi(x)|(1 + |x|)^\alpha \leq$$

$$\leq C \sum_{e \neq \emptyset} (1 + |x''|^2)^{\alpha/2} \int_{E'} (1 + |x' - y'|^2)^{\alpha/2} |D^{\mathbf{l}} \varphi(x' - y', x'')| \prod_{j \in e} (1 + y_j^2)^{\alpha/2} \widehat{\mu}_\varepsilon(y_j)\, dy' =$$

$$= C \sum_{e \neq \emptyset} \varphi_{\varepsilon, e}(x', x'')\ [10].$$

Tenuto conto che

$$\|f\|^p_{L_p(E^n)} = \int_{E^n} |f(x)|^p\, dx = \int_{E''} \|f(\cdot, x'')\|^p_{L_p(E')}\, dx''$$

e che

$$\|\varphi_{\varepsilon, e}(\cdot, x'')\|_{L_p(E')} \leq (1 + |x''|^2)^{\alpha/2} \|D^{\mathbf{l}} \varphi(\cdot, x'')\|_{L_1(E'), \alpha} \|\widehat{\mu}_\varepsilon\|^{\nu(e)}_{L_p(E^1), \alpha},$$

riesce

$$\|D^{\mathbf{l}} \mathcal{F}^{-1}(\lambda_\varepsilon \widetilde{\varphi}) - D^{\mathbf{l}} \widetilde{\varphi}\|_{L_p(E^n), \alpha} \leq C \sum_{e \neq \emptyset} \|\varphi_{\varepsilon, e}\|_{L_p(E^n)} \leq$$

$$\leq C \sum_{e \neq \emptyset} \|\widehat{\mu}_\varepsilon\|^{\nu(e)}_{L_p(E^1), \alpha} \|\, \|D^{\mathbf{l}} \varphi(\cdot, x'')\|_{L_1(E'), \alpha} \|_{L_p(E''), \alpha}.$$

---

[10] Qui e nel seguito C e così $C', C'', \ldots, c, c', c'', \ldots$ indicano costanti positive il cui valore cambierà in generale da formula a formula.

D'altra parte è

$$\widehat{\mu}_\varepsilon(t) = \pi^{-1}\, \varepsilon \int_0^2 \cos t\varepsilon\tau\, \mu(\tau)\, d\tau,$$

$$t\, \widehat{\mu}_\varepsilon(t) = -\, \pi^{-1} \int_0^2 \mu'(\tau) \operatorname{sen} t\varepsilon\tau\, d\tau, \qquad t \in E^1,$$

e quindi

$$|\widehat{\mu}_\varepsilon(t)| \leq C\, \varepsilon, \qquad |t\, \widehat{\mu}_\varepsilon(t)| \leq C$$

da cui

$$|\widehat{\mu}_\varepsilon(t)| \leq 2\, C\, (\varepsilon^{-1} + |t|)^{-1} = C'\, \varepsilon\, (1 + \varepsilon\, |t|)^{-1}, \qquad t \in E^1$$

con C e C' indipendenti da ε. Se $0 \leq \alpha < 1/p'$ avremo quindi

$$\|\widehat{\mu}_\varepsilon\|_{L_p(E^1),\, \alpha} \leq C' \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^p\, (1 + \varepsilon\, |t|)^{-p}\, (1 + t^2)^{\alpha p/2}\, dt \right\}^{1/p}.$$

Se ora si osserva che per $\varepsilon \leq 1$

$$\varepsilon^p (1 + \varepsilon\, |t|)^{-p}\, (1 + t^2)^{\alpha p/2} \leq (1 + |t|)^{-p}\, (1 + t^2)^{\alpha p/2}$$

e che la funzione a secondo membro è integrabile su E^1 se $\alpha < 1/p'$, si conclude che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\widehat{\mu}_\varepsilon\|_{L_p(E^1), \alpha} = 0.$$

Per ogni multi-indice $\mathbf{l}$ di interi non negativi e $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1/p'$ è dunque

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| D^{\mathbf{l}}\, \mathcal{F}^{-1} (\lambda_\varepsilon\, \widetilde{\varphi}) - D^{\mathbf{l}}\, \varphi \|_{L_p(E^n),\, \alpha} = 0.$$

Il lemma è così provato ricordando che $\mathcal{F}^{-1}(\lambda_\varepsilon\, \widetilde{\varphi}) \in \Phi$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Dai lemmi 1.5 e 1.6 discende il seguente corollario

COROLLARIO 1.2. *Φ è denso di ogni $\mathcal{D}_{L_p,\, \alpha}$ $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1/p'$.*

Con $L_p(E^n) = L_p$, $1 \leq p < \infty$, indichiamo come è d'uso, lo spazio delle classi delle funzioni a valori complessi aventi p-esima potenza integrabile su E^n, con la norma $\|f\|_{L_p(E^n)} = \left\{ \int_{E^n} |f(x)|^p\, dx \right\}^{1/p}$.

COROLLARIO 1.3. *Φ è denso in ogni $L_p(E^n)$, α $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1/p'$.*

LEMMA 1.7. *$\zeta \in \mathcal{D}_{L_{p,\alpha}}$, $\alpha \geq 0$, $1 \leq p < \infty$, se e soltanto se $\zeta(1 + |x|^2)^{\alpha/2} \in \mathcal{D}_{L_p}$; l'applicazione $\zeta \longrightarrow \zeta(1 + |x|^2)^{\alpha/2}$ da $\mathcal{D}_{L_{p,\alpha}}$ su $\mathcal{D}_{L_p}$ è lineare e continua con la sua inversa .*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\mathbf{l}$ e $\mathbf{k}$ multi-indici di interi non negativi. È

$$D^{\mathbf{l}}[\zeta(x)(1 + |x|^2)^{\alpha/2}] = \sum_{|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{l}|} \binom{\mathbf{l}}{\mathbf{k}} D^{\mathbf{l}-\mathbf{k}} \zeta \, D^{\mathbf{k}}(1 + |x|^2)^{\alpha/2} \tag{1.1}$$

con

$$|D^{\mathbf{k}}(1 + |x|^2)^{\alpha/2}| \leq C(\mathbf{k})(1 + |x|^2)^{\alpha/2}. \tag{1.2}$$

Se $\zeta \in \mathcal{D}_{L_{p,\alpha}}$ per (1.2) è

$$\| D^{\mathbf{l}-\mathbf{k}} \zeta \, D^{\mathbf{k}}(1 + |x|^2)^{\alpha/2} \|_{L_p} \leq C(\mathbf{k}) \| D^{\mathbf{l}-\mathbf{k}} \zeta \|_{L_{p,\alpha}}$$

con $|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{l}|$. Dalla (1.1) segue allora

$$\| D^{\mathbf{l}}[\zeta(1 + |x|^2)^{\alpha/2}] \|_{L_p} \leq C \sup_{|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{l}|} \| D^{\mathbf{k}} \zeta \|_{L_{p,\alpha}}.$$

Viceversa sia $\zeta(1 + |x|^2)^{\alpha/2} \in \mathcal{D}_{L_p}$. Dalla (1.1) con $|\mathbf{l}| = 1$, tenuto conto della (1.2) segue che

$$\| D^{\mathbf{l}} \zeta \|_{L_{p,\alpha}} \leq C \left\{ \int_{E^n} |D^{\mathbf{l}} \zeta|^p (1 + |x|^2)^{\alpha p/2} dx \right\}^{1/p} \leq C' \sup_{|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{l}|} \| D^{\mathbf{k}}[\zeta \cdot (1 + |x|^2)^{\alpha/2}] \|_{L_p}.$$

La stessa maggiorazione si prova per ogni $\mathbf{l}$ procedendo per induzione e utilizzando le (1.1) e (1.2).

Il seguente corollario è conseguenza del lemma ora provato e del fatto che $\mathcal{D}_{L_p} \subset \mathcal{D}_{L_q}$, $p < q$, e l'immersione di $\mathcal{D}_{L_p}$ in $\mathcal{D}_{L_q}$ è continua ([11]).

COROLLARIO 1.4. *Se $1 \leq p < q < \infty$ è $\mathcal{D}_{L_{p,\alpha}} \subset \mathcal{D}_{L_{q,\alpha}}$ e l'immersione di $\mathcal{D}_{L_{p,\alpha}}$ in $\mathcal{D}_{L_{q,\alpha}}$ è continua.*

LEMMA 1.8. *Se $0 \leq \beta < \alpha$ è continua l'immersione di $\mathcal{D}_{L_{p,\alpha}}$ in $\mathcal{D}_{L_{q,\beta}}$ per ogni $q \in]p/[p(\alpha - \beta) + 1], \infty[\cap [1, \infty[$.*

([11]) Si veda [17] p. 56.

DIMOSTRAZIONE. Per $q \geq p$ il lemma è immediata conseguenza del corollario 1.4 e del fatto che è continua l'immersione di $\mathcal{D}_{L_q, \alpha}$ in $\mathcal{D}_{L_q, \beta}$ se $\beta < \alpha$. Per $1 \leq q < p$ è $| D^l \zeta |^q (1 + |x|)^{\alpha q} \in L_{p/q}$ e se $q > p/[p(\alpha - \beta) + 1]$ è $(\alpha - \beta) q (p/q)' = (\alpha - \beta) q p/(p - q) > 1$ onde $(1 + |x|)^{(\beta - \alpha) q} \in L_{(p/q)'}$. Dalla

$$| \mathcal{D}^l \zeta |^q (1 + |x|)^{\beta q} = | D^l \zeta |^q (1 + |x|)^{\alpha q} (1 + |x|)^{(\beta - \alpha) q}$$

segue allora l'asserto applicando la diseguaglianza di Hölder.

COROLLARIO 1.5. *Se* $\alpha, \beta \in [0, 1[, \beta < \alpha$ *è*

$$\bigcap_{(1-\alpha)^{-1} < p < \infty} \mathcal{D}_{L_p, \alpha} \subset \bigcap_{(1-\beta)^{-1} < q < \infty} \mathcal{D}_{L_q, \beta} .$$

DIMOSTRAZIONE. Se $p > (1 - \alpha)^{-1}$ è $p/[p(\alpha - \beta) + 1] > (1 - \beta)^{-1}$ e per il lemma precedente se $p > (1 - \alpha)^{-1}$

$$\mathcal{D}_{L_p, \alpha} \subset \bigcap_{p/[p(\alpha-\beta)+1] < q < \infty} \mathcal{D}_{L_q, \beta} .$$

Facendo l'intersezione di tutti i $\mathcal{D}_{L_p, \alpha}$ con $p > (1 - \alpha)^{-1}$ e tenuto conto che $p/[p(\alpha - \beta) + 1]$ tende a $(1 - \beta)^{-1}$ per p tendente a $(1 - \alpha)^{-1}$ si ottiene il risultato enunciato.

Con Φ' e Ψ' indichiamo i duali di Φ e Ψ rispettivamente. In essi la convergenza debole e la convergenza forte delle successioni coincidono, essendo Φ e Ψ spazi perfetti. Con $\langle f, \varphi \rangle$, $\langle g, \psi \rangle$, $f \in \Phi'$, $g \in \Psi'$, $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ indicheremo i valori di f e g in φ e ψ rispettivamente. Converremo che i prodotti λf, λg con λ complesso siano definiti dalle

$$\langle \lambda f, \varphi \rangle = \langle f, \bar{\lambda} \varphi \rangle = \bar{\lambda} \langle f, \varphi \rangle \quad \text{e} \quad \langle \lambda g, \psi \rangle = \langle g, \bar{\lambda} \psi \rangle = \bar{\lambda} \langle g, \psi \rangle$$

ove $\bar{\lambda}$ indica il complesso coniugato di λ. La trasformata di Fourier di $f \in \Phi'$ si definisce come l'elemento $\tilde{f} \in \Psi'$ tale che

$$\langle \tilde{f}, \tilde{\varphi} \rangle = (2\pi)^n \langle f, \varphi \rangle \qquad \forall\ \varphi \in \Phi,$$

analogamente se $g \in \Psi'$, $\hat{g} = \mathcal{F}^{-1} g$ è l'elemento di Φ' definito da

$$\langle g, \psi \rangle = (2\pi)^n \langle \hat{g}, \hat{\psi} \rangle \qquad \forall\ \psi \in \Psi.$$

Indichiamo con $\mathcal{D}'_{L_p,\alpha}$ il duale di $\mathcal{D}_{L_{p'},\alpha}$, $p' = p/(p-1)$, $1 < p \leq \infty$. Secondo un teorema di A. Friedman [12] ogni $f \in \mathcal{D}'_{L_p,\alpha}$ si può rappresentare nella forma

$$(1.2') \qquad f = \sum_{|\mathfrak{l}| \leq m} D^{\mathfrak{l}} [(1 + |x|)^{\alpha p'} f_{\mathfrak{l}}(x)], \quad m \text{ intero non negativo,}$$

ove le $f_{\mathfrak{l}}$ sono funzioni misurabili tali che

$$\int_{E^n} (1 + |x|)^{\alpha p'} |f_{\mathfrak{l}}(x)|^p \, dx < \infty.$$

È $(1 + |x|)^{\alpha p'} f_{\mathfrak{l}} = (1 + |x|)^{\alpha} (1 + |x|)^{\alpha p'/p} f_{\mathfrak{l}}$. Dunque ogni $f \in \mathcal{D}'_{L_p,\alpha}$ si può rappresentare come somma di derivate di prodotti di funzioni di p-esima potenza integrabile su E^n per $(1 + |x|)^{\alpha}$.

Dai corollari 1.2 ed 1.3 tenuto conto che le immersioni di Φ in ciascuno dei $\mathcal{D}_{L_p,\alpha}$ e degli L_p sono continue, discende il

COROLLARIO 1.6. *Ciascuno degli spazi* $\mathcal{D}'_{L_p,\alpha}$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1/p$, *è isomorfo, rispetto alla sua struttura di spazio vettoriale, a quel sottospazio di* Φ' *costituito dagli elementi di* Φ' *continui in* Φ *rispetto alla topologia indotta in questo da* $\mathcal{D}_{L_{p'},\alpha}$. *La topologia di ciascuno degli spazi* $\mathcal{D}'_{L_p,\alpha}$ *indicati è più fine di quella indotta dalla topologia di* Φ' *nei sottospazi ad essi isomorfi. Un risultato analogo vale per tutti gli spazi* L_p, $1 < p < \infty$. *Il sottospazio di* Φ' *isomorfo ad* L_p *lo indicheremo con* Φ'_p.

COROLLARIO 1.7. *Se* $0 \leq \alpha \leq \beta$, $\mathcal{D}'_{L_p,\alpha}$ *si può considerare come sottospazio vettoriale di* $\mathcal{D}'_{L_q,\beta}$, *per* $p^{-1} \in [0, 1[\cap]\alpha - \beta + q^{-1}, 1[$, *avente in tali* $\mathcal{D}'_{L_q,\beta}$ *immersione continua.*

DIMOSTRAZIONE. Per il corollario 1.4 ed il lemma 1.8 è continua l'immersione di $\mathcal{D}_{L_{q'},\beta}$ in $\mathcal{D}_{L_{p'},\alpha}$ per $p' \in]q'/[q'(\beta - \alpha) + 1], \infty[\cap [1, \infty[$. Inoltre $\mathcal{D}_{L_{q'},\beta}$ è denso in $\mathcal{D}_{L_{p'},\alpha}$ poichè $\mathcal{C}_0^{\infty}(E^n)$ è contenuto in $\mathcal{D}_{L_{q'},\beta}$ e denso in $\mathcal{D}_{L_{p'},\alpha}$. Ciò basta a provare il corollario.

LEMMA 1.9. $\mathcal{N} = \bigcup_{0 \leq \beta < 1} \bigcup_{1 < q < \beta^{-1}} \mathcal{D}'_{L_q,\beta}$ *è isomorfo ad un sottospazio vettoriale di* Φ'.

---

[12] Si veda [17] p. 86, teorema 48.

DIMOSTRAZIONE. Supposto $0 \leq \alpha < \beta < 1$ e $q < \beta^{-1}$, il corollario 1.7 consente di affermare che

$$\bigcup_{\alpha-\beta+q^{-1}<p^{-1}<1} \mathcal{D}'_{L_p,\alpha} \subset \mathcal{D}'_{L_q,\beta} \tag{1.3}$$

ove l'insieme a primo membro è sottospazio vettoriale di quello a secondo membro poichè, ancora per il corollario 1.7 con $\alpha = \beta$, $\mathcal{D}'_{L_{p_1},\alpha}$ è sottospazio vettoriale di $\mathcal{D}'_{L_{p_2},\alpha}$ se $p_1 < p_2$. D'altra parte se $q_1 < q_2 < \beta^{-1}$ è

$$\bigcup_{\alpha-\beta+q_1^{-1}<p^{-1}<1} \mathcal{D}'_{L_p,\alpha} \subset \bigcup_{\alpha-\beta+q_2^{-1}<p^{-1}<1} \mathcal{D}'_{L_p,\alpha}$$

onde eseguendo su ambo i membri della (1.3) la riunione rispetto a tutti i $q \in]1, \beta^{-1}[$, si vede che $\bigcup_{1<p<\alpha^{-1}} \mathcal{D}'_{L_p,\alpha}$ risulta sottospazio vettoriale di $\bigcup_{1<q<\beta^{-1}} \mathcal{D}'_{L_q,\beta}$. Da ciò segue che ad $\mathcal{N}$ si può dare la struttura di spazio vettoriale. Si verifica poi facilmente mediante il corollario 1.6 che l'applicazione da $\mathcal{N}$ in Φ' che ad ogni elemento di $\mathcal{N}$ fa corrispondere la sua restrizione a Φ è iniettiva, onde l'immagine di $\mathcal{N}$ rispetto ad essa è un sottospazio vettoriale di Φ' isomorfo ad $\mathcal{N}$.

LEMMA 1.10. *Se $f \in \mathcal{S}'$, $f \neq 0$ ed $\langle f, \varphi \rangle = 0$ per ogni $\varphi \in \Phi$, allora $f \notin \mathcal{N}$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in \mathcal{N}$ esistono $\beta \in [0, 1[$ e $q \in]1, \beta^{-1}[$ tali che $f \in \mathcal{D}'_{L_q,\beta}$. Per il lemma 1.6 da $\langle f, \varphi \rangle = 0$ per ogni $\varphi \in \Phi$ segue allora che $\langle f, \varphi \rangle = 0$ anche per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$, onde $f = 0$.

Immediata conseguenza di questo lemma e del lemma 1.2 è il

COROLLARIO 1.8. *Ad $\mathcal{N}$ non appartiene alcun polinomio non identicamente nullo.*

TEOREMA 1.1. *Se $f \in \mathcal{N}$ e per un $p \in]1, \infty[$ è*

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq c \, \| \varphi \|_{L_{p'}} \qquad \forall \varphi \in \Phi$$

con c indipendente da φ, allora f è una funzione ordinaria, appartiene ad L_p e $\| f \|_{L_p} \leq c$.

DIMOSTRAZIONE. Esistono $\alpha \in [0, 1[$ e $q \in]1, \alpha^{-1}[$ tali che $f \in \mathcal{D}'_{L_q,\alpha}$. Sia $\eta \in \mathcal{S}$. Il lemma 1.6 assicura che esiste una successione (φ_n) di elementi di Φ convergenti ad η secondo la topologia indotta in $\mathcal{S}$ da $\mathcal{D}_{L_{q'}, \alpha}$ e secondo la metrica di $L_{p'}$. È quindi $\lim_{n \to \infty} \langle f, \varphi_n \rangle = \langle f, \eta \rangle$ e $\lim_{n \to \infty} \| \varphi_n \|_{L_{p'}} = \| \eta \|_{L_{p'}}$. Da

$$| \langle f, \varphi_n \rangle | \leq c \| \varphi_n \|_{L_{p'}}$$

segue quindi

$$| \langle f, \eta \rangle | \leq c \| \eta \|_{L_{p'}}.$$

Ciò prova il teorema poichè quest'ultima maggiorazione vale, con la stessa costante c, per ogni $\eta \in \mathcal{S}$.

Abbiamo indicato con Φ_p' il sottospazio vettoriale di Φ' isomorfo ad L_p. L'isomorfismo è realizzato dalla applicazione che ad ogni $f^* \in L_p$ fa corrispondere il funzionale lineare f definito in Φ da

$$f : \varphi \longrightarrow \int_{E^n} \overline{f^*} \varphi \, dx,$$

continuo in Φ rispetto alla metrica in esso indotta da $L_{p'}$ e quindi anche rispetto alla topologia di Φ che è più fine.

LEMMA 1.11. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè $f \in \Phi_p'$ è che esista una costante positiva c tale che*

$$| \langle f, \varphi \rangle | \leq c \| \varphi \|_{L_{p'}} \quad \forall \varphi \in \Phi. \tag{1.4}$$

DIMOSTRAZIONE. La condizione è manifestamente necessaria poichè se $f \in \Phi_p'$ esiste una ed una sola $f^* \in L_p$ tale che $\langle f, \varphi \rangle = \int_{E^n} \overline{f^*} \varphi \, dx$ per ogni $\varphi \in \Phi$. La condizione (1.4) è poi sufficiente poichè da essa segue che f è continua in Φ rispetto alla metrica di $L_{p'}$ e quiudi, per il corollario 1.3, f ammette uno ed un solo prolungamento (lineare e) continuo su tutto $L_{p'}$. Esiste dunque una ed una sola $f^* \in L_p$ tale che $\langle f, \varphi \rangle = \int_{E^n} \overline{f^*} \varphi \, dx$ per ogni $\varphi \in \Phi$.

Se per $f \in \Phi_p'$ poniamo

$$\| f \|_{\Phi_p'} = \| f^* \|_{L_p}. \tag{1.5}$$

Φ_p' diviene uno spazio di Banach e l'applicazione $f \longrightarrow f^*$ una isometria lineare fra Φ_p' ed L_p. Nel seguito supporremo sempre che Φ_p' sia dotato della norma (1.5). Se vale la (1.4) è dunque $\| f \|_{\Phi_p'} \leq c$.

A proposito dello spazio Φ_p' osserviamo che se f è una funzione definita (quasi ovunque) su E^n tale che il funzionale lineare

$$\varphi \longrightarrow \int_{E^n} \overline{f}\, \varphi \, dx, \qquad \varphi \in \Phi$$

appartenga a Φ_p', non si può concludere che $f \in L_p$, ma soltanto che esiste uno ed un solo elemento $f^* \in L_p$ tale che

$$\int_{E^n} \overline{f}\, \varphi \, dx = \int_{E^n} \overline{f^*}\, \varphi \, dx \qquad \forall\, \varphi \in \Phi.$$

Infatti per il lemma 1.3 f potrebbe differire da f^* per un arbitrario polinomio. Vale tuttavia il seguente corollario del teorema 1.1.

COROLLARIO 1.9. *Se $f \in \Phi_p'$ esiste uno ed un solo $f^* \in \mathcal{N}$ tale che*

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f^*, \varphi \rangle \qquad \forall\, \varphi\ \Phi$$

ed è $f^* \in L_p$.

DIMOSTRAZIONE. L'esistenza di un $f^* \in L_p$ soddisfacente alla condizione richiesta è conseguenza dell'isomorfismo fra Φ_p' ed L_p. Se $g \in \mathcal{N}$ è tale che $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$ per ogni $\varphi \in \Phi$ allora per il lemma 1.9 è pure $f^* - g \in \mathcal{N}$ e $\langle f^* - g, \varphi \rangle = 0$ per ogni $\varphi \in \Phi$. Per il teorema 1.1 $f^* - g$ è quindi una funzione nulla quasi ovunque su E^n.

2. Una funzione $\mu(\xi)$, $\xi \in E^n$, è un moltiplicatore in Ψ se l'applicazione $\psi \longrightarrow \mu\, \psi$ è una applicazione continua di Ψ in sè. Se μ è un moltiplicatore in Ψ tale è pure il suo complesso coniugato $\overline{\mu}$ e l'applicazione $g \longrightarrow \mu g$ definita da $\langle \mu g, \psi \rangle = \langle g, \overline{\mu}\, \psi \rangle$, $\psi \in \Psi$, è una applicazione lineare e continua di Ψ' in sè.

LEMMA 2.1. *Se $\mu(\xi)$ è una funzione indefinitamente differenziabile su $E^n \setminus A$ e per ogni multi-indice $\mathbf{h}$ di interi non negativi risulta*

$$| D^{\mathbf{h}} \mu(\xi) | \leq P_{\mathbf{h}}(\xi), \qquad \xi \in E^n \setminus A,$$

con $P_{\mathbf{h}}(\xi)$ combinaziane lineare a coefficienti costanti positivi di funzioni $\prod_{1}^{n}{}_j | \xi_j |^{r_j}$, r_j reali qualunque, allora μ è un moltiplicatore in Ψ.

Dimostrazione. Se k è un intero non negativo risulta

$$M_k(\xi) \prod_1^n |\xi_j|^{r_j} \leq c\, M_\varkappa(\xi), \qquad \xi \in E^n \setminus A \text{ (13)},$$

con $\varkappa > k$ dipendente, oltre che da k, dagli r_j. Per ogni $\psi \in \Psi$ ed ogni multi-indice $\mathbf{l}$ di interi non negativi con $|\mathbf{l}| \leq k$ è quindi

$$M_k(\xi)\, |D^{\mathbf{l}}(\mu(\xi)\, \psi(\xi))| \leq c \sum_{|\mathbf{h}| \leq |\mathbf{l}|} M_k(\xi)\, P_{\mathbf{h}}(\xi)\, |D^{\mathbf{l}-\mathbf{h}} \psi(\xi)| \leq$$

$$\leq C' \sum_{|\mathbf{h}| \leq |\mathbf{l}|} M_{\varkappa(\mathbf{h})}(\xi)\, |D^{\mathbf{l}-\mathbf{h}} \psi(\xi)| \leq C'' \sup_{|\mathbf{a}| \leq \varkappa} M_\varkappa(\xi)\, |D^{\mathbf{a}} \psi(\xi)|$$

ove $\varkappa(\mathbf{h}) > k$ dipende dal multi-indice $\mathbf{h}$ e $\varkappa = \max\limits_{0 \leq |\mathbf{h}| \leq k} \varkappa(\mathbf{h})$. Ciò prova il lemma.

Se $T \in \mathcal{S}'$ è tale che per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ risulta

$$\| \mathcal{F}^{-1}(T \tilde{\varphi}) \|_{L_q} \leq c\, \| \varphi \|_{L_p}, \qquad 1 \leq p \leq q \leq \infty$$

con c indipendente da φ si dice che *T è un moltiplicatore di tipo* (p, q). La più piccola costante c per la quale vale la precedente maggiorazione per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ si dice norma del moltiplicatore T e si indica con $M_p^q(T)$.

Teorema 2.1. *Se T è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, q), $1 < p \leq q < \infty$, allora per ogni $f \in \Phi_p'$ è $\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{f}) = \mathcal{F}^{-1}(T) * f \in \Phi_q'$ e*

$$\| \mathcal{F}^{-1}(T\tilde{f} \|_{\Phi_q'} \leq c\, \| f \|_{\Phi_p'}.$$

Se inoltre $\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{f}) \in \mathcal{N}$ allora $\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{f}) \in L_q$ e

$$\| \mathcal{F}^{-1}(T\tilde{f}) \|_{L_q} \leq c\, \| f \|_{\Phi_p'}.$$

Dimostrazione. Per $f \in \Phi_p'$ e $\varphi \in \Phi$ è

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(T\tilde{f}), \varphi \rangle = (2\pi)^{-n} \langle T\tilde{f}, \tilde{\varphi} \rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}(\overline{T}\, \tilde{\varphi}) \rangle$$

---

(13) Su questa maggiorazione si fonda la dimostrazione di Lizorkin del lemma 1.2 Si veda [10] pp. 327-28.

onde

$$|\langle \mathcal{F}^{-1}(T\tilde{f}), \varphi \rangle| \leq \|f\|_{\Phi'_p} \|\mathcal{F}^{-1}(\bar{T}\tilde{\varphi})\|_{L_{p'}} \leq c\,\|f\|_{\Phi'_p} \|\varphi\|_{L_{q'}},$$

poichè $\bar{T}$, al pari di T, è un moltiplicatore di tipo (p, q) e quindi di tipo (q', p'). In forza del lemma 1.11 ciò prova la prima parte del teorema. La $\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{f}) = \mathcal{F}^{-1}(T) * f$ è conseguenza di un noto teorema sulla convoluzione delle funzioni generalizzate (14). La seconda parte del teorema è conseguenza della prima e del teorema 1.1.

TEOREMA 2.2. *Nelle stesse ipotesi del teorema* 2.1 *su* T, *se* $u \in L_p$, $1 < p < \infty$, *è* $\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{u}) \in \Phi'_q$ *e*

$$\|\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{u})\|_{\Phi'_q} \leq c\,\|u\|_{L_p}.$$

Se inoltre $\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{u}) \in \mathcal{N}$, *allora* $\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{u}) \in L_q$ *e*

$$\|\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{u})\|_{L_q} \leq c\,\|u\|_{L_p},$$

in tal caso se (φ_ν) *è una successione di elementi di* Φ *convergente ad* u *in* L_p, *la successione* $\mathcal{F}^{-1}(T\varphi_\nu)$ *converge in* L_q *ad* $\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{u})$.

DIMOSTRAZIONE. Occorre provare soltanto l'ultima affermazione del teorema; le altre sono conseguenza immediata del teorema precedente e del fatto che L_p e Φ'_p sono isomorfi ed isometrici E'.

$$\|\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{\varphi}_\nu) - \mathcal{F}^{-1}(T\tilde{\varphi}_\mu)\|_{L_q} \leq c\,\|\varphi_\nu - \varphi_\mu\|_{L_p}$$

onde la successione $\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{\varphi}_\nu)$ converge in L_q: sia $A_T u$ il suo limite. Per ogni $\varphi \in \Phi$ è

$$\begin{aligned}|\langle A_T u - \mathcal{F}^{-1}(T\tilde{u}), \varphi\rangle| \leq \\ &\leq |\langle A_T u - \mathcal{F}^{-1}(T\tilde{\varphi}_\nu), \varphi\rangle| + |\langle \mathcal{F}^{-1}(T\tilde{\varphi}_\nu) - \mathcal{F}^{-1}(T\tilde{u}), \varphi\rangle| \leq \\ &\leq |\langle A_T u - \mathcal{F}^{-1}(T\tilde{\varphi}_\nu), \varphi\rangle| + c\,\|\varphi_\nu - u\|_{L_p} \|\varphi\|_{L_{q'}}\end{aligned}$$

(14) Si veda [8] Cap. III, 3

da cui per $\nu \to \infty$ si ottiene che

$$\langle A_T u - \mathcal{F}^{-1}(T\tilde{u}), \varphi \rangle = 0 \qquad \forall \varphi \in \Phi.$$

Per la densità di Φ in $L_{q'}$ ciò prova che $A_T u = \mathcal{F}^{-1}(T\tilde{u})$.

TEOREMA 2.3. *Siano T_1 e T_2 moltiplicatori in Ψ, T_1 un moltiplicatore di tipo (q, r) e T_2 un moltiplicatore di tipo (p, q), $1 < p \leq q \leq r < \infty$. Se $f \in \Phi'_p$ è allora $\mathcal{F}^{-1}(T_1 T_2 \tilde{f}) \in \Phi'_r$ e*

$$\| \mathcal{F}^{-1}(T_1 T_2 \tilde{f}) \|_{\Phi'_r} \leq c \, \| f \|_{\Phi'_p}.$$

Se inoltre $T = T_1 T_2$ è un moltiplicatore di tipo (p, r) allora

$$M_p^r(T) \leq M_q^r(T_1)\, M_p^q(T_2).$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $\varphi \in \Phi$ applicando il teorema 2.1 a T_2 ed il lemma 1.11 è

$$|\langle \mathcal{F}^{-1}(T_1 T_2 \tilde{f}), \varphi \rangle| = (2\pi)^{-n} |\langle T_2 \tilde{f}, \bar{T}_1 \tilde{\varphi} \rangle| = |\langle \mathcal{F}^{-1}(T_2 \tilde{f}), \mathcal{F}^{-1}(\bar{T}_1 \tilde{\varphi}) \rangle| \leq$$

$$\leq \| \mathcal{F}^{-1}(T_2 \tilde{f}) \|_{\Phi'_q} \| \mathcal{F}^{-1}(\bar{T}_1 \tilde{\varphi}) \|_{L_{q'}} \leq c \, \| f \|_{\Phi'_p} \| \varphi \|_{L_{r'}}.$$

In forza del lemma 1.11 la prima parte del teorema resta così provata. Osserviamo poi che se $\varphi \in \mathcal{S}$ è $\mathcal{F}^{-1}(T_2 \tilde{\varphi}) \in L_q$ e

$$\| \mathcal{F}^{-1}(T_2 \tilde{\varphi}) \|_{L_q} \leq M^q(T_2) \| \varphi \|_{L_p}.$$

Applicando il teorema 2.2 a T_1 e tenendo conto che $\mathcal{F}^{-1}(T_1 T_2 \tilde{\varphi}) = \mathcal{F}^{-1}(T \tilde{\varphi}) \in L_r$ risulta quindi

$$\| \mathcal{F}^{-1}(T_1 T_2 \tilde{\varphi}) \|_{L_r} \leq M_q^r(T_1) \| \mathcal{F}^{-1}(T_2 \tilde{\varphi}) \|_{L_q} \leq M_q^r(T_1)\, M_p^q(T_2) \| \varphi \|_{L_r} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

COROLLARIO 2.1. *Nelle steste ipotesi del teorema 2.3 su T_1 e T_2, se $u \in L_p$ è $\mathcal{F}^{-1}(T_1 T_2) \tilde{u}) \in \Phi'_r$ è*

$$\| \mathcal{F}^{-1}(T_1 T_2 \tilde{u}) \|_{\Phi'_r} \leq c \, \| u \|_{L_p}.$$

Sia $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, r_j reali, $j = 1, \dots n$, e

$$D^{\mathbf{r}}(x) = \widehat{(i\,\xi)^{\mathbf{r}}} = \widehat{(i\,\xi_1)^{r_1}} \times \dots \times \widehat{(i\,\xi_n)^{r_n}}$$

ove $\times$ indica il prodotto diretto e si intende che sia

$$(i\,\xi_j)^{r_j} = e^{i\pi r_j/2} \begin{cases} \xi_j^{r_j} & \text{se } \xi_j > 0 \\ e^{-i r_j \pi} |\xi_j|^{r_j} & \text{se } \xi_j < 0 \end{cases}.$$

La funzione $(i\,\xi)^{\mathbf{r}}$ è un moltiplicatore in Ψ, onde per il teorema citato in ([14]

$$D^{\mathbf{r}}(x) * f \in \Phi' \qquad \forall\, f \in \Phi'$$

e

$$\widetilde{D^{\mathbf{r}} * f} = \prod_1^n{}_j\, (i\,\xi_j)^{r_j} \tilde{f} \in \Psi' \qquad \forall\, f \in \Phi'.$$

Inoltre è

$$D^{\mathbf{r}_1} * D^{\mathbf{r}_2} = D^{\mathbf{r}_2} * D^{\mathbf{r}_1} = D^{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}, \qquad D^{\mathbf{0}} = \hat{1} = \delta(x),\ D^{\mathbf{r}} * D^{-\mathbf{r}} = D^{\mathbf{0}}.$$

Se $f \in \Phi'$ ed $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, con r_j reali per $j = 1, \dots, n$, l'elemento di Φ' definito da

$$D^{\mathbf{r}} * f = \mathcal{F}^{-1}((i\,\xi)^{\mathbf{r}} \tilde{f})$$

lo indicheremo, seguendo Lizorkin [10], con $D^{\mathbf{r}} f$ e lo chiameremo derivata generalizzata secondo Liouville di ordine $\mathbf{r}$. Porremo inoltre

$$D_*^{\mathbf{r}} f = \mathcal{F}^{-1}\left(\prod_1^n{}_j\, (-\,i\,\xi_j)^{r_j} \tilde{f}\right);$$

se gli r_j sono tutti interi non negativi è quindi $D_*^{\mathbf{r}} f = (-1)^{|\mathbf{r}|} D^{\mathbf{r}} f$. Se $\varphi \in \Phi$ e gli r_j sono reali non negativi risulta

$$D^{\mathbf{r}} \varphi = \frac{1}{\prod_1^n{}_j\, (\Gamma([r_j] + 1 - r_j)} \frac{\partial^{[r_1] + \dots + [r_n] + n}}{\partial x_1^{[r_1]+1} \dots \partial x_n^{[r_n]+1}} \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{x_n} \frac{\varphi(t)\, dt_n}{\prod_1^n{}_j\, (x_j - t_j)^{r_j - [r_j]}}$$

ove con $[r_j]$ si è indicato il massimo intero non superiore ad r_j. Se gli r_j sono interi non negativi avremo quindi

$$D^{\mathbf{r}} \varphi = \partial^{|\mathbf{r}|} \varphi / \partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}.$$

Qualunque siano gli r_j reali è inoltre

$$\langle D^{\mathbf{r}} f, \varphi \rangle = \langle f, D_*^{\mathbf{r}} \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \Phi.$$

Se $f \in \mathcal{D}'_{L_{p,\alpha}}$, $0 \leq \alpha < 1$, $1 < p < \alpha^{-1}$, e gli r_j sono tutti interi non negativi il funzionale lineare

$$\varphi \to \langle f, D_*^{\mathbf{r}} \varphi \rangle = (-1)^{|\mathbf{r}|} \langle f, D^{\mathbf{r}} \varphi \rangle, \qquad \varphi \in \Phi$$

è continuo in Φ secondo la topologia indotta in Φ da $\mathcal{D}_{L_{p',\alpha}}$. Essendo Φ denso in $\mathcal{D}_{L_{p',\alpha}}$ tale funzionale ha uno ed un solo prolungamento continuo in $\mathcal{D}_{L_{p',\alpha}}$. Esiste cioè uno ed un solo $\omega_{\mathbf{r}} \in \mathcal{D}'_{L_{p,\alpha}}$ tale che

$$\langle \omega_{\mathbf{r}}, \varphi \rangle = (-1)^{\mathbf{r}} \langle f, D^{\mathbf{r}} \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \Phi.$$

Tenuto conto della densità di Φ in $\mathcal{D}_{L_{p',\alpha}}$ e del fatto che $D^{\mathbf{r}} \varphi \in \mathcal{D}_{L_{p',\alpha}}$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{L_{p',\alpha}}$ è anzi

$$\langle \omega_{\mathbf{r}}, \varphi \rangle = (-1)^{\mathbf{r}} \langle f, D^{\mathbf{r}} \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{L_{p',\alpha}}.$$

$\omega_{\mathbf{r}}$ coincide quindi con la derivata di f di ordine $\mathbf{r}$ nel senso delle distribuzioni. Porremo quindi $D^{\mathbf{r}} f = \omega_{\mathbf{r}} = \partial^{|\mathbf{r}|} f / \partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}$.

3. In [3] abbiamo considerato *la famiglia* $\mathcal{P}^n$, $n \geq 1$, *dei poliedri convessi* $\mathbb{P}$ *dello spazio euclideo n-dimensionale* S^n *tali che*

1) $\mathbb{P} \subset S_+^n = \{\mathbf{s} \in S^n ; s_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$;

2) $\mathbb{P}$ *ha dimensione* n;

3) *se* $\mathbf{s}^l$, $l = 1, \dots, N(\mathbb{P})$, *sono i vertici* (*punti estremi*) *di* $\mathbb{P}$ *allora*

$$\mathbb{Q}(\mathbf{s}^l) = \{\mathbf{r} \in S^n ; 0 \leq r_j \leq s_j^l, j = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{P}.$$

Si può provare che (15) se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$

i) l'origine $\mathbf{o}$ di S^n è vertice di $\mathbb{P}$; porremo $\mathbf{s}^1 = \mathbf{o}$;

ii) per ogni $\mathbf{s} \in \mathbb{P}$ è $\mathbb{Q}(\mathbf{s}) = \{\mathbf{r} \in S^n ; 0 \leq r_j \leq s_j, j = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{P}$;

---

(15) Si veda [3] lemma 1.1.

iii) per ogni $j = 1, \dots, n$ esiste un vertice $\mathbf{s}^{l_j}$ di $\mathbb{P}$ tale che $\mathbf{s}^{l_j} = s_j^{l_j}\, \mathbf{e}^j$ [16] con $s_j^{l_j} = \max\limits_{\mathbf{s} \in \mathbb{P}} s_j = m_j > 0$;

iv) esiste un insieme finito e non vuoto $\mathcal{A}(\mathbb{P}) \subset S_+^n \setminus \{\mathbf{o}\}$ tale che

$$\mathbb{P} = \bigcap_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \left\{ \mathbf{s} \in S_+^n;\ \sum_1^n{}_j\, a_j s_j \leq 1 \right\}$$

e per ogni $j = 1, \dots, n$ esiste almeno un $\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$ con $a_j > 0$. È $m_j = \min\limits_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} a_j^{-1}$;

v) se $\mathbf{s} \in \mathbb{P}$ è

$$\prod_1^n{}_j\, |\xi_j|^{s_j} \leq P(\xi) = \sum_1^{N(\mathbb{P})}{}_l\ \prod_1^n{}_j\, |\xi_j|^{s_j^l} \qquad \forall\, \xi \in E^n,$$

se $\mathbf{s} \in S_+^n \setminus \mathbb{P}$ è

$$\sup_{\xi \in E^n} \left(\prod_1^n{}_j\, |\xi_j|^{s_j} [P(\xi)]^{-1} \right) = +\infty.$$

Osserviamo che se $\mathbb{P}$ è un sottoinsieme di S^n per il quale vale la iv) riportata qui sopra allora $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$. Dalla iv) segue infatti che $\mathbb{P}$ è un insieme limitato e non vuoto intersezione di un numero finito di semispazi, cioè un poliedro convesso, che soddisfa evidentemente alle 1) e 3) e che ha dimensione n poichè ad esso appartengono, oltre $\mathbf{o}$, i punti $(\min\limits_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} a_j^{-1})\, \mathbf{e}^j$, $j = 1, \dots, n$.

DEFINIZIONE 3.1. *Con $\mathcal{P}_*^n$ indichiamo la famiglia dei sottoinsiemi non vuoti di S^n tali che*

A_*) *esistono due sottoinsiemi finiti $\mathcal{A}(\mathbb{P})$ ed $\mathcal{A}'(\mathbb{P})$ di $S_*^n \setminus \{\mathbf{o}\}$ il primo dei quali non vuoto e tale che per ogni $j = 1, \dots, n$ esiste almeno un $\mathbf{a}$ appartenente ad esso con $a_j > 0$, tali che*

$$\mathbb{P} = \left(\bigcap_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \left\{ \mathbf{s} \in S_+^n;\ \sum_1^n{}_j\, a_j s_j \leq 1 \right\} \right) \cap \left(\bigcap_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} \left\{ \mathbf{s} \in S_+^n;\ \sum_1^n{}_j\, a_j s_j \geq 1 \right\} \right);$$

B_*) *se $\mathcal{A}'(\mathbb{P}) \neq \emptyset$ sia $a_j \leq a'_j$ per ogni $\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$, $\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})$, $j = 1, \dots, n$.*

Da quanto si è osservato sopra segue che $\mathcal{P}^n \subset \mathcal{P}_*^n$ e che se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$

---

[16] $\mathbf{e}^j \in S_+^n$ con $e_k^j = 0$ per $k \neq j$ ed $e_j^j = 1$.

allora $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ se e soltanto se $\mathcal{A}'(\mathbb{P}) = \emptyset$, ovvero se e soltanto se $\mathbf{o} \in \mathbb{P}$. Per $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ poniamo

$$\mathbb{P}_0 = \bigcap_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \left\{ \mathbf{s} \in S_+^n ;\ \sum_1^n {}_j\, a_j s_j \leq 1 \right\},$$

$$\dot{\mathbb{P}}^+ = \mathbb{P} \cap \left(\bigcup_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \left\{ \mathbf{s} \in S_+^n ;\ \sum_1^n {}_j\, a_j s_j = 1 \right\} \right),$$

$$\delta \mathbb{P} = \{ \mathbf{s} \in S_+^n ;\ \delta^{-1} \mathbf{s} \in \mathbb{P} \}, \qquad \delta > 0,$$

$$k(\mathbb{P}, \mathbf{s}) = \inf (t > 0 ;\ t^{-1} \mathbf{s} \in \mathbb{P}), \quad \mathbf{s} \in S_+^n,$$

$$h(\mathbb{P}, \mathbf{s}) = \sup (t > 0 ;\ t^{-1} \mathbf{s} \in \mathbb{P}), \quad \mathbf{s} \in S_+^n,$$

$$\mathbb{P}^{\mathbf{r}} = \{ \mathbf{s} \in S_+^n ;\ \mathbf{s} + \mathbf{r} \in \mathbb{P} \}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{P}_0 .$$

È sempre $\mathbb{P}_0 \in \mathcal{P}^n$. Scriveremo per brevità $k(\mathbb{P})$ ed $h(\mathbb{P})$ in luogo di $k(\mathbb{P}, \mathbf{e})$ ed $h(\mathbb{P}, \mathbf{e})$ [17].

Ad ogni $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$, come già in [3] ad ogni $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$, associamo la funzione

$$\mathbb{P}(\xi) = \sum_1^{N(\mathbb{P})} {}_l \, | \xi^{\mathbf{s}^l} | = \sum_1^{N(\mathbb{P})} {}_l \, \prod_1^n {}_j \, | \xi_j |^{s_j^l}, \quad \xi \in E^n, \tag{3.1}$$

ove $\mathbf{s}^l$, $l = 1, \dots, N(\mathbb{P})$, sono i vertici di $\mathbb{P}$. Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ porremo anche

$$P_1(\xi) = \sum_2^{N(\mathbb{P})} {}_l \, \prod_1^n {}_j \, (1 + \xi_j^2)^{s_j^l / 2}, \quad \xi \in E^n. \tag{3.1'}$$

Lemma 3.1. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ *allora*

i) *per ogni* $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{P}$ *con* $t_j \leq s_j$, $j = 1, \dots, n$, *è* $\mathbb{Q}(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = \{ \mathbf{r} \in S^n ;\ t_j \leq r_j \leq s_j,\ j = 1, \dots, n \} \subset \mathbb{P}$;

ii) *per ogni* $j = 1, \dots, n$ *è* $\max_{\mathbf{s} \in \mathbb{P}} s_j = \max_{\mathbf{s} \in \mathbb{P}_0} s_j = m_j > 0$; $\varrho \mathbf{e}^j \in \mathbb{P}$ *per ogni* $\varrho \in [\max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} a_j'^{-1}, m_j]$ *se* $\mathcal{A}'(\mathbb{P}) \neq \emptyset$ *e per ogni* $\varrho \in [0, m_j]$ *se* $\mathcal{A}'(\mathbb{P}) = \emptyset$;

iii) $\mathbb{P}$ *è un poliedro convesso di* S^n *di dimensione almeno eguale ad* $n - 1$;

---

[17] $\mathbf{e} \in S^n$, $e_j = 1$, $j = 1, \dots, n$.

iv) *per ogni* $s \in S_+^n$ *è* $k(\mathbb{P}, s) = \max_{a \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \sum_1^n{}_j a_j s_j$ *ed* $h(\mathbb{P}, s) =$ $= \min_{a' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} \sum_1^n{}_j a'_j s_j$ *se* $\mathcal{A}'(\mathbb{P}) \neq \emptyset$, $h(\mathbb{P}, s) = +\infty$ *se* $\mathcal{A}'(\mathbb{P}) = \emptyset$;

v) *se* $s \in \mathbb{P}$ *è*

$$\prod_1^n{}_j |\xi_j|^{s_j} \leq P(\xi) \ \forall \ \xi \in E^n,$$

se $s \in S_+^n \setminus \mathbb{P}$ *è*

$$\sup_{\xi \in E^n / \{0\}} \left(\prod_1^n{}_j |\xi_j|^{s_j} [P(\xi)]^{-1} \right) = +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE. La i) è immediata. Se $\mathcal{A}'(\mathbb{P}) = \emptyset$ la ii) si ottiene dalle i) e iii) riportate all'inizio di questo numero. Se $\mathcal{A}'(\mathbb{P}) \neq \emptyset$ è $\max_{s \in \mathbb{P}} s_j \leq \max_{s \in \mathbb{P}_0} s_j$ poichè $\mathbb{P} \subset \mathbb{P}_0$, mentre dalla iii) ora citata applicata a $\mathbb{P}_0$ segue che $a_j \max_{s \in \mathbb{P}_0} s_j \leq 1$ per ogni $a \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$, il segno eguale verificandosi per almeno un $a \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$. Per B$_*$) è dunque $a'_j \max_{s \in \mathbb{P}_0} s_j \geq 1$ per ogni $a' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})$ e quindi $(\max_{s \in \mathbb{P}_0} s_j) e^j \in \mathbb{P}$ e $\max_{s \in \mathbb{P}_0} s_j \leq \max_{s \in \mathbb{P}} s_j$. È poi $a'_j (\max_{a' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} a_j'^{-1}) \geq 1$ per ogni $a' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})$ e tenuto conto di B$_*$) $a_j \max_{a' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} a_j'^{-1} \leq 1$ onde $(\max_{a' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} a_j'^{-1}) e^j \in \mathbb{P}$. La iii) è conseguenza del fatto che $\mathbb{P}$ è un sottoinsieme non vuoto e limitato di S^n intersezione di un numero finito di semispazi al quale appartengono i punti $m_j e^j$, $j = 1, \ldots, n$. Di facile verifica è la iv). Se $s \in \mathbb{P}$ esistono $\lambda_l \in [0, 1]$, $l = 1, \ldots, N(\mathbb{P})$, $\sum_1^{N(\mathbb{P})}{}_l \lambda_l = 1$ tali che $s = \sum_1^{N(\mathbb{P})}{}_l \lambda_l s^l$. È allora

$$\prod_1^n{}_j |\xi_j|^{s_j} = \prod_1^{N(\mathbb{P})}{}_l \left(\prod_1^n{}_j |\xi_j|^{s_j^l} \right)^{\lambda_l} \leq \sum_1^{N(\mathbb{P})}{}_l \lambda_l \prod_1^n{}_j |\xi_j|^{s_j^l} \leq P(\xi).$$

Se $s \in S_+^n \setminus \mathbb{P}_0$ allora per la v) riportata all'inizio di questo numero la funzione $\prod_1^n{}_j |\xi_j|^{s_j} [P_0(\xi)]^{-1}$ non è limitata in E^n. D'altra parte la proposizione ora citata applicata al poliedro $\mathbb{P}_0$ ed ai vertici di $\mathbb{P}$ assicura che $P(\xi) \leq$ $\leq N(\mathbb{P}) \, P_0(\xi)$, $\xi \in E^n$, onde neppure la funzione $\prod_1^n{}_j |\xi_j|^{s_j} [P(\xi)]^{-1}$ sarà limitata su $E^n \setminus \{0\}$. Se $s \in \mathbb{P}_0 \setminus \mathbb{P}$ allora per almeno un $a' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})$ sarà

$\sum_{1}^{n}{}_j a'_j s_j = \varrho < 1$. Per $\xi_j = t^{a'_j}$, $t \in]0, 1[$, $j = 1, \dots, n$, è allora

$$\prod_{1}^{n}{}_j |\xi_j|^{s_j} = t^{\varrho} \quad \text{e} \quad P(\xi) = \sum_{1}^{N(\mathbb{P})}{}_l\, t^{\sum_1^n{}_j a'_j s_j^l} \leq N(\mathbb{P})\, t$$

poichè per ogni $l = 1, \dots, N(\mathbb{P})$ è $\sum_{1}^{n}{}_j a'_j s_j^l \geq 1$. Ne segue che

$$\prod_{1}^{n}{}_j |\xi_j|^{s_j} [P(\xi)]^{-1} \geq N(\mathbb{P})^{-1}\, t^{\varrho - 1}, \quad t \in]0, 1[,$$

onde anche in questo caso la funzione a primo membro non può restare limitata su $E^n \setminus \{0\}$.

Lemma 3.2. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ *allora*

i) *per* $\mathbf{r} \in \mathbb{P} \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$ *è* $\mathbb{P}^{\mathbf{r}} \in \mathcal{P}^n$; *per* $\mathbf{r} \in \mathbb{P}_0 \setminus \mathbb{P}$ *è* $\mathbb{P}^{\mathbf{r}} \in \mathcal{P}_*^n$;

ii) *se* $\mathbf{r} \in \mathbb{P}_0 \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$ *e* $\mathcal{A}'_{\mathbf{r}}(\mathbb{P})$ *è l'insieme degli* $\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})$ *tali che* $\sum_{1}^{n}{}_j a'_j r_j < 1$, *allora*

$$k(\mathbb{P}^{\mathbf{r}}, \mathbf{s}) = \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \left[1 - \sum_{1}^{n}{}_j a_j r_j\right]^{-1} \sum_{1}^{n}{}_j a_j s_j,$$

$$h(\mathbb{P}^{\mathbf{r}}, \mathbf{s}) = \min_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'_{\mathbf{r}}(\mathbb{P})} \left[1 - \sum_{1}^{n}{}_j a'_j r_j\right]^{-1} \sum_{1}^{n}{}_j a'_j s_j,$$

se $\mathcal{A}'_{\mathbf{r}}(\mathbb{P}) \neq \emptyset$ *e* $h(\mathbb{P}^{\mathbf{r}}, \mathbf{s}) = +\infty$ *se* $\mathcal{A}'_{\mathbf{r}}(\mathbb{P}) = \emptyset$.

iii) $\mathbb{P}^{\mathbf{r}} \notin \mathcal{P}^n$ *per ogni* $\mathbf{r} \in \mathbb{P}$ *se e soltanto se esiste un* $\mathbf{a} \in S^n$, *con* $a_j > 0$ *per ogni* $j = 1, \dots, n$, *tale che* $\mathbb{P} = \left\{\mathbf{s} \in S_+^n;\ \sum_{1}^{n}{}_j a_j s_j = 1\right\}$. *In questo caso ed in questo soltanto è* $k(\mathbb{P}) = h(\mathbb{P})$;

iv) $\delta \mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ *per ogni* $\delta > 0$.

Dimostrazione. Per provare la i) osserviamo che se $\mathbf{r} \in \mathbb{P}_0 \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$ allora $\mathbf{s} \in \mathbb{P}^{\mathbf{r}}$ se e soltanto se

$$\sum_{1}^{n}{}_j a'_j (r_j + s_j) \geq 1 \quad \forall\, \mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P}) \quad \text{e} \quad \sum_{1}^{n}{}_j a_j (r_j + s_j) \leq 1 \quad \forall\, \mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P}).$$

È dunque

$$\mathbb{P}^{\mathbf{r}} = \Big(\bigcap_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \{\mathbf{s} \in S_+^n;\ \sum_{1}^{n}{}_j a_j [1 - \sum_{1}^{n}{}_j a_j r_j]^{-1} s_j \leq 1\}\Big) \cap$$

$$\cap \Big(\bigcap_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'_{\mathbf{r}}(\mathbb{P})} \{\mathbf{s} \in S_+^n;\ \sum_{1}^{n}{}_j a'_j [1 - \sum_{1}^{n}{}_j a'_j r_j]^{-1} s_j \geq 1\}\Big).$$

$\mathbb{P}^{\mathbf{r}}$ non è vuoto e soddisfa alla A_*); esso soddisfa anche alla B_*), come si verifica subito. Dunque $\mathbb{P}^{\mathbf{r}} \in \mathcal{P}^n_*$. Se $\mathbf{r} \in \mathbb{P} \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$ è $\mathcal{A}'_{\mathbf{r}}(\mathbb{P}) = \emptyset$ e quindi $\mathbb{P}^{\mathbf{r}} \in \mathcal{P}^n$. La ii) è immediata conseguenza della rappresentazione di $\mathbb{P}^{\mathbf{r}}$ data qui sopra. Se $\mathbb{P}$ è del tipo indicato in iii) allora per ogni $\mathbf{r} \in \mathbb{P}$ è $\mathbb{P}^{\mathbf{r}} = \{0\}$ e quindi $\mathbb{P}^{\mathbf{r}} \notin \mathcal{P}^n$. Viceversa se $\mathbb{P}^{\mathbf{r}} \notin \mathcal{P}^n$ per ogni $\mathbf{r} \in \mathbb{P}$, allora per ognuno di tali $\mathbf{r}$ esisterà un $\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$ tale che $\sum_1^n{}_j a_j r_j = 1$, altrimenti per i) $\mathbb{P}^{\mathbf{r}}$ apparterrebbe a $\mathcal{P}^n$. Dunque è $\mathbb{P} = \dot{\mathbb{P}}^+$. $\mathbb{P}$ non può quindi avere dimensione eguale ad n altrimenti ([18]) possederebbe punti interni. Per la iii) del lemma 3.1 avrà allora dimensione $n-1$ e coinciderà quindi con l'insieme $\left\{\mathbf{s} \in S^n_+ ;\ \sum_1^n{}_j m_j^{-1} s_j = 1\right\}$. In questo caso è evidentemente $k(\mathbb{P}, \mathbf{s}) = h(\mathbb{P}, \mathbf{s})$ per ogni $\mathbf{s} \in S^n_+$. Viceversa se per $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n_*$ è $k(\mathbb{P}) = h(\mathbb{P})$, dalla iv) del lemma 3.1 e della B_*) segue che esiste un $\mathbf{a}^*$ appartenente ad $\mathcal{A}(\mathbb{P})$ e ad $\mathcal{A}'(\mathbb{P})$ tale che $\sum_1^n{}_j a_j^* = \max\limits_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \sum_1^n{}_j a_j = \min\limits_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} \sum_1^n{}_j a'_j$ onde $\mathbb{P} = \left\{\mathbf{s} \in S^n_+ ;\ \sum_1^n{}_j a_j^* s_j = 1\right\}$. La iv) infine è immediata.

LEMMA 3.3. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n_*$ *l'inviluppo convesso dei vertici di* $\mathbb{P}$ *appartenenti a* $\dot{\mathbb{P}}^+$ *coincide con l'insieme* $\mathbb{P}^+ = \mathbb{P} \cap \left\{\mathbf{s} \in S^n_+ ;\ \sum_1^n{}_j m_j^{-1} s_j \geq 1\right\}$ *ed appartiene quindi a* $\mathcal{P}^n_*$.

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che $\mathbb{P}^+ \in \mathcal{P}^n_*$ si verifica immediatamente tenendo conto che $m_j^{-1} = \max\limits_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} a_j$. Se $\mathbf{v}$ è un vertice di $\mathbb{P}$ appartenente a $\dot{\mathbb{P}}^+$ è $\sum_1^n{}_j m_j^{-1} v_j \geq \sum_1^n{}_j a_j v_j$ per ogni $\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$ ed esiste almeno un $\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$ che rende l'ultima somma scritta eguale ad 1, onde è $\sum_1^n{}_j m_j^{-1} v_j \geq 1$. Se $\mathbf{s}$ appartiene all'inviluppo convesso dei vertici di $\mathbb{P}$ appartenenti a $\dot{\mathbb{P}}^+$ è quindi $\sum_1^n{}_j m_j^{-1} s_j \geq 1$, mentre poi $\mathbf{s}$ è evidentemente contenuto in $\mathbb{P}$. Viceversa se $\mathbf{s} \in \mathbb{P}^+$, $k^{-1}(\mathbb{P}, \mathbf{s})\,\mathbf{s}$ appartiene a $\dot{\mathbb{P}}^+$ e quindi all'inviluppo convesso dei vertici di $\mathbb{P}$ appartenenti a $\dot{\mathbb{P}}^+$, mentre $\varrho^{-1}\,\mathbf{s}$ con $\varrho = \sum_1^n{}_j m_j^{-1} s_j$ appartiene all'inviluppo convesso dei vertici $m_j \mathbf{e}^j$, $j = 1, \dots, n$, anch'essi appartenenti a $\dot{\mathbb{P}}^+$. D'altra parte è $k^{-1}(\mathbb{P}, \mathbf{s}) \geq 1$ e $\varrho^{-1} \leq 1$, e quindi $\mathbf{s}$ sta sul segmento

---

([18]) Si veda ad es. [6] p. 16.

congiungente $\varrho^{-1}\mathbf{s}$ con $k^{-1}(\mathbb{P}, \mathbf{s})\mathbf{s}$ e dunque appartiene anch'esso all'inviluppo convesso dei vertici di $\mathbb{P}$ appartenenti a $\dot{\mathbb{P}}^{+}$.

Analogamente si prova che l'inviluppo convesso dei vertici di $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$, situati su almeno uno degli iperpiani di equazione $\sum_1^n{}_j\, a'_j\, s_j = 1$ coincide con l'insieme $\mathbb{P}^- = \mathbb{P} \cap \left\{\mathbf{s} \in S_+^n \,;\, \sum_1^n{}_j\, m_j^{-1}\, s_j \leq 1\right\} \in \mathcal{P}_*^n$.

LEMMA 3.4 *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un poliedro convesso di S^n appartenga a $\mathcal{P}_*^n$ è che*

1_*) $\mathbb{P} \subset S_+^n$;

2_*) *se* $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in \mathbb{P}$ *e* $t_j \leq s_j$, $j = 1, \dots, n$, *allora* $\mathbb{Q}(\mathbf{t}, \mathbf{s}) \subset \mathbb{P}$;

3_*) *per ogni* $j = 1, \dots, n$ *esiste* $m_j > 0$ *tale che* $m_j \mathbf{e}^j \in \mathbb{P}$.

DIMOSTRAZIONE. La necessità della 1_*) è ovvia, quella delle 2_*) e 3_*) segue dalle i) e ii) del lemma 3.1. Per provare che la condizione è sufficiente osserviamo che $\mathbb{P}$, quale poliedro convesso di S^n, è intersezione di un numero finito di semispazi chiusi ciascuno avente per frontiera un iperpiano passante per un punto frontiera di $\mathbb{P}$. Se uno di tali iperpiani passa per l'origine $\mathbf{o}$ di S^n, allora per 3_*) il relativo semispazio che contiene $\mathbb{P}$ conterrà tutto S_+^n. Pertanto $\mathbb{P}$ è intersezione di S_+^n e di un numero finito di semispazi chiusi aventi per frontiera iperpiani non passanti per $\mathbf{o}$. Esisteranno quindi due sottoinsiemi $\mathcal{A}(\mathbb{P})$ ed $\mathcal{A}'(\mathbb{P})$ di S^n tali che

$$(3.2) \qquad \mathbb{P} = \Big(\bigcap_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \{\mathbf{s} \in S_+^n \,;\, \sum_1^n{}_j\, a_j s_j \leq 1\}\Big) \cap \Big(\bigcap_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} \{\mathbf{s} \in S_+^n ;\, \Sigma\, a'_j s_j \geq 1\}\Big).$$

Dalla 3_*) segue che deve essere $a_j \leq m_j^{-1} \leq a'_j$ e quindi che $a'_j > 0$ ed $a_j \leq a'_j$ per ogni $\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$, $\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})$ ed $j = 1, \dots, n$. Essendo $\mathbb{P}$ limitato $\mathcal{A}(\mathbb{P})$ non potrà essere vuoto e per ogni $j = 1, \dots, n$ esisterà un $\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$ con $a_j > 0$. Mostriamo che si può fare in modo che $\mathcal{A}(\mathbb{P}) \subset S_+^n \setminus \{\mathbf{o}\}$. Se $\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$ non potrà essere $a_j \leq 0$ per ogni $j = 1, \dots, n$, poichè per almeno un $\mathbf{s} \in \mathbb{P}^+$ è $\sum_1^n{}_j\, a_j s_j = 1$. Supponiamo che $a_j \leq 0$ per $j = j_1, \dots, j_h$, e sia $\mathbf{a}^* \in S_+^n \setminus \{0\}$ tale che $a_j^* = 0$ per $j = j_1, \dots, j_h$ e $a_j^* = a_j$ per i rimanenti j. Se $\mathbf{s} \in \mathbb{P}$, il punto $\mathbf{s}^*$ tale che $s_j^* = 0$ per $j = j_1, \dots, j_h$ ed $s_j^* = s_j$ per i rimanenti j appartiene a $\mathbb{P}_0$ e quindi è

$$\sum_1^n {}_j\, a_j^* s_j = \sum_1^n {}_j\, a_j s_j^* \leq 1,$$

onde

$$\mathbb{P} \subset \{ \mathbf{s} \in S_+^n ;\ \sum_1^n {}_j\, a_j^* s_j \leq 1 \} \subset \{ \mathbf{s} \in S_+^n ;\ \sum_1^n {}_j\, a_j s_j \leq 1 \}.$$

In $\mathcal{A}(\mathbb{P})$ possiamo quindi sostituire $\mathbf{a}$ con $\mathbf{a}^* \in S_+^n \setminus \{0\}$. $\mathbb{P}$ soddisfa dunque le A_*) e B_*).

Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ la funzione $P(\xi)$ introdotta in (3.1) è un moltiplicatore in Ψ per il lemma 1.2; se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ la funzione $P_1(\xi)$ di (3.1') è indefinitamente differenziabile su E^n ed a crescenza lenta, cioè un moltiplicatore in $\mathcal{S}$, ed anche come si vede facilmente utilizzando il lemma 2.1 un moltiplicatore in Ψ. Anche la funzione $[P_1(\xi)]^{-1}$, essa pure indefinitamente differenziabile su E^n ed a crescenza lenta, è un moltiplicatore in $\mathcal{S}$ ed in Ψ.

LEMMA 3.5 *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ *la funzione* $[P(\xi)]^{-1}$, $\xi \in E^n \setminus \{0\}$ *è un moltiplicatore in* Ψ.

DIMOSTRAZIONE. Una qualunque derivata (con indici di derivazione interi non negativi) di $[P(\xi)]^{-1}$ è combinazione lineare a coefficienti costanti di prodotti di potenze intere negative di $P(\xi)$ per derivate della stessa $P(\xi)$. Queste ultime sono maggiorabili in $E^n \setminus A$ con combinazioni lineari a coefficienti costanti di funzioni del tipo $\prod_1^n {}_j\, |\xi_j|^{r_j}$, r_j reali, ed ogni potenza negativa di $P(\xi)$ è maggiorabile in $E^n \setminus A$ con funzioni dello stesso tipo poichè è $\prod_1^n {}_j\, |\xi_j|^{\overset{l}{s_j}} \leq P(\xi)$, qualunque sia $l = 1, \dots, N(\mathbb{P})$. Ciò prova il lemma, tenuto conto del lemma 2.1.

TEOREMA 3.1. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ *ed* $\mathbf{r} \in \mathbb{P}_0$, *la funzione* $\prod_1^n {}_j\, |\xi_j|^{r_j} [P(\xi)]^{-1}$ *è un moltiplicatore in* Ψ *ed un moltiplicatore di tipo* (p, q) *per* $1 < p < \infty$ *e*

$q = p/(1 - p\eta)$ *qualunque sia* $\eta \in [\alpha_{\mathbf{r}}, \beta_{\mathbf{r}}] \cap [0, p^{-1}[$, *ove* $\alpha_{\mathbf{r}} = h^{-1}(\mathbb{P}^{\mathbf{r}})$ [19] *e* $\beta_{\mathbf{r}} = k^{-1}(\mathbb{P}^{\mathbf{r}})$ *se* $\mathbf{r} \notin \dot{\mathbb{P}}^{+}$ *ed* $\alpha_{\mathbf{r}} = \beta_{\mathbf{r}} = 0$ *se* $\mathbf{r} \in \dot{\mathbb{P}}^{+}$.

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione che la funzione $\prod_1^n {}_j |\xi_j|^{r_j} [P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ è una immediata conseguenza dei lemmi 1.2 e 3.5. È $0 \leq \alpha_{\mathbf{r}} \leq \beta_{\mathbf{r}}$. Se $\eta \in [\alpha_{\mathbf{r}}, \beta_{\mathbf{r}}]$ è $\mathbf{r} + \eta \mathbf{e} \in \mathbb{P}$ onde per la v) del lemma 3.1 è

$$(3.3) \qquad \prod_1^n {}_j |\xi_j|^{r_j + \eta} \leq P(\xi), \qquad \xi \in E^n.$$

Sia $\mathcal{V}$ l'insieme dei multi-indici $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ tali che gli h_j possano assumere soltanto i valori zero ed uno. Se $\mathbf{h} \in \mathcal{V}$ ed $\mathbf{r} \in S_+^n$ è per $\xi \in E^n \setminus A$

$$D^{\mathbf{h}} \prod_1^n {}_j |\xi_j|^{r_j} = \prod_1^n {}_j (r_j \xi_j^{-1})^{h_j} |\xi_j|^{r_j} \text{ [20]} \quad \text{e} \quad D^{\mathbf{h}} P(\xi) = \sum_1^{N(\mathbb{P})} {}_l \prod_1^n {}_j (s_j^l \xi_j^{-1})^{h_j} |\xi_j|^{s_j^l},$$

onde

$$(3.4) \qquad \prod_1^n {}_j |\xi_j|^{h_j} |D^{\mathbf{h}} P(\xi)| \leq C\, P(\xi), \qquad \xi \in E^n \setminus A,$$

con C dipendente soltanto da $\mathbf{h}$. Se $\mathbf{k} \in \mathcal{V}$, $D^{\mathbf{k}} \left(\prod_1^n {}_j |\xi_j|^{r_j} [P(\xi)]^{-1} \right)$ si esprime come combinazione lineare a coefficienti costanti di prodotti $D^{\mathbf{b}} \prod_1^n {}_j |\xi_j|^{r_j} \cdot D^{\mathbf{c}} [P(\xi)]^{-1}$, con $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{k}$. È poi

$$D^{\mathbf{c}} [P(\xi)]^{-1} = \sum_1^{|\mathbf{c}|} {}_\nu (-1)^\nu \nu! [P(\xi)]^{-\nu - 1} \sum_{\substack{\mathbf{h}^i \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{0}\} \\ \mathbf{h}^1 + \dots + \mathbf{h}^\nu = \mathbf{c}}} \prod_1^\nu {}_i D^{\mathbf{h}^i} P(\xi), \qquad \xi \in E^n \setminus A,$$

dalla quale tenuto conto di (3.4)

$$(3.5) \qquad |D^{\mathbf{c}} [P(\xi)]^{-1}| \leq C \prod_1^n {}_j |\xi_j|^{-c_j} [P(\xi)]^{-1}, \qquad \xi \in E^n \setminus A.$$

---

[19] Si intende che sia $h^{-1}(\mathbb{P}^{\mathbf{r}}) = 0$ se $h(\mathbb{P}^{\mathbf{r}}) = +\infty$, ossia se e solo se $\mathbf{r} \in \mathbb{P} \setminus \dot{\mathbb{P}}^{+}$.

[20] Si intende che sia $(r_j \xi_j^{-1})^{h_j} = 1$ se r_j ed h_j sono entrambi nulli. Analoga convenzione si intende valida in espressioni dello stesso tipo.

Per $\mathbf{k} \in \mathcal{V}$ riesce quindi

$$\prod_1^n{}_j \mid \xi_j \mid^{k_j} \left| D^{\mathbf{k}} \left(\prod_1^n{}_j \mid \xi_j \mid^{r_j} [P(\xi)]^{-1} \right) \right| \leq C \prod_1^n{}_j \mid \xi_j \mid^{r_j} [P(\xi)]^{-1}, \quad \xi \in E^n \setminus A,$$

onde per (3.3), qualunque sia $\eta \in [\alpha_{\mathbf{r}}, \beta_{\mathbf{r}}]$, è

$$\prod_1^n{}_j \mid \xi_j \mid^{k_j+\eta} \left| D^{\mathbf{k}} \left(\prod_1^n{}_j \mid \xi_j \mid^{r_j} [P(\xi)]^{-1} \right) \right. \leq C \qquad \xi \in E^n \setminus A. \tag{3.6}$$

Per un teorema di Lizorkin [12] ciò assicura che la funzione $\prod_1^n{}_j \mid \xi_j \mid^{r_j} [P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore di tipo (p, q), $1 < p \leq q < \infty$, per ogni q tale che $q^{-1} = p^{-1} - \eta$, $\eta \in [\alpha_{\mathbf{r}}, \beta_{\mathbf{r}}] \cap [0, p^{-1}[$. Quest'ultimo insieme sarà vuoto quando $\alpha_{\mathbf{r}} \geq p^{-1}$.

OSSERVAZIONI. 1). Ricordando le espressioni di $h(\mathbb{P}^{\mathbf{r}})$ e $k(\mathbb{P}^{\mathbf{r}})$ si vede che se $\eta > 0$ non appartiene a $[\alpha_{\mathbf{r}}, \beta_{\mathbf{r}}]$, allora $\mathbf{r} + \eta \mathbf{e} \notin \mathbb{P}$ e quindi per la v) del lemma 3.1 la funzione $\prod_1^n{}_j \mid \xi_j \mid^{r_j+\eta} [P(\xi)]^{-1}$ non è limitata su $E^n \setminus \{0\}$.

2) Dalla stessa v) del lemma 3.1 segue anche che se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ ed $\mathbf{r} \in S_+^n \setminus \mathbb{P}$ la funzione $\prod_1^n{}_j \mid \xi_j \mid^{r_j} [P(\xi)]^{-1}$, non essendo limitata su E^n, non può essere un moltiplicatore di tipo (p, p), $1 \leq p \leq \infty$.

COROLLARIO 3.1. *Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ ed $\mathbf{r} \in \mathbb{P}_0 \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$ la funzione $\prod_1^n{}_j \mid \xi_j \mid^{r_j} P^{\mathbf{r}}(\xi) \cdot [P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, p), $1 < p < \infty$.*

DIMOSTRAZIONE. La funzione considerata è somma di termini del tipo $\prod_1^n{}_j \mid \xi_j \mid^{r_j+s_j} [P(\xi)]^{-1}$ con $\mathbf{s}$ vertice di $\mathbb{P}^{\mathbf{r}}$. È dunque $\mathbf{r} + \mathbf{s} \in \mathbb{P}$ e quindi $\mathbb{P}^{\mathbf{r}+\mathbf{s}} \in \mathcal{P}^n$ od $\mathbf{r} + \mathbf{s} \in \dot{\mathbb{P}}^+$, onde $\alpha_{\mathbf{r}+\mathbf{s}} = 0$ per ognuno degli $\mathbf{s}$ indicati. D'altra parte per almeno uno di tali $\mathbf{s}$ è $\mathbf{r} + \mathbf{s} \in \dot{\mathbb{P}}^+$ onde per esso è $\beta_{\mathbf{r}+\mathbf{s}} = 0$.

COROLLARIO 3.2. *Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ la funzione $[P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, q) per ogni q tale che $q^{-1} \in [p^{-1} - k^{-1}(\mathbb{P}), p^{-1} - h^{-1}(\mathbb{P})]$ se $k(\mathbb{P}) > 1$ e $1 < p < k(\mathbb{P})$ e per ogni q tale che $q^{-1} \in]0, p^{-1} - h^{-1}(\mathbb{P})]$ se $p \in [k(\mathbb{P}), h(\mathbb{P})[\cap]1, \infty[$.*

COROLLARIO 3.3. *Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ e $\delta \in]0, 1[$ la funzione $(\delta P)(\xi) [P(\xi)]^{-1}$ (21) è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, q) per ogni p e q*

---

(21) $(\delta P)(\xi)$ è la funzione associata secondo la (3.1) al poliedro $\delta \mathbb{P}$.

tali che $1 < p < \infty$ *e* $q = p/(1 - p\eta)$, *con* $\eta \in [(1 - \delta)\, h^{-1}(\mathbb{P}), (1 - \delta)\, k^{-1}(\mathbb{P})] \cap$ $\cap\, [0, p^{-1}[$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathbf{s}^l$, $l = 1, \dots, N(\mathbb{P})$, sono i vertici di $\mathbb{P}$, $\delta\, \mathbf{s}^l$, $l = 1, \dots, N(\mathbb{P})$, sono i vertici di $\delta\, \mathbb{P}$. La funzione $(\delta P)(\xi)\, [P(\xi)]^{-1}$ è quindi somma di termini del tipo $\prod_1^n {}_j\, |\xi_j|^{\delta s_j^l}\, [P(\xi)]^{-1}$, $l = 1, \dots, N(\mathbb{P})$. Evidentemente tutti i $\delta\, \mathbf{s}^l$ appartengono a $\mathbb{P}_0 \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$ e quindi è

$$\alpha_{\delta \mathbf{s}^l} = h^{-1}(\mathbb{P}^{\delta \mathbf{s}^l}) = \max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'_{\delta \mathbf{s}^l}(\mathbb{P})} \left\{ \left(1 - \sum_1^n {}_j\, a'_j\, \delta s_j^l\right) / \sum_1^n {}_j\, a'_j \right\} =$$

$$= \max \left[0, \max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} \left\{ \left(1 - \delta \sum_1^n {}_j\, a'_j\, s_j^l\right) / \sum_1^n {}_j\, a'_j \right\}\right],$$

$$\beta_{\delta \mathbf{s}^l} = k^{-1}(\mathbb{P}^{\delta \mathbf{s}^l}) = \min_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \left\{ \left(1 - \sum_1^n {}_j\, a_j\, \delta s_j^l\right) / \sum_1^n {}_j\, a_j \right\}.$$

Il risultato enunciato segue subito dal teorema 3.1 osservando che

$$\max_l \alpha_{\delta \mathbf{s}^l} = \max \left[0, \max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} \max_l \left\{ \left(1 - \delta \Sigma\, a'_j\, s_j^l\right) / \sum_1^n {}_j\, a'_j \right\}\right] =$$

$$= \max \left[0, \max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} (1 - \delta) / \sum_1^n {}_j\, a'_j \right] = (1 - \delta)\, h^{-1}(\mathbb{P}),$$

$$\min_l \beta_{\delta \mathbf{s}^l} = \min_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \min_l \left\{ \left(1 - \delta \sum_1^n {}_j\, a_j\, s_j^l\right) / \sum_1^n {}_j\, a_j \right\} = (1 - \delta)\, k^{-1}(\mathbb{P}).$$

Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ è $h^{-1}(\mathbb{P}) = 0$; i risultati dei corollari 3.1 e 3.2 coincidono allora con quelli dei teoremi 2.4 e 2.3 di [3], quello del corollario 3.3 con un caso particolare del teorema 2.1 di [3].

COROLLARIO 3.4. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ *la funzione* $P(\xi)\, [P_0(\xi)]^{-1}$ *è un moltiplicatore in* Ψ *ed un moltiplicatore di tipo* (p, p), $1 < p < \infty$; *la funzione* $P_0(\xi)\, [P(\xi)]^{-1}$ *è un moltiplicatore di tipo* (p, p) *soltanto se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ *(nel qual caso* $P(\xi) = P_0(\xi)$*).*

TEOREMA 3.2. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ *ed* $\mathbf{r} \in \mathbb{P}$, *per le funzioni* $\prod_1^n {}_j\, |\xi_j|^{r_j}\, [P_1(\xi)]^{-1}$ *e* $\prod_1^n {}_j\, (1 + \xi_j^2)^{r_j/2}\, [P(\xi)]^{-1}$ *valgono gli stessi risultati enunciati nel teorema 3.1 per la funzione* $\prod_1^n {}_j\, |\xi_j|^{r_j}\, [P(\xi)]^{-1}$.

DIMOSTRAZIONE. Si seguono le linee della dimostrazione del teorema 3.1. Per $\mathbf{h} \in \mathcal{V}$ e $\xi \in E^n$ è

$$\left| D^{\mathbf{h}} \prod_1^n{}_j (1 + \xi_j^2)^{r_j/2} \right| \leq c \prod_1^n{}_j |\xi_j|^{-h_j} (1 + \xi_j^2)^{r_j/2} \tag{3.7}$$

e quindi

$$\prod_1^n{}_j |\xi_j|^{h_j} | D^{\mathbf{h}} P_1(\xi) | \leq c P_1(\xi).$$

Ragionando come nella dimostrazione del teorema 3.1 a proposito della $[P(\xi)]^{-1}$ si ottiene inoltre

$$| D^{\mathbf{c}} [P_1(\xi)]^{-1} | \leq c \prod_1^n{}_j |\xi_j|^{-c_j} [P_1(\xi)]^{-1}, \quad \mathbf{c} \in \mathcal{V},$$

onde per $\mathbf{k} \in \mathcal{V}$

$$\prod_1^n{}_j |\xi_j|^{k_j} \left| D^{\mathbf{k}} \left(\prod_1^n{}_j |\xi_j|^{r_j} [P_1(\xi)]^{-1} \right) \right| \leq$$

$$\leq c \sum_{\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{k}} \prod_1^n{}_j |\xi_j|^{b_j} D^{\mathbf{b}} \prod_1^n{}_j |\xi_j|^{r_j} \prod_1^n{}_j |\xi_j|^{c_j} D^{\mathbf{c}} [P_1(\xi)]^{-1} \leq$$

$$\leq c' \prod_1^n{}_j |\xi_j|^{r_j} [P_1(\xi)]^{-1} \leq 2c' \prod_1^n{}_j |\xi_j|^{r_j} [P(\xi)]^{-1}, \quad \xi \in E^n \setminus A,$$

l'ultima maggiorazione seguendo dalla $P(\xi) \leq 1 + P_1(\xi) \leq 2 P_1(\xi)$. Per la (3.6) e con gli η là indicati è quindi

$$\prod_1^n{}_j |\xi_j|^{k_j+\eta} \left| D^{\mathbf{k}} \left(\prod_1^n{}_j |\xi_j|^{r_j} [P_1(\xi)]^{-1} \right) \right| \leq c, \quad \xi \in E^n \setminus A, \ \mathbf{k} \in \mathcal{V},$$

ciò che prova il teorema per la prima delle funzioni indicate. Analogamente, tenuto conto delle (3.5) e (3.7), risulta

$$\prod_1^n{}_j |\xi_j|^{k_j} \left| D^{\mathbf{k}} \left(\prod_1^n{}_j (1 + \xi_j^2)^{r_j/2} [P(\xi)]^{-1} \right) \right| \leq c \prod_1^n{}_j (1 + \xi_j^2)^{r_j/2} [P(\xi)]^{-1},$$

$$\xi \in E^n \setminus A, \quad \mathbf{k} \in \mathcal{V}.$$

È poi $(1 + \xi_j^2)^{r_j/2} \leq c(1 + |\xi_j|^{r_j})$ e quindi $\prod_1^n{}_j (1 + \xi_j^2)^{r_j/2} \leq c \Sigma_{\mathbf{v}} \prod_1^n{}_j |\xi_j|^{v_j}$ quest'ultima somma essendo estesa a tutti i vertici $\mathbf{v}$ del parallelepipedo $\mathbb{Q}(\mathbf{r})$.

Risulta quindi

$$\prod_1^n{}_j |\xi_j|^{k_j+\eta} \left| D^{\mathbf{k}} \left(\prod_1^n{}_j (1+\xi_j^2)^{r_j/2} [P(\xi)]^{-1} \right) \right| \leq c\, \Sigma_{\mathbf{v}} \prod_1^n{}_j |\xi_j|^{v_j+\eta} [P(\xi)]^{-1}, \quad \xi \in E^n \setminus A.$$

Per (3.3) il secondo membro di quest'ultima maggiorazione resterà limitato in $E^n \setminus A$ se η è contenuto in tutti gli intervalli $[0, \beta_{\mathbf{v}}]$, per i $\mathbf{v}$ indicati, ossia, riuscendo sempre per tali $\mathbf{v}$ $\beta_{\mathbf{r}} \leq \beta_{\mathbf{v}}$, se η è contenuto in $[0, \beta_{\mathbf{r}}]$. Ciò completa la prova del teorema.

COROLLARIO 3.5. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ *le funzioni* $[P(\xi)/P_1(\xi)]^\varrho$, $\varrho = 1, -1$, *sono moltiplicatori in* Ψ *e moltiplicatori di tipo* (p, p), $1 < p < \infty$.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che le funzioni considerate sono somme di funzioni del tipo di quelle cui si riferisce il teorema 3.2, con $\mathbf{r}$ coincidente con uno dei vertici di $\mathbb{P}$ e che in tal caso è $\beta_{\mathbf{r}} = 0$.

Se $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in S^n$ e $0 \leq t_j \leq s_j$, $j = 1, \ldots, n$, indichiamo con $Q(\mathbf{t}, \mathbf{s}; \xi)$ la funzione associata in accordo alla (3.1) al parallelepipedo $\mathbb{Q}(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = \{\mathbf{r} \in S_+^n;\ t_j \leq r_j \leq s_j,\ j = 1, \ldots, n\}$:

$$Q(\mathbf{t}, \mathbf{s}; \xi) = \prod_1^n{}_j (|\xi_j|^{t_j} + |\xi_j|^{s_j}), \qquad \xi \in E^n \text{ (22)}.$$

È immediato che

LEMMA 3.6. *Se* $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in S_+^n$ *e* $\max_{1 \leq j \leq n} t_j < \min_{1 \leq j \leq n} s_j$ *è*

$$[Q(\mathbf{t}, \mathbf{s}; \xi)]^{-1} \in L_r$$

se e soltanto se $r \in \left] \max_{1 \leq j \leq n} s_j^{-1}, \min_{1 \leq j \leq n} t_j^{-1} \right[$.

LEMMA 3.7. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ *e* $k(\mathbb{P}) < h(\mathbb{P})$ *allora* $[P(\xi)]^{-1} \in L_r$ *per ogni* $r \in]k(\mathbb{P}), h(\mathbb{P})[$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in \mathbb{P}$ e $t_j < s_j$, $j = 1, \ldots, n$, tutti i vertici di $\mathbb{Q}(\mathbf{t}, \mathbf{s})$ appartengono a $\mathbb{P}$ per la i) del lemma 3.1 e quindi per la v) dello stesso lemma è

$$Q(\mathbf{t}, \mathbf{s}; \xi) \leq 2^n P(\xi), \qquad \xi \in E^n.$$

---

(22) Si tenga presente tuttavia che $\mathbb{Q}(\mathbf{t}, \mathbf{s}) \in \mathcal{P}_*^n$ se e solo se $\mathbf{t} = \mathbf{0}$.

È inoltre $\max\limits_{1\leq j\leq n} s_j^{-1} \geq k(\mathbb{P})$ il segno eguale verificandosi per $\mathbf{s} = k^{-1}(\mathbb{P})\,\mathbf{e}$ e $\min\limits_{1\leq j\leq n} t_j^{-1} \leq h(\mathbb{P})$ il segno eguale verificandosi per $\mathbf{t} = h^{-1}(\mathbb{P})\,\mathbf{e}$. Si applica poi il lemma precedente con $\mathbf{t} = h^{-1}(\mathbb{P})\,\mathbf{e}$, $\mathbf{s} = k^{-1}(\mathbb{P})\,\mathbf{e}$.

LEMMA 3.8. *Se* $0 \leq \sigma < \varrho$ *è* $\mathcal{F}^{-1}[(|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1}] \in L_{r'}(E^1)$, *per ogni* $r \in]\varrho^{-1}, \sigma^{-1}[\cap [1, \infty[$.

DIMOSTRAZIONE. Se $r \in]\varrho^{-1}, \sigma^{-1}[$ è $(|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1} \in L_r$. Per $r = 1$ $\mathcal{F}^{-1}[(|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1}]$ è continua e convergente a zero all'infinito. Per $1 < r \leq 2$ la validità del lemma è assicurata da un noto teorema di Hausdorff-Young. Se $\sigma^{-1} \leq 2$ null'altro è da provare. Se $\sigma^{-1} > 2$ ed $r \in]\max(\varrho^{-1}, 2), \sigma^{-1}[$ è $1 < (1-\sigma)^{-1} < r' < 2$ e

$$(|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-r'}\, t^{r'-2} \in L_1(E^1)$$

come subito si verifica. La tesi del lemma segue allora da un teorema di Hardy-Littlewood ([23]).

COROLLARIO 3.6. *Se* $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in S_+^n$ *e* $\max\limits_{1\leq j\leq n} t_j < \min\limits_{1\leq j\leq n} s_j$ *è*

$$\mathcal{F}^{-1}[Q(\mathbf{t}, \mathbf{s}; \xi)^{-1}] \in L_{r'}, \qquad \forall\ r \in \Big]\max_{1\leq j\leq n} s_j^{-1},\ \min_{1\leq j\leq n} t_j^{-1}\Big[\cap [1, \infty[.$$

TEOREMA 3.3. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ *allora*

$$\mathcal{F}^{-1}[P(\xi)]^{-1} \in L_{r'} \quad \forall\ r \in]k(\mathbb{P}), h(\mathbb{P})[\cap [1, \infty[.$$

DIMOSTRAZIONE. Per $r \in]k(\mathbb{P}), h(\mathbb{P})[\cap]1, 2]$ il teorema è conseguenza del lemma 3.7 e del citato teorema di Hausdorff-Young; se $k(\mathbb{P}) < 1 < h(\mathbb{P})$ è $[P(\xi)]^{-1} \in L_1$ ancora per il lemma 3.7 onde $\mathcal{F}^{-1}[P(\xi)]^{-1}$ è continua E^n e convergente a zero all'infinito. Se $r \in]k(\mathbb{P}), h(\mathbb{P})[\cap]2, \infty[$, il lemma 3.7 assicura che $[P(\xi)]^{-1} \in L_2^{\mathrm{loc}}$. D'altra parte dalla

$$[P(\xi)]^{-1} \leq n\left(\sum_1^n{}_j |\xi_j|^{m_j}\right)^{-1}, \qquad \xi \in E^n \setminus \{0\}$$

conseguenza della v) del lemma 3.1, segue che per $|\xi|$ sufficientemente grande è

$$[P(\xi)]^{-1} \leq c\,(1 + |\xi|^2)^{-m'/2},$$

([23]) Si veda [19] teorema 82, p. 113. Si può provare che per $\sigma = 0$ il lemma vale anche con $r = \infty$.

con $m' = \min_{1 \le j \le n} m_j$. Per m intero positivo sufficientemente grande è quindi

$$(1 + |\xi|^2)^{-m} [P(\xi)]^{-1} \in L_2 .$$

La funzione $[P(\xi)]^{-1}$ è quindi il prodotto di un polinomio e di una funzione di quadrato integrabile onde

$$\mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1}) \in \mathcal{D}'_{L_2} . \tag{3.8}$$

Scriviamo allora

$$[P(\xi)]^{-1} = Q(\mathbf{t}, \mathbf{s}; \xi) [P(\xi)]^{-1} [Q(\mathbf{t}, \mathbf{s}; \xi)]^{-1}$$

con $\mathbf{t} = h^{-1}(\mathbb{P})\,\mathbf{e}$ ed $\mathbf{s} = k^{-1}(\mathbb{P})\,\mathbf{e}$. I vertici di $\mathbb{Q}(\mathbf{t}, \mathbf{s})$ appartengono tutti a $\mathbb{P}$ e quindi per il teorema 3.1 la funzione $Q(\mathbf{t}, \mathbf{s}; \xi)[P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, p), $1 < p < \infty$. La tesi del teorema è allora conseguenza della (3.8), del teorema 2.2 e del corollario 3.6.

Corollario 3.7. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n_*$ *ed* $\mathbf{s} \in \mathbb{P}_0 \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$ *allora*

$$\prod_{1}^{n}{}_j (i\xi_j)^{s_j} [P(\xi)]^{-1} \in L_r \quad \forall\ r \in \,]k(\mathbb{P}^{\mathbf{s}}),\ h(\mathbb{P}^{\mathbf{s}})[\,,$$

$$D^{\mathbf{s}} \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1}) \in L_{r'} \quad \forall\ r \in \,]k(\mathbb{P}^{\mathbf{s}}),\ h(\mathbb{P}^{\mathbf{s}})[\, \cap [1, \infty[\, .$$

Dimostrazione. È

$$\prod_{1}^{n}{}_j (i\xi_j)^{s_j} [P(\xi)]^{-1} = P^{\mathbf{s}}(\xi) \prod_{1}^{n}{}_j (i\xi_j)^{s_j} [P(\xi)]^{-1} [P^{\mathbf{s}}(\xi)]^{-1}, \quad \xi \in E^n \setminus A.$$

Basta allora osservare che per il corollario 3.1 la funzione $P^{\mathbf{s}}(\xi) \prod_{1}^{n}{}_j (i\xi_j)^{s_j} \cdot [P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, p), $1 < p < +\infty$ e quindi è anche limitata su E^n e che è ancora $\mathcal{F}^{-1}\left(\prod_{1}^{n}{}_j (i\xi_j)^{s_j} \cdot [P(\xi)]^{-1}\right) \in \mathcal{D}'_{L_2}$.

Se $f(x)$ è una funzione definita in E^n ed $h \in E^n$ porremo

$$\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x) \quad \text{e} \quad \Delta_{h_j} f(x) = \Delta_h f(x) \quad \text{se} \quad h = h_j \mathbf{e}^j .$$

LEMMA 3.9. *Se* $0 \leq \sigma < \varrho < 1 + \sigma$, $r \in]\varrho^{-1}, \sigma^{-1}[\cap]1, \infty[$, *allora*

$$\| \Delta_h \mathcal{F}^{-1} ((|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1}) \|_{L_{r'}(E^1)} \leq c\, |h|^{\varrho - r^{-1}} \qquad \forall\ h \in E^1$$

con c *dipendente soltanto da* r, ϱ, σ.

DIMOSTRAZIONE. Servendosi per esempio del già citato teorema di Lizorkin si verifica che la funzione

$$\mu(t) = (|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1} (1 + t^2)^{(\varrho - \sigma)/2}, \qquad t \in E^1 \setminus \{0\},$$

che per il lemma 2.1 è un moltiplicatore in Ψ, è anche un moltiplicatore di tipo (r, q) con $1 < r < q < \infty$, $q^{-1} = r^{-1} - \sigma$, e quindi di tipo (q', r'). Da un teorema di A. P. Calderón (24) si trae poi che se $q^{-1} < u < 1$ è

$$\| \Delta_h \mathcal{F}^{-1} ((1 + t^2)^{-u/2}) \|_{L_{q'}(E^1)} = \| \mathcal{F}^{-1} ((e^{iht} - 1)(1 + t^2)^{-u/2}) \|_{L_{q'}(E^1)} \leq$$
$$\leq c\, |h|^{u - q^{-1}} \tag{3.9}$$

per ogni $h \in E^1$ con c dipendente soltanto da u e q; per il lemma 3.8 è noto inoltre che $\Delta_h \mathcal{F}^{-1} ((|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1}) \in L_{r'}(E^1)$. Applicando il teorema 2.2 e la (3.9) con $u = \varrho - \sigma$ si ha quindi

$$\| \Delta_h \mathcal{F}^{-1} ((|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1}) \|_{L_{r'}(E^1)} = \| \mathcal{F}^{-1} ((e^{iht} - 1)(1 + t^2)^{-(\varrho - \sigma)/2} \mu(t)) \|_{L_{r'}(E^1)} \leq$$
$$\leq c\, \| \mathcal{F}^{-1} ((e^{iht} - 1)(1 + t^2)^{-(\varrho - \sigma)/2}) \|_{L_{q'}(E^1)} \leq c' |h|^{\varrho - \sigma - q^{-1}} = c' \, |h|^{\varrho - r^{-1}},$$

poichè $q^{-1} = r^{-1} - \sigma < \varrho - \sigma < 1$. Si noti che se $\sigma \geq 1$ non c'è alcun r che soddisfi alle ipotesi del lemma e che se $\sigma < 1$ è $0 < \varrho - r^{-1} < \varrho - \sigma < 1$.

LEMMA 3.10. Se $0 \leq \sigma < \varrho$, $r \in]\varrho^{-1}, \sigma^{-1}[\cap]1, \infty[$ *è*

$$\| \Delta_h \mathcal{F}^{-1} ((|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1}) \|_{L_{r'}(E^1)} \leq c\, |h|^\lambda \qquad \forall\ \lambda \in]0, \min(\varrho - r^{-1}, 1)[$$

con c *indipendente da* $h \in E^1$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\varepsilon \geq 0$ tale che $0 < \varrho - r^{-1} - \varepsilon < 1$. Per il lemma 3.9 con $\sigma = 0$ e $\varrho - r^{-1} - \varepsilon$ in luogo di ϱ è

$$\| \mathcal{F}^{-1} ((e^{iht} - 1)(1 + |t|^{\varrho - r^{-1} - \varepsilon})^{-1}) \|_{L_{q'}(E^1)} \leq c\, |h|^{\varrho - r^{-1} - \varepsilon - q^{-1}} \qquad \forall\ h \in E^1$$

(24) [2] teorema 4, con $n = 1$.

con $q \in](\varrho - r^{-1} - \varepsilon)^{-1}, \infty[\, \cap\,]1, \infty[$ e c indipendente da h. Per il teorema 3.1 con $n = 1$ la funzione

$$\mu_1(t) = (|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1}(1 + |t|^{\varrho - r^{-1} - \varepsilon}) \qquad t \in E^1 \setminus \{0\}$$

è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (r, q) con $1 < r < \infty$ e $q \in [(r^{-1} - \sigma)^{-1}, \infty[$. Scelto q in entrambi gli intervalli indicati e tenuto conto dei risultati del lemma 3.8 e del teorema 2.2 si ottiene quindi

$$\| \Delta_h \mathcal{F}^{-1}((|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1}) \|_{L_{r'}(E^1)} = \| \mathcal{F}^{-1}((e^{iht} - 1)(1 + |t|^{\varrho - r^{-1} - \varepsilon})^{-1} \mu_1(t) \|_{L_{r'}(E^1)} \leq$$

$$\leq c\, |h|^{\varrho - r^{-1} - \varepsilon - q^{-1}} \qquad \forall\, h \in E^1$$

qualunque sia q sufficientemente grande ed $\varepsilon \geq 0$ tale che $\varrho - r^{-1} - \varepsilon \in]0, 1[$, onde la tesi del lemma è provata.

Corollario 3.8. *Se* $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in S_+^n$, $\max\limits_{1 \leq \iota \leq n} t_\iota < \min\limits_{1 \leq \iota \leq n} s_\iota$, $r \in]\max\limits_{1 \leq \iota \leq n} s_\iota^{-1}, \min\limits_{1 \leq \iota \leq n} t_\iota^{-1}[\, \cap\,]1, \infty[$ *è*

$$\| \Delta_{h_j} \mathcal{F}^{-1}([Q(\mathbf{t}, \mathbf{s}; \xi)]^{-1}) \|_{L_{r'}} \leq c\, |h_j|^\lambda \qquad \forall\, \lambda \in]0, \min(s_j - r^{-1}, 1)[$$

con c *indipendente da* $h_j \in E^1$.

Lemma 3.11. *Se* $0 < \varrho < 1$, $1 < p < \infty$ *è*

$$M_p^p((e^{iht} - 1)(1 + |t|^\varrho)^{-1}) \leq c\, |h|^\varrho \qquad \forall\, h \in E^1$$

con c *dipendente soltanto da* ϱ *e* p.

Dimostrazione. Le funzioni

$$\mu_2(t) = (e^{iht} - 1)(1 + t^2)^{-\varrho/2} \quad \text{e} \quad \mu_3(t) = (1 + t^2)^{\varrho/2}(1 + |t|^\varrho)^{-1}$$

sono entrambi moltiplicatori di tipo (p, p), $1 < p < \infty$. Tale è anchè il loro prodotto e per il già citato risultato di Calderón

$$M_p^p((e^{iht} - 1)(1 + |t|^\varrho)^{-1}) \leq c\, \| \mathcal{F}^{-1}((e^{iht} - 1)(1 + t^2)^{-\varrho/2}) \|_{L_1(E^1)} \leq c'\, |h|^\varrho$$

$$\forall\, h \in E^1.$$

LEMMA 3.12. *Se* $0 \leq \sigma < \varrho$, $r \in]\varrho^{-1}, \sigma^{-1}] \cap]1, \infty]$ *e* $\varrho - r^{-1} < 1$, *allora*

$$M_p^q((e^{iht} - 1)(|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1}) \leq c\,|h|^{\varrho - r^{-1}} \qquad \forall\, h \in E^1$$

per $1 < p < r$, $q^{-1} = p^{-1} - r^{-1}$ *e* c *indipendente da* h.

DIMOSTRAZIONE. Se $r^{-1} = \sigma = 0$ il lemma coincide con il lemma 3.11. Per il teorema 3.1 con $n = 1$ la funzione

$$\mu_4(t) = (1 + |t|^{\varrho - r^{-1}})(|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1} \qquad t \in E^1 \setminus \{0\}$$

è un moltiplicatore in Ψ èd un moltiplicatore di tipo (p, q) per $1 < p < \infty$ e $q^{-1} = p^{-1} - \eta$ con qualunque $\eta \in [\sigma, r^{-1}] \cap [0, p^{-1}[$, mentre per il lemma 3.11 è

$$M_p^p((e^{iht} - 1)(1 + |t|^{\varrho - r^{-1}})^{-1}) \leq c\,|h|^{\varrho - r^{-1}} \qquad \forall\, h \in E^1, \qquad 1 < p < \infty,$$

poichè è $0 < \varrho - r^{-1} < 1$. D'altra parte, sempre per il teorema 3.1 con $n = 1$, la funzione $(e^{iht} - 1)(|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1}$ è un moltiplicatore di tipo (p, q) per $1 < p < \infty$ e $q^{-1} = p^{-1} - \eta$ con qualunque $\eta \in [\sigma, \varrho] \cap [0, p^{-1}[$. Ponendo $\eta = r^{-1}$ e ricordando il teorema 2.3 si otterrà allora

$$M_p^q((e^{iht} - 1)(|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1}) \leq M_p^p((e^{iht} - 1)(1 + |t|^{\varrho - r^{-1}})^{-1})\, M_p^q(\mu_4) \leq$$

$$\leq c\,|h|^{\varrho - r^{-1}} \qquad \forall\, h \in E^1.$$

COROLLARIO 3.9. *Se* $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in S_+^n$, $\max\limits_{1 \leq \iota \leq n} t_\iota \leq \min\limits_{1 \leq \iota \leq n} s_\iota$, $r \in [\max\limits_{1 \leq \iota \leq n} s_\iota^{-1}, \min\limits_{1 \leq \iota \leq n} t_\iota^{-1}] \cap$ $\cap]1, \infty]$ *e* $0 < s_j - r^{-1} < 1$ *è*

$$M_p^q((e^{ih_j \xi_j} - 1)[Q(\mathbf{t}, \mathbf{s}; \xi)]^{-1}) \leq c\,|h_j|^{s_j - r^{-1}}$$

con $1 < p < r$, $q^{-1} = p^{-1} - r^{-1}$ *e* c *indipendente da* $h_j \in E^1$ [25].

Sia $\mathscr{A}_j(\mathbb{P}) = \{\mathbf{a} \in \mathscr{A}(\mathbb{P});\, a_j > 0\}$. Poniamo

$$\gamma_j(r) = \min_{\mathbf{a} \in \mathscr{A}_j(\mathbb{P})} \left[\left(1 - r^{-1} \sum_{1}^{n}{}_{\iota \neq j}\, a_\iota\right)\Big/ a_j\right] \quad \text{per} \quad 1 \leq r < \infty$$

$$\text{e} \qquad \gamma_j(\infty) = \min_{\mathbf{a} \in \mathscr{A}_j(\mathbb{P})} a_j^{-1} = m_j\,.$$

---

(25) Basta osservare che le funzioni $(|\xi_\iota|^{t_\iota} + |\xi_\iota|^{s_\iota})^{-1}$, $\xi_\iota \in E^1$, $0 \leq t_\iota \leq s_\iota$, sono moltiplicatori di tipo (p, q) in E^1 per $1 < p < \infty$ ed ogni q tale che $q^{-1} = p^{-1} - \eta$, $\eta \in [t_\iota, s_\iota] \cap [0, p^{-1}[$.

TEOREMA 3.4. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$, $r \in]\, k(\mathbb{P}), h(\mathbb{P}) [\, \cap \,]\, 1, \infty\, [$ *allora per ogni* $\lambda \in]\, 0, \min(\gamma_j(r) - r^{-1}, 1)\, [$, *è*

$$\| \Delta_{h_j} \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1}) \|_{L_{r'}} \leq c \,|\, h_j \,|^{\lambda}$$

ove c può dipendere da λ *ma non da* $h_j \in E^1$.

DIMOSTRAZIONE. Supporremo ovviamente $k(\mathbb{P}) < h(\mathbb{P})$. Sia $\mathbf{s} \in S_+^n$, $s_\iota = \varepsilon^{-1}$, $\iota \neq j$, $\varepsilon \in]\, k(\mathbb{P}), r\, [$, $s_j = \gamma_j(\varepsilon)$. È $s \in \dot{\mathbb{P}}^+$ e $\gamma_j(r) \geq \gamma_j(\varepsilon) > k^{-1}(\mathbb{P}) > r^{-1}$. Sia poi $\mathbf{t} = h^{-1}(\mathbb{P})$ e. È $\mathbf{t} \in \mathbb{P}$ e $h^{-1}(\mathbb{P}) < r^{-1} < \min\limits_{1 \leq \iota \leq n} s_\iota$ onde per la i) del lemma 3.1 $\mathbb{Q}(\mathbf{t}, \mathbf{s}) \subset \mathbb{P}$ e $r \in]\, \max\limits_{1 \leq \iota \leq n} s_\iota^{-1}, \min\limits_{1 \leq \iota \leq n} t_\iota^{-1} [$. Per il teorema 3.1 la funzione $Q(\mathbf{t}, \mathbf{s}; \xi)[P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, p), $1 < p < \infty$. Avendo presente il corollario 3.8 e il teorema 3.3, il teorema 2.2 assicura che per ogni $h_j \in E^1$ è

$$\| \Delta_{h_j} \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1}) \|_{L_{r'}} \leq c' \| \mathcal{F}^{-1}(e^{ih_j \xi_j} - 1)[Q(\mathbf{t}, \mathbf{s}; \xi)]^{-1} \|_{L_{r'}} \leq c \,|\, h_j \,|^{\lambda}$$

per ogni $\lambda \in [0, \min(\gamma_j(\varepsilon) - r^{-1}, 1)[$. Ciò prova il teorema poichè la maggiorazione ottenuta vale qualunque sia $\varepsilon \in]\, k(\mathbb{P}), r\, [$ e $\lim\limits_{\varepsilon \to r} \gamma_j(\varepsilon) = \gamma_j(r)$.

TEOREMA 3.5. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$, $r \in]\, k(\mathbb{P}), h(\mathbb{P})\,] \cap]\, 1, \infty\,]$ *allora per ogni* $h_j \in E^1$ *è*

$$M_p^q((e^{ih_j \xi_j} - 1)[P(\xi)]^{-1}) \leq c \,|\, h_j \,|^{\mu} \qquad 1 < p < r,\ q^{-1} = p^{-1} - r^{-1}$$

con $\mu = \gamma_j(r) - r^{-1}$ *se* $\gamma_j(r) - r^{-1} < 1$ *e con qualunque* $\mu \in]\, 0, 1\, [$ *in caso contrario* (26).

DIMOSTRAZIONE. Si procede come nella dimostrazione del teorema precedente scegliendo in ogni caso $\mathbf{t} = h^{-1}(\mathbb{P})$ e, $s_\iota = r^{-1}$, $\iota \neq j$, ed $s_j = \gamma_j(r)$ se $\gamma_j(r) - r^{-1} < 1$, $s_j \in]\, r^{-1}, 1 + r^{-1} [$ se $\gamma_j(r) \geq 1 + r^{-1}$. Si utilizza poi il corollario 3.9, il corollario 3.2 e la seconda parte del teorema 2.3.

4. DEFINIZIONE 4.1 *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ *e* $1 < p < \infty$, *indichiamo con* $W_p^{\mathbb{P}}$ *lo spazio vettoriale sul corpo complesso costituito dalle* $f \in \Phi'$ *tali che* $\mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{f}) \in \Phi_p'$ *ossia per il lemma* 1.11 *tali che*

$$|\langle \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{f}), \varphi \rangle| \leq c \,\|\, \varphi \,\|_{L_{p'}} \qquad \forall\, \varphi \in \Phi.$$

(26) In questo caso c potrà dipendere da μ.

Se $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ esiste per il corollario 1.9 una ed una sola $v \in L_p$ tale che

$$(4.1) \qquad \langle \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\widetilde{f}), \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\widetilde{\varphi}) \rangle = \int_{E^n} \overline{v}\, \varphi \, dx \qquad \forall\, \varphi \in \Phi;$$

poniamo

$$(4.2) \qquad \| f \|_{W_p^{\mathbb{P}}} = \| v \|_{L_p}.$$

TEOREMA 4.1. *L'applicazione $f \to v$ da $W_p^{\mathbb{P}}$ ad L_p definita dalla* (4.1) *è un isomorfismo di $W_p^{\mathbb{P}}$ su L_p, rispetto alla loro struttura di spazi vettoriali. La* (4.2) *definisce una norma in $W_p^{\mathbb{P}}$. Con tale norma $W_p^{\mathbb{P}}$ è uno spazio di Banach e l'applicazione suindicata una isometria lineare di $W_p^{\mathbb{P}}$ su L_p.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in W_p^{\mathbb{P}}$, ricordando che $[P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ, dalla (4.1) segue

$$(4.3) \qquad \langle f, \varphi \rangle = \int_{E^n} \overline{v}\, \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1}\widetilde{\varphi})\, dx \qquad \forall\, \varphi \in \Phi.$$

L'applicazione definita dalla (4.1) è evidentemente lineare; essa è poi iniettiva poichè se per una $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ fosse $v = 0$, per la (4.3) sarebbe $\langle f, \varphi \rangle = 0$ per ogni $\varphi \in \Phi$, ossia $f = 0$ ([27]). La stessa applicazione è inoltre suriettiva. Infatti se $v \in L_p$, la forma lineare definita in Φ da

$$\varphi \to \int_{E^n} \overline{v}\, \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1}\widetilde{\varphi})\, dx$$

è continua in Φ, poichè $[P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ. Essa definisce un elemento $f \in \Phi'$ per il quale vale la (4.1) onde $f \in W_p^{\mathbb{P}}$. Lo spazio $W_p^{\mathbb{P}}$ si può dunque considerare come l'immagine di L_p rispetto all'isomorfismo definito dalla (4.3), inverso di quello definito dalla (4.1) Da ciò seguono le altre affermazioni del teorema.

TEOREMA 4.2. *Gli spazi Φ ed $\mathcal{S}$ sono contenuti in ogni $W_p^{\mathbb{P}}$ con immersione continua e sono densi in ogni $W_p^{\mathbb{P}}$.*

([27]) Si intende lo zero di Φ'.

DIMOSTRAZIONE. Sia m un intero pari non inferiore ad $n \max\limits_{1 \le j \le n} m_j$ [28]. Per il teorema 3.2, ove a $\mathbb{P}$ si sostituisca il poliedro $\left\{ \mathbf{s} \in S_+^n ; \sum\limits_1^n{}_j\, m^{-1} s_j \le 1 \right\} \in \mathcal{P}^n$ e sia quindi $P_1(\xi) = \sum\limits_1^n{}_j (1 + \xi_j^2)^{m/2}$, la funzione $P(\xi) \left[\sum\limits_1^n{}_j (1 + \xi_j^2)^{m/2} \right]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, p), $1 < p < \infty$, poichè per tutti i vertici $\mathbf{s}^l$ di $\mathbb{P}$ è $\alpha_{\mathbf{s}^l} = 0$. Se $u \in \mathcal{S}$ è quindi

$$\mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{u}) = \mathcal{F}^{-1}\left(P(\xi) \left[\sum_1^n{}_j (1 + \xi_j^2)^{m/2} \right]^{-1} \tilde{u} \sum_1^n{}_j (1 + \xi_j^2)^{m/2} \right) \in L_p$$

poichè è ancora $\tilde{u} \sum\limits_1^n{}_j (1 + \xi_j^2)^{m/2} \in \mathcal{S}$. È dunque $u \in W_p^{\mathbb{P}}$. Inoltre

$$\| u \|_{W_p^{\mathbb{P}}} = \| \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{u}) \|_{L_p} \le c \left\| \mathcal{F}^{-1}\left(\tilde{u} \sum_1^n{}_j (1 + \xi_j^2)^{m/2} \right) \right\|_{L_p}$$

ove l'ultimo membro si può maggiorare con una stessa seminorma di u in $\mathcal{S}$, qualunque sia $u \in \mathcal{S}$. Ciò prova che l'immersione di $\mathcal{S}$ in $W_p^{\mathbb{P}}$ è continua. Tale è anche quella di Φ in $W_p^{\mathbb{P}}$, poichè la topologia di Φ è più fine di quella indotta in Φ da $\mathcal{S}$. Proviamo che Φ è denso in $W_p^{\mathbb{P}}$. Sia $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ e $v \in L_p$ l'immagine di f secondo la (4.1). Per il corollario 1.3 esiste una successione (v_ν) di elementi di Φ convergente a v in L_p. Sia $f_\nu = \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1} \tilde{v}_\nu)$. È $f_\nu \in \Phi$ e $\| f_\nu \|_{W_p^{\mathbb{P}}} = \| v_\nu \|_{L_p}$. Ne segue che

$$\| f_\nu - f \|_{W_p^{\mathbb{P}}} = \| v_\nu - v \|_{L_p}$$

onde la successione (f_ν) converge ad f in $W_p^{\mathbb{P}}$.

TEOREMA 4.3 *Se $h(\mathbb{P}) > p$, è continua l'immersione di $W_p^{\mathbb{P}}$ in Φ_q' per ogni $q \in [p/(1 - ph^{-1}(\mathbb{P})), p/(1 - pk^{-1}(\mathbb{P}))]$ se anche $k(\mathbb{P}) > p$ e per ogni $q \ge p/(1 - ph^{-1}(\mathbb{P}))$ se $k(\mathbb{P}) \le p < h(\mathbb{P})$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ dalla (4.3) e dal corollario 3.2 segue

$$| \langle f, \varphi \rangle | \le c \, \| v \|_{L_p} \| \varphi \|_{L_{q'}} \qquad \forall \varphi \in \Phi,$$

---

[28] I numeri m_j sono stati definiti nella ii) del lemma 3.1.

per i q indicati nell'enunciato poichè ogni moltiplicatore di tipo (p, q) è anche moltiplicatore di tipo (q', p'). Per le (1.5) e (4.2) è allora

$$\| f \|_{\Phi'_q} \leq c \| v \|_{L_p} = c \| f \|_{W_p^{\mathbb{P}}} .$$

COROLLARIO 4.1. *Se* $f \in \mathcal{N}$ *ed* $f \in W_p^{\mathbb{P}}$, *con* $h(\mathbb{P}) > p$, *allora* $f \in L_q$ *per i* q *indicati nel teorema* 4.3 *ed è*

$$\| f \|_{L_q} \leq c \| f \|_{W_p^{\mathbb{P}}} , \qquad \textit{ove la costante } c \textit{ è indipendente da } f.$$

DIMOSTRAZIONE. Il corollario discende dal teorema 4.3 e dal teorema 1.1.

TEOREMA 4.4. *Se* $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ *è*

i) $D^{\mathbf{r}} f \in W_p^{\mathbb{P}^{\mathbf{r}}}$ *e* $\| D^{\mathbf{r}} f \|_{W_p^{\mathbb{P}^{\mathbf{r}}}} \leq c \| f \|_{W_p^{\mathbb{P}}}$ *se* $\mathbf{r} \in \mathbb{P}_0 \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$

ii) $D^{\mathbf{r}} f \in \Phi'_p$ *e* $\| D^{\mathbf{r}} f \|_{\Phi'_p} \leq c \| f \|_{W_p^{\mathbb{P}}}$ *se* $\mathbf{r} \in \dot{\mathbb{P}}^+$

con c *indipendente da* f.

DIMOSTRAZIONE. Posto $g = \mathcal{F}^{-1} (P(\xi) \widetilde{f}) \in \Phi'_p$ è $f = \mathcal{F}^{-1} ([P(\xi)]^{-1} \widetilde{g})$ e per e per $\mathbf{r} \in \mathbb{P}_0 \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$

$$P^{\mathbf{r}}(\xi) \widetilde{D^{\mathbf{r}} f} = \prod_1^n{}_j (i \xi_j)^{r_j} P^{\mathbf{r}}(\xi) \widetilde{f} = \prod_1^n{}_j (i \xi_j)^{r_j} P^{\mathbf{r}}(\xi) [P(\xi)]^{-1} \widetilde{g}$$

le eguaglianze intendendosi in Φ'. Per il corollario 3.1 ed il teorema 2.1 è quindi $\mathcal{F}^{-1} (P^{\mathbf{r}}(\xi) \widetilde{D^{\mathbf{r}} f}) \in \Phi'_p$ e

$$\| D^{\mathbf{r}} f \|_{W_p^{\mathbb{P}^{\mathbf{r}}}} \leq c \| g \|_{\Phi'_p} = c \| f \|_{W_p^{\mathbb{P}}} .$$

Allo stesso modo si prova ii).

TEOREMA 4.5. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè* $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ *è che*

$$D^{\mathbf{s}^l} f \in \Phi'_p , \ l = 1, \dots, N(\mathbb{P}).$$

La norma (4.2) *è equivalente alla*

$$\sum_1^{N(\mathbb{P})}{}_l \| D^{\mathbf{s}^l} f \|_{\Phi'_p} . \tag{4.4}$$

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathbf{s}^l \in \dot{\mathbb{P}}^+$ la prima affermazione del teorema è la ii) del teorema precedente. Se $\mathbf{s}^l \notin \dot{\mathbb{P}}^+$ è $\mathbb{P}^{\mathbf{s}^l} \in \mathcal{P}^n$ e quindi $h(\mathbb{P}^{\mathbf{s}^l}) = +\infty$, onde dalla i) del teorema precedente e dal teorema 4.3 segue ancora che $D^{\mathbf{s}^l} f \in \Phi'_p$ e

$$(4.5) \qquad \| D^{\mathbf{s}^l} f \|_{\Phi'_p} \leq c \, \| f \|_{W^{\mathbb{P}}_p} .$$

È così provata la condizione necessaria e la maggiorazione

$$\sum_{1}^{N(\mathbb{P})}{}_l \, \| D^{\mathbf{s}^l} f \|_{\Phi'_p} \leq c \, \| f \|_{W^{\mathbb{P}}_p} \qquad \text{con } c \text{ indipendente da } f,$$

poichè per la ii) del teorema precedente la (4.5) vale anche per ogni $\mathbf{s}^l \in \dot{\mathbb{P}}^+$. Per provare la condizione sufficiente osserviamo che

$$\mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\widetilde{f}) = \sum_{1}^{N(\mathbb{P})}{}_l \, \mathcal{F}^{-1}\left(\prod_{1}^{n}{}_j \, |\, \xi_j \,|^{\mathbf{s}_j^l} \prod_{1}^{n}{}_j \, (i\,\xi_j)^{-\mathbf{s}_j^l} \, \widetilde{D^{\mathbf{s}^l} f} \right) \in \Phi'_p$$

e che le funzioni $\prod_{1}^{n}{}_j \, |\, \xi_j \,|^{\mathbf{s}_j^l} \prod_{1}^{n}{}_j \, (i\,\xi_j)^{-\mathbf{s}_j^l}$ sono moltiplicatori in Ψ e moltiplicatori di tipo (p, p), $1 < p < \infty$. Per il teorema 2.1 è quindi

$$\| f \|_{W^{\mathbb{P}}_p} = \| \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\widetilde{f}) \|_{\Phi'_p} \leq c \sum_{1}^{N(\mathbb{P})}{}_l \, \| D^{\mathbf{s}^l} f \|_{\Phi'_p} \qquad \text{con } c \text{ indipendente da } f.$$

COROLLARIO 4.2. *$W^{\mathbb{P}}_p$ si può definire come lo spazio delle $f \in \Phi'$ tali che $D^{\mathbf{s}^l} f \in \Phi'_p$, $l = 1, \dots, N(\mathbb{P})$ ed assumere in esso come norma la (4.4).*

COROLLARIO 4.3. *Se $f \in \mathcal{H}$, $f \in W^{\mathbb{P}}_p$ ed $\mathbf{r} \in \mathbb{P}_0$ è un multi-indice di interi non negativi appartenente a $\dot{\mathbb{P}}^+$ oppure tale che $h(\mathbb{P}^{\mathbf{r}}) > p$ allora $D^{\mathbf{r}} f \in L_q$ ed esiste una costante positiva c indipendente da f tale che*

$$\| D^{\mathbf{r}} f \|_{L_q} \leq c \sum_{1}^{N(\mathbb{P})}{}_l \, \| D^{\mathbf{s}^l} f \|_{\Phi'_p}$$

con $q = p$ se $\mathbf{r} \in \dot{\mathbb{P}}^+$ e per tutti i $q = p/(1 - p\eta)$, $\eta \in [h^{-1}(\mathbb{P}^{\mathbf{r}}), k^{-1}(\mathbb{P}^{\mathbf{r}})] \cap \cap [0, p^{-1}[$ se $\mathbf{r} \in \mathbb{P}_0 \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$. In particolare se tutti gli $\mathbf{s}^l$ sono multi-indici di *interi non negativi è* $D^{\mathbf{s}^l} f \in L_p$ *e*

$$\| D^{\mathbf{r}} f \|_{L_q} \leq c \sum_{1}^{N(\mathbb{P})}{}_l \| D^{\mathbf{s}^l} f \|_{L_p}$$

per i q suindicati.

DIMOSTRAZIONE Il corollario è conseguenza dei teoremi 4.4 e 4.5 e del corollario 1.9, tenuto conto che se $f \in \mathcal{N}$ ed $\mathbf{r}$ è un multi-indice di interi non negativi è pure $D^{\mathbf{r}} f \in \mathcal{N}$, come segue dalla formula di rappresentazione (1.2′) di ogni $f \in \mathcal{D}'_{L_p, \alpha}$.

TEOREMA 4.6. *È* $W_p^{\mathbb{P}_0} \subset W_p^{\mathbb{P}} \subset W_p^{\mathbb{P}^+}$ *e l'immersioae del primo nel secondo e di questo nel terzo di tali spazi è continua.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in W_p^{\mathbb{P}_0}$ è $g = \mathcal{F}^{-1}(P_0(\xi)\tilde{f}) \in \Phi'_p$. Per il corollario 3.4 la funzione $P(\xi)[P_0(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, p), $1 < p < \infty$. Il teorema 2.1 assicura allora che

$\mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{f}) = \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)[P_0(\xi)]^{-1}\tilde{g}) \in \Phi'_p$ e

$$\| f \|_{W_p^{\mathbb{P}}} = \| \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{f}) \|_{\Phi'_p} \leq c \| g \|_{\Phi'_p} = c \| f \|_{W_p^{\mathbb{P}_0}}.$$

Analogamente si mostra la continuità dell'immersione di $W_p^{\mathbb{P}}$ in $W_p^{\mathbb{P}^+}$ utilizzando il fatto che dal teorema 3.1 segue che $P^+(\xi)[P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, p), $1 < p < \infty$.

COROLLARIO 4.4. *Se* $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ *ed* $\mathbf{r} \in \mathbb{P}^+$ *allora le norme* $\| D^{\mathbf{r}} f \|_{W_p^{\mathbb{P}^{\mathbf{r}}}}$ *se* $\mathbf{r} \in \mathbb{P}^+ \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$ *e* $\| D^{\mathbf{r}} f \|_{\Phi'_p}$ *se* $\mathbf{r} \in \dot{\mathbb{P}}^+$ *si possono maggiorare anzichè con* $\| f \|_{W_p^{\mathbb{P}}}$ *come nel teorema 4.4. con* $\| f \|_{W_p^{\mathbb{P}^+}}$ *ovvero con* $\sum_{\mathbf{s}^l \in \mathbb{P}^+} \| D^{\mathbf{s}^l} f \|_{\Phi'_p}$. *Vale evidentemente anche in questo caso un risultato analogo a quello del corollario 4.3.*

TEOREMA 4.7. *Se* $\delta \in]0, 1[$ *e* $h(\mathbb{P}) > (1 - \delta) p$ *allora è continua l'immersione di* $W_p^{\mathbb{P}}$ *in* $W_q^{\delta \mathbb{P}}$ *per ogni* $q = p/(1 - p\eta)$, $\eta \in [(1 - \delta) h^{-1}(\mathbb{P}), (1 - \delta) k^{-1}(\mathbb{P})] \cap [0, p^{-1}[$.

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ è $g = \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{f}) \in \Phi'_p$ onde per il corollario 3.3 ed il teorema 2.1

$$\mathcal{F}^{-1}((\delta P)(\xi)\tilde{f}) = \mathcal{F}^{-1}((\delta P)(\xi)[P(\xi)]^{-1}\tilde{g}) \in \Phi'_q$$

$$\|f\|_{W_q^{\delta\mathbb{P}}} = \|\mathcal{F}^{-1}((\delta P)(\xi)\tilde{f})\|_{\Phi'_q} \leq c\,\|g\|_{\Phi'_p} = c\,\|f\|_{W_p^{\mathbb{P}}}$$

per i q indicati nell'enunciato.

DEFINIZIONE 4.2. *Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ e $1 < p < \infty$, indichiamo con $L_p^{\mathbb{P}}$ lo spazio vettoriale sul corpo complesso costituito dalle $u \in \mathcal{S}'$ tali che $\mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{u}) \in L_p$. In $L_p^{\mathbb{P}}$ consideriamo la norma*

$$\|u\|_{L_p^{\mathbb{P}}} = \|\mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{u})\|_{L_p}.$$

Ricordando che $P_1(\xi)$ e $[P_1(\xi)]^{-1}$ sono moltiplicatori in $\mathcal{S}$, allo stesso modo del teorema 4.1 si prova che

TEOREMA 4.8. *Esiste una isometria lineare di $L_p^{\mathbb{P}}$ su L_p.*
Da questo e dal teorema 4.1 segue allora

COROLLARIO 4.5. *Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ esiste una isometria lineare di $W_p^{\mathbb{P}}$ su $L_p^{\mathbb{P}}$.*

TEOREMA 4.9. *$L_p^{\mathbb{P}}$ coincide, con equivalenza delle norme, con lo spazio delle $f \in \mathcal{N}$ tali che $f \in W_p^{\mathbb{P}}$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $u \in L_p^{\mathbb{P}}$ allora per il teorema 3.2 è

$$|\langle u, \varphi\rangle| = \left|\int_{E^n} \overline{\mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{u})}\,\mathcal{F}^{-1}([P_1(\xi)]^{-1}\tilde{\varphi})\,dx\right| \leq c\,\|\mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{u})\|_{L_p}\,\|\varphi\|_{L_{q'}}$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ e $q = p/(1 - p\eta)$, $\eta \in [0, k^{-1}(\mathbb{P})] \cap [0, p^{-1}[$. E' dunque $u \in L_q$ per i q indicati e quindi $u \in \mathcal{N}$. Ricordando il corollario 3.5 risulta poi

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{u}), \varphi\rangle = \int_{E^n} \overline{\mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{u})}\,\mathcal{F}^{-1}(P(\xi)[P_1(\xi)]^{-1}\tilde{\varphi})\,dx \qquad \forall\, \varphi \in \Phi$$

e

$$|\langle \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{u}, \varphi\rangle| \leq c \,\| \mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{u})\|_{L_p} \|\varphi\|_{L_{p'}} \qquad \forall\ \varphi \in \Phi,$$

onde $\mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{u}) \in \Phi'_p$ e quindi $u \in W_p^{\mathbb{P}}$. Sia ora $f \in \mathcal{N}$ ed $f \in W_p^{\mathbb{P}}$. Poichè $h(\mathbb{P}) = +\infty$ per il corollario 4.1 è $f \in L_q$ per gli stessi q indicati più sopra. Se m è un intero pari non inferiore ad $n \max\limits_{1\leq j\leq n} m_j$ la funzione $P_1(\xi)\cdot$ $\cdot\left[\sum_1^n{}_j(1+\xi_j^2)^{m/2}\right]^{-1}$ è per il teorema 3.2 ed il corollario 3.5 un moltiplicatore di tipo (p, p), $1 < p < \infty$ (29). Pertanto per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ è

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{f}), \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{\varphi})\rangle =$$

$$= \int_{E^n} \bar{f}\, \mathcal{F}^{-1}\left(P_1(\xi)\left[\sum_1^n{}_j(1+\xi_j^2)^{m/2}\right]^{-1}\left[\sum_1^n{}_j(1+\xi_j^2)^{m/2}\right]\tilde{\varphi}\right) dx$$

e quindi

$$|\langle \mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{f}, \varphi\rangle| \leq c\,\|f\|_{L_q}\left\| \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_1^n{}_j(1+\xi_j^2)^{m/2}\tilde{\varphi}\right)\right\|_{L_{q'}} \leq$$

$$\leq c'\,\|f\|_{L_q} \sup_{|\mathbf{k}|\leq m} \|D^{\mathbf{k}}\varphi\|_{L_{q'}} \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{S}.$$

con $\mathbf{k}$ multi-indice di interi non negativi. Ciò prova che $\mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{f}) \in \mathcal{D}'_{L_q} \subset \mathcal{N}$. D'altra parte per il corollario 3.5 ed il teorema 2.1 è

$$\mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{f}) = \mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)[P(\xi)]^{-1}P(\xi)\tilde{f}) \in \Phi'_p$$

onde per il corollario 1.9 $\mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{f}) \in L_p$. Ciò completa la prova del teorema.

TEOREMA 4.10. *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$, $f \in \mathcal{N}$ *ed* $f \in W_p^{\mathbb{P}}$, $h(\mathbb{P}) > \max(p, k(\mathbb{P}))$ *allora esiste una (ed una sola)* $v \in L_p$ *tale che* f *coincide quasi ovunque in* E^n *con la funzione*

$$u(x) = \int_{E^n} \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1})(x-y)\,v(y)\,dy \tag{4.6}$$

---

(29) È $P_1(\xi)\left[\sum_1^n{}_j(1+\xi_j^2)^{m/2}\right]^{-1} = P_1(\xi)[P(\xi)]^{-1}P(\xi)\left[\sum_1^n{}_j(1+\xi_j^2)^{m/2}\right]^{-1}$. Si applica il teorema 3.2 con $\mathbb{P} = \left\{s \in S_+^n;\ \sum_1^n{}_j m^{-1} s_j \leq 1\right\}$.

ed è $\|f\|_{W_p^{\mathbb{P}}} = \|v\|_{L_p}$. *Inoltre se* $\mathbf{s} \in \mathbb{P}_0 \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$ *è un multi-indice di interi non negativi allora quasi ovunque in* E^n

$$4.6') \qquad D^{\mathbf{s}} u(x) = \int_{E^n} D_x^{\mathbf{s}} \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1})(x-y)\, v(y)\, dy = D^{\mathbf{s}} f(x).$$

Dimostrazione. Esiste un $r \in]k(\mathbb{P}), h(\mathbb{P})[\cap [1, \infty[$ tale che $r > p$. Pertanto per il teorema 3.3 dalla (4.3) segue che

$$(4.7) \qquad \langle f, \varphi \rangle = \int_{E^n} \bar{v}(y)\, dy \int_{E^n} \overline{\mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1})(x-y)}\, \varphi(x)\, dx =$$

$$= \int_{E^n} \varphi(x)\, dx \int_{E^n} \overline{\mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1})(x-y)\, v(y)}\, dy = \langle u, \varphi \rangle \quad \forall\, \varphi \in \Phi.$$

D'altra parte per il teorema 3.3 e per noti teoremi sulla convoluzione delle funzioni $u \in L_q$ per $q^{-1} = p^{-1} - r^{-1}$, mentre per il corollario 4.1 allo stesso L_q appartiene anche f. Dal corollario 1.3 segue allora che $f(x) = u(x)$ quasi ovunque in E^n.

Sia ora $\mathbf{s} \in \mathbb{P}_0 \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$ un multi-indice di interi non negativi. Dalla ii) del corollario 3.2 segue che $h(\mathbb{P}^{\mathbf{s}}) > h(\mathbb{P})$ e $k(\mathbb{P}^{\mathbf{s}}) < h(\mathbb{P}^{\mathbf{s}})$ [30]. Sia $r > p$ tale che $r \in]k(\mathbb{P}^{\mathbf{s}}), h(\mathbb{P}^{\mathbf{s}})[\cap [1, \infty[$. Dalla (4.7) segue che

$$(4.7') \qquad \langle D^{\mathbf{s}} u, \varphi \rangle = \langle D^{\mathbf{s}} f, \varphi \rangle = (-1)^{|\mathbf{s}|} \langle f, D^{\mathbf{s}} \varphi \rangle =$$

$$= (-1)^{|\mathbf{s}|} \int_{E^n} \bar{v}(y)\, dy \int_{E^n} \overline{\mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1})(x-y)}\, D^{\mathbf{s}} \varphi(x)\, dx =$$

$$= \int_{E^n} \bar{v}(y)\, dy \int_{E^n} \overline{D_x^{\mathbf{s}} \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1})(x-y)}\, \varphi(x)\, dx =$$

$$= \int_{E^n} \varphi(x)\, dx \int_{E^n} \overline{D_x^{\mathbf{s}} \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1})(x-y)\, v(y)}\, dy \quad \forall\, \varphi \in \Phi$$

---

[30] Se $k(\mathbb{P}^{\mathbf{s}}) = h(\mathbb{P}^{\mathbf{s}})$ esisterebbero un $\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$ ed un $\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})$ tali che $\sum_1^n {}_j a'_j \cdot [1 - \sum_1^n {}_j a'_j s_j]^{-1} = \sum_1^n {}_j a_j \left[1 - \sum_1^n {}_j a_j s_j\right]^{-1}$. Per la B_*) della definizione 3.1 deve allora essere $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ e quindi $h(\mathbb{P}) = k(\mathbb{P})$.

ove l'ultimo integrale scritto, che è la funzione a secondo membro di (4.6′), appartiene ad L_q per $q^{-1} = p^{-1} - r^{-1}$ a causa del corollario 3.7 e quindi ad $\mathcal{N}$. Avendo presente che anche $D^s f$ e $D^s u$ appartengono ad $\mathcal{N}$, la (4.7′) assicura, a causa del teorema 1.1, che quasi ovunque in E^n vale la (4.6′).

COROLLARIO 4.6 *Se $h(\mathbb{P}) > \max(p, k(\mathbb{P}))$ lo spazio delle $f \in \mathcal{N}$ tali che $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ coincide con lo spazio delle (classi* [31]*) delle) funzioni rappresentate da* (4.6) *con $v \in L_p$.*

DIMOSTRAZIONE. Il corollario è conseguenza del teorema precedente e del fatto che se $v \in L_p$ la u data da (4.6) appartiene ad $\mathcal{N}$, come si è osservato più sopra e che è

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{u}), \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \Phi$$

onde $\mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{u}) \in \Phi'_p$.

TEOREMA 4.11. *Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$, $1 < p < \infty$, $h(\mathbb{P}) > \max(p, k(\mathbb{P}))$ e $q^{-1} = p^{-1} - r^{-1}$ con $r \in]k(\mathbb{P}), h(\mathbb{P})] \cap]p, \infty]$, allora per ogni $h_j \in E^1$ e qualunque sia $f \in \mathcal{N}$ tale che $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ è*

$$\| \Delta_{h_j} f \|_{L_q} \leq c \, | h_j |^{\mu} \, \| f \|_{W_p^{\mathbb{P}}}$$

con $\mu = \gamma_j(r) - r^{-1}$ se $\gamma_j(r) - r^{-1} < 1$ e con qualunque $\mu \in]0, 1[$ in caso contrario.

DIMOSTRAZIONE. Dalla (4.6) segue

$$\Delta_{h_j} u(x) = \int_{E^n} \mathcal{F}^{-1}((e^{ih_j \xi_j} - 1)[P(\xi)]^{-1})(x - y)\, v(y)\, dy$$

onde il teorema è conseguenza del teorema 3.5 e del fatto che u ed f coincidono quasi ovunque in E^n.

TEOREMA 4.12. *Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$, $1 < p < \infty$, $k(\mathbb{P}) < p < h(\mathbb{P})$ allora ogni $f \in \mathcal{N}$ tale che $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ coincide quasi ovunque con una funzione continua su E^n e convergente a zero all'infinito e quasi ovunque in E^n e per una qualunque di tali f è*

$$| f(x) | \leq c \, \| f \|_{W_p^{\mathbb{P}}} \qquad e \qquad | \Delta_{h_j} f(x) | \leq c \, | h_j |^{\lambda} \, \| f \|_{W_p^{\mathbb{P}}}$$

---

(31) Rispetto alla eguaglianza quasi ovunque in E^n.

con un qualunque $\lambda \in]\, 0, \min(\gamma_j(p) - p^{-1}, 1)\, [$ *e* c *indipendente oltre che da* f *anche da* $h_j \in E^1$.

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione del teorema è conseguenza del teorema 4.10, del fatto che per il teorema 3.3 $\mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1}) \in L_{p'}$ e di un noto teorema sulla convoluzione delle funzioni. Dalla (4.6) segue poi

$$| u(x) | \leq \| \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1}) \|_{L_{p'}} \| v \|_{L_p} = c \| f \|_{W_p^{\mathbb{P}}} .$$

La seconda affermazione del teorema è conseguenza del teorema 3.4 poichè

$$| \Delta_{h_j} u(x) | \leq \| \Delta_{h_j} \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1}) \|_{L_{p'}} \| v \|_{L_p} \leq c \, | h_j |^{\lambda} \| f \|_{W_p^{\mathbb{P}}} .$$

Utilizzando la (4.6′) si possono ottenere, nelle ipotesi del teorema 4.10, risultati riguardanti le derivate di f. Proviamo qui come esempio il seguente

TEOREMA 4.13. *Se* $f \in \mathcal{N}$, $f \in W_p^{\mathbb{P}}$, $k(\mathbb{P}) < p < h(\mathbb{P})$ *ed* $\mathbf{s}$ *è un multi-indice di interi non negativi tale che* $\mathbf{s} \in \mathbb{P}_{op} \setminus \dot{\mathbb{P}}_{op}^{+}$, *ove*

$$\mathbb{P}_{op} = \bigcap_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \left\{ \mathbf{s} \in S_{+}^{n} ; \sum_{1}^{n}{}_{j} a_j s_j \leq 1 - p^{-1} \sum_{1}^{n}{}_{j} a_j \right\} \in \mathcal{P}^n$$

allora $D^{\mathbf{s}} f$ *coincide quasi ovunque in* E^n *con una funzione continua e convergente a zero all'infinito e quasi ovunque in* E^n *è*

$$| D^{\mathbf{s}} f(x) | \leq c \| f \|_{W_p^{\mathbb{P}}}$$

con c *indipendente da* f.

DIMOSTRAZIONE. Da $\mathbf{s} \in \mathbb{P}_{op} \setminus \dot{\mathbb{P}}_{op}^{+}$ ricordando il lemma 3.2 segue che $h(\mathbb{P}^{\mathbf{s}}) \geq h(\mathbb{P})$ e $k(\mathbb{P}^{\mathbf{s}}) < p$. Il teorema è allora conseguenza della (4.6′) e del corollario 3.7.

BIBLIOGRAFIA

[1] BURENKOV, V. I., *Teoremy vloženiya i prodolženiya dlya klassov differenciruemyh funkcii mnogih peremennyh, zadannyh vo vsem prostranstve,* Itogi Nauki, Matematičeskii Analiz 1965, VINITI Moskva 1966.

[2] CALDERÒN, A. P., *Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions,* Proceedings of Symposia in pure Math., IV, 1961.

[3] CATTABRIGA, L., *Alcuni teoremi di immersione per spazi funzionali generalizzanti gli spazi di S. L. Sobolev,* Annali dell'Univ. di Ferrara, Sez. VII, 12, 1967.

[4] CATTABRIGA, L., *Alcuni teoremi di immersione per spazi funzionali generalizzanti gli spazi di S. L. Sobolev,* Atti del Convegno su le equazioni alle derivate parziali, Bologna 22-24 aprile 1967.

[5] CATTABRIGA, L., *Alcune osservazioni su certi moltiplicatori dell'integrale di Fourier,* Annali dell'Univ. di Ferrara, Sez. VII, 13, 1968.

[6] EGGLESTON, H. G. *Convexity,* Cambridge Univ. Press, 1963.

[7] FRIEDMAM, A., *Generalized functions and partial differential equations,* Prentice-Hall, 1963.

[8] GEL'FAND, I. M. - ŠILOV, G. E., *Prostranstva osnovnyh i obobščennyh funkcii,* Fizmatigz, Moskva 1958.

[9] IL'IN, V. P., *O neravenstvah meždu normami častnyh proizvodnyh funkcii mnogih peremennyh,* Trudy MIAN, 84, 1965.

[10] LIZORKIN, P. I., *Obobščennoe liuvillevskoe differencirovanie i funkcional'nye prostranstva* $L_p^r(E_n)$. *Teoremy vloženiya,* Matem. Sb., 60, 1963.

[11] LIZORKIN, P. I, *Neisotropnye besselevy potencialy. Teoremy vloženiya dlya prostranstva Soboleva* $L_p^{(r_1, \dots, r_n)}$ *s drobnymi proizvodnymi,* Doklady Akad. nauk SSSR, 170, 1966.

[12] LIZORKIN, P. I., *O mul'tiplikatorah integralov Fur'e v prostranstvah* $L_{p,\vartheta}$, Trudy MIAN, 89, 1967.

[13] LIZORKIN, P, I. - NIKOL'SKII, S. M. *Klassifikaciya differenciruemyh funkcii na ocnove prostranstv s dominiruyuščei smešannoi proizvodnoi,* Trudy MIAN 77, 1965.

[14] NIKOL'SKII, S. M., *Ob ustoičivyh graničnyh značeniyah differenciruemoi funkcii mnogih peremennyh,* Matem. Sb., 61, 1963.

[15] NIKOL'SKII, S. M. *Približenie funkcii mnogih peremennyh i teoremy vloženiya,* Nauka, Moskva 1969.

[16] RAMAZANOV, M. D., *Funkcional'nye prostranstva i preobrazovanie Fur'e,* Trudy MIAN, 91, 1967.

[17] SCHWARTZ, L., *Théorie des distributions,* II, Hermann, Parigi 1959.

[18] STRICHARTZ, R. S., *Sobolev inequalities and extension theorems for functions with certain* L^p*-derivatives,* Studia Mathem., 30, 1968.

[19] TITCHMARSH, E. C., *Theory of Fourier integrals,* Oxford, 1948.

[20] VOLEVIC, L. R. - PANEYAH, B. P., *Nekotorye prostranstva obobščennyh funkcii i teoremy vloženiya,* Uspehi Matem. nauk, 20, 1965.

Istituto Matematico, Università di Ferrara