ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

MARIO POLETTI

**Iperalgebre su schiere valutanti**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série*, tome 23, nº 4 (1969), p. 745-770

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_4_745_0>

# IPERALGEBRE SU SCHIERE VALUTANTI

MARIO POLETTI [1]

In un suo recente lavoro (cfr. n$^0$ 11 di [1]), I. Barsotti ha risolto il problema della specializzazione delle classi di isogenia analitica delle varietà abeliane in caratteristica positiva. Più precisamente vengono trovate condizioni necessarie dei tipi di isogenia delle varietà abeliane ottenute riducendo varietà abeliane di un assegnato tipo di isogenia. Resta comunque aperta la questione se tali condizioni siano anche sufficienti.

La tecnica adottata nel citato lavoro utilizza elementi inerenti la teoria delle iperalgebre definite su schiere valutanti, ed è suscettibile di generalizzazioni alla teoria della specializzazione delle iperalgebre locali in generale.

I capitoli 1 e 2 del presente lavoro espongono i primi elementi delle citate teorie, e ne riconducono lo studio a quello di opportune classi di moduli. È a questo proposito da notare che C. Traverso ha studiato alcuni aspetti della teoria della specializzazione dei moduli canonici (cfr. [3]); i legami con tale teoria sono espressi in 2.6 e 2.7.

Nel capitolo 3 vengono determinate condizioni necessarie dei tipi di isogenia delle iperalgebre locali ottenute riducendo iperalgebre locali di tipo di isogenia assegnato (cfr. 3.2). La dimostrazione di 3.2 è presa a prestito da I. Barsotti (cfr. 11.6, pg. 157 di [1]).

Naturale conclusione del capitolo 3, *avrebbe voluto essere* la dimostrazione della congettura che le citate condizioni necessarie siano anche sufficienti. Al riguardo non ho ancora risultati concreti. È comunque significativo il risultato di 3.7, che prova vera la congettura per quelle iperalgebre locali aventi solo blocchi di pendenza 1.

Per i termini ed i simboli usati nel presente lavoro valgono le convenzioni esposte qui di seguito.

---

Pervenuto alla Redazione il 2 Luglio 1969.

(1) Lavoro eseguito nell'ambito dei Raggruppamenti di Ricerca del C. N. R.

Col termine *iperalgebre* intenderemo gli enti definiti nel capitolo 3, punto 19, pg. 284 di [MA]. Quelle tra tali iperalgebre che sono anelli locali vengono qui chiamate *iperalgebre locali*; si tratta quindi degli enti riferiti come *ipercampi* in [MC]. Col termine di *iperalgebre colocali* indichiamo quelle iperalgebre che sono duali di iperalgebre locali; tali enti in [MC], vengono chiamati *iperalgebre.*

Alle iperalgebre locali e colocali applicheremo la terminologia di [MC]; ad esempio le *iperalgebre locali equidimensionali* sono gli enti riferiti in [MC] col nome di *ipercampi equidimensionali,* e in [MA] col nome di *ipercampi inseparabili.*

Se $A$ è un qualsiasi anello perfetto di caratteristica prima, indicheremo con *vect* $A$ l'anello dei vettori infiniti di Witt a componenti in $A$. Data inoltre un'indeterminata $t$, indicheremo con $T_A$ l'anello ottenuto considerando il (*vect* $A$)-modulo destro delle serie formali nelle potenze non negative di $t$ a coefficienti (a destra) in *vect* $A$, e ponendo $at = ta^{\pi}$ (cfr. 1., pg. 308 di [MC]); $\pi$ è l'endomorfismo di Frobenius di *vect* $A$.

Ciò posto, se $D$ è un'iperalgebra colocale su un corpo $\mathbb{k}$, indichiamo con $\mathcal{V}D$ il $T_{\mathbb{k}}$-modulo canonico dei vettori canonici di Witt a componenti in $D$ (cfr. 55., pg. 504 di [MA]); tale modulo, in [MC], viene indicato con $\mathcal{C}D$.

Se $R$ è un'iperalgebra locale equidimensionale su $\mathbb{k}$, indichiamo con $\mathcal{C}R$ il (*vect* $\mathbb{k}$)-modulo canonico dei covettori canonici di $R$ (cfr. 25, pg. 295 di [MA]). In questo caso, se $D$ è l'iperalgebra colocale duale di $R$, $\mathcal{V}D$ è un (*vect* $\mathbb{k}$)-modulo canonico che risulta, come tale, duale di $\mathcal{C}R$ (cfr. 55, pg. 504 di [MA]).

## CAPITOLO 1.

## LE IPERSCHIERE

In questo capitolo $\mathbb{k}$ è un corpo algebricamente chiuso di caratteristica $p \neq 0$, $R$ è un'iperalgebra locale di dimensione $n$ su $\mathbb{k}$, e $D$ è l'iperalgebra colocale duale di $R$. I coprodotti di $R$ e di $D$ saranno indicati con $\mathbf{P}_R$, $\mathbf{P}_D$ rispettivamente; le coidentità di $R$ e di $D$ saranno indicate con $\varepsilon_R$, $\varepsilon_D$ rispettivamente. In generale scriveremo semplicemente $\mathbf{P}$ in luogo di $\mathbf{P}_R$, $\mathbf{P}_D$, ed $\varepsilon$ in luogo di $\varepsilon_R$, $\varepsilon_D$. La dualità che lega $D$ ed $R$ sarà indicata con $D \times R \xrightarrow{\circ} \mathbb{k}$.

Indichiamo inoltre con $\mathfrak{O}$ una schiera valutante di $\mathbb{k}$, e con $\mathfrak{P}$, $k$ rispettivamente il primo massimo ed il corpo residuo di $\mathfrak{O}$. Il corpo $k$ risulta di caratteristica $p$, ed è algebricamente chiuso.

**1.** Una sotto-$\mathbb{O}$-algebra chiusa $H$ di $R$ si dirà una *sotto-$\mathbb{O}$-iperalgebra* di $R$, se gode della seguente proprietà:

$$
1.1 \qquad \begin{cases} H \ni 1 \\ \mathbf{P}H \subseteq H \mathbin{\overline{\times}}_{\mathbb{O}} H \text{ (cfr. l'appendice di [2])} \\ \varepsilon H \subseteq \mathbb{O}. \end{cases}
$$

Analogamente si definiscono le sotto-$\mathbb{O}$-iperalgebre di $D$.

1.2 Teorema. *Sia $H$ una sotto-$\mathbb{O}$-iperalgebra di $R$. Se $H$, come sotto-$\mathbb{O}$-modulo di $R$, è una $\mathbb{O}$-schiera di $R$* (cfr. 1 di [2]), *sussistono gli asserti seguenti:*

*a)* $H^*$ (cfr. 1. di [2]) *è una sotto-$\mathbb{O}$-iperalgebra di $D$,*

*b)* $\mathbb{K}H = R$, $\mathbb{K}H^* = D$,

*c)* $H^{**} = H$,

*d)* $H^*/\overline{\mathbb{P}H^*}$ *e* $H/\overline{\mathbb{P}H}$, *rispetto al coprodotto ed alla coidentità indotti rispettivamente da* $\mathbf{P}_D$, $\varepsilon_D$ e $\mathbf{P}_R$, $\varepsilon_R$, *sono iperalgebre su $k$ duali l'una dell'altra rispetto alla dualità indotta da* $H^* \times H \xrightarrow{\circ} \mathbb{O}$,

*e) dato comunque un prolungamento algebricamente chiuso $\mathbb{K}'$ di $\mathbb{K}$ ed una schiera valutante $\mathbb{O}'$ di $\mathbb{K}'$ che prolunga $\mathbb{O}$, allora $\mathbb{O}' \mathbin{\overline{\times}}_{\mathbb{O}} H^*$, $\mathbb{O}' \mathbin{\overline{\times}}_{\mathbb{O}} H$ risultano sotto-$\mathbb{O}'$-iperalgebre di $\mathbb{K}' \mathbin{\overline{\times}}_{\mathbb{K}} D$, $\mathbb{K}' \mathbin{\overline{\times}}_{\mathbb{K}} R$, duali l'una dell'altra rispetto alla dualità che prolunga $H^* \times H \xrightarrow{\circ} \mathbb{O}$.*

Dim. Siano $d_1, d_2 \in H^*$. Si ha $(d_1 d_2) \circ H = \mu_D (d_1 \mathbin{\overline{\times}} d_2) \circ H = (d_1 \mathbin{\overline{\times}} d_2) \circ \circ \mathbf{P}_R H \subseteq (d_1 \mathbin{\overline{\times}} d_2) \circ (H \mathbin{\overline{\times}}_{\mathbb{O}} H)$; $\mu_D$ è il trasposto di $\mathbf{P}_R$. Essendo $d_1 \circ H \subseteq \mathbb{O}$, $d_2 \circ H \subseteq \mathbb{O}$, si conclude che $(d_1 d_2) \circ H \subseteq \mathbb{O}$, ossia che $d_1 d_2 \in H^*$.

Siccome $1 \circ H = \varepsilon H \subseteq \mathbb{O}$ (cfr. 3.14, pg. 288 di [MA]), si ha che $1 \in H^*$.

Sia $d \in H^*$. Si ha $(\mathbf{P}_D d) \circ (H \mathbin{\overline{\times}}_{\mathbb{O}} H) = d \circ \mu_R (H \mathbin{\overline{\times}}_{\mathbb{O}} H) = d \circ H \subseteq \mathbb{O}$; $\mu_R$ è il trasposto di $\mathbf{P}_D$. Allora $\mathbf{P}_D d \in (H \mathbin{\overline{\times}}_{\mathbb{O}} H)^*$. Siccome $H$ è una $\mathbb{O}$-schiera di $R$ si ha $(H \mathbin{\overline{\times}}_{\mathbb{O}} H)^* = H^* \mathbin{\overline{\times}}_{\mathbb{O}} H^*$; si conclude che $\mathbf{P}_D d \in H^* \mathbin{\overline{\times}}_{\mathbb{O}} H^*$.

Siccome $1 \in H$, si ha infine $\varepsilon H^* = H^* \circ 1 \subseteq \mathbb{O}$.

Le precedenti considerazioni provano l'asserto *a)*; i rimanenti asserti sono conseguenze pressochè banali delle ipotesi e di *a)*, C. V. D..

Tenuto conto di 3.1 di [2], se $\mathbb{O}$ è archimedea, le sole sotto-$\mathbb{O}$-iperalgebre di $R$ verificanti le condizioni *a)*, *b)*, *c)*, *d)*, *e)* di cui nel precedente teorema, sono quelle che risultano $\mathbb{O}$-schiere di $R$.

Sia $H$ una sotto-$\mathbb{O}$-iperalgebra di $R$ che risulti una $\mathbb{O}$-schiera di $R$. Allora $H/\overline{\mathbb{P}H}$ *risulta un'iperalgebra locale di dimensione $n$ su $k$* se e solo *esiste* *un sistema regolare* $(x) = (x_1, \dots, x_n)$ *di parametri di* $R$ *tale che* $H = \mathbb{O}\,[x]$ (cfr. il capitolo 2 di [2]).

Tenuto conto della precedente osservazione, una sotto-$\mathbb{O}$-iperalgebra $H$ di $R$, che risulti una $\mathbb{O}$-schiera di $R$, e tale che $H/\overline{\mathbb{P}H}$ sia un'iperalgebra locale di dimensione $n$ su $k$, si dirà una $\mathbb{O}$-*iperschiera* di $R$. Una sotto-$\mathbb{O}$-iperalgebra di $D$ si dirà una $\mathbb{O}$-*iperschiera* di $D$, se risulta duale di una $\mathbb{O}$-iperschiera di $R$.

Se $H$ è una $\mathbb{O}$-iperschiera di $R$, l'iperalgebra su $k$, $H^*/\mathbb{P}H^*$, in quanto duale di $H/\overline{\mathbb{P}H}$, risulta un'iperalgebra colocale.

1.3 LEMMA. *Sia* $H$ *una sotto-*$\mathbb{O}$*-iperalgebra di* $R$ (risp.: *di* $D$). *Posto* $H^+ = R^+ \cap H = (\ker \varepsilon_R) \cap H$ (risp.: $H^+ = D^+ \cap H = (\ker \varepsilon_D) \cap H$) *si ha* $H = \mathbb{O} \oplus H^+$.

DIM. È sufficiente osservare che se $x \in H$, allora $\varepsilon x \in \mathbb{O}$ e $x - \varepsilon x \in H^+$, onde $x = \varepsilon x + (x - \varepsilon x) \in \mathbb{O} \oplus H^+$, C. V. D..

1.4 LEMMA. *Sia* $H$ *una* $\mathbb{O}$*-iperschiera di* $R$*, e sia* $d$ *un elemento di* $D$*. Sono equivalenti gli asserti*:

*a*) $d \in H^*$,

*b*) $dH \subseteq H$ (cfr. 21., pg. 288 di [MA]).

DIM. *a*) $\Longrightarrow$ *b*). Sia $x \in H$; siccome $H^* \circ dx = H^*d \circ x \subseteq H^* \circ x \subseteq \mathbb{O}$, si conclude che $dx \in H^{**} = H$.

*b*) $\Longrightarrow$ *a*). Si ha $\mathbb{O} \supseteq 1 \circ dH = 1d \circ H = d \circ H$; allora $d \in H^*$, C. V. D..

1.5 LEMMA. *Sia* $H$ *una* $\mathbb{O}$ *iperschiera di* $R$ (risp.: *di* $D$). *Si ha* $\pi H \subseteq H$, $tH \subseteq H$ (cfr. 23., pg. 292 di [MA]).

DIM. Supponiamo che $H$ sia una $\mathbb{O}$-iperschiera di $R$. Siccome $H$ e $H^*$ sono moltiplicativamente chiusi si ha $\pi H \subseteq H$, $\pi H^* \subseteq H^*$.

Sia $x \in H$; si ha $H^* \circ tx = (\pi H^* \circ x)^{\pi^{-1}} \subseteq (H^* \circ x)^{\pi^{-1}} \subseteq \mathbb{O}^{\pi^{-1}} = \mathbb{O}$. Allora $tx \in H^{**} = H$.

Analogamente si prova l'asserto per le $\mathbb{O}$-iperschiere di $D$, C. V. D..

1.6 LEMMA. *Sia* $H$ *una* $\mathbb{O}$*-iperschiera di* $D$*, e sia* $(d_0, d_1, \dots) \in \mathcal{V}D$*. Se* $d_j \in H$ *per un opportuno* $j$*, allora* $d_i \in H$ *per ogni* $i \leq j$*.*

DIM. Tenuto conto di 1.5, è sufficiente osservare che se $i \leq j$ allora $d_i = t^{j-i} d_j$ (cfr. 5., pg. 351 di [MC]), C. V. D..

1.7 LEMMA. *Supponiamo $R$ equidimensionale. Sia $H$ una $\mathfrak{O}$-iperschiera di $R$, e sia $(\dots, x_{-2}, x_{-1}) \in \mathcal{C}R$. Se $x_{-j} \in H$ per un opportuno $-j$, allora $x_{-i} \in H$ per ogni $-i \leq -j$.*

DIM. Tenuto conto di 1.5, è sufficiente osservare che se $-i \leq -j$, allora $x_{-i} = t^{i-j} x_{-j}$ (cfr. 3.32, pg. 295 di [MA]), C. V. D..

2. In questo numero indichiamo con $H$ una $\mathfrak{O}$-iperschiera di $R$.

Una base strutturale di $D$ (cfr. 4., pg. 338 di [MC]) i cui elementi siano un sistema, certamente libero, di generatori di $H^*$ come $\mathfrak{O}$-modulo, si dirà una *base strutturale* di $H^*$. Tenuto conto che esiste un sistema regolare $(x)$ di parametri di $R$ tale che $H = \mathfrak{O}\{x\}$, esistono certamente basi strutturali di $H^*$.

1.8 LEMMA. *Sia $\{d_h\}$, con $h$ percorrente $\mathrm{N}^n$, una base strutturale di $D$, e ne sia $\{x_h\}$ la pseudobase di $R$ trasposta. Posto $x_1 = x_{\varepsilon(1)}, \dots, x_n = x_{\varepsilon(n)}$ (ove $\varepsilon(i) = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{in})$), si ha:*

*a) $(x_1, \dots, x_n)$ è un sistema regolare di parametri di $R$,*

*b) $x_h = x^h$, ove $x^h = x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n}$,*

*c) $\{d_h\}$ è una base strutturale di $H^*$ se e solo se $H = \mathfrak{O}\{x_1, \dots, x_n\}$.*

DIM. Sia *a)* che *c)* sono conseguenza di *b)*. Quanto a *b)*, si tratta di dimostrare che $d_h \circ x^l = \delta_{hl}$.

Cominciamo col supporre che per un dato $i$ si abbia $1 \leq l_i$. In tale caso si ha

$$d_h \circ x^l = d_h \circ (x_i x^{l-\varepsilon(i)}) = \mathbf{P} d_h (x_i \,\overline{\times}\, x^{l-\varepsilon(i)}) = \Big(\sum_{r+s=h} d_r \,\overline{\times}\, d_s\Big) \circ (x_i \,\overline{\times}\, x^{l-\varepsilon(i)}) =$$

$$= \sum_{r+s=h} (d_r \circ x_i)(d_s \circ x^{l-\varepsilon(i)}),$$

onde se $h_i = 0$ si ha $d_h \circ x^l = 0$, e se $1 \leq h_i$ si ha $d_h \circ x^l = d_{h-\varepsilon(i)} \circ x^{l-\varepsilon(i)}$.

Ciò posto, se esiste $i$ tale che $h_i < l_i$, si ottiene

$$d_h \circ x^l = d_{h-\varepsilon(i)} \circ x^{l-\varepsilon(i)} = d_{h-2\varepsilon(i)} \circ x^{l-2\varepsilon(i)} = \dots = d_{h-h_i\varepsilon(i)} \circ x^{l-h_i\varepsilon(i)} = 0.$$

Se per ogni $i$ si ha $h_i = l_i$, ossia se $h = l$, si ha

$$d_h \circ x^l = d_h \circ x^h = d_{h-h_1\varepsilon(1)-\dots-h_n\varepsilon(n)} \circ x^{h-h_1\varepsilon(1)-\dots-h_n\varepsilon(n)} = d_0 \circ x^0 = 1 \circ 1 = 1.$$

Se per ogni $i$ è $l_i \leq h_i$, ed esiste $j$ tale che $l_j < h_j$, si ha $d_h \circ x^l = d_{h-l} \circ x^{l-l} = d_{h-l} \circ 1 = \varepsilon_D(d_{h-l}) = 0$, dato che, essendo $0 < h-l$, si ha $d_{h-l} \in D^+$, C.V.D..

Per $r = 1, 2, \dots$, indichiamo con $D_r^+$ la $\mathbb{k}$-algebra costituita dagli elementi di $D$ che sono iperderivazioni $r$-speciali invarianti di $R$ (cfr. 4., pg 342 di [MC], e 21., pg. 288 di [MA]), e poniamo $D_r = \mathbb{k} \oplus D_r^+$. Indichiamo poi con $D_0$ il $\mathbb{k}$-modulo costituito dagli elementi di $D$ che sono derivazioni invarianti di $R$ (cfr. 4., pg. 342, e 4.11, pg. 344, di [MC]).

1.9 LEMMA. *Gli* $\mathbb{O}$*-moduli* $H^* \cap D_0$ *e* $H^* \cap D_r$, *con* $r = 1, 2, \dots$, *sono liberi e finiti.*

DIM Sia $(x) = (x_1, \dots, x_n)$ un sistema regolare di parametri di $R$ tale che $H = \mathbb{O}\{x\}$. Al variare di $h$ in $\mathrm{N}^n$, gli $x^h$ costituiscono una pseudobase di $R$ su $\mathbb{k}$ e di $H$ su $\mathbb{O}$; gli elementi $d_h$ della base strutturale di $D$ trasposta di $\{x^h\}$, costituiscono una base strutturale di $H^*$.

Essendo $D_0 = \mathbb{k}d_{\varepsilon(1)} \oplus \dots \oplus \mathbb{k}d_{\varepsilon(n)}$, si ha $H^* \cap D_0 = \mathbb{O}d_{\varepsilon(1)} \oplus \dots \oplus \mathbb{O}d_{\varepsilon(n)}$. Essendo $D_r = \oplus'_h \mathbb{k}d_h$, ove $\oplus'_h$ indica la somma diretta estesa agli $h$ tali che $0 \leq h \leq (p^r - 1, \dots, p^r - 1)$, si ha $H^* \cap D_r = \oplus'_h \mathbb{O}d_h$, C.V.D..

Un sottoinsieme $X$ di una $\mathbb{O}$-algebra $A$, si dirà una *p-base* di $A$, se i monomi monici negli elementi di $X$, di grado minore di $p$ in ciascun argomento, sono un sistema libero di generatori di $A$ come $\mathbb{O}$-modulo.

1.10 LEMMA. *Sia* $\{d^h\}$ *con* $h \in \mathrm{N}^n$, *una base strutturale di* $H^*$, *e sia* $r \geq 1$. *Gli elementi* $d_{p^i\varepsilon(j)}$, *con* $j = 1, \dots, n$, *e* $i = 0, \dots, r-1$ *costituiscono una p-base della* $\mathbb{O}$*-algebra* $H^* \cap D_r$.

DIM. Siano $d'_h$ i residui degli elementi $d_h$ nell'iperalgebra colocale $H^*/\mathbb{P}H^*$; $\{d'_h\}$ è una base strutturale di $H^*/\mathbb{P}H^*$.

Essendo $H^* \cap D_r = \oplus'_h \mathbb{O}d_h$, ove $\oplus'_h$ indica la somma diretta estesa agli $h$ tali che $0 \leq h \leq (p^r - 1, \dots, p^r - 1)$, ed essendo $(H^*/\mathbb{P}H^*)_r = \oplus'_h kd'_h$, si ha $(H^*/\mathbb{P}H^*)_r = (H^* \cap D_r)/\mathbb{P}(H^* \cap D_r)$.

Siccome gli elementi $d'_{p^i\varepsilon(j)}$, con $j = 1, \dots, n$, e $i = 0, \dots, r-1$, sono una $p$ base di $(H^*/\mathbb{P}H^*)_r$, tenuto conto di quanto precede, di 1.9, e del lemma di cui nell'appendice di [2], si ha l'asserto, C.V.D..

1.11 LEMMA. *Siano* $d_1, \dots, d_n$ *elementi di* $H^*$ *tali che*: 1) $\mathrm{P}d_i = 1 \,\overline{\times}\, d_i + d_i \,\overline{\times}\, 1$, 2) *i residui di* $d_1, \dots, d_n$ *siano linearmente indipendenti su* $k$. *In tale caso si ha*:

*a)* $H^* \cap D_0 = \mathbb{O}d_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{O}d_n$,

*b) se* $(z) = (z_1, \dots, z_n)$ *è un sistema di elementi di* $H$ *tali che* $1 \circ z_i = 0$, *e che* $d_i \circ z_j = \delta_{ij}$, *allora* $(z)$ *è un sistema regolare di parametri di* $R$ *e si ha* $H = \mathbb{O}\{z\}$.

DIM. Siano $(x_1, ..., x_n)$, $\{d_h\}$ come nella dimostrazione di 1.9. Per le ipotesi poste, $d_1, ..., d_n$ sono elementi di $H^* \cap D_0$ i cui residui sono una base del $k$-modulo $(H^*/\mathfrak{P}H^*)_0 = (H^* \cap D_0)/\mathfrak{P}(H^* \cap D_0)$. Allora $d_1, ..., d_n$ risulta un sistema libero di generatori di $H^* \cap D_0$ come $\mathfrak{O}$-modulo (cfr. l'appendice di [2]), come asserito in *a*).

Tenuto conto di *a*), e della dimostrazione di 1.9, esistono elementi $a_{ij} \in \mathfrak{O}$ tali che $d_i = a_{i1}\, d_{\varepsilon(1)} + ... + a_{in}\, d_{\varepsilon(n)}$. Poniamo poi $z_j = \omega_j + \omega_{j1} x_1 + ...$ $... + \omega_{jn} x_n + L_j$, con $\omega_j \in \mathfrak{O}$, $\omega_{js} \in \mathfrak{O}$, ed $L_j$ somma di una serie opportuna di monomi di grado $\geq 2$ nelle $x_1, ..., x_n$, a coefficienti in $\mathfrak{O}$.

Essendo $1 \circ z_1 = ... = 1 \circ z_n = 0$, si ha $\omega_1 = ... = \omega_n = 0$, ed essendo $d_i \circ z_j = \delta_{ij}$, si ha $(a_{rs})(\omega_{rs})_{-1} = I$. L'ultima relazione comporta che $det(\omega_{rs})$ è unità di $\mathfrak{O}$. Di conseguenza esistono elementi $\lambda_{ij} \in \mathfrak{O}$ tali che $\lambda_{i1} z_1 + ...$ $\cdots + \lambda_{in} z_n = x_i + M_i$, ove $M_i$ è somma di una serie opportuna di monomi di grado $\geq 2$ nelle $x_1, ..., x_n$, a coefficienti in $\mathfrak{O}$; l'asserto *b*) ne segue immediatamente, C.V.D..

1.12 LEMMA *Sia* $\{d_h\}$, *con* $0 \leq h \leq (p^r - 1, ..., p^r - 1)$, *un insieme di elementi di* $H^*$ *tali che*: 1) $d_0 = 1$, 2) *i residui di* $d_{\varepsilon(1)}, ..., d_{\varepsilon(n)}$ *siano linearmente indipendenti su* $k$, 3) $\mathbf{P} d_h = \sum_{r+s=h} d_r \,\overline{\times}\, d_s$. *In tale caso sussistono le seguenti asserzioni*:

*a*) $\{d_h\}$ *è un sistema libero di generatori dello* $\mathfrak{O}$-*modulo* $H^* \cap D_r$,

*b*) *esiste un insieme* $\{d_l\}$ *di elementi di* $H^*$, *con* $l$ *né minore né uguale a* $(p^r - 1, ..., p^r - 1)$ *ed* $l \leq (p^{r+1} - 1, ..., p^{r+1} - 1)$, *tale che* $\{d_h\} \cup \{d_l\}$ *verifichi le condizioni* 1), 2), 3),

*c*) *gli elementi* $d_h, d_l$ *sono un sistema libero di generatori di* $H^* \cap D_{r+1}$ *come* $\mathfrak{O}$-*modulo.*

DIM. Per 4.12, pg. 345 di [*MC*], $\{d_h\}$ è una base del $\mathbb{K}$-modulo $D_r$; allora $\{d_h\}$ è un sistema di elementi linearmente indipendenti dello $\mathfrak{O}$-modulo (libero e finito, d'ordine $p^{nr}$, per 1.10) $H^* \cap D_r$. Siccome $\{d_h\}$ consta di $p^{nr}$ elementi, ed i residui di tali elementi, per 4.12 di [MC], generano il $k$-modulo $(H^*/\mathfrak{P}H^*)_r = (H^* \cap D_r)/\mathfrak{P}(H^* \cap D_r)$, si conclude che $\{d_h\}$ è un sistema libero di generatori dello $\mathfrak{O}$-modulo $H^* \cap D_r$ (cfr. l'appendice di [2]).

Utilizzando una base strutturale di $H^*$, e tenendo conto della dimostrazione di 1.9, si ha che esiste un sotto-$\mathfrak{O}$-modulo libero $B$ di $H^*$ tale che $H^* = (H^* \cap D_r) \oplus B$. Se quindi $\{b_1, b_2, ...\}$ è un sistema libero di generatori dello $\mathfrak{O}$-modulo $B$, si ha che $\{d_h\} \cup \{b_1, b_2, ...\}$ è un sistema libero di generatori dello $\mathfrak{O}$-modulo $H^*$. Sia $\{x_h\} \cup \{y_1, y_2, ...\}$ la pseudobase di $H$ su $\mathfrak{O}$, trasposta di $\{d_h\} \cup \{b_1, b_2, ...\}$.

Applicando 1.11 a $(d_{\varepsilon(1)}, ..., d_{\varepsilon(n)})$ e $(x_{\varepsilon(1)}, ..., x_{\varepsilon(n)})$, si ha $H = \mathfrak{O}\{x_1, ..., x_n]$. ove si è posto $x_i = x_{\varepsilon(i)}$. Se $\{\varrho_h\}$ è la base di $H^*$ su $\mathfrak{O}$ trasposta di $\{x\ \}$, si verifica che per $0 \leq h \leq (p^r - 1, ..., p^r - 1)$ si ha $\varrho_h = d_h$ (cfr. la dim, di 4.12 di [MC]), e che per $(p^r - 1, ... p^r - 1) \not\geq l \leq (p^{r+1} - 1, ..., p^{r+1} - 1)$, gli elementi $d_l = \varrho_l$ verificano le proprietà richieste in $b$). A questo punto l'asserto $c$) è congruenza di $b$) e di $a$), C. V. D..

1.13 LEMMA. *Sia $\{d_h\}$, con $h \in \mathbf{N}^n$, un insieme di elementi di $H^*$ tali che*: 1) $d_0 = 1$; 2) *i residui di $d_{\varepsilon(1)}, \dots, d_{\varepsilon(n)}$ siano linearmente indipendenti su $k$*; 3) $\mathbf{P}d_h = \sum_{r+s=h} d_r \,\overline{\times}\, d_s$. *Allora $\{d_h\}$ è una base strutturale di $H^*$.*

DIM. L'asserto segue da 1.12, e dall'essere $H^* = \bigcup_{r \geq 1} (H^* \cap D_r)$, C.V.D..

**3.** Sia $\sigma : \mathbb{O} \to k$ l'omomorfismo canonico. $\sigma$ determina in modo naturale un omomorfismo, che indicheremo ancora con $\sigma$, di $T_{\mathbb{O}}$ su tutto $\mathrm{T}_k$. Il nucleo di tale omomorfismo risulta essere $T_{\mathbb{p}}$; ciò permette di identificare $T_k$ con $T_{\mathbb{O}}/T_{\mathbb{p}}$.

Se $M$ è un $T_{\mathbb{k}}$-modulo canonico, un suo sotto-$T_{\mathbb{O}}$-modulo $N$ che risulti dotato di un sistema di generatori costituenti un sistema minimale di generatori di $M$ su $T_{\mathbb{k}}$, e tale che $p\mathrm{N} \subseteq t\mathrm{N}$ (o equivalentemente tale che $\pi\mathrm{N} \subseteq N$), si dirà un *sotto-$T_{\mathbb{O}}$-modulo canonico* di $M$.

1.14 TEOREMA. *Sia $H$ una $\mathbb{O}$-iperschiera di $R$. Esistono allora vettori canonici infiniti di Witt a componenti in $H^*$; il loro insieme, che indicheremo con $\mathcal{V}H^*$, è un sotto-$T_{\mathbb{O}}$ modulo canonico di $\mathcal{V}D$.*

*Esistono basi strutturali iperesponenziali di $D$* (cfr. 5.5, pg. 350 di [MC]), *che sono basi strutturali di $H^*$.*

*$H^*$ è generata, come $\mathbb{O}$-algebra, da* 1 *e dalle componenti degli elementi di $\mathcal{V}H^*$.*

DIM. (cfr. 5.3, pg. 349 di [MC]). Tenuto conto di 1.12 e 1.13, la dimostrazione della seconda parte del teorema citato di [MC], prova che esistono elementi $d_{ij} \in H^* \cap D^+$, con $i = 1, \dots, n$, e $j = 0, 1, \dots$, tali che le $E_h(d) = E_{h_1}(d_{10}, d_{11}, \dots) \dots E_{h_n}(d_{n0}, d_{n1}, \dots)$, al variare di $h$ in $\mathrm{N}^n$, siano una base strutturale di $H^*$. Ciò prova il secondo asserto.

Sia $N$ il $T_{\mathbb{k}}$-modulo canonico dei vettori cononici iperesponenziali a componenti in $D$. Si ha che $d_1 = (d_{10}, d_{11}, \dots), \dots, d_n = (d_{n0}, d_{n1}, \dots)$, sono un sistema minimale di generatori di $N$. Sia $N'$ il $T_{\mathbb{O}}$-modulo dei vettori canonici iperesponenziali a componenti in $H^*$ (vettori certamente esistenti essendo $d_1, \dots, d_n \in N'$). È ovviamente $p\mathrm{N}' \subseteq t\,\mathrm{N}'$. Ciò posto, previo passaggio dai vettori iperesponenziali ai vettori di Witt, il primo asserto risulterà provato ove lo sia che $N'$ è, come $T_{\mathbb{O}}$-modulo, generato da $d_1, \dots, d_n$. Questo è il caso, infatti: ($i$) Tenuto conto della dimostrazione del teorema citato di [MC], e tenuto conto di 1.11, si ha che $H^* \cap D_0 = \mathbb{O}d_{10} \oplus \dots$ $\dots \oplus \mathbb{O}d_{n0}$. ($ii$) Se $y = (y_0, y_1, \dots) \in N'$, essendo $\mathbf{P}y_0 = 1 \,\overline{\times}\, y_0 + y_0 \,\overline{\times}\, 1$, si ha che $y_0 \in D_0$, ed essendo $y_0 \in H^*$, si ha che $y_0 \in H^* \cap D_0$. Esistono allora elementi $\omega_{j1}, \ldots, \omega_{jn} \in T_{\mathbb{O}}$ (possono essere scelti in *molt* (*vect* $\mathbb{O}$)), con $j = 0, 1, \ldots$, tali che: $y - (\omega_{01} d_1 + \ldots + \omega_{0n} d_n) = t y_{(1)}$, con $y_{(1)} \in N'$, $y_{(1)} - (\omega_{11} d_1 + \ldots$ $\ldots + \omega_{1n} d_n) = t y_{(2)}$, con $y_{(2)} \in N'$, etc. Ciò posto si ha $y = \sum_{i=1}^{n} (\omega_{0i} + t\omega_{1i} +$ $+ t^2 \omega_{2i} + \ldots) d_i$, ossia $y \in T_{\mathbb{O}} d_1 + \ldots + T_{\mathbb{O}} d_n$. Ciò conclude la prova del primo asserto.

Siccome le $E_h(d)$ sono una base strutturale di $H^*$, risulta $H^* = \mathbb{O}[d_{ij}]$; posto quindi $d_i' = (d_{i0}', d_{i1}', \ldots) = W(d_i)$, risulta $H^* = \mathbb{O}[d_{ij}']$. Siccome $d_1', \ldots$ $\ldots, d_n'$ sono vettori canonici di Witt a componenti in $H^*$, il terzo asserto risulta provato, C. V. D..

1.15. Teorema. *Sia $N$ un sotto-$T_{\mathbb{O}}$-modulo canonico di $\mathcal{V}D$, e sia $H^*$ la sotto-$\mathbb{O}$-algebra di $D$ generata da 1 e dalle componenti degli elementi di $N$.*

*$H^*$ risulta una $\mathbb{O}$-iperschiera di $D$, ed è tra quelle l'unica tale che $\mathcal{V}H^* =$ $= N$ (cfr. 1.14).*

*Sia $d_1, \ldots, d_n$ un sistema (certamente minimale) di generatori di $N$ come $T_{\mathbb{O}}$-modulo, e di $\mathcal{V}D$ come $T_{\mathbb{K}}$-modulo; siano inoltre $d_1', \ldots, d_n'$ i vettori le cui componenti $d_{ij}'$ siano i residui in $H^*/\mathbb{P}H^*$ delle componenti $d_{ij}$ di $d_1, \ldots, d_n$.*

*Le componenti di $d_1, \ldots, d_n$ sono una $p$-base di $H^*$ come $\mathbb{O}$ algebra.*

*$d_1', \ldots, d_n'$ è un sistema minimale di generatori di $\mathcal{V}(H^*/\mathbb{P}H^*)$ come $T_k$-modulo canonico.*

Dim. Per 5.3, pg. 349, e 5.1, pg 347 di [MC], si ha che $\{d_{ij}\}$ è una $p$-base della $\mathbb{K}$-algebra $D$. Siccome esiste una matrice quadrata $C$ d'ordine $n$ ad elementi in $T_{\mathbb{O}}$, tale che $(pd_1, \ldots, pd_n)_{-1} = C^{\pi^{-1}}(td_1, \ldots, td_n)_{-1}$, si ha che ogni monomio monico nelle $d_{ij}$ è esprimibile come polinomio a coefficienti in $\mathbb{O}$, nelle componenti di $d_1, \ldots, d_n$, di grado minore di $p$ in ciascun argomento.

Tenuto allora conto che $H^* = \mathbb{O}[d_{ij}]$, si ha che $\{d_{ij}\}$ è una $p$-base di $H^*$ come $\mathbb{O}$-algebra. Quanto precede, tenuto conto (come si verifica facilmente sulla base della definizione di $H^*$) che $\mathrm{P}H^* \subseteq H^* \,\overline{\times}_{\mathbb{O}}\, H^*$, prova che $H^*$ è una sotto-$\mathbb{O}$-iperalgebra di $D$, ed anche una $\mathbb{O}$-schiera di $D$.

Consideriamo adesso l'iperalgebra $H^*/\mathbb{P}H^* = k[d_{ij}']$; siccome $\{d_{ij}\}$ è una $p$-base di $H^*$ su $\mathbb{O}$, si ha che $\{d_{ij}'\}$ è una $p$-base di $H^*/\mathbb{P}H^*$ su $k$. Sia $N'$ il $T_k$ modulo (certamente canonico), ad elementi in *vect* $(H^*/\mathbb{P}H^*)$, generato da $d_1', \ldots, d_n'$. Siccome $d_{10}', \ldots, d_{n0}'$ sono linearmente indipendenti su $k$, si verifica facilmente (ma non banalmente) che $N'/tN' \cong k^n$; ne segue che la dimensione di $N'$, come $T_k$-modulo canonico è $n$. Tenuto conto che gli elementi di $N'$ sono vettori canonici di $H^*/\mathbb{P}H^*$, e che $H^*/\mathbb{P}H^*$ è la $k$ algebra inviluppante libera di $N'$, da 5.3, pg. 349 di [MC], segue che

$H^*/\mathfrak{P}H^*$ è un'iperalgebra colocale di dimensione $n$ su $k$, e che $N' = \mathcal{V}(H^*/\mathfrak{P}H^*)$. In particolare $H^*$ è una $\mathfrak{O}$-iperschiera di $D$.

Siccome $d_{10}, \dots, d_{n0}$ sono a residui linearmente indipendenti su $k$, e $\mathbf{P}d_{i0} = 1 \,\overline{\times}\, d_{i0} + d_{i0} \,\overline{\times}\, 1$, per 1.11 si ha $H^* \cap D_0 = \mathfrak{O}d_{10} \oplus \dots \oplus \mathfrak{O}d_{n0}$. Dopo di ciò, come in (*ii*) della dim. di 1.14, si prova che $\mathcal{V}H^*$ è generato come $T_{\mathfrak{O}}$ modulo da $d_1, \dots, d_n$. Ciò prova che $\mathcal{V}H^* = N$.

Che $H^*$ sia la sola $\mathfrak{O}$-iperschiera di $D$ tale che $\mathcal{V}H^* = N$, è adesso conseguenza dell'ultimo asserto di 1.14, C.V.D..

I precedenti 1.14, 1.15 provano che vi è corrispondenza biunivoca tra l'insieme di tutte le $\mathfrak{O}$-iperschiere di $R$ e l'insieme di tutti i sotto-$T_{\mathfrak{O}}$-moduli canonici di $\mathcal{V}D$. Più precisamente il corrispondente di una $\mathfrak{O}$-iperschiera $H$ di $R$ è il sotto-$T_{\mathfrak{O}}$-modulo canonico $\mathcal{V}H^*$ di $\mathcal{V}D$, e la corrispondente di un sotto-$T_{\mathfrak{O}}$-modulo canonico $N$ di $\mathcal{V}D$ è la $\mathfrak{O}$-iperschiera di $R$ duale (su $\mathfrak{O}$) della sotto $\mathfrak{O}$-algebra di $D$ generata da 1 e dalle componenti degli elementi di $N$.

1.16 COROLLARIO. *Sia $H$ una $\mathfrak{O}$-iperschiera di $R$. Sia $\sigma_{H^*}$ il semiomomorfismo naturale della $\mathfrak{O}$-iperschiera $H^*$ di $D$ su tutta la $k$ iperalgebra colocale $H^*/\mathfrak{P}H^*$, e sia $\sigma_{\mathcal{V}H^*}$ il semiomomorfismo del sotto $T_{\mathfrak{O}}$-modulo canonico $\mathcal{V}H^*$ di $\mathcal{V}D$, sul $T_k$-modulo canonico $\mathcal{V}(H^*/\mathfrak{P}H^*)$, indotto da $\sigma_{H^*}$. Sussistono le seguenti asserzioni:*

*a)* $\sigma_{\mathcal{V}H^*}$ *è su tutto* $\mathcal{V}(H^*/\mathfrak{P}H^*)$,

*b)* $ker\, \sigma_{\mathcal{V}H^*} = T_{\mathfrak{P}}(\mathcal{V}H^*)$,

*c)* $\mathcal{V}(H^*/\mathfrak{P}H^*) \cong (\mathcal{V}H^*)/T_{\mathfrak{P}}(\mathcal{V}H^*)$, *l'isomorfismo essendo di $T_k$-moduli canonici.*

DIM. L'asserto *a*) è conseguenza di 1.15. Siano poi $d_1, \dots, d_n$ un sistema minimale di generatori di $\mathcal{V}H^*$, come $T_{\mathfrak{O}}$-modulo, e di $\mathcal{V}D$, come $T_{\mathfrak{K}}$-modulo. È certamente $H^* \cap D_0 = \mathfrak{O}\, d_{10} \oplus \dots \oplus \mathfrak{O}\, d_{n0}$ (cfr. il penultimo capoverso della dim. di 1.15).

Sia quindi $d' = (d'_0, d'_1, \dots) \in ker\, \sigma_{\mathcal{V}H^*}$. Siccome $\mathbf{P}\, d'_0 = 1 \,\overline{\times}\, d'_0 + d'_0 \,\overline{\times}\, 1$, si ha che $d'_0 \in H^* \cap D_0$; tenuto quindi conto che $\sigma_{H^*}(d'_0) = 0$, si ha che esistono $p_{01}, \dots, p_{0n} \in \mathfrak{P}$, tali che $d'_0 = p_{01}\, d_{01} + \dots + p_{0n}\, d_{0n}$. Ciò posto si ha $d' - (\{p_{01}\}\, d_1 + \dots + \{p_{0n}\}\, d_n) = td_{(1)}$ (ove $\{a\} = (a, 0, 0, \dots)$), con $d_{(1)} \in ker\, \sigma_{\mathcal{V}H^*}$. Ripetendo per $d_{(1)}$ quanto detto per $d'$, si ha che esistono $p_{11}, \dots, p_{1n} \in \mathfrak{P}$, tali che $d_{(1)} - (\{p_{11}\}\, d_1 + \dots + \{p_{1n}\}\, d_n) = td_{(2)}$, con $d_{(2)} \in ker\, \sigma_{\mathcal{V}H^*}$. Così procedendo si prova che esistono elementi $p_{ij} \in \mathfrak{P}$ tali che $d' = \sum_{i=1}^{n} (\{p_{0i}\} + t\,\{p_{1i}\} + \dots)\, d_i$. Essendo i coefficienti delle $d_i$ elementi di $T_{\mathfrak{P}}$, si ha che

$ker\, \sigma_{\mathcal{V}H^*} \subseteq T_{\mathfrak{p}}(\mathcal{V}H^*)$. Tenuto conto che è certamente $T_{\mathfrak{p}}(\mathcal{V}H^*) \subseteq ker\, \sigma_{\mathcal{V}H^*}$, l'asserto *b*) risulta provato. L'asserto *c*) è conseguenza di *a*) e di *b*), C.V.D..

Il precedente 1.16 prova che se $H$ è una $\mathfrak{O}$-iperschiera di $R$, allora la struttura della $k$-iperalgebra locale $H/\overline{\mathfrak{p}H}$ è completamente determinata dal sotto-$T_{\mathfrak{O}}$-modulo canonico $\mathcal{V}H^*$ di $\mathcal{V}D$, essendo $\mathcal{V}(H^*/\mathfrak{p}H^*)$ isomorfo, come $T_k$-modulo canonico, a $(\mathcal{V}H^*)/T_{\mathfrak{p}}(\mathcal{V}H^*)$.

## Capitolo 2

## LE IPERSCHIERE NEL CASO EQUIDIMENSIONALE

In questo capitolo i simboli conservano gli stessi significati loro attribuiti nel capitolo precedente.

**1.** Un vettore di Witt $v = (v_0, \dots, v_s)$ a componenti in $D$, di lunghezza finita $s+1$, si dirà *canonico* se $\mathbf{P}v = 1 \,\overline{\times}\, v + v \,\overline{\times}\, 1$.

2.1 Lemma. *Sia $v = (v_0, \dots, v_s)$ un vettore canonico di Witt a componenti in $D$, di lunghezza finita $s+1$. Si ha:*

*a) $v$ è prolungabile ad un elemento di $\mathcal{V}D$, ossia esiste $d \in \mathcal{V}D$ tale che $d_0 = v_0, \dots, d_s = v_s$.*

*b) Sia $H$ una $\mathfrak{O}$-iperschiera di $R$. Se tutte le componenti di $v$ sono elementi di $H^*$* (risp.: *di $\mathfrak{p}H^*$), tra i detti prolungamenti di $v$ ad elementi di $\mathcal{V}D$, ve n'è almeno uno a componenti in $H^*$* (risp.: *in $\mathfrak{p}H^*$*).

Dim. Sia $d_1, \dots, d_n$ un sistema minimale di generatori di $\mathcal{V}D$ su $T_{\mathfrak{k}}$ e di $\mathcal{V}H^*$ su $T_{\mathfrak{O}}$ (cfr. 1.14). Tenuto conto di 1.11 si ha che $H^* \cap D_0 = \mathfrak{O}\, d_{10} \oplus \dots \oplus \mathfrak{O}\, d_{n0}$ e che $D'_0 = \mathfrak{k}\, d_{10} \oplus \dots \oplus \mathfrak{k}\, d_{n0}$.

Se $s = 0$, siccome $\mathbf{P}v_0 = 1 \,\overline{\times}\, v_0 + v_0 \,\overline{\times}\, 1$, si ha $v_0 \in D_0$ nel caso *a*), e $v_0 \in H^* \cap D_0$ (risp.: $v_0 \in \mathfrak{p}(H^* \cap D_0)$) nel caso *b*). Ciò prova, tenuto conto della dim. di 1.16, l'asserto per $s = 0$.

Procediamo quindi per induzione su $s$, supponendo l'asserto provato per $s = 0, \dots, m-1$, e dimostrandolo per $s = m$.

Sia dunque $v = (v_0, \dots, v_m)$ un vettore canonico di Witt di lunghezza $m+1$, a componenti in $D$ (risp.: in $H^*$, in $\mathfrak{p}H^*$). Per l'ipotesi di induzione esiste un vettore canonico infinito di Witt, $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots)$, a componenti in $D$ (risp.: in $H^*$, in $\mathfrak{p}H^*$), tale che $\lambda_0 = v_0, \dots, \lambda_{m-1} = v_{m-1}$. Poniamo $(v_0, \dots, v_{m-1}, v_m) - (\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}, \lambda_m) = (0, \dots, 0, c_0)$; $c_0 \in D$ (risp.:

$c_0 \in H^*$, $c_0 \in \mathfrak{P} H^*$). Siccome $\mathbf{P}(0, \dots, 0, c_0) = 1 \,\overline{\times}\, (0, \dots 0, c_0) + (0, \dots, 0, c_0) \,\overline{\times}\, 1$, si ha che $\mathbf{P}\, c_0 = 1 \,\overline{\times}\, c_0 + c_0 \,\overline{\times}\, 1$. Allora, per quanto provato per $s = 0$, esiste un vettore canonico infinito di Witt $\omega$ a componenti in $D$ (risp. : in $H^*$, in $\mathfrak{P} H^*$), tale che $\omega_0 = c_0$. Ciò posto, $d = \lambda + t^m \omega$ è un vettore canonico infinito di Witt a componenti in $D$ (risp. : in $H^*$, $\mathfrak{P} H^*$) tale che $d_0 = v_0, \dots, d_m = v_m$, C.V.D..

Per $s = 1, 2, \dots$, indichiamo con $\mathcal{V}_s\, D$ il $(vect\ \mathbf{k})$-modulo i cui elementi sono i vettori canonici di Witt di lunghezza $s$, a componenti in $D$. Indichiamo poi con $\varrho_s$ l'omomorfismo di $\mathcal{V} D$ su $\mathcal{V}_s D$ definito da $\varrho_s(d_0, d_1, \dots \dots) = (d_0, \dots, d_{s-1})$ ; si ha ovviamente $ker\ \varrho_s = t^s\, \mathcal{V} D$.

Se $H$ è una $\mathfrak{O}$-iperschiera di $R$, definiamo il $(vect\ \mathfrak{O})$-modulo $\mathcal{V}_s H^*$, l'omomorfismo $\varrho_s \colon \mathcal{V} H^* \to \mathcal{V}_s H^*$, il $(vect\ k)$-modulo $\mathcal{V}_s(H^*/\mathfrak{P} H^*)$, e l'omomorfismo $\varrho_s \colon \mathcal{V}(H^*/\mathfrak{P} H^*) \to \mathcal{V}_s(H^*/\mathfrak{P} H^*)$, in modo analogo a $\mathcal{V}_s D$ e $\varrho_s \colon \mathcal{V} D \to \mathcal{V}_s D$. Il nucleo di $\varrho_s \colon \mathcal{V} H^* \to \mathcal{V}_s H^*$ è $t^s\, \mathcal{V} H^*$ ; il nucleo di $\varrho_s \colon \mathcal{V}(H^*/\mathfrak{P} H^*) \to \mathcal{V}_s(H^*/\mathfrak{P} H^*)$ è $t^s\, \mathcal{V}(H^*/\mathfrak{P} H^*)$.

Tenuto conto di 2.1, gli omomorfismi $\varrho_s \colon \mathcal{V} D \to \mathcal{V}_s D$, $\varrho_s \colon \mathcal{V} H^* \to \to \mathcal{V}_s H^*$, $\varrho_s \colon \mathcal{V}(H^*/\mathfrak{P} H^*) \to \mathcal{V}_s(H^*/\mathfrak{P} H^*)$, sono surgettivi.

2.2. LEMMA. *Sia $H$ una $\mathfrak{O}$-iperschiera di $R$. Per ogni $s \geq 1$, $\mathcal{V}_s H^*$ risulta un $(vect\ \mathfrak{O})$-modulo finito. Inoltre $\mathcal{V}_s(H^*/\mathfrak{P} H^*) \cong (\mathcal{V}_s H^*)/(vect\ \mathfrak{P})(\mathcal{V}_s H^*)$.*

DIM. Siano $d_1, \dots, d_n$ come nella dim. di 2.1. Se $d = \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i \geq 0} a_{ji}\, t^i d_j \right)$, ove ogni $a_{ji} \in vect\ \mathfrak{O}$, è un qualsiasi elemento di $\mathcal{V} H^*$ si ha $\varrho_s(d) = = \varrho_s \left( \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{s-1} a_{ji}\, t^i d_j + t^s d' \right)$, con $d'$ elemento opportuno di $\mathcal{V} H^*$. Allora $\varrho_s(d) = = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{s-1} a_{ji}\, \varrho_s(t^i d_j)$. Tenuto conto della surgettività di $\varrho_s$, $\mathcal{V}_s H^*$ risulta generato, come $(vect\ \mathfrak{O})$-modulo, dagli elementi $\varrho_s(t^i d_j)$, con $i = 0, \dots, s-1$, e $j = 1, \dots, n$, ed è quindi un $(vect\ \mathfrak{O})$-modulo finito.

Tenuto conto dell'asserto *a*) di 2.1 (applicato ad $H^*/\mathfrak{P} H^*$), e dell'asserto *a*) di 1.16, il semiomomorfismo naturale $\sigma_s \colon \mathcal{V}_s H^* \to \mathcal{V}_s(H^*/\mathfrak{P} H^*)$, risulta surgettivo.

Se $d' \in \mathcal{V}_s H^*$ è tale che $\sigma_s(d') = 0$, tutte le componenti di $d'$ sono elementi di $\mathfrak{P} H^*$. Esiste allora, per *b*) di 2.1, un $d \in \mathcal{V} D$ con tutte le componenti in $\mathfrak{P} H^*$, tale che $\varrho_s(d) = d'$. Tenuto conto dell'asserto *c*) di 1.16, si ha che $d = \sum_{j=1}^{n} ( \sum_{i \geq 0} a_{ji}\, t^i d_j)$, con ogni $a_{ji} \in vect\ \mathfrak{P}$. Con la tecnica usata nella prima parte di questa dimostrazione si prova che $d' = \varrho_s(d) \in (vect\ \mathfrak{P})(\mathcal{V}_s H^*)$ ;

quindi $ker\ \sigma_s \subseteq (vect\ \mathfrak{P})(\mathcal{V}_s H^*)$. Tenuto conto che $(vect\ \mathfrak{P})(\mathcal{V}_s H^*) \subseteq ker\ \sigma_s$, il secondo asserto dell'enunciato risulta provato, C.V.D..

**2.** Sia $C$ un qualsiasi corpo algebricamente chiuso di caratteristica $p$, e siano $K$, $T$ rispettivamente gli anelli $vect\ C$, $T_C$.

2.3 LEMMA. *Un $T$-modulo canonico $M$ è equidimensionale* (cfr. 2., pg. 325 di [MC]), *se e solo se è chiusura di un proprio sotto-$K$-modulo finito* (cfr. 3.1, pg. 329 di [MC]).

DIM. Siano $E$, $P$ rispettivamente la componente equidimensionale e la componente periodica di $M$, cosicchè $M = E \oplus P$ (cfr. 2.11, pg. 325 di [MC]).

Se $P = \{0\}$, ossia se $M$ è equidimensionale, $M$ risulta un $K$-modulo finito e libero (cfr. 3.1 di [MC]).

Supponiamo adesso $P \neq \{0\}$. Sia $H = Kz_1 + ... + Kz_s$ un sotto-$K$-modulo finito di $M$. Se $H$ fosse denso in $M$, posto $z_i = e_i + \pi_i$, con $e_i \in E$, $\pi_i \in P$, allora $K\pi_1 + ... + K\pi_s$ sarebbe denso in $P$. Per 2.11 di [MC], $P$ è isogeno ad un opportuno $L = M_{r_1,\infty} \oplus ... \oplus M_{r_\lambda,\infty}$, onde si può supporre che esista $\nu \geq 0$ tale che $t^\nu L \subseteq P \subseteq L$. Gli elementi di $t^\nu L$ risulterebbero allora aderenti a $K\pi_1 + ... + K\pi_s$. Poniamo $\pi_i = \pi_{i,1} + ... + \pi_{i,\lambda}$, con $\pi_{ij} \in M_{r_j,\infty}$; allora $K\pi_{1,j} + ... + K\pi_{s,j}$ risulterebbe un sotto-$K$-modulo finito di $M_{r_j,\infty}$ cui sarebbero aderenti gli elementi di $t^\nu M_{r_j,\infty}$.

Consideriamo ad esempio $j = 1$, e poniamo $r_1 = r$. Per 2.8, pg. 321 di [MC], esiste un sistema minimale $(x_1, ..., x_r)$ di generatori di $M_{r,\infty}$ su $T$ tale che $(a_1, ..., a_r)(x_1, ..., x_r)_{-1} = 0$ se e solo se $(a_1, ..., a_r) = (b_1, ..., b_r)\cdot$ $\cdot(-pI + tJ)$, (ove $I$ è la matrice identica, e $J$ è la matrice aventi uguali ad 1 gli elementi sulla prima parallela superiore alla diagonale principale, e aventi uguali a 0 i rimanenti elementi), con $b_1, ..., b_r$ elementi opportuni di $T$.

Posto $y_1 = (1, 0, ..., 0), ..., y_r = (0, ..., 0, 1)$, sia $\sigma$ l'applicazione $T$-lineare di $T^r = Ty_1 \oplus ... \oplus Ty_r$ in $M_{r,\infty}$, definita da $\sigma y_i = x_i$. Il nucleo di $\sigma$ è generato come $T$ modulo da: $-py_1 + ty_2, ..., -py_{r-1} + ty_r$, $-py_r$. Si ha allora $M_{r,\infty} \cong (Ty_1 \oplus ... \oplus Ty_r)/(ker\ \sigma) = Tx_1 + ... + Tx_r$, ove $x_i$ indica adesso sia l'immagine di $y_i$ tramite $\sigma$, sia il residuo di $y_i$. Risulta inoltre: $px_r = 0$, $tx_r = px_{r-1}, ..., tx_2 = px_1$; ne segue $M_{r,\infty} = Tx_1 + Kx_2 + ... + Kx_r$.

Dalle relazioni sopra trovate risulta che $p^{r-i+1} x_i = 0$. Ciò posto, siano $f(t) \in T$, $\lambda_2, ..., \lambda_r \in K$, tali che $f(t)x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_r x_r = 0$. Allora $f(t) y_1 +$ $+ \lambda_2 y_2 + ... + \lambda_r y_r \in ker\ \sigma$, onde esistono $b_1, ..., b_r \in T$, tali che $f(t) = -pb_1$, $\lambda_2 = tb_1 - pb_2, ..., \lambda_r = tb_{r-1} - pb_r$. Si ha allora: $p^2 b_2 = -p\lambda_2 - tf(t)$, $p^3 b_3 = -p^2\lambda_3 - tp\lambda_2 - t^2 f(t), ..., p^r b_r = -p^{r-1}\lambda_r - tp^{r-2}\lambda_{r-1} - ... - t^{r-2}p\lambda_2 -$ $- t^{r-1} f(t)$. Tenuto conto dell'ultima uguaglianza si ha: $\lambda_r \in pK$, $\lambda_{r-1} \in p^2 K$, ...

..., $\lambda_2 \in p^{r-1}K$, $f(t) \in p^r T$. Ne segue: $f(t)\, x_1 = 0$, $\lambda_2 x_2 = 0, \ldots, \lambda_r x_r = 0$. Si conclude che $M_{r,\infty} = Tx_1 \oplus Kx_2 \oplus \ldots \oplus Kx_r$, ove $\oplus$ indica somma diretta di $K$-moduli. Inoltre le considerazioni precedenti provano che $Tx_1 \cong T/p^rT$, $Kx_2 \cong K/p^{r-1}K, \ldots, Kx_r \cong K/pK$, gli isomorfismi essendo: il primo di $T$-moduli, e gli altri di $K$-moduli.

Si prova facilmente che $t^{i-1} x_i = p^{i-1} x_1$; ne segue che se $\varrho \geq r-1$, si ha $t^\varrho M_{r,\infty} \subseteq t^{\varrho-(r-1)} Tx_1 \subseteq t^{\varrho-(r-1)} M_{r,\infty}$. Si conclude che un sistema fondamentale di intorni di 0 per $M_{r,\infty}$ è dato dai $t^\lambda Tx_1$, al variare di $\lambda$.

Per $i = 1, .., s$, poniamo $\omega_i = \pi_{i,1} = f_i(t)\, x_1 + \lambda_{i,2} x_2 + \ldots + \lambda_{i,r} x_r$, con $f_i(t) \in T$, $\lambda_{ij} \in K$. Allora, come già detto, gli elementi di $t^\nu M_{r,\infty}$ risulterebbero aderenti a $K\omega_1 + \ldots + K\omega_s$.

Se $t^\nu g(t)\, x_1 = \lim\limits_{n \to \infty} (a_{1,n}\omega_1 + \ldots + a_{s,n}\omega_n)$, con $a_{ij} \in K$, si ha $t^\nu g(t)\, x_1 =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left( \sum\limits_{j=1}^{s} a_{j,n} f_j(t)\, x_1 + \sum\limits_{h=2}^{r} \sum\limits_{j=1}^{s} a_{j,n} \lambda_{j,h} x_h \right)$. Allora, tenuto conto delle precedenti osservazioni, per $n$ elevato risulta $\sum\limits_{h=2}^{r} \sum\limits_{j=1}^{s} a_{j,n} \lambda_{j,h} x_h = 0$, e si ha quindi $t^\nu g(t)\, x_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{s} a_{j,n} f_j(t)\, x_1$. Si conclude che gli elementi di $t^\nu Tx_1$ verrebbero ad essere aderenti a $Kf_1(t)\, x_1 + \ldots + Kf_s(t)\, x_1$.

Tenuto conto che $Tx_1 \cong T/p^r T$, ove $r \neq 0$, posto $\Omega = T/pT$, e detti $f_1'(t), \ldots, f_s'(t)$ i residui di $f_1(t), \ldots, f_s(t)$ in $\Omega$, gli elementi di $t^\nu \Omega$ sarebbero aderenti al sotto-$C$-modulo di $\Omega$ generato da $f_1'(t), \ldots, f_s'(t)$. Poniamo $f_i'(t) =$ $= a_{i,0} + a_{i,1}\, t + \ldots$, con $a_{ij} \in C$.

Sia $w_0 t^\nu + w_1 t^{\nu+1} + \ldots$, con $w_i \in C$, un qualsiasi elemento di $t^\nu \Omega$. Per quanto precede, dato comunque $h \geq 0$, esisterebbero $\mu_{h,1}, \ldots, \mu_{h,s} \in C$ tali che

$$\begin{pmatrix} a_{1,\nu} & \ldots & a_{s,\nu} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{1,\nu+h} & \ldots & a_{s,\nu+h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{h,1} \\ \cdot \\ \mu_{h,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 \\ \cdot \\ w_h \end{pmatrix}.$$

Allora, per $h = s$, le $s$ colonne $(a_{i,\nu}, \ldots, a_{i,\nu+s})_{-1}$, ove $i = 1, \ldots, s$, genererebbero lo spazio vettoriale su $C$ delle colonne ad $s+1$ componenti. Siccome ciò è assurdo, si conclude che $H = Kz_1 + \ldots + Kz_s$ non è denso in $M$, C.V.D..

**3.**

2.4 TEOREMA. *Sia $H$ una $\mathfrak{D}$-iperschiera di $R$. Sono equivalenti le asserzioni :*

*a) La $k$ iperalgebra locale $H/\overline{\mathfrak{P}H}$ è equidimensionale.*

*b) Il sotto-$T_{\mathfrak{D}}$-modulo canonico $\mathcal{V}H^*$ di $\mathcal{V}D$, è la chiusura di un proprio sotto-(vect $\mathfrak{D}$)-modulo finito.*

*Sotto le ipotesi equivalenti a), b), dati elementi* $d_1, \ldots, d_h \in \mathcal{V}H^*$, *si ha che* $\mathcal{V}H^*$ *è la chiusura di* $(\text{vect}\,\mathbb{O})\,d_1 + \ldots + (\text{vect}\,\mathbb{O})\,d_h$, *se e solo se* $\sigma_{\mathcal{V}H^*}(d_1), \ldots, \sigma_{\mathcal{V}H^*}(d_h)$ *generano* $\mathcal{V}(H^*/\mathbb{P}H^*)$ *come* $(\text{vect}\,k)$ *modulo.*

DIM. $a) \Longrightarrow b)$. Siccome $H/\overline{\mathbb{P}H}$ è equidimensionale, $\mathcal{V}(H^*/\mathbb{P}H^*)$ risulta un $(\text{vect}\,k)$-modulo libero e finito (cfr. 3.1, pg. 329 di [MC]). Siano quindi $d_1, \ldots, d_h$ elementi (certamente esistenti) di $\mathcal{V}H^*$, i cui residui siano un sistema di generatori di $\mathcal{V}(H^*/\mathbb{P}H^*)$ come $(\text{vect}\,k)$-modulo.

Siccome $\sigma(d_1), \ldots, \sigma(d_h)$ (qui $\sigma$ sta in luogo di $\sigma_{\mathcal{V}H^*}$) generano $\mathcal{V}(H^*/\mathbb{P}H^*)$ su $\text{vect}\,k$, per ogni $s \geq 1$ si ha che gli elementi $\varrho_s\sigma(d_1) = \sigma_s(\varrho_s d_1), \ldots, \varrho_s\sigma(d_h) = \sigma_s(\varrho_s d_h)$ (ove $\sigma_s$ è il semiomomorfismo canonico di $\mathcal{V}_s H^*$ su $\mathcal{V}_s(H^*/\mathbb{P}H^*)$) generano $\mathcal{V}_s(H^*/\mathbb{P}H^*)$ (cfr. **1.**).

Tenuto conto dell'ultima osservazione, e del fatto che $\mathcal{V}_s(H^*/\mathbb{P}H^*) \cong (\mathcal{V}_s H^*)/(\text{vect}\,\mathbb{P})(\mathcal{V}_s H^*)$ (cfr. 2.2), si prova facilmente (con il procedimento usato nella dimostrazione del lemma di cui nell'appendice di [2]) che $\varrho_s d_1, \ldots, \varrho_s d_h$ è un sistema di generatori di $\mathcal{V}_s H^*$ come $(\text{vect}\,\mathbb{O})$-modulo.

Per ogni $s \geq 1$, si ha quindi che $\varrho_s((\text{vect}\,\mathbb{O})\,d_1 + \ldots + (\text{vect}\,\mathbb{O})\,d_h) = \mathcal{V}_s H^* = \varrho_s \mathcal{V}H^*$. Si conclude che $(\text{vect}\,\mathbb{O})\,d_1 + \ldots + (\text{vect}\,\mathbb{O})\,d_h$ è un sotto$(\text{vect}\,\mathbb{O})$-modulo finito di $\mathcal{V}H^*$, denso in $\mathcal{V}H^*$; che $\mathcal{V}H^*$ ne sia la chiusura segue poi dall'essere $\mathcal{V}H^*$ chiuso.

$b) \Longrightarrow a)$. Siano $d_1, \ldots, d_h$ elementi di $\mathcal{V}H^*$ tali che $(\text{vect}\,\mathbb{O})\,d_1 + \ldots + (\text{vect}\,\mathbb{O})\,d_h$ sia denso in $\mathcal{V}H^*$. In tale caso, $(\text{vect}\,k)\,\sigma(d_1) + \ldots + (\text{vect}\,k)\,\sigma(d_h)$ è un sotto-$(\text{vect}\,k)$-modulo finito di $\mathcal{V}(H^*/\mathbb{P}H^*)$, denso in $\mathcal{V}(H^*/\mathbb{P}H^*)$; tenuto conto di 2.3, ciò comporta che il $T_k$-modulo canonico $\mathcal{V}(H^*/\mathbb{P}H^*)$ è equidimensionale, e quindi che tale risulta la $k$-iperalgebra locale $H/\overline{\mathbb{P}H}$.

Consideriamo adesso il sotto-$(\text{vect}\,k)$-modulo $L = (\text{vect}\,k)\,\sigma(d_1) + \ldots + (\text{vect}\,k)\,\sigma(d_h)$ di $\mathcal{V}(H^*/\mathbb{P}H^*)$. $L$, rispetto alla topologia naturale di $(\text{vect}\,k)$-modulo finito e libero, risulta completo. D'altra parte tale topologia coincide (come si prova facilmente) con quella indotta in $L$ da $\mathcal{V}(H^*/\mathbb{P}H^*)$. Tenuto quindi conto che $L$ è denso in $\mathcal{V}(H^*/\mathbb{P}H^*)$, si ha $L = \mathcal{V}(H^*/\mathbb{P}H^*)$, C.V.D..

2.5. COROLLARIO. *Sia $H$ una $\mathbb{O}$-iperschiera di $R$. Se $R$ non è equidimensionale, allora anche $H/\overline{\mathbb{P}H}$ non è equidimensionale.*

DIM. Se $H/\overline{\mathbb{P}H}$ fosse equidimensionale esisterebbe, per 2.4, un sotto-$(\text{vect}\,\mathbb{O})$-modulo finito, $M$, di $\mathcal{V}H^*$, denso in $\mathcal{V}H^*$. Allora $(\text{vect}\,\mathbb{K})\,M$ sarebbe denso in $(\text{vect}\,\mathbb{K})\,\mathcal{V}H^*$. Tenuto conto che $\mathcal{V}H^*$ è un sotto-$T_{\mathbb{O}}$ modulo canonico di $\mathcal{V}D$, si ha che $(\text{vect}\,\mathbb{K})\,\mathcal{V}H^*$ è denso in $\mathcal{V}D$. Come conseguenza si concluderebbe che il $(\text{vect}\,\mathbb{K})$-modulo finito $(\text{vect}\,\mathbb{K})\,M$ sarebbe denso in

$\mathcal{V}D$; tenuto conto di 2.3, ciò è incompatibile con l'essere $R$ non equidimensionale, C.V.D..

Tenuto conto di 2.5, se $R$ non è equidimensionale, pure non equidimensionali sono le iperalgebre locali ottenute riducendo le eventuali $\mathfrak{O}$-iperschiere di $R$.

Se $R$ è equidimensionale, tenuto conto di 2.4, vi è corrispondenza biunivoca tra l'insieme di tutte le $\mathfrak{O}$-iperschiere di $R$ con residuo equidimensionale, e l'insieme di tutti i sotto-$T_{\mathfrak{O}}$-moduli canonici di $\mathcal{V}D$ che sono chiusure di $(vect\,\mathfrak{O})$-moduli finiti (cfr. 1.14, 1.15).

2.6 TEOREMA. *Sia $H$ una $\mathfrak{O}$-iperschiera di $R$ tale che $H/\overline{\mathfrak{p}H}$ sia equidimensionale (nel qual caso anche $R$ è equidimensionale). Sussistono le asserzioni seguenti:*

1) *$codim\ R \leq codim\ H/\overline{\mathfrak{p}H}$.*

2) *Sono equivalenti gli asserti: a) Le codimensioni di $R$ e di $H/\overline{\mathfrak{p}H}$ coincidono; b) $\mathcal{V}H^*$ è un sotto $(vect\,\mathfrak{O})$-modulo libero di $\mathcal{V}D$, il cui ordine su $vect\,\mathfrak{O}$ coincide con l'ordine di $\mathcal{V}D$ su $vect\,\mathfrak{k}$.*

3) *Se $codim\ H/\overline{\mathfrak{p}H} = codim\ R$, dati elementi $d_1, \dots, d_h \in \mathcal{V}H^*$, si ha che $\sigma_{\mathcal{V}H^*} d_1, \dots, \sigma_{\mathcal{V}H^*} d_h$ è una base di $\mathcal{V}(H^*/\overline{\mathfrak{p}H^*})$ su $vect\ k$, se e solo se $d_1, \dots, d_h$ è una base di $\mathcal{V}H^*$ su $vect\ \mathfrak{O}$. In tale caso $d_1, \dots, d_h$ è anche una base di $\mathcal{V}D$ su $vect\ \mathfrak{k}$.*

4) *Se $codim\ H/\overline{\mathfrak{p}H} = codim\ R$, si ha $\mathcal{V}(H^*/\overline{\mathfrak{p}H^*}) \cong (\mathcal{V}H^*)/(vect\,\mathfrak{p})(\mathcal{V}H^*)$, l'isomorfismo essendo di $(vect\ k)$-moduli canonici* (cfr. 16, pg. 277 di [MA]).

DIM. 1) Sia $h$ l'ordine di $\mathcal{V}(H^*/\overline{\mathfrak{p}H^*})$ su $vect\ k$, e siano $d_1, \dots, d_h$ elementi di $\mathcal{V}H^*$ tali che $\sigma(d_1), \dots, \sigma(d_h)$ sia una base di $\mathcal{V}(H^*/\overline{\mathfrak{p}H^*})$ su $vect\ k$. Per 2.4 si ha che $(vect\,\mathfrak{O})d_1 + \dots + (vect\,\mathfrak{O})\,d_h$ è denso in $\mathcal{V}H^*$. Ne segue che $\mathcal{V}D = (vect\,\mathfrak{k})\,d_1 + \dots + (vect\,\mathfrak{k})\,d_h$ (cfr. la dim. di 2.5, e l'ultima parte della dim. di 2.4). Allora l'ordine di $\mathcal{V}D$ su $vect\ \mathfrak{k}$ è minore o uguale all'ordine di $\mathcal{V}(H^*/\overline{\mathfrak{p}H^*})$ su $vect\ k$, ed essendo $dim\ R = dim\ H/\overline{\mathfrak{p}H}$, si ha $codim\ R \leq codim\ H/\overline{\mathfrak{p}H}$.

2). Sotto l'ipotesi $a$), essendo $dim\ H/\overline{\mathfrak{p}H} = dim\ R$, l'ordine di $\mathcal{V}D$ su $vect\ \mathfrak{k}$ coincide con l'ordine di $\mathcal{V}(H^*/\overline{\mathfrak{p}H^*})$ su $vect\ k$. Ciò comporta, nella terminologia della dimostrazione di 1), che $\mathcal{V}D = (vect\,\mathfrak{k})\,d_1 \oplus \dots \oplus (vect\,\mathfrak{k})\,d_h$. Allora la somma $(vect\,\mathfrak{O})\,d_1 + \dots + (vect\,\mathfrak{O})\,d_h$ è diretta. Come conseguenza, $(vect\,\mathfrak{O})\,d_1 \oplus \dots \oplus (vect\,\mathfrak{O})\,d_h$, che è denso in $\mathcal{V}H^*$, è chiuso in $\mathcal{V}D$. Allora, essendo $\mathcal{V}H^*$ chiuso in $\mathcal{V}D$, si ha $\mathcal{V}H^* = (vect\,\mathfrak{O})\,d_1 \oplus \dots \oplus (vect\,\mathfrak{O})\,d_h$. Quanto precede prova che sotto l'ipotesi $a$) sussistono gli asserti $b$) e 3).

Supponiamo adesso che sussista l'asserto $b$). Sia quindi $\omega_1, \dots, \omega_l$ un sistema di elementi di $\mathcal{V}H^*$ tali che $\mathcal{V}H^* = (vect\,\mathbb{O})\,\omega_1 \oplus \dots \oplus (vect\,\mathbb{O})\,\omega_l$. Per le ipotesi poste, ed essendo $\mathcal{V}D = (vect\,\mathbb{k})(\mathcal{V}H^*)$, si ha che $\mathcal{V}D = (vect\,\mathbb{k})\,\omega_1 \oplus \dots \oplus (vect\,\mathbb{k})\,\omega_l$. Come prima conseguenza si ha che $(\mathcal{V}H^*) \cap (p\mathcal{V}D) = p\mathcal{V}H^*$. Si osservi poi che esiste $r \geq 1$, tale che $t^r\,\mathcal{V}H^* \subseteq p\mathcal{V}H^*$; infatti, essendo $\mathcal{V}D$ un $T_{\mathbb{k}}$-modulo canonico equidimensionale, esiste $r \geq 1$ tale che $t^r\,\mathcal{V}D \subseteq p\mathcal{V}D$, e allora $t^r\mathcal{V}H^* \subseteq (\mathcal{V}H^*) \cap (p\mathcal{V}D) = p\mathcal{V}H^*$. Ciò posto, sia $\lambda : \mathcal{V}H^* \longrightarrow (\mathcal{V}H^*)/(p\mathcal{V}H^*) = \mathbb{O}\lambda(\omega_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{O}\lambda(\omega_l)$ il semiomomorfismo naturale. Essendo $\lambda(t^r\,\mathcal{V}H^*) = 0$, ed essendo $\mathcal{V}H^*$ un $T_{\mathbb{O}}$-modulo finito, si ha $\lambda(T_{\mathbb{p}}\mathcal{V}H^*) = \lambda((vect\,\mathbb{p})(\mathcal{V}H^*))$. Sia quindi $d \in T_{\mathbb{p}}\mathcal{V}H^*$; esiste $d_{(1)} \in (vect\,\mathbb{p})\,\mathcal{V}H^*$ tale che $d = d_{(1)} + pd'_{(1)}$, con $pd'_{(1)} \in T_{\mathbb{p}}\mathcal{V}H^*$. Siccome il residuo di $pd'_{(1)}$ in $\mathcal{V}(H^*/\mathbb{p}H^*)$ è nullo, e $\mathcal{V}(H^*/\mathbb{p}H^*)$ è un $T_k$-modulo canonico equidimensionale, si ha che il residuo di $d'_{(1)}$ in $\mathcal{V}(H^*/\mathbb{p}H^*)$ è nullo, ossia che $d'_{(1)} \in T_{\mathbb{p}}\mathcal{V}H^*$. Operando su $d'_{(1)}$ come su $d$, si ha che esistono $d_{(2)} \in (vect\,\mathbb{p})\,\mathcal{V}H^*$, $d'_{(2)} \in T_{\mathbb{p}}\mathcal{V}H^*$, tali che $d'_{(1)} = d_{(2)} + pd'_{(2)}$; allora $d = d_{(1)} + pd_{(2)} + p^2 d'_{(2)}$. Così proseguendo si prova che $d$ è limite di una successione di elementi di $(vect\,\mathbb{p})\,\mathcal{V}H^*$. Siccome $(vect\,\mathbb{p})\,\mathcal{V}H^* = (vect\,\mathbb{p})\omega_1 \oplus \dots \oplus (vect\,\mathbb{p})\,\omega_l$ è ovviamente chiuso in $\mathcal{V}D$, si ha che $d \in (vect\,\mathbb{p})\,\mathcal{V}H^*$. Allora $T_{\mathbb{p}}\mathcal{V}H^* \subseteq (vect\,\mathbb{p})\,\mathcal{V}H^*$, ed essendo ovviamente $(vect\,\mathbb{p})\,\mathcal{V}H^* \subseteq T_{\mathbb{p}}\mathcal{V}H^*$, risulta $T_{\mathbb{p}}\mathcal{V}H^* = (vect\,\mathbb{p})\,\mathcal{V}H^*$. Quanto precede prova in primo luogo che sotto l'ipotesi $b$) sussiste l'asserto 4) (cfr. 1.16). Inoltre, risultando $\mathcal{V}(H^*/\mathbb{p}H^*) \cong (\mathcal{V}H^*)/(vect\,\mathbb{p})(\mathcal{V}H^*) = ((vect\,\mathbb{O})\,\omega_1 \oplus \dots \oplus (vect\,\mathbb{O})\,\omega_l)/((vect\,\mathbb{p})\,\omega_1 \oplus \dots \oplus (vect\,\mathbb{p})\,\omega_l)$, si ha che l'ordine $l$ di $\mathcal{V}D$ come $(vetc\,\mathbb{k})$-modulo canonico coincide con l'ordine di $\mathcal{V}(H^*/\mathbb{p}H^*)$ come $(vect\,k)$-modulo canonico, da cui segue $a$), C.V.D..

2.7 Osservazione. *Sia $R$ equidimensionale; nel qual caso $\mathcal{V}D$ è un $(vect\,\mathbb{k})$-modulo canonico. Sia $N$ un sotto-$(vect\,\mathbb{O})$-modulo libero di $\mathcal{V}D$, il cui ordine su vect $\mathbb{O}$ coincida con quello di $\mathcal{V}D$ su vect $\mathbb{k}$. Sono equivalenti gli asserti:*

1) *$N$ è uu sotto-$T_{\mathbb{O}}$-modùlo canonico di $\mathcal{V}D$,*

2) *$(vect\,\mathbb{k})\ N = \mathcal{V}D$, $tN \subseteq N$, $\pi N \subseteq N$, $N/tN$ é un $\mathbb{O}$-modulo libero.*

*Sotto le ipotesi equivalenti* 1), 2), *si ha*: *a*) $N \cap p\mathcal{V}D = pN$, $N \cap t\mathcal{V}D = tN$, $N \cap \pi\mathcal{V}D = \pi N$; *b*) *l'ordine di $N/tN$ su $\mathbb{O}$ coincide con la dimensione di $\mathcal{V}D$ come $T_{\mathbb{k}}$-modulo canonico, ossia con $n$.*

Dim. Sotto l'ipotesi 1), per 1.15 esiste una $\mathbb{O}$-iperschiera $H$ di $R$ tale che $\mathcal{V}H^* = N$. Per 2.4, $\overline{H/\mathbb{p}H}$ risulta equidimensionale. Tenuto conto di ciò, il secondo e terzo asserto di 2) sono ovvii, il primo è stato provato nella dimostrazione di 2.6, il quarto è conseguenza dell'essere $N/tN = (\mathcal{V}H^*)/t(\mathcal{V}H^*) \cong H^* \cap D_0$, e di $a$) di 1.11.

Supponiamo adesso che sussista 2). Siccome $(vect\,\mathbb{k})\,N = \mathcal{V}D$, e inoltre $N$ è libero su $vect\,\mathbb{O}$, e ha su $vect\,\mathbb{O}$ l'ordine che $\mathcal{V}D$ ha su $vect\,\mathbb{k}$, si conclude che $N$ è chiuso in $\mathcal{V}D$; gli stessi motivi comportano anche che $N \cap p\mathcal{V}D = pN$. Tenuto conto di ciò, e dell'essere $tN \subseteq N$, si ha poi che $N$ è un sotto-$T_{\mathbb{O}}$-modulo di $\mathcal{V}D$. È certamente $tN \subseteq N \cap t\mathcal{V}D$. Se poi $td \in N$, essendo $\pi N \subseteq N$, si ha $pd = \pi td \in N$, e quindi (essendo $N \cap p\mathcal{V}D = pN$, ed essendo $\mathcal{V}D$ un $(vect\,\mathbb{k})$-modulo canonico) si ha $d \in N$. Allora $N \cap t\mathcal{V}D \subseteq tN$, onde $N \cap t\mathcal{V}D = tN$. Analogamente si prova che $N \cap \pi\mathcal{V}D = \pi N$. Ciò posto si ha $N/tN = N/(N \cap t\,\mathcal{V}D) \cong (N + t\mathcal{V}D)/t\mathcal{V}D$; siccome $N/tN$ è un $\mathbb{O}$-modulo libero, tenuto conto di quanto precede, si ha che esso risulta isomorfo ad un sotto-$\mathbb{O}$-modulo libero del $\mathbb{k}$-modulo $\mathcal{V}D/t\mathcal{V}D$. Ne segue che $ord_{\mathbb{O}}\,N/tN \leq dim_{\mathbb{k}}\,\mathcal{V}D/t\mathcal{V}D = n$. Si verifica poi immediatamente che se i residui di una famiglia di elementi di $N$ generano $N/tN$ su $\mathbb{O}$, allora tali elementi generano $N$ su $T_{\mathbb{O}}$. Ciò posto, $N$ ammette un sistema di generatori su $T_{\mathbb{O}}$ avente per cardinalità $ord_{\mathbb{O}}\,N/tN$. Siccome è $\mathcal{V}D = (vect\,\mathbb{k})\,N = T_{\mathbb{k}}\,N$, si ha che $\mathcal{V}D$ ammette un sistema di generatori su $T_{\mathbb{k}}$ di cardinalità $ord_{\mathbb{O}}\,N/tN$. Allora è necessariamente $n \leq ord_{\mathbb{O}}\,N/tN$, e quindi $n = ord_{\mathbb{O}}\,N/tN$. Si conclude che $N$ ammette un sistema di generatori su $T_{\mathbb{O}}$ di cardinalità $n$, che, per l'essere $\mathcal{V}D = T_{\mathbb{k}}\,N$, risulta anche un sistema minimale di generatori di $\mathcal{V}D$ su $T_{\mathbb{k}}$. Ciò prova che $N$ è un sotto-$T_{\mathbb{O}}$-modulo canonico di $\mathcal{V}D$.

Quanto precede prova anche che 2) comporta *a*) e *b*), e quindi l'asserto risulta completamente provato, C.V.D..

Se $R$ è equidimensionale, tenuto conto di 2.6 e di 2.7, vi è corrispondenza biunivoca tra:

(i). l'insieme di tutte le $\mathbb{O}$-iperschiere $H$ di $R$ tali che $H/\overline{\mathbb{P}H}$ sia equidimensionale e che $codim\ H/\overline{\mathbb{P}H} = codim\ R$,

(ii). l'insieme di tutti i sotto-$(vect\,\mathbb{O})$-moduli liberi $N$ di $\mathcal{V}D$, il cui ordine su $vect\,\mathbb{O}$ coincide con l'ordine di $\mathcal{V}D$ su $vect\,\mathbb{k}$, tali che $(vect\,\mathbb{k})\,N = \mathcal{V}D$, $tN \subseteq N$, $\pi N \subseteq N$, e che $N/tN$ sia un $\mathbb{O}$-modulo libero.

Tenuto conto di 4) di 2.6, se $H$ è una $\mathbb{O}$-iperschiera di $R$ del tipo descritto in (i), allora la struttura della $k$-iperalgebra locale $H/\overline{\mathbb{P}H}$ è determinata dal $(vect\,\mathbb{O})$ modulo $\mathcal{V}H^*$, essendo $\mathcal{V}(H^*/\mathbb{P}H^*)$ isomorfo a $(\mathcal{V}H^*)/(vect\,\mathbb{P})\,(\mathcal{V}H^*)$ come $(vect\,k)$-modulo canonico.

## CAPITOLO 3

## LA SPECIALIZZAZIONE DELLE IPERALGEBRE LOCALI EQUIDIMENSIONALI

In questo capitolo i simboli conservano gli stessi significati loro attribuiti nei due precedenti capitoli, con l'unica variante di supporre *equidimensionale* l'iperalgebra locale $R$.

1. Sia $H$ una $\mathfrak{S}$ iperschiera di $R$ tale che $H/\overline{\mathfrak{P}H}$ risulti equidimensionale. Poniamo $M = \mathcal{V}D$, $N = \mathcal{C}R$, $M' = \mathcal{V}(H^*/\overline{\mathfrak{P}H^*})$, $N' = \mathcal{C}(H/\overline{\mathfrak{P}H})$.

I moduli canonici (rispettivamente su *vect* $\mathbb{k}$, *vect* $k$) $M$, $M'$ sono privi di blocco di pendenza 1, ed $N$, $N'$ sono privi di blocco di pendenza $O$ (cfr. 4., pg. 122 di [1]).

$M$ ed $N$, $M'$ ed $N'$ sono duali, rispettivamente come (*vect* $\mathbb{k}$)-moduli canonici, e come (*vect* $k$) moduli canonici (cfr. 55., pg. 504 di [MA]).

Dati interi non negativi $h$, $l$, indicheremo con $\lambda(M; h, l)$ la lunghezza del (*vect* $\mathbb{k}$)-modulo $M/(t^h M + \pi^l M)$. Significato analogo hanno i simboli $\lambda(N; h, l)$, $\lambda(M'; h, l)$ $\lambda(N'; h, l)$.

3.1 Lemma. *Dati comunque interi non negativi $h$, $l$, si ha $\lambda(M; h, l) = \lambda(N; l, h)$, $\lambda(M'; h, l) = \lambda(N'; l, h)$.*

Dim. L'asserto dipende solo dal fatto che $M$ ed $N$, $M'$ ed $N'$ sono duali. In quanto segue $M$, $N$ indicano quindi due qualsiasi (*vect* $\mathbb{k}$)-moduli canonici duali tramite una dualità $M \times N \overset{\circ}{\longrightarrow} (\textit{vect}\ \mathbb{k})$.

Siano $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ le estensioni di $M$, $N$ su *biv* $\mathbb{k}$, cosicchè $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ sono (*biv* $\mathbb{k}$)-moduli canonici duali rispetto all'estensione della dualità intercorrente tra $M$ ed $N$ (cfr. 18., pg. 281 di [MA]). Indichiamo poi con $\omega$ l'ordine comune di $M$ ed $N$.

L'applicazione $L \longrightarrow L^* = \{x/x \in \mathcal{N},\ L \circ x \subseteq (\textit{vect}\ \mathbb{k})\}$, dà una antisimilitudine dell'insieme dei sotto-(*vect* $\mathbb{k}$)-moduli di $\mathcal{M}$ di ordine $\omega$, su tutto l'insieme dei sotto-(*vect* $\mathbb{k}$)-moduli di $\mathcal{N}$ di ordine $\omega$.

Tenuto conto di quanto precede, del fatto che $M^* = N$, e che $(t^h M + \pi^l M)^* = (\pi^{-h}N) \cap (t^{-l} N)$, si ha: $\lambda(M; h, l) = \textit{lungh}\ M/(t^h M + \pi^l M) = \textit{lungh}\ (t^h M + \pi^l M)^*/M^* = \textit{lungh}\ ((\pi^{-h} N) \cap (t^{-l} N))/N = \textit{lungh}\ \pi^{-h} N/N - \textit{lungh}\ \pi^{-h} N/((\pi^{-h} N) \cap (t^{-l} N)) = \textit{lungh}\ \pi^{-h} N/N - \textit{lungh}\ (\pi^{-h} N + t^{-l} N)/t^{-l} N = \textit{lungh}\ N/\pi^h N - \textit{lungh}\ (t^l N + \pi^h N)/\pi^h N = \textit{lungh}\ N/\pi^h N - \textit{lungh}\ N/\pi^h N + \textit{lungh}\ N/(t^l N + \pi^h N) = \lambda(N; l, h)$, C. V. D..

3.2 Teorema. *Dati comunque interi non negativi $h$, $l$, si ha $\lambda(M; h, l) \leq \lambda(M'; h, l)$, o equivalentemente* (tenuto conto di 3.1) $\lambda(N; h, l) \leq \lambda(N'; h, l)$.

Dim. Tenuto conto di 3.1 è sufficiente provare la seconda disuguaglianza. $p^{\lambda(N; h, l)}$ è il grado dell'immersione di $t^h N + \pi^l N$ in $N$ (cfr. 17., pg. 279 di [MA]).

Da 3.41, pg. 304 di [MA], risulta che l'applicazione $S \longrightarrow \mathcal{C}S$ dell'insieme delle sottoiperalgebre locali di $R$ sull'insieme dei sotto-(*vect* $\mathbb{k}$)-moduli canonici di $N$, è bigettiva. Allora $t^h N + \pi^l N = \mathcal{C}R'$, ove $R'$ indica la sottoiperalgebra locale di $R$ che è la chiusura di $t^h R + \pi^l R$.

Per 3.42, pg. 305 di [MA], $p^{\lambda(N;h,l)}$, essendo il grado dell'immersione di $\mathcal{C}R'$ in $\mathcal{C}R$, coincide con la dimensione del $\mathbb{K}$-spazio vettoriale $R/\overline{(R')^{+}R}$ e quindi con la dimensione del $\mathbb{K}$-spazio vettoriale $((R')^{+}R)^{\perp} = D_{\pi,h} \cap D_{t,l}$, ove $D_{\pi,h} = ((t^h R)^{+} R)^{\perp}$, $D_{t,l} = ((\pi^l R)^{+})^{\perp}$.

Sia $(x) = (x_1, \dots, x_n)$ un sistema regolare di parametri di $R$ tale che $H = \mathbb{O}\{x\}$. Poniamo $x^s = x^{(s_1, \dots, s_n)} = x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}$; gli $x^s$ costituiscono una pseudobase di $R$ su $\mathbb{K}$ e di $H$ su $\mathbb{O}$. Siano poi $d_s$ gli elementi della base di $D$ su $\mathbb{K}$ trasposta della pseudobase $\{x^s\}$; i $d_s$ costituiscono una base anche di $H^*$ su $\mathbb{O}$.

Posto $z = (p^l - 1, \dots, p^l - 1)$, posto $t^h x_i = \sum_s a_{i,s} x^s$ (si osservi che ogni $a_{i,s} \in \mathbb{O}$), tenuto conto che $D_{t,l} = D_l$ (cfr. 2. del capitolo 1), una verifica banale prova che $d \in D_{\pi,h} \cap D_{t,l}$ (risp.: $d \in (D_{\pi,h} \cap D_{t,l}) \cap H^*$) se e solo se $d = \sum_{s \leq z} a_s d_s$, ove gli $a_s$ sono elementi di $\mathbb{K}$ (risp.: di $\mathbb{O}$) tali che per $r \leq z$ ed $i = 1, \dots, n$ si abbia $\sum_{r \leq s \leq z} a_{i,s-r} a_s = 0$.

Si ha allora che $(D_{\pi,h} \cap D_{t,l}) \cap H^*$ è un $\mathbb{O}$-modulo libero finito, la cui estensione su $\mathbb{K}$ è $D_{\pi,h} \cap D_{t,l}$, avente ordine su $\mathbb{O}$ uguale alla dimensione di $D_{\pi,h} \cap D_{t,l}$ su $\mathbb{K}$ (cfr. l'appendice).

Tenuto conto di quanto precede e del fatto che gli $a_{i,j} \in \mathbb{O}$, posto $D'_{\pi,h} = ((t^h (H/\overline{\mathbb{P}H}))^{+} (H/\overline{\mathbb{P}H}))^{\perp}$, $D'_{t,l} = ((\pi^l (H/\overline{\mathbb{P}H}))^{+} (H/\overline{\mathbb{P}H}))^{\perp}$, si ha che i residui degli elementi di $(D_{\pi,h} \cap D_{t,l}) \cap H^*$ costituiscono un sotto-$k$-modulo di $D'_{\pi,h} \cap D'_{t,l}$, di dimensione su $k$ uguale alla dimensione di $D_{\pi,h} \cap D_{t,l}$ su $\mathbb{K}$.

Siccome la dimensione su $k$ di $D'_{\pi,h} \cap D'_{t,l}$ è $p^{\lambda(N';h,l)}$ (cfr. l'inizio di questa dimostrazione), si conclude che $\lambda(N; h, l) \leq \lambda(N'; h, l)$, C. V. D..

Siano $g$, $g'$ le *funzioni codimensionali* di $M$, $M'$ (cfr. 4., pg. 122 di [1]). Il precedente 3.2, tenuto conto di quanto stabilito dal 4.2, pg. 124 di [1], comporta che per ogni razionale $\beta$, tale che $0 \leq \beta < 1$ si abbia:

3.3 $$\sum_{\alpha \leq \beta} [\alpha(1-\alpha)^{-1} - \beta(1-\beta)^{-1}]\, g(\alpha) \leq \sum_{\alpha \leq \beta} [\alpha(1-\alpha)^{-1} - \beta(1-\beta)^{-1}]\, g'(\alpha)$$

(cfr. 11., pg. 151 di [1]). La relazione 3.3 dà condizioni necessarie sulla funzione codimensionale $g'$, e quindi sulla classe di isogenia di $H/\overline{\mathbb{P}H}$.

La condizione 3.3, può essere scritta in una delle due seguenti forme equivalenti (cfr. 4 di [1]):

3.4 $$dim_\beta M' - dim_\beta M \geq \beta(1-\beta)^{-1} (codim_\beta M' - codim_\beta M),$$

3.5 $$dim_\beta M' - dim_\beta M \geq \beta (ord_\beta M' - ord_\beta M),$$

valide per ogni razionale $\beta$, tale che $0 \leq \beta < 1$. Qui $dim_\beta M'$ indica la dimensione del (*vect* $k$)-modulo canonico che è somma dei blocchi di $M'$ aventi pendenza $\leq \beta$ (cfr. 4. di [1]), e significati analoghi hanno i rimanenti simboli.

**2.** Sia $R'$ un'iperalgebra locale equidimensionale su $k$ (di cui indichiamo con $D'$ l'iperalgebra colocale duale), della stessa dimensione di $R$.

Se la funzione dimensionale $g'$ di $R'$ (ossia la funzione codimensionale di $\mathcal{V}D'$) verifica rispetto alla funzione dimensionale $g$ di $R$ la condizione 3.3, non è detto che esista una $\mathbb{O}$-iperschiera $H$ di $R$ tale che le iperalgebre locali $R'$ ed $H/\overline{\mathbb{P}H}$ siano isomorfe.

Ad esempio, per $R = R_{1,1} \overline{\times} R_{1,1}$, $R' = R_{2,3}$ (cfr. 26., pg. 297 di [MA]), le funzioni $g, g'$ verificano 3.3. In tale situazione però, essendo $\mathcal{V}D = N_{1,1} \oplus \oplus N_{1,1}$, $\mathcal{V}D' = N_{3,2}$, si ha $\lambda(\mathcal{V}D; 1, 1) = 2 > \lambda(\mathcal{V}D'; 1, 1) = 1$. Per 3.2 non può quindi esistere alcuna $\mathbb{O}$-iperschiera $H$ di $R$ tale che $R' \cong H/\overline{\mathbb{P}H}$.

Resta aperto comunque il problema se esista un'iperalgebra locale equidimensionale (definita su un opportuno corpo $\mathbb{K}'$) di funzione dimensionale $g$, dotata di una iperschiera (definita su una opportuna schiera valutante $\mathbb{O}'$ di $\mathbb{K}'$), il cui residuo sia un'iperalgebra locale equidimensionale di funzione dimensionale $g'$. Nel caso dell'esempio citato la risposta è affermativa; si può infatti provare che se $\mathbb{K}$ ha trascendenza assoluta transfinita, esiste una schiera valutante $\mathbb{O}$ di $\mathbb{K}$, ed una $\mathbb{O}$-iperschiera $H$ di $R_{2,2}$ tali che $H/\overline{\mathbb{P}H} \cong R_{2,3}$ (cfr. il successivo 3.7, e le considerazioni relative).

Il numero seguente tratta un caso particolare, ma abbastanza significativo, del problema citato.

**3.** Compito di questo paragrafo è provare che non appena $\mathbb{K}$ ha trascendenza assoluta transfinita, specializzando opportunamente $\mathbb{K}$ si possono ottenere da $R_{n,0}$ iperalgebre locali equidimensionali, di dimensione $n$, di tutti i tipi di isogenia.

3.6. LEMMA. *Sia $(s, r)$ una coppia di interi non negativi tali che: o $(s, r) = (0, 1)$, o $(s, r) = (1, 0)$, o $s$ ed $r$ sono positivi e primi tra loro. Sussistono le asserzioni:*

*a) Sia $x \neq 0$ un elemento del (vect $k$)-modulo canonico $N_{s,r}$. Se $z, v$ sono interi non negativi tali che $t^z x = \pi^v x$, esiste $\lambda$ tale che $z = \lambda s$, $v = \lambda r$.*

*b) Sia $y \neq 0$ un elemento di un (vect $k$)-modulo canonico $N$, tale che $t^s y = \pi^r y$. Allora il sotto-(vect $k$)-modulo canonico di $N$ generato da $y$ è isomorfo ad $N_{s,r}$.*

DIM. *a*). Se $(s, r) = (0, 1)$ oppure $(s, r) = (1, 0)$ l'asserto è pressochè immediato.

Supponiamo quindi $s, r$ positivi e primi tra loro. In tale caso, posto $K = vect\ k$, si ha $N_{s,r} = Kt^s y \oplus \dots \oplus Kty \oplus Ky \oplus K\pi y \oplus \dots \oplus K\pi^{r-1}y$, con $y$ elemento opportuno di $N_{s,r}$ (cfr. 18., pg 281 di [MA]).

Poniamo $Y = (t^s y, \dots, ty, y, \pi y, \dots, \pi^{r-1}y)_{-1}$, ed indichiamo con $C_t, C_\pi$ le matrici legate a $t$ e $\pi$, tramite la base $Y$, ossia le matrici tali che $tY = C_t Y$, $\pi Y = C_\pi Y$.

Sia $G$ il sottogruppo del gruppo lineare di ordine $s + r$ sul corpo razionale $\mathbb{Q}$, generato da $C_t, C_\pi$. Siccome $C_t C_\pi = pI = C_\pi C_t$, $G$ risulta abeliano. Di conseguenza se $M = (m_{ij}) \in G$, si ha $C_\pi M C_t = pM$. Uguagliando le espressioni di $C_\pi M C_t$ e di $pM$, si ottiene che:

1) per $2 \leq i \leq s+1$, si ha $(m_{i,2}, \dots, m_{i,s+1}; pm_{i,s+2}, \dots, pm_{i,s+r}; pm_{i,1}) =$

$= (m_{i-1,1}, \dots, m_{i-1,s}; m_{i-1,s+1}, \dots, m_{i-1,s+r-1}; m_{i-1,s+r})$;

2) per $s+2 \leq i \leq s+r$, si ha $(m_{i,2}, \dots, m_{i,s+1}; m_{i,s+2}, \dots, m_{i,s+r}; m_{i,1}) =$

$= (pm_{i-1,1}, \dots, pm_{i-1,s}; m_{i-1,s+1}, \dots, m_{i-1,s+r-1}; m_{i-1,s+r})$;

3) per $i = 1$, si ha $(m_{1,2}, \dots, m_{1,s+1}; m_{1,s+2}, \dots, m_{1,s+r}; m_{1,1}) =$

$= (pm_{s+r,1}, \dots, pm_{s+r,s}; m_{s+r,s+1}, \dots, m_{s+r,s+r-1}; m_{s+r,s+r})$.

Ne segue che ciascuna riga di $M$ determina le rimanenti; se quindi $M, N$ sono elementi di $G$ aventi una riga di ugual indice in comune, si ha $M = N$.

Si verifica che la prima riga di $C_t^{s+r}$ è $(p^r, 0, \dots, 0)$. Per quanto precede si ha che $C_t^{s+r} = p^r I = C_\pi^r C_t^r$, e quindi che $C_t^s = C_\pi^r$.

Siano $G_t$, $G_\pi$ i sottogruppi di $G$ generati da $C_t$, $C_\pi$, e sia $H = G_t \cap G_\pi$. Siccome $C_t^s = C_\pi^r \in H$, si ha $H \neq \{I\}$, onde $H$ è certamente ciclico infinito; inoltre, essendo $s$ ed $r$ primi tra loro, si ha che $C_t^s = C_\pi^r$ è un generatore di $H$.

Poniamo adesso $x = (a_1, \dots, a_{s+r}) Y = aY$. Essendo $t^z x = \pi^v x$, risulta $a^{\pi^{-z}} C_t^z = a^{\pi^v} C_\pi^v$.

Siccome $x \neq 0$, esiste $i'$ tale che $a_{i'} \neq 0$. Si verifica poi che le matrici $C_t^z$, $C_\pi^v$ hanno le righe del tipo $(0, \dots, 0, p^\lambda, 0, \dots, 0)$, e le colonne del tipo $(0, \dots, 0, p^\mu, 0, \dots, 0)_{-1}$. Poniamo $C_t^z = (t_{ij})$, $C_\pi^v = (\pi_{ij})$, e sia $j'$ tale che $t_{i'j'} \neq 0$. Si deve avere $0 \neq a_{i'}^{\pi^{-z}} t_{i'j'} = a_{i'}^{\pi^v} \pi_{i'j'}$; appurato ciò, e tenuto conto che $t_{i'j'}$ e $\pi_{i'j'}$ sono potenze di $p$, se fosse $t_{i'j'} \neq \pi_{i'j'}$, si avrebbe $a_{i'} = 0$. Si conclude che $C_t^z$ e $C_\pi^v$ hanno la $i'$-esima riga in comune, e quindi che si ha $C_t^z = C_\pi^v$.

Tenuto conto che $C_t^s = C_\pi^r$ è un generatore di $H$, e che $C_t^z = C_\pi^v \in H$, si ha che esiste $\lambda$ tale che $C_t^z = C_\pi^v = C_t^{\lambda s} = C_\pi^{\lambda r}$, onde $z = \lambda s$, $v = \lambda r$.

*b*) Questo asserto è conseguenza di 3.1, pg. 278, e di 3.5, pg. 282 di [MA], e di *a*). C.V.D..

3.7. TEOREMA. *Sia $n$ un intero positivo, e siano $(r_i, s_i)$, per $i = 1, \dots, h$, coppie di interi non negativi tali che $r_1 + \dots + r_h = n$, e che: o $(r_i, s_i) = (1,0)$, oppure $r_i$ ed $s_i$ sono positivi e primi tra loro.*

*Se $\mathbb{K}$ ha trascendenza assoluta transfinita, esistono una schiera valutante (sceglibile archimedea) $\mathfrak{O}$ di $\mathbb{K}$ (di cui indichiamo con $\mathfrak{P}$ il primo massimo e con $k$ il corpo residuo), ed una $\mathfrak{O}$-iperschiera $H$ di $R_{n,0}$, tali che $H/\overline{\mathfrak{P}H}$ sia isomorfa alla $k$-iperalgebra locale $\overline{\times}_i R_{r_i, s_i}$.*

DIM. Tenuto conto di 26., pg. 297, 55., pg. 504, 3.6, pg. 283 di [MA], e di 1.14, 1.15, è sufficiente provare che il (*vect* $\mathbb{K}$)-modulo canonico $N_{0,n}$ ammette un sotto-$T_{\mathfrak{O}}$ modulo canonico $N$ tale che $N/T_{\mathfrak{P}}N$ sia isomorfo al (*vect* $k$)-modulo canonico $\oplus_i N_{s_i, r_i}$ (cfr. 1.16). Per questo è sufficiente provare che $\mathfrak{O}$ è sceglibile in modo che, per $i = 1, \dots, h$, $N_{0, r_i}$ ammetta un sotto-$T_{\mathfrak{O}}$-modulo canonico $N_i$ tale che $N_i/T_{\mathfrak{P}}N_i$ sia isomorfo al (*vect* $k$)-modulo canonico $N_{s_i, r_i}$.

Per le $i$ tali che $s_i = 0$, comunque sia data la schiera $\mathfrak{O}$, un $N_i$ con le proprietà dette esiste ovviamente. Possiamo quindi dimostrare l'asserto supponendo $s_i \neq 0$ per ogni $i$.

Ci limitiamo a dare la dimostrazione per $h = 1$, essendo la dimostrazione del caso generale ottenibile da questa tramite considerazioni pressocchè banali.

Poniamo quindi $r_1 = r$, $s_1 = s$, e inoltre $N_{0,r} = (\textit{vect}\ \mathbb{K})\,\xi_1 \oplus \dots \oplus (\textit{vect}\ \mathbb{K})\,\xi_r$, ove per $i = 1, \dots, r$ si ha $(\textit{vect}\ \mathbb{K})\,\xi_i \cong N_{0,1}$, e quindi $t\xi_i = p\xi_i$, $\pi\xi_i = \xi_i$.

*Siano $y_1, \dots, y_r \in$ vect $\mathbb{K}$, tali che le $y_{ij}$ siano albebricamente indipendenti sul sottocorpo fondamentale $C$ di $\mathbb{K}$* (tali elementi esistono certamente essendo $\mathbb{K}$ di trascendenza transfinita su $C$), *e sia $\xi = y_1\xi_1 + \dots + y_r\xi_r$.*

*Esistono certamente, e sono univocamente determinati, elementi $a_0, \dots, a_{r-1}$ di vect $\mathbb{K}$, tali che $\pi^r\xi = a_0\xi + a_1\pi\xi + \dots + a_{r-1}\pi^{r-1}\xi + t^s\xi$,* in quanto elementi tali che

$$\begin{cases} \pi^r y_1 = a_0 y_1 + a_1 \pi y_1 + \dots + a_{r-1}\pi^{r-1} y_1 + t^s y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \pi^r y_r = a_0 y_r + a_1 \pi y_r + \dots + a_{r-1}\pi^{r-1} y_r + t^s y_r . \end{cases}$$

*Le componenti $a_{\lambda j}$ di tali $a_0, \ldots, a_{r-1}$ sono una base per la trascendenza di $C(y_{ij}/i = 1, \ldots, r; 0 \leq j)$ su $C$.*

Per provare l'ultimo asserto, è ovviamente sufficiente dimostrare che per $m = 0, 1, \ldots$, le $a_{\lambda j}$ con $\lambda = 0, \ldots, r-1$, e $0 \leq j \leq m$, sono una base per la trascendenza di $C_m = C(y_{ij}/i = 1, \ldots, r; 0 \leq j \leq m)$ su $C$. Dimostriamo quindi per induzione su $m$ questo asserto:

Per $m = 0$, le $a_{0,0}, \ldots, a_{r-1,0}$ sono tali che

$$\begin{pmatrix} y_{1,0}, y_{1,0}^{p} \cdots y_{1,0}^{p^{r-1}} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{r,0}, y_{r,0}^{p} \cdots y_{r,0}^{p^{r-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{0,0} \\ \cdot \\ a_{r-1,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,0}^{p^r} \\ \cdot \\ x_{r,0}^{p^r} \end{pmatrix}.$$

È allora ovvio che $a_{0,0}, \ldots, a_{r-1,0} \in C_0$. Inoltre essendo, per $i = 1, \ldots, r$, $a_{0,0}\, y_{i,0} + a_{1,0}\, y_{i,0}^{p} + \ldots + a_{r-1,0}\, y_{i,0}^{p^{r-1}} = y_{i,0}^{p^r}$, si ha che $C_0$ è algebrico su $C(a_{0,0}, \ldots, a_{r-1,0})$. Tenuto conto che la trascendenza di $C_0$ su $C$ è $r$, si ha l'asserto per $m = 0$.

Supponiamo quindi l'asserto provato per $m = 0, \ldots, l-1$, e dimostriamolo per $m = l$.

Gli elementi $a_{0,l}, \ldots, a_{r-1,l}$ sono tali che

$$\begin{pmatrix} y_{1,0}^{p^l} \cdots y_{1,0}^{p^{l+r-1}} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{r,0}^{p^l} \cdots y_{r,0}^{p^{l+r-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{0,l} \\ \cdot \\ a_{r-1,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{l,1} \\ \cdot \\ x_{l,r} \end{pmatrix},$$

ove $x_{l,i} = y_{i,l}^{p^r} - a_{0,0}^{p^l}\, y_{i,l}^{p^0} - \ldots - a_{r-1,0}^{p^l}\, y_{i,l}^{p^{r-1}} + \omega_{l,i}$, con gli $\omega_{l,i}$ elementi opportuni di $C_{l-1}$.

Che $a_{0,l}, \ldots, a_{r-1,l}$ siano elementi di $C_l$, è ovvio. Inoltre risulta $C_{l-1}(a_{0,l}, \ldots, a_{r-1,l}) = C_{l-1}(x_{l,1}, \ldots, x_{l,r})$; allora, essendo $x_{l,1}, \ldots, x_{l,r}$ algebricamente indipendenti su $C_{l-1}$, si ha che $a_{0,l}, \ldots, a_{r-1,l}$ sono algebricamente indipendenti su $C_{l-1}$. Un computo banale di trascendenze assicura allora il sussistere dell'asserto.

*Sia quindi $\mathfrak{V}$ una qualsiasi schiera valutante di $\mathfrak{K}$ tale che ogni $a_{\lambda j} \in \mathfrak{P}$* (tenuto conto di quanto precede, una tale schiera esiste certamente e può essere scelta archimedea).

*Sia $N$ il sotto-$T_{\mathfrak{V}}$-modulo di $N_{0,r}$ generato da $\xi, \pi\xi, \ldots, \pi^{r-1}\xi$, e sia $H$ il sotto-(vect $\mathfrak{V}$)-modulo di $N_{0,r}$ generato da $t^s\xi, \ldots, t\xi, \xi, \pi\xi, \ldots, \pi^{r-1}\xi$.* Si ha:

*a) $N$ è un sotto-$T_{\mathfrak{V}}$-modulo canonico di $N_{0,r}$.* Infatti, essendo $\pi^r \xi = a_0 \xi + \ldots + a_{r-1} \pi^{r-1} \xi + t^s \xi$, si ha che $N$ è chiuso rispetto a $\pi$; inoltre

$\xi, \pi\xi, \dots, \pi^{r-1}\xi$ (tenuto conto di 2.4, pg. 318 di [MC]), è un sistema minimale di generatori di $N_{0,r}$ su $T_{\mathbb{k}}$.

*b*) *H è chiuso rispetto a t e* $\pi$. Infatti, essendo $\pi^r\xi = a_0\xi + \dots + a_{r-1}\pi^{r-1}\xi + t^s\xi$, si ha $\pi^r\xi \in H$, e inoltre si ha $t^{s+1}\xi = p\pi^{r-1}\xi - pa_{r-1}^{\pi^{-1}}\pi^{r-2}\xi - \dots - pa_1^{\pi^{-1}}\pi^0\xi - a_0^{\pi^{-1}}t\xi \in H$.

*c*) *H è denso in N.* Infatti $H$ è chiuso rispetto alla somma; inoltre, dati comunque $u, v$ interi non negativi, ed $a \in vect\,\mathfrak{O}$, si ha $t^u\pi^v(a\xi) \in H$.

Tenuto conto di *a*), per 1.15, 1.16, *$N/T_{\mathfrak{p}}N$ risulta un $T_k$-modulo canonico di dimensione r.*

Tenuto conto di *c*), per 2.4, *$N/T_{\mathfrak{p}}N$ risulta un (vect k)-modulo canonico generato, come tale, dal residuo $\xi'$ di $\xi$.*

*Tenuto conto che $a_0, \dots, a_{r-1} \in vect\,\mathfrak{p}$, si ha $t^s\xi' = \pi^r\xi'$,* onde per *b*) di 3.6, si ha che *$N/T_{\mathfrak{p}}N$ è isomorfo al (vect k)-modulo canonico $N_{s,r}$,* C.V.D..

Siccome l'insieme dei tipi di isogenia di iperalgebre locali equidimensionali di data dimensione $n$, è numerabile, modificando leggermente la dimostrazione di 3.7, si prova che la schiera $\mathfrak{O}$ di cui in 3.7 può essere scelta indipendentemente dal tipo di isogenia che si vuole ottenere.

Osserviamo infine che la tecnica descritta nella dimostrazione di 3.7 permette di costruire effettivamente varie altre specializzazioni di opportune iperalgebre locali equidimensionali; ad esempio permette di ottenere $R_{2,3}$ come specializzazione di $R_{2,2}$ (cfr. 2.). Tenuto però conto delle difficoltà formali che presenta, tale tecnica non sembra prestarsi alla trattazione completa del problema posto alla fine di 2..

## APPENDICE

Sia $\mathbb{k}$ un corpo, ed $\mathfrak{O}$ una sua schiera valutante. Sussiste il seguente asserto: *Sia A una matrice ad n colonne ed m righe ad elementi in $\mathbb{k}$. Sia $\mathcal{L}$ il $\mathbb{k}$-modulo delle soluzioni a elementi in $\mathbb{k}$, del sistema $AX = 0$, e sia L lo $\mathfrak{O}$-modulo delle soluzioni a elementi in $\mathfrak{O}$, dello stesso sistema. Allora*:

*a*) $\mathcal{L} = \mathbb{k}L$,

*b*) *L è un $\mathfrak{O}$-modulo libero finito, il cui ordine su $\mathfrak{O}$ coincide con la dimensione di $\mathcal{L}$ su $\mathbb{k}$.*

Dim. Sostituendo $A$ con una matrice $\lambda A$, con $\lambda$ elemento non nullo di $\mathbb{k}$, gli insiemi $\mathcal{L}$ ed $L$ non variano. Ciò posto si può supporre che $A$ sia ad elementi in $\mathfrak{O}$.

Si consideri allora l'applicazione $\mathfrak{D}$-lineare $\sigma: \mathfrak{D}^n \longrightarrow \mathfrak{D}^m$ definita da $\sigma X = AX$. Si ha $L = ker\ \sigma$.

Siccome $\sigma\mathfrak{D}^n$ è un $\mathfrak{D}$-modulo finito (come immagine di un finito), ed è privo di torsione (come sottomodulo di $\mathfrak{D}^m$), allora risulta anche libero (cfr. l'appendice di [2]). Ne segue che esiste un sotto-$\mathfrak{D}$-modulo $M$ di $\mathfrak{D}^n$ tale che $\mathfrak{D}^n = L \oplus M$.

Quanto precede prova che $L$ è un $\mathfrak{D}$-modulo finito; essendo poi $L$ privo di torsione, $L$ risulta libero.

I rimanenti asserti sono pressochè banali, C.V.D..

## BIBLIOGRAFIA

[MC] I. BARSOTTI, *Moduli canonici e gruppi analitici commutativi,* Ann. Scuola Norm. Sup. in 13, 1959, pg. 303.

[MA] I. BARSOTTI, *Metodi analitici per varietà abeliane in caratteristica positiva,* Ann. Scuola Norm. Sup.: *capp.* 1,2 in 14, 1964, pg. 1; *capp.* 3,4 in 19, 1965, pg. 277; *capp.* 5 in 19 1965, pg. 481.

[1] I. BARSOTTI, *Varietà abeliane su corpi p-adici,* Ist. Naz. Alta Mat., 1968, pg. 109.

[2] M. POLETTI, *Su alcune strutture connesse alla teoria delle iperalgebre su schiere valutanti,* Ann. Scuola Norm. Sup.: Vol. XXIII, (1969), pg. 509.

[3] C. TRAVERSO, *Sulla classificazione dei gruppi analitici commutativi,* Ann. Scuola Norm. Sup.: Vol. XXIII, 1969, pg. 481.