ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

A. MARINO
S. SPAGNOLO

Un tipo di approssimazione dell'operatore $\sum_{1}^{n}{}_{ij} D_i(a_{ij}(x)D_j)$ con operatori $\sum_{1}^{n}{}_{j} D_j(\beta(x)D_j)$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 4 (1969), p. 657-673
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_4_657_0>

UN TIPO DI APPROSSIMAZIONE DELL'OPERATORE $\sum_{1}^{n}{}_{ij} D_i (a_{ij}(x) D_j)$ CON OPERATORI $\sum_{1}^{n}{}_{j} D_j(\beta(x) D_j)$

A. Marino - S. Spagnolo

§ 1. Introduzione e richiami.

In [2] e [3] è stata studiata la convergenza in L^2 delle soluzioni di problemi di Dirichlet relativi ad equazioni ellittiche autoaggiunte del 2^0 ordine e, equivalentemente, delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi ad equazioni paraboliche.

Precisamente, per ogni aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ si è considerata la classe

$$M(\lambda_0, \Lambda_0, \Omega) \qquad 0 < \lambda_0 < \Lambda_0$$

degli operatori differenziali della forma

$$\sum_{1}^{n}{}_{ij} D_i (a_{ij}(x) D_j) \quad (^1)$$

con a_{ij} funzioni misurabili su Ω che verificano le condizioni

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$\lambda_0 |\xi|^2 \leq \sum_{1}^{n}{}_{ij} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda_0 |\xi|^2 \qquad \forall x \in \Omega, \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

E' noto che questi operatori applicano $H^1(\Omega)$ in $H^{-1}(\Omega)$ e sono equilimitati rispetto alle norme corrispondenti; inoltre, detta J l'immersione

Pervenuto alla Redazione il 28 Giugno 1969.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca per la matematica del C.N.R..

(1) In ogni sistema di riferimento su $\mathbb{R}^n$, un tale operatore individua in modo univoco i suoi coefficienti.

canonica di $H_0^1(\Omega)$ in $H^{-1}(\Omega)$, gli operatori $\lambda J - A$, al variare di A in $M(\lambda_0, \Lambda_0 \Omega)$, sono isomorfismi di $H_0^1(\Omega)$ su $H^{-1}(\Omega)$ con inversi $(\lambda J - A)^{-1}$ equilimitati, per ogni fissato $\lambda > 0$ (ed anche per $\lambda = 0$ se Ω è limitato).

Si è allora introdotta su $M(\lambda_0, \Lambda_0, \Omega)$ la seguente convergenza, detta *G-convergenza:*

DEFINIZIONE. *Siano A_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ ed A in $M(\lambda_0, \Lambda_0, \Omega)$. Si dice che*

$$\{A_k\} \xrightarrow{\ G\ } A \qquad su\ \Omega$$

se per ogni $\lambda > 0$ ($\lambda \geq 0$ per Ω limitato) si ha

$$\lim_k \| (\lambda J - A_k)^{-1} f - (\lambda J - A)^{-1} f \|_{L^2(\Omega)} = 0 \qquad \forall f \in H^{-1}(\Omega).$$

(Si noti che se questo limite è zero per un certo λ allora lo è anche per tutti gli altri).

Come si è accennato, questa definizione può essere tradotta in termini di problemi di Cauchy di tipo parabolico:

Dati $B \in M(\lambda_0, \Lambda_0, \Omega)$ e $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, indichiamo, $T_t(B)\,\varphi = u_t\ (t > 0)$ la soluzione in $H_0^1(\Omega)$ del problema:

$$\begin{cases} \dfrac{du_t}{dt} = B u_t, \quad t > 0 \\[2ex] \lim\limits_{t \to 0+} \| u_t - \varphi \|_{H_0^1(\Omega)} = 0. \end{cases}$$

Si ha allora

$$\{A_k\} \xrightarrow{\ G\ } A$$

se e solo se

$$\{T_t(A_k)\,\varphi\} \xrightarrow{\ k\ } T_t(A)\,\varphi \quad \text{in } L^2(\Omega), \qquad \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega),\ \forall\ t > 0.$$

In questo lavoro prendiamo in considerazione una classe speciale di operatori, invarianti per trasformazioni ortogonali su $\mathbb{R}^n$: gli operatori della forma

$$\sum_1^n{}_j\, D_j(\beta(x)\, D_j) \qquad \text{(« \textit{isotropi} »)}$$

e dimostriamo (Teor. 3.1) che tale classe è densa, rispetto alla G-convergenza, in ogni $M(\lambda_0, \Lambda_0, \Omega)$.

Più esattamente proviamo (Teor. 3.4) che esiste una costante c, dipendente solo da n, per cui ogni operatore di $M(\lambda_0, \Lambda_0, \Omega)$ è G-approssimabile con operatori isotropi di $M(c^{-1}\lambda_0, c\Lambda_0, \Omega)$.

Si giunge a questo risultato tramite una caratterizzazione, in termini dei coefficienti, della G-convergenza sulla sottoclasse degli operatori isotropi a coefficienti decomponibili in prodotti di funzioni di una variabile.

Le principali proprietà della G-convergenza, che saranno qui utilizzate, sono le due seguenti:

1.1 (compattezza)

Ogni successione di operatori di $M(\lambda_0, \Lambda_0, \Omega)$ *ammette una sottosuccessione G-convergente ad un operatore di* $M(\lambda_0, \Lambda_0, \Omega)$. (vedi [3], pag. 582)

1.2 (*località*)

Siano Ω_p *aperti di* Ω *tali che* $\operatorname{mis}(\Omega - \bigcup_p \Omega_p) = 0$ *ed* A_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, A *operatori di* $M(\lambda_0, \Lambda_0, \Omega)$ (e quindi anche di $M(\lambda_0, \Lambda_0, \Omega_p)$, $\forall p$).

Allora

$$\{A_k\} \xrightarrow{G} A \quad su \quad \Omega$$

se e solo se

$$\{A_k\} \xrightarrow{G} A \quad su \quad \Omega_p, \ \forall p .$$

(vedi [3], pag. 594, dove però si considera il caso particolare $\Omega = \bigcup_p \Omega_p$; la prova di questo caso è comunque la stessa).

Riportiamo altri risultati sulla G-convergenza che saranno utilizzati.

Siano

$$A_k = \sum_{1}^{n}{}_{ij} D_i (a_{ij}^{(k)} D_j) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

ed

$$A = \sum_{1}^{n}{}_{ij} D_i (a_{ij} D_j)$$

in $M(\lambda_0, \Lambda_0, \Omega)$ e siano A_k^{-1}, A^{-1} gli operatori inversi da $H^{-1}(\Omega)$ su $H_0^1(\Omega)$ rispetto al problema di Dirichlet su Ω, avendo supposto per semplicità Ω limitato in $\mathbb{R}^n$ (se Ω non è limitato basta sostituire ad A_k^{-1}, A^{-1} gli operatori $(\lambda J - A_k)^{-1}$, $(\lambda J - A)^{-1}$ per $\lambda > 0$). Si ha allora:

1.3 $$\{A_k\} \xrightarrow{G} A$$

se e solo se

$$\{A_k^{-1} f\} \xrightarrow{k} A^{-1} f \quad debolmente \ in \ L^2(\Omega), \ \forall f \in L^2(\Omega).$$

(segue facilmente da 1.1)

1.4 *Se* $\{A_k\} \xrightarrow{G} A$ *ed* $\{f_k\} \xrightarrow{k} f$ *in* $H^{-1}(\Omega)$, *si ha*:

$$\lim_k \| A_k^{-1} f_k - A^{-1} f \|_{L^2(\Omega)} = 0$$

(segue facilmente dalla def. di G-convergenza).

1.5 *Valgono le implicazioni* (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) *con*:

(a) $\qquad \{a_{ij}^{(k)}\} \xrightarrow{k} a_{ij} \qquad$ *in* $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), \quad \forall\, ij$

(b) $\qquad \lim_k \| A_k^{-1} f - A^{-1} f \|_{H_0^1(\Omega)} = 0, \qquad \forall\, f \in H^{-1}(\Omega)$

(c) $\qquad \{A_k\} \xrightarrow{G} A$

(vedi [3] pag. 589)

1.6. *La* G*-convergenza su* $M(\lambda_0, \Lambda_0, \Omega)$ *è indotta da una metrica.* (Basta definire per $A, B \in M(\lambda_0, \Lambda_0, \Omega)$,

$$d_G(A, B) = \sum_{1}^{\infty}{}_i \, 2^{-i} \| A^{-1} f_i - B^{-1} f_i \|_{L^2(\Omega)}$$

dove f_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ è un insieme denso nella palla unitaria di $H^{-1}(\Omega)$).

Notazioni.

$\mathbb{R}^n$ è lo spazio delle n-ple $x = (x_1, \ldots, x_n)$ con la norma $|x| = \left(\sum_1^n{}_i \, x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$;

$D_i = \dfrac{\partial}{dx_i}$ la derivazione i-ma.

Il termine *funzione* sta per *classe di funzioni quasi ovunque coincidenti*, e la locuzione *quasi ovunque* sarà in genere sottintesa. Saranno considerati i seguenti spazi lineari sul *corpo reale* $\mathbb{R}$, muniti delle solite strutture topologiche: (Ω aperto di $\mathbb{R}^n$)

$\mathcal{D}(\Omega)$ *funzioni reali* C^∞ (cioè indefinitamente derivabili) ed *aventi supporto compatto* su Ω

$\mathcal{D}'(\Omega)$ *distribuzioni reali* su Ω

$L^\infty(\Omega)$ *funzioni reali misurabili ed essenzialmente limitate* su Ω

$L^p(\Omega)$ *funzioni reali di potenza* p*-ma sommabile* su Ω

$L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *funzioni reali di potenza* p-*ma sommabile su ogni compatto di* Ω

$H^1(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega) : D_i\,\varphi \in L^2(\Omega),\ i = 1, \dots, n\}$

$H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) = \{\varphi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) : D_i\,\varphi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega),\ i = 1, \dots, n\}$

$H^1_0(\Omega)$ *aderenza di* $\mathcal{D}(\Omega)$ *in* $H^1(\Omega)$

$H^{-1}(\Omega) = \{f \in \mathcal{D}'(\Omega) : f = g_0 + \sum_1^n{}_j D_j\, g_j;\ g_j \in L^2(\Omega)\}$

$K \subset\subset \Omega$ significa che $\overline{K}$ è *un compatto* di Ω.

§ 2. La G-convergenza su una classe speciale di operatori.

Nel caso di una sola variabile ($n = 1$) si può vedere facilmente ([3], pag. 596) che

$$\{D(\beta_k(x)\,D)\} \xrightarrow{G} D(\beta(x)\,D) \qquad \text{su } \Omega$$

se e solo se

$$\lim_k \int_\Omega \left(\frac{1}{\beta_k} - \frac{1}{\beta}\right) w\, dx = 0 \qquad \forall\, w \in L^1(\Omega).$$

Nel caso generale (Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, $n > 1$) non siamo in grado di tradurre la G-convergenza in termini di convergenza dei coefficienti, se non su classi particolari di operatori.

Una di queste classi è quella degli operatori del tipo

$$\sum_1^n{}_j D_j(\beta(x)\,D_j) \qquad \text{con } \beta(x) = \prod_{i=1}^n \beta^{(i)}(x_i).$$

Per caratterizzare la G- convergenza per questi operatori (Teor. 2.2), è utile il seguente risultato:

LEMMA 2.1. *Consideriamo, su un aperto limitato* Ω *di* $\mathbb{R}^n$, *l'operatore*

$$B = \sum_1^n{}_j D_j(\beta(x)\,D_j)$$

dove β *è una funzione misurabile su* Ω *della forma*

$$\beta(x) = \prod_{i=1}^n \beta^{(i)}(x_i) \qquad x = (x_1, \dots, x_n)$$

con

$$0 < \lambda \leq \beta^{(i)} \leq \Lambda .$$

Se $u \in H_0^1(\Omega)$ *è tale che* $f = Bu$ *appartiene ad* $L^2(\Omega)$, *si ha*:

$$\beta^{(i)}(x_i)\, D_i\, u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \qquad \forall\, i,$$

e

$$\| \beta^{(i)}(x_i)\, D_i u \|_{H^1(\Omega_0)} \leq C\, \| f \|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall\, \Omega_0 \subset\subset \Omega, \tag{1}$$

con C *costante dipendente solo da* Ω_0, Ω, λ, Λ.

DIMOSTRAZIONE 1. Supponiamo dapprima che β sia di classe C^∞.

In tal caso, il teorema di regolarità locale delle soluzioni di operatori ellittici (vedi ad es. [1], pag. 138) assicura che $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e quindi $\beta^{(i)}(x_i)\, D_i\, u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Per provare la (1), consideriamo gli operatori ellittici

$$L_i = \sum_1^n{}_j\, D_j \left[\frac{\beta(x)}{(\beta^{(i)}(x_i))^2}\, D_j \right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Poichè si verifica che

$$L_i\, (\beta^{(i)}(x_i)\, D_i\, u) = D_i \left(\frac{f}{\beta^{(i)}(x_i)} \right)$$

si ha per una nota maggiorazione (ad es. [4], pag. 170) $\forall\, \Omega_0 \subset\subset \Omega$

$$\| \beta^{(i)}(x_i)\, D_i u \|_{H^1(\Omega_0)} \leq C_1 \left\{ \| \beta^{(i)}(x_i)\, D_i u \|_{L^2(\Omega)} + \left\| D_i \left(\frac{f}{\beta^{(i)}(x_i)} \right) \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \right\}$$

$$\leq C_2\, \{ \| u \|_{H^1(\Omega)} + \| f \|_{L^2(\Omega)} \}$$

con C_1, C_2 dipendenti solo da Ω_0, Ω, λ, Λ, e quindi vale la (1).

2. Se β è semplicemente una funzione misurabile, si possono costruire, per convoluzione, delle funzioni C^∞, $\beta_k^{(i)}(x_i)$, $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ tali che

$$\lambda \leq \beta_k^{(i)} \leq \Lambda$$

$$\{\beta_k^{(i)}(x_i)\} \xrightarrow{k} \beta^{(i)}(x_i) \text{ in } L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Detto allora B_k l'operatore $\sum_1^n{}_j D_j \left[\left(\prod_{i=1}^n \beta_k^{(i)}(x_i) \right) D_j \right]$ ed u_k, u le funzioni, in $H_0^1(\Omega)$, tali che $B_k u_k = Bu = f$, si ha (vedi 1.5):

$$\{u_k\} \xrightarrow{k} u \text{ in } H^1(\Omega)$$

e quindi anche

$$\{\beta_k^{(i)}(x_i) D_i u_k\} \xrightarrow{k} \beta^{(i)}(x_i) D_i u \qquad \text{in } L^1_{loc}(\Omega).$$

D'altra parte si ha, per la (1) nel caso già provato, $\forall\, \Omega_0 \subset\subset \Omega$:

$$\| \beta_k^{(i)}(x_i) D_i u_k \|_{H^1(\Omega_0)} \leq C(\Omega_0, \Omega, \lambda, \Lambda) \| f \|_{L^2(\Omega)}$$

cosicchè, estraendo una sottosuccessione debolmente convergente in $H^1(\Omega_0)$, si ha la tesi:

$$\beta^{(i)}(x_i) D_i u \in H^1(\Omega_0)$$

$$\| \beta^{(i)}(x_i) D_i u \|_{H^1(\Omega_0)} \leq C(\Omega_0, \Omega, \lambda, \Lambda) \| f \|_{L^2(\Omega)}.$$

TEOREMA 2.2. *Consideriamo, su aperto Ω di $\mathbb{R}^n$, gli operatori*

$$B_k = \sum_1^n{}_j D_j (\beta_k(x) D_j) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

con β_k funzioni misurabili su Ω della forma

$$\beta_k(x) = \prod_{i=1}^n \beta_k^{(i)}(x_i)$$

e $$0 < \lambda \leq \beta_k^{(i)} \leq \Lambda \quad (^2)$$

e l'operatore

$$A = \sum_1^n{}_j D_j (\lambda_j(x) D_j)$$

---

(2) Se $\lambda \leq \prod_{i=1}^n \beta^{(i)}(x_i) \leq \Lambda$, si può sempre trovare un'altra decomposizione $\prod_{i=1}^n \beta^{(i)}(x_i) = \prod_{i=1}^n \widetilde{\beta}^{(i)}(x_i)$ per cui

$$\mathrm{Min}\,\{\lambda, 1\} \leq \widetilde{\beta}^{(i)} \leq \mathrm{Max}\,\{\Lambda, 1\}$$

con λ_j funzioni misurabili su Ω e

$$\lambda \leq \lambda_j \leq \Lambda .$$

Allora

$$\{B_k\} \xrightarrow{G} A$$

se e solo se, $\forall j$, :

$$\lim_k \int_\Omega \left[\frac{\beta_k(x) - \lambda_j(x)}{\beta_k^{(j)}(x_j)} \right] w(x)\, dx = 0 \qquad \forall w \in L^1(\Omega) \text{ [3]} \tag{2}$$

Dimostrazione. Per la località della G-convergenza (vedi 1.2) si può supporre Ω limitato.

1. Proviamo che (2) implica: $\{B_k\} \xrightarrow{G} A$.

Per questo, detti B_k^{-1}, A^{-1} : $H^{-1}(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ gli operatori inversi. (rispetto al problema di Dirichlet su Ω) di B , A, basta verificare (vedi 1.3) che:

$$\lim_k \int_\Omega (g \cdot B_k^{-1} f - g \cdot A^{-1} f)\, dx = 0 \qquad \forall f, g \in L^2(\Omega)$$

e, anzi, che

$$\lim_k \int_\Omega (f \cdot B_k^{-1} f - f \cdot A^{-1} f)\, dx = 0 \qquad \forall f \in L^2(\Omega)$$

dal momento che A e B_k sono operatori simmetrici.

Ora, posto $u_k = B_k^{-1} f$, $u = A^{-1} f$, si ha

$$\int_\Omega (f \cdot B_k^{-1} f - f \cdot A^{-1} f)\, dx = \sum_1^n{}_j \int_\Omega (-\lambda_j(x) D_j u D_j u_k + \beta_k(x) D_j u_k D_j u)\, dx$$

$$= \sum_1^n{}_j \int_\Omega \left(\frac{\beta_k(x) - \lambda_j(x)}{\beta_k^{(j)}(x_j)} \beta_k^{(j)}(x_j) D_j u_k D_j u\, dx. \right.$$

Ma, per la (1), $\{\beta_k^{(j)}(x_j) D_j u_k\}$ è, per ogni j, una successione limitata in $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$, quindi compatta in $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$; inoltre tale successione è limitata in $L^2(\Omega)$, in quanto le u_k $(= B_k^{-1} f)$ sono equilimitate in $H^1(\Omega)$.

---

[3] La (2) non dipende dalla scelta della decomposizione delle β_k (purchè $\lambda \leq \beta_k^{(i)} \leq \Lambda$).

Pertanto $\{\beta_k^{(j)}(x_j)\, D_j\, u_k\, D_j\, u\}$ è una successione compatta in $L^1(\Omega)$ e quindi, dalla (2), segue: $\{B_k\} \xrightarrow{G} A$.

2. Proviamo che da $\{B_k\} \xrightarrow{G} A$ segue la (2).

Le successioni $\left\{\dfrac{\beta_k(x)}{\beta_k^{(j)}(x_j)}\right\}$ e $\left\{\dfrac{1}{\beta_k^{(j)}(x_j)}\right\}$ sono, per ogni j, limitate in $L^\infty(\Omega)$ e quindi compatte nella topologia debole $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ (4).

Se pertanto la (2) non valesse, esisterebbero degli interi $\{k_r\} \longrightarrow \infty$ e delle funzioni $\tilde{\lambda}_1(x), \dots, \tilde{\lambda}_n(x)$, con $\tilde{\lambda}_{j_0} \neq \lambda_{j_0}$ per qualche j_0, tali che, $\forall j$, :

$$\left\{\frac{\beta_{k_r}(x)}{\beta_{k_r}^{(j)}(x_j)} - \frac{\tilde{\lambda}_j(x)}{\beta_{k_r}^{(j)}(x_j)}\right\} \xrightarrow{r} 0 \text{ in } \sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega)).$$

Ma allora, per la parte 1. della dimostrazione, si avrebbe

$$\{B_{k_r}\} \xrightarrow{G} \sum_1^n{}_j\, D_j(\tilde{\lambda}_j(x)\, D_j)$$

e quindi per l'unicità del G-limite

$$\tilde{\lambda}_j = \lambda_j, \qquad \forall j, \qquad \text{contraddittorio.}$$

§ 3. Il teorema di densità.

Con l'aiuto del Teor. 2.2 siamo ora in grado di provare il risultato principale di questo articolo:

TEOREMA 3.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ ed $A = \sum_1^n{}_{ij} D_i(a_{ij}(x)\, D_j)$ con a_{ij} funzioni misurabili su Ω e verificanti le condizioni*

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} a_{ij} = a_{ji} \\ \lambda_0 |\xi|^2 \leq \sum_1^n{}_{ij}\, a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \leq \Lambda_0 |\xi|^2 \qquad \forall x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n\ (\lambda_0 > 0). \end{cases}$$

---

(4) $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ è la topologia debole su $L^\infty(\Omega)$ come duale di $L^1(\Omega)$: $\{\varphi_k\} \xrightarrow{k} 0$ in tale topologia se $\lim_k \int_\Omega \varphi_k\, w\, dx = 0$, $\forall w \in L^1(\Omega)$.

Si può allora G-approssimare su Ω l'operatore A con una successione di operatori della forma $(k = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\left\{ \sum_{1}^{n}{}_j D_j \left(\beta_k(x) D_j\right) \right\} \tag{4}$$

con

$$\beta_k \in C^\infty(\bar\Omega) \qquad \text{e } 0 < \lambda_0' \leq \beta_k \leq \Lambda_0' .$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione può suddividersi in due parti.

Nella 1ª parte si mostra che si può trovare, in ogni intorno (nella G-convergenza) di A un operatore con coefficienti costanti a tratti e verificanti le stesse limitazioni (3) degli a_{ij}; ciò permette, localizzando il problema ed eseguendo un cambiamento di coordinate, di ridursi al caso che A sia diagonale ed a coefficienti costanti.

Nella 2ª parte si approssima un A di questo tipo con operatori del tipo (4).

1. Non è restrittivo, prima di tutto, supporre che le a_{ij} siano C^∞ su $\bar\Omega$.

Infatti si possono costruire, per convoluzione, delle funzioni C^∞ su $\bar\Omega$, $a_{ij,k} (k = 1, 2, 3, \ldots)$, verificanti uniformemente le (3), tali che

$$\{a_{ij,k}\} \xrightarrow{k} a_{ij} \qquad \text{in } L^1_{\text{loc}}(\Omega);$$

ma la convergenza dei coefficienti in L^1_{loc} implica la G-convergenza dei corrispondenti operatori (vedi 1.5)

Per lo stesso motivo, ci si può limitare a cercare i coefficienti β_k degli operatori approssimanti nell'ambito delle funzioni misurabili su Ω.

A questo punto, data la continuità delle a_{ij} su $\bar\Omega$, si possono trovare, fissato $\varepsilon > 0$, degli aperti limitati di Ω, $\Omega_r^{(\varepsilon)} (r = 1, 2, 3, \ldots)$ con $\Omega_r^{(\varepsilon)} \cap \Omega_s^{(\varepsilon)} = \emptyset$ per $r \neq s$, mis $\left(\Omega - \bigcup_{r=1}^{\infty} \Omega_r^{(\varepsilon)}\right) = 0$ e $\sup_{x \in \Omega_r^{(\varepsilon)}} a_{ij}(x) - \inf_{x \in \Omega_r^{(\varepsilon)}} a_{ij}(x) \leq \varepsilon$. Allora le funzioni $a_{ij}^{(\varepsilon)}$ che assumono su $\Omega_r^{(\varepsilon)}$ il valore costante $a_{ij}(x_r^{(\varepsilon)})$, dove $x_r^{(\varepsilon)}$ è un arbitrario punto di $\Omega_r^{(\varepsilon)}$, verificano uniformemente la (3) e inoltre

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| a_{ij}^{(\varepsilon)} - a_{ij} \|_{L^\infty(\Omega)} = 0.$$

Pertanto, essendo la convergnza L^∞ dei coefficienti più forte della G-convergenza, non è restrittivo supporre che i coefficienti a_{ij} siano costanti su degli aperti limitati Ω_r tali che $\Omega_r \cap \Omega_s = \emptyset$ per $r \neq s$, mis $\left(\Omega - \bigcup_{r=1}^{\infty} \Omega_r\right) = 0$.

Per 1.2 è quindi sufficiente approssimare A (con operatori del tipo (4)) su ciascuno degli Ω_r, il che è come supporre A a coefficienti costanti su Ω ed Ω limitato.

Il problema si semplifica ulteriormente se si osserva che gli operatori del tipo (4) restano invariati per rotazioni degli assi coordinati: scegliendo un opportuno sistema di riferimento si può quindi fare in modo che la matrice a_{ij} sia diagonale, cioè che

$$A = \sum_{1}^{n} {}_j \lambda_j D_j^2, \qquad \lambda_j \in \mathbb{R},\ \lambda_0 \leq \lambda_j \leq \Lambda_0 .$$

2. In vista del Teor. 2.2 costruiremo delle funzioni $\beta_k(x) = \prod_{i=1}^{n} \beta_k^{(i)}(x_i)$ $(k = 1, 2, 3, ..)$ che verificano la (2) (con le λ_j costanti su Ω).

Per questo è sufficiente che sia, $\forall i$, :

$$(5) \qquad \begin{cases} \{\beta_k^{(i)}(x_i)\} \xrightarrow{k} \mu^{(i)} \\ \left\{\dfrac{1}{\beta_k^{(i)}(x_i)}\right\} \xrightarrow{k} \dfrac{1}{\nu^{(i)}} \end{cases} \qquad \text{in } \sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$$

per certi $\mu^{(i)}, \nu^{(i)} \in \mathbb{R}$ tali che [5] $\prod_{i \neq j} \mu^{(i)} - \dfrac{\lambda_j}{\nu^{(j)}} = 0$, $\forall j$, cioè

$$(6) \qquad \begin{cases} \lambda_1 = \nu^{(1)} \mu^{(2)} \mu^{(3)} \ldots \mu^{(n)} \\ \lambda_2 = \mu^{(1)} \nu^{(2)} \mu^{(3)} \ldots \mu^{(n)} \\ \cdot \ \ \cdot \ \ \cdot \ \ \cdot \ \ \cdot \ \ \cdot \ \ \cdot \ \ \cdot \ \ \cdot \\ \lambda_n = \mu^{(1)} \mu^{(2)} \mu^{(3)} \ldots \nu^{(n)} . \end{cases}$$

Supponiamo di aver scelto le $\mu^{(i)}, \nu^{(i)}$ (con $\mu^{(i)} \geq \nu^{(i)} > 0$); un modo di costruire le $\beta_k^{(i)}$ verificanti la (5) è il seguente:

---

[5] Si noti che, essendo $\int_\Omega \beta_k^{(i)}\, dx \cdot \int_\Omega (\beta_k^{(i)})^{-1}\, dx \geq (\text{mis}\ \Omega)^2$, $\forall k$, (5) implica la relazione $\mu^{(i)} \geq \nu^{(i)}$.

Si considera, per ogni k, una ripartizione di $\mathbb{R}$ in intervalli eguali di lunghezza $\frac{1}{k}$, $\mathbb{R} = \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} I_{m,k}$, $I_{m,k}$ precedente $I_{m+1,k}$, e si definisce

$$\beta_k^{(i)} = \begin{cases} a_i & \text{su } I_{m,k}, \text{ per } m \text{ pari} \\ b_i & \text{su } I_{m,k}, \text{ per } m \text{ dispari} \end{cases}$$

dove a_i, b_i sono numeri > 0 da determinarsi

Poichè

$$\begin{cases} \{\beta_k^{(i)}\} \xrightarrow{k} \frac{1}{2}(a_i + b_i) \\ \left\{\frac{1}{\beta_k^{(i)}}\right\} \xrightarrow{k} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_i}\right) \end{cases} \quad \text{in } \sigma(L^\infty, L^1)$$

(a_i, b_i) devono risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(a_i + b_i) = \mu^{(i)} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_i}\right) = \frac{1}{\nu^{(i)}} . \end{cases}$$

Ora questo sistema è certamente risolubile e le sue soluzioni sono positive, in quanto $\mu^{(i)} \geq \nu^{(i)} > 0$.

Pertanto, resta solo da scegliere una decomposizione (6) con $\mu^{(i)} \geq \nu^{(i)} > 0$. Una scelta possibile è

$$\mu^{(i)} = \Lambda^{1/n}, \quad \nu^{(i)} = \lambda_i \Lambda^{(1-n)/n}$$

dove $\Lambda = \operatorname{Max}\{\lambda_i\}$.

I valori a_i, b_i attribuiti a $\beta_k^{(i)}(x_i)$ nella parte 2 della precedente dimostrazione sono tali che

$$2^{-1}\nu^{(i)} \leq a_i \leq b_i \leq 2\mu^{(i)}$$

quindi

$$2^{-n} \prod_{i=1}^{n} \nu^{(i)} \leq \beta_k(x) \leq 2^n \prod_{i=1}^{n} \mu^{(i)} .$$

Si è così provata la seguente

PROPOSIZIONE 3.2. *Ogni operatore diagonale a coefficienti costanti*

$$A = \sum_{1}^{n} {}_j \lambda_j D_j^2 \qquad (\lambda_j > 0)$$

è G-limite di una successione di operatori B_k del tipo seguente

$$B_k = \sum_{1}^{n} D_j (\beta_k(x) D_j) \qquad (\beta_k \quad C^\infty \text{ su } \bar{\Omega}) \tag{7}$$

$$\beta_k(x) = \prod_{i=1}^{n} \beta_k^{(i)}(x_i) \tag{8}$$

$$2^{-n} \Lambda^{1-n} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \beta_k \leq 2^n \Lambda \tag{9}$$

dove $\Lambda = \text{Max}\,\{\lambda_i\}$.

Vogliamo ora studiare il legame fra le costanti di ellitticità L_k dei B_k $(L_k = \sup_\Omega \beta_k \cdot (\inf_\Omega \beta\ )^{-1})$ ed L di A $(L = \text{Max}\ \{\lambda_j\} \cdot (\text{Min}\,\{\lambda_j\})^{-1})$.

Si può anzitutto verificare che, per ogni successione di operatori $\{B_k\}$, del tipo (7), (8) che G-converga ad A, si ha

$$\operatorname*{Min\,lim}_k \{\sup_\Omega \beta_k\} \geq \Lambda$$

$$\operatorname*{Max\,lim}_k \{\inf_\Omega \beta_k\} \leq \Lambda^{1-n} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

Infatti se $\{B_k\} \xrightarrow{G} A$, passando eventualmente ad una sottosuccessione dev'essere verificata la (5) per certe $\mu^{(i)}$, $\nu^{(i)}$ verificanti la (6). Ma (5) implica

$$\operatorname*{Min\,lim}_k \sup_\Omega \beta_k^{(i)} \geq \mu^{(i)} \geq \nu^{(i)} \geq \operatorname*{Max\,lim}_k \inf_\Omega \beta_k^{(i)}, \qquad \forall\ i$$

mentre in ogni decomposizione di tipo (6) (con $\mu^{(i)} \geq \nu^{(i)} > 0$) si ha

$$\prod_{i=1}^{n} \mu^{(i)} \geq \Lambda, \quad \prod_{i=1}^{n} \nu^{(i)} \leq \Lambda^{1-n} \cdot \prod_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

In particolare, indicata L_k la costante di ellitticità di B_k ed L quella di A, si ha

$$\operatorname*{Min\,lim}_k \{L_k\} \geq \Lambda^n \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{-1},$$

stima che si riduce a $\operatorname{Min\,lim}_k \{L_k\} \geq L^{n-1}$ qualora sia

$$\Lambda = \lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n .$$

Si può ora cercare una migliore approssimazione ($L_k \leq c_n L$) di A con operatori del tipo (7), se si rinuncia alla (8).

Per ottenerla (Teor. 3.4), utilizzeremo un lemma relativo alla G-convergenza di operatori le cui matrici dei coefficienti siano costituite da due blocchi dipendenti da differenti variabili:

Se $E = \sum_{1}^{k}{}_{ij} D_j(\theta_{ij}(x) D_j)$ è un operatore su un aperto Ω_0 di $\mathbb{R}^k$ $(k < n)$, dove le θ_{ij} sono funzioni misurabili su Ω_0, introduciamo gli operatori (in $\mathbb{R}^n$):

$$E' = \sum_{1}^{k}{}_{ij} D_i(\theta_{ij}(x_1, \dots, x_k) D_j), \qquad \text{su} \quad \Omega_0 \times \mathbb{R}^{n-k}$$

$$E'' = \sum_{1}^{k}{}_{ij} D_{n-k+i}(\theta_{ij}(x_{n-k+1}, \dots, x_n) D_{n-k+j}), \quad \text{su} \quad \mathbb{R}^{n-k} \times \Omega_0 .$$

Si ha allora:

LEMMA 3.3. *Sia $\Omega = \Omega' \times \Omega''$ un aperto di $\mathbb{R}^n$, con $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^p$, $\Omega'' \subseteq \mathbb{R}^q$ $(p + q = n)$ e siano $(k = 1, 2, 3, \dots)$*

$$B_k\,,\ B \in M(\lambda_0, \Lambda_0, \Omega')$$

$$C_k\,,\ C \in M(\lambda_0, \Lambda_0, \Omega'')\ \text{(6)}$$

$$A_k = B'_k + C''_k\,, \qquad A = B' + C'' \qquad (A_k\,, A \in M(\lambda_0, \Lambda_0, \Omega)).$$

Allora

$$\{A_k\} \xrightarrow{G} A \qquad su \quad \Omega$$

se (e solo se)

$$\{B_k\} \xrightarrow{G} B \qquad su \quad \Omega'$$

e

$$\{C_k\} \xrightarrow{G} C \qquad su \quad \Omega''.$$

DIMOSTRAZIONE. Per 1.2 si può supporre Ω limitato.

Per la compattezza della G-convergenza (vedi 1.1) e per il fatto che da $B' + C'' = B_* + C''_*$ segue $B = B_*$, $C = C_*$, basta dimostrare che se

(6) Per definizione di $M(\lambda_0, \Lambda_0, \Omega)$ vedi il § 1.

$\{A_k\} \xrightarrow{G} A$, $\{B_k\} \xrightarrow{G} B$, $\{C_k\} \xrightarrow{G} C$, allora si ha

$$A = B' + C''.$$

Per questo basta verificare che

$$A\,(u \otimes v) = (B' + C'')\,(u \otimes v) \qquad \forall\ u \in H_0^1\,(\Omega'),\ \ v \in H_0^1\,(\Omega'')$$

dove

$$(u \otimes v)\,(x) = u\,(x_1\,,\,\dots\,,\,x_k)\,v\,(x_{k+1}\,,\,\dots\,,\,x_n).$$

Infatti le funzioni del tipo $u \otimes v$ generano un sottospazio denso di $H_0^1\,(\Omega)$.

Siano ora $u_k \in H_0^1\,(\Omega')$, $v_k \in H_0^1\,(\Omega'')$ le funzioni tali che $B_k\,u_k = Bu$, $C_k\,v_k = Cv$; per definizione di G-convergenza si ha allora

$$\{u_k\} \xrightarrow{k} u \quad \text{in} \quad L^2\,(\Omega')$$

$$\{v_k\} \xrightarrow{k} v \quad \text{in} \quad L^2\,(\Omega'').$$

Ma

$$A_k\,(u_k \otimes v_k) = (B_k\,u_k) \otimes v_k + u_k \otimes (C_k\,v_k) = Bu \otimes v_k + u_k \otimes Cv$$

quindi

$$\{A_k\,(u_k \otimes v_k)\} \xrightarrow{k} Bu \otimes v + u \otimes Cv \qquad \text{in} \quad H^{-1}\,(\Omega).$$

D'altra parte

$$\{u_k \otimes v_k\} \xrightarrow{k} u \otimes v \qquad \text{in} \quad L^2\,(\Omega)$$

e, poiché $\{A_k\} \xrightarrow{G} A$, per 1.4 si ha la tesi:

$$A\,(u \otimes v) = (Bu) \otimes v + u \otimes (Cv).$$

TEOREMA 3.4. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ ed $A = \sum_{1}^{n}{}_{ij}\,D_i\,(a_{ij}\,(x)\,D_j)$ con a_{ij} funzioni misurabili su Ω e verificanti le* (3).

Si può allora G-approssimare su Ω l'operatore A con una successione di operatori della forma ($k = 1, 2, 3, \dots$)

$$\sum_{1}^{n}{}_{j}\,D_j\,(\beta_k\,(x)\,D_j)$$

con

$$c^{-1}\,\lambda_0 \leq \beta_k \leq c\,\Lambda_0$$

dove c è una costante che dipende solo da n e non da $\lambda_0\,,\,\Lambda_0$.

DIMOSTRAZIONE. Se $n=1$ il teorema è banale ($c=1$).

Supponiamo vero il teorema su $\mathbb{R}^{n-1}$ e verifichiamolo su $\mathbb{R}^n$.

Per 1.2 si può supporre $\Omega = \Omega' \times \Omega''$, con $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, $\Omega'' \subseteq \mathbb{R}$.

Inoltre, procedendo esattamente come nella parte 1. della dimostrazione del Teor. 3.1, ci si può ricondurre ad approssimare un operatore della forma

$$A = \sum_1^n {}_j \lambda_j D_j^2 , \qquad \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 \leq \lambda_j \leq \Lambda_0 ,$$

e anche, cambiando eventualmente il sistema di riferimento, si può supporre che

$$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1 .$$

Ora, usando le notazioni del Lemma 3.3, si può, scrivere

$$A = B' + C''$$

$$\text{con} \qquad B = \sum_1^{n-1} {}_j \lambda_j D_j^2 \qquad \text{operatore su } \Omega'$$

$$\text{e} \qquad C = \lambda_n D_n^2 \qquad \text{operatore su } \Omega''.$$

Per l'ipotesi induttiva, approssimiamo B, su Ω', con operatori della forma

$$\sum_1^{n-1} {}_j D_j (\varrho (x_1 , \dots , x_{n-1}) D_j$$

dove

$$c_{n-1}^{-1} \lambda_{n-1} \leq \varrho \leq c_{n-1} \lambda_1 . \tag{10}$$

Quindi utilizzando il Lemma 3.3, ci si riconduce ad approssimare (nel modo desiderato) su Ω l'operatore

$$\sum_1^{n-1} {}_j D_j (\varrho (x_1 , \dots , x_{n-1}) D_j) + \lambda_n D_n^2$$

e anzi, usando di nuovo il procedimento della parte 1. della dimostrazione del Teor. 3.1, basta approssimare l'operatore

$$\sum_1^{n-1} {}_j \varrho D_j^2 + \lambda_n D_n^2$$

con ϱ numero reale verficante la (10).

Ma per la Proposizione 3.2 quest'ultimo operatore è G-limite di operatori $\left\{ \sum_{1}^{n} {}_j\, D_j (\beta_k (x) D_j) \right\}$ con

$$2^{-n} \lambda_n \leq \beta_k \leq 2^n \varrho \qquad \text{se } \varrho \geq \lambda_n$$

$$2^{-n} \left(\frac{\varrho}{\lambda_n}\right)^{n-1} \lambda_n \leq \beta_k \leq 2^n \lambda_n \qquad \text{se } \varrho < \lambda_n .$$

Pertanto, utilizzando la (10) e ricordando che $\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_1$, si ha in ogni caso

$$c_n^{-1} \lambda_n \leq \beta_k \leq c_n \lambda_1$$

dove

$$c_n \geq 2^n (c_{n-1})^{n-1}$$

da cui la tesi.

NOTA. Indicata L_k la costante di ellitticità degli operatori $\{B_k\}$ che approssimano A, ed L la costante di ellitticità di A, si ha

$$L_k \leq cL$$

con c costante dipendente solo da n.

Istituto Matematico della
Università di PISA.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problème aux limites non homogènes et applications*, Vol. 1. Dunod (Paris) (1968).

[2] S. SPAGNOLO, *Sul limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calore*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Vol. 21, Fasc. 4, (1967) 657-699.

[3] S. SPAGNOLO, *Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Vol 22, Fasc. 4, (1968) 571-597.

[4] G. STAMPACCHIA, *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Université de Montréal, Sem. de Math. Sup. (1965).