Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Flavio Previale

Rappresentabilità ed equipollenza di teorie assiomatiche (I)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 4 (1969), p. 635-655

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_4_635_0>

RAPPRESENTABILITÀ ED EQUIPOLLENZA DI TEORIE ASSIOMATICHE (I) (*)

FLAVIO PREVIALE

RIASSUNTO. Viene ripresa e approfondita l'analisi, iniziata dall'autore in un precedente lavoro [1], di alcune notevoli relazioni matematiche concernenti coppie di insiemi di enunciati con diverso vocabolario specifico, in particolare coppie di teorie assiomatiche, basate su differenti gruppi di *nozioni primitive*. Il linguaggio formalizzato di base è essenzialmente quello con più *specie* di variabili e *gerarchie di tipi*, considerato nel lavoro precedente; l'unica (inessenziale) modifica sta nell'introduzione in un *operatore di comprensione*, intesa ad agevolare il discorso di carattere applicativo, cui è dedicata la parte (II) dell'attuale ricerca

Introduzione

In un precedente lavoro [1] ho iniziato lo studio di varie relazioni logiche concernenti coppie di insiemi di enunciati con differente vocabolario specifico. Tali relazioni costituiscono una precisazione metamatematica di familiari, e fondamentali, nozioni della matematica di impostazione assiomatica. Uno degli scopi che mi propongo con l'attuale ricerca è di mostrare come i concetti metamatematici introdotti e i metodi ad essi connessi possono venir applicati con profitto nella ricerca di tipo assiomatico, non solo agli effetti del rigore del ragionamento e della precisione dei risultati, ma anche a quelli della celerità e perspicuità delle dimostrazioni. Ciò dovrebbe apparire dalle applicazioni di carattere geometrico a cui è dedicata la seconda parte del lavoro. In questa prima parte mi propongo invece di semplificare e di approfondire la teoria generale sviluppata in [2], al fine di renderne più agevole l'applicazione ai problemi concreti che verranno in seguito affrontati.

Pervenuto alla Redazione il 22 Maggio 1969.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del Comitato per la matematica del C.N.R.

(1) F. PREVIALE, *Introduzione a una teoria generale della rappresentazione per le teorie assiomatiche* ([2]).

Il linguaggio formalizzato che costituisce la base delle nostre considerazioni metamatematiche, e in cui verranno espresse tutte le teorie assiomatiche della seconda parte, è sostanzialmente quello considerato in [2] (Parte II), vale a dire un linguaggio del 1° *ordine* con più *specie di variabili*, con *variabili universali* e con *gerarchie di tipi* soddisfacenti a un *principio di comprensione* per la formazione di insiemi. Questo linguaggio non è, nonostante tutto, più *espressivo* di un linguaggio del 1° ordine con una sola specie di variabili, ma ha il pregio di tradurre con maggiore immediatezza, senza troppe tortuose circonlocuzioni, il discorso comune dei matematici. È anzi proprio per accentuare questo pregio, soprattutto in vista delle applicazioni della II Parte, che tra i simboli primitivi del linguaggio base viene ora aggiunto anche un *operatore di comprensione*, che permette di sfruttare nel modo più comodo e naturale il principio di comprensione sopra menzionato.

La teoria generale qui sviluppata potrebbe peraltro venir estesa, pressochè inalterata, a linguaggi essenzialmente più espressivi di quello considerato, poichè non utilizza nessuna delle proprietà caratteristiche di un linguaggio del 1° ordine (ad es. la *compattezza*). In particolare potrebbe venir estesa alla versione del 2° *ordine* del linguaggio considerato, vale a dire al linguaggio con la stessa struttura morfologica di questo, ma avente come *modelli* i soli *modelli principali* del medesimo (2). A differenza di quanto accade nel 1° ordine, nel 2° ordine si verrebbe tra l'altro a disporre di un'assiomatizzazione categorica della teoria dei numeri reali, teoria rispetto a cui sono *relativizzate* quasi tutte le asserzioni di *rappresentabilità* ed *equipollenza* della seconda parte della nostra ricerca. Nonostante ciò l'utilizzazione di un linguaggio molto espressivo non sarebbe, nell'ambito dell'attuale ricerca, del tutto giustificata. In realtà la stessa mancanza, nel 1° ordine, di un'assiomatizzazione categorica della teoria dei numeri reali, lungi dall'essere un inconveniente, ha l'effetto di conferire maggiore generalità alla parte applicativa della nostra ricerca.

1. L'insieme dei *simboli* del linguaggio formalizzato L, base delle nostre considerazioni, è costituito dalle *costanti, logiche* e *non logiche,* e dalle *variabili, universali* e *speciali.*

1) Le *costanti logiche* sono : i *connettivi proposizionali* $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\longleftrightarrow$ (3), i *quantificatori* $\forall$, $\exists$, i simboli di *identità*, di *appartenenza,* di *insieme vuoto,* $=$, $\in$, $\emptyset$, *l'operatore di comprensione* $\{\ldots \mid \ldots\}$.

---

(2) Cfr. [1], cap. 7.

(3) In pratica il connettivo $\wedge$ verrà per lo più rappresentato con una virgola. Accadrà pure di rappresentare la negazione $\neg$ con un taglio obliquo, secondo l'uso corrente; così ad es. si scriverà $p \notin X$ anzichè $\neg\, p \in X$.

2) Le *variabili universali* formano un insieme numerabile $U = \{u, u_0, u_1, u_2, ...\}$.

3) Le *variabili speciali* si distribuiscono in una famiglia $\mathbf{V} = \{V^{(\lambda)} \mid \lambda < \nu\}$ [4] di insiemi numerabili, disgiunti tra loro e da U, detti *specie di variabili.* Le specie possono a loro volta far parte di certe sottofamiglie numerabili privilegiate, a due a due disgiunte, di $\mathbf{V}$, $G = \{T^{(i)} \mid i < \omega\}$, $G' = \{T'^{(i)} \mid i < \omega\}, ...$ dette *gerarchie di tipi.* Le variabili della specie $V^{(\lambda)}$ verranno chiamate *variabili di specie* λ, o anche, nel caso che sia $V^{(\lambda)} = T^{(i)} \varepsilon G$, *variabili di tipo i della gerarchia* G. Le lettere $v^{(\lambda)}, t^{(i)}, v$, con l'eventuale aggiunta di indici interi, verranno riservate ad indicare rispettivamente elementi di $V^{(\lambda)}, T^{(i)}, V = \bigcup \mathbf{V}$.

4) L'insieme delle *costanti non logiche* comprende:

4a) per ogni intero $n \geqq 1$ e per ogni n-pla ordinata $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ di ordinali $< \nu$, una *classe* di *simboli relazionali,* detti *simboli relazionali n-argomentali di classe* $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

4b) per ogni intero $n \geqq 0$ e per ogni $n+1$ — pla ordinata $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n)$ di ordinali $< \nu$, una *classe* di *simboli funzionali,* detti *simboli funzionali n-argomentati di classe* $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Si suppone che nessun simbolo relazionale possa essere simultaneamente di classe $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ e $(\lambda'_1, ..., \lambda'_m)$, a meno che sia $m = n$, e che nessun simbolo funzionale possa essere simultaneamente di classe $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n)$ e $(\lambda'_0, \lambda'_1, ..., \lambda'_m)$, a meno che sia $m = n$ e inoltre si abbia $\lambda_0 = \lambda'_0$ nel caso che $\lambda_1 = \lambda'_1, .., \lambda_n = \lambda'_n$.

Un simbolo funzionale 0-argomentale di classe (λ_0) verrà anche detto una *costante individuale di specie* λ_0. La *specie* di una costante individuale è, per quanto supposto, univocamente determinata.

Le condizioni poste per gli insiemi 3) e 4) non sono ovviamente sufficienti a determinarli. Al limite, tali insiemi potrebbero essere vuoti. Faremo tuttavia l'ipotesi che L sia abbastanza ricco di variabili speciali, gerarchie di tipi e costanti non logiche, da giustificare ogni nostra considerazione futura.

Una sequenza finita di simboli di L verrà detta un'*espressione* di L. L'espressione che risulta dal concatenamento delle espressioni $e_0, e_1, ..., e_n$, verrà indicata come di consueto con $e_0 e_1 ... e_n$. Le espressioni significanti di L sono i *termini* e le *formule.* L'insieme T dei termini è la riunione di una famiglia $\{T^{(\lambda)} \mid \lambda \leqq \nu\}$, ove $T^{(\nu)}$, insieme dei *termini universali,* è costituito da $\varnothing$ e dalle variabili universali, e, per ogni $\lambda < \nu$, $T^{(\lambda)}$, insieme dei

---

[4] ν è un ordinale. λ varia sugli ordinali minori di ν.

termini di specie λ, è definito, simultaneamente all'insieme delle formule Φ, dalle seguenti regole ricorrenti di *formazione* [5]:

I) ogni variabile e ogni costante individuale di specie λ appartiene a $T^{(\lambda)}$;

II) ogni espressione della forma $f\tau_1 \ldots \tau_n$, in cui f è un simbolo funzionale di classe $(\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e (per ogni i tale che $1 \leqq i \leqq n$) $\tau_i \in T^{(\lambda_i)}$, appartiene a $T^{(\lambda)}$;

III) ogni espressione della forma $\tau_1 = \tau_2$, o $\tau_1 \in \tau_2$, ove τ_1 e τ_2 sono termini qualunque, oppure della forma $R\tau_1 \ldots \tau_n$, ove R è un simbolo relazionale di classe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e $\tau_i \in T^{(\lambda_i)}$, appartiene a Φ;

IV) ogni espressione del tipo $\neg\varphi$, $\wedge\varphi\psi$, $\vee\varphi\psi$, $\rightarrow\varphi\psi$, $<\!\!\longrightarrow\!\!>\varphi\psi$, $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$, ove φ e ψ appartengono a Φ e x è una qualunque variabile di L, appartiene a Φ [6];

V) ogni espressione della forma $\{t^{(i)} \mid \varphi\}$, ove $t^{(i)}$ è una variabile di tipo i di una certa gerarchia G e φ è una formula, è un termine della specie corrispondente al tipo $i+1$ della gerarchia G.

Si verifica facilmente che due distinti insiemi $T^{(\lambda)}$ sono disgiunti; ossia la *specie* di un termine è univocamente determinata.

Un'occorrenza di una variabile in una formula φ si dice *vincolata,* o *non libera,* in φ, se compare in una formula o in un termine del tipo $\forall x\psi$, $\exists x\psi$, o $\{x \mid \psi\}$ che sia parte di φ. Una formula in cui ogni occorrenza di variabile è vincolata si chiama *enunciato.* Altra importante classe di formule è quella delle *formule ridotte.* Una formula si dice *atomica ridotta* se è di uno dei tipi: $x_1 = x_2$, $x_1 \in x_2$, $x_1 = \emptyset$, $Rv_1 \ldots v_n$, $v_0 = fv_1 \ldots v_n$, ove x_1 e x_2 sono generiche variabili, $v_0, v_1, \ldots, v_n$ sono generiche variabili speciali, R è un simbolo relazionale, f è un simbolo funzionale. L'insieme delle formule *ridotte* è il minimo insieme di formule contenente tutte le formule atomiche ridotte e *chiuso* rispetto alle operazioni elencate nella regola di formazione IV).

Ci sarà utile estendere il concetto di *classe* alle formule atomiche ridotte prive di variabili universali. Una formula di questo tipo verrà detta *di classe* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ allorchè le sue variabili hanno ordinatamente specie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

---

(5) Si suppone che non vi siano altri termini speciali e altre formule oltre a quelli che si possono formare mediante le regole di *formazione* I)-V).

(6) Nel seguito scriveremo sempre $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi <\!\!\longrightarrow\!\!> \psi$, invece di $\wedge\varphi\psi$, $\vee\varphi\psi$, $\rightarrow\varphi\psi$, $<\!\!\longrightarrow\!\!>\varphi\psi$. Analoghe notazioni verranno adottate per i simboli relazionali e funzionali biargomentali. Le ambiguità connesse a questo tipo di notazioni verranno eliminate, come d'uso, mediante opportune parentesi (tonde e quadre). Altre parentesi, non strettamente necessarie, verranno introdotte per esigenze di chiarezza tipografica. Così ad es. si scriverà $f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ invece di $f\tau_1 \ldots \tau_n$.

Conclusa la descrizione della *morfologia* di L, passiamo a definirne la *sintassi logica*. L'essenziale è definire una relazione di *conseguenza* tra insiemi di formule di L. Arriveremo a tale relazione passando attraverso l'ordinario linguaggio del 1^0 ordine L', dotato di identità e di più specie di variabili, che risulta naturalmente associato a L, quando si interpreti U come una particolare specie $V^{(\nu)}$ di variabili, $\varnothing$ come una costante individuale di specie ν, $\in$ come un simbolo relazionale biargomentale di classe (λ_1, λ_2) con $\lambda_1, \lambda_2 \leqq \nu$ qualunque, e infine, per ogni formula φ di L, il termine $\{t^{(i)} \mid \varphi\}$ come un termine $g x_1 \ldots x_n$, ove $x_1, \ldots, x_n$ sono nell'ordine le variabili libere in φ, diverse da $t^{(i)}$, e g è un nuovo simbolo funzionale di classe $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ essendo rispettivamente la specie ($\leqq \nu$) delle variabili $t^{(i+1)}, x_1, \ldots, x_n$.

Indicata con $\vdash'$ la relazione di conseguenza di L', definita in maniera canonica (7), la relazione di conseguenza $\vdash$ di L viene definita nel seguente modo. Dati due insiemi di formule di L (e di L') H_1 e H_2, si pone:

$$H_1 \vdash H_2 \quad \textit{se e solo se} \quad H_1 \cup A \vdash' H_2$$

A essendo la riunione dei seguenti tre gruppi di enunciati di L:

a) gruppo degli *assiomi delle variabili universali,* costituito da tutti gli enunciati della forma:

$$\forall v^{(\lambda)} \, \exists u \, (u = v^{(\lambda)}), \qquad \text{per ogni} \quad \lambda < \nu;$$

b) gruppo degli *assiomi dell'insieme vuoto e delle gerarchie di tipi,* comprendente, per ogni gerarchia di tipi $\{T^{(i)} \mid i < \omega\}$, e per ogni intero $i \geqq 0$, gli enunciati:

$$\forall u \, (u \notin \varnothing)$$

$$\forall t^{(0)} [t^{(0)} \neq \varnothing \wedge \forall t^{(i)} (t^{(i)} \notin t^{(0)})]$$

$$\forall t^{(i+1)} [(t^{(i+1)} \neq \varnothing \longrightarrow \exists t^{(i)} (t^{(i)} \in t^{(i+1)})) \wedge \forall u \, (u \in t^{(i+1)} \longrightarrow \exists t^{(i)} (u = t^{(i)}))]$$

$$\forall t_1^{(i+1)} \forall t_2^{(i+1)} [\forall u \, (u \in t_1^{(i+1)} \longleftrightarrow u \in t_2^{(i+1)}) \longrightarrow t_1^{(i+1)} = t_2^{(i+1)}]$$

c) *schema di assiomi conversione* (8), comprendente per ogni gerarchia di tipi $\{T^{(i)} \mid i < \omega\}$, e per ogni intero $i \geqq 0$, tutti gli enunciati della

---

(7) Tale definizione è data ad es. in [2], pp. 22-24.

(8) Lo *schema di assiomi di conversione* prende il posto dello *schema di assiomi di comprensione* di [2].

forma:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall t^{(i)} [t^{(i)} \in \{t^{(i)} \mid \varphi\} <\!\!\longrightarrow \varphi]$$

ove $x_1, \ldots, x_n$ sono le variabili libere della formula φ, diverse da $t^{(i)}$.

Due insiemi di formule H_1 e H_2 verranno detti *equivalenti*, e ciò si scriverà: $H_1 \equiv H_2$, allorchè $H_1 \vdash H_2$, $H_2 \vdash H_1$. K essendo un terzo insieme di formule, H_1 e H_2 verranno detti *equivalenti relativamente a K*, o, più brevemente, *K-equivalenti*, allorchè $K \cup H_1 \equiv K \cup H_2$. L'insieme delle conseguenze di un insieme H di formule verrà indicato con $Cn(H)$; pertanto si avrà $Cn(H_1) = Cn(H_2)$ se e solo se $H_1 \equiv H_2$.

Nella dimostrazione di alcuni teoremi, si farà uso della seguente proprietà di cui omettiamo la facile verifica: ogni formula φ di L è equivalente a una formula ridotta di L avente le stesse costanti non logiche, gli stessi termini universali, e le cui variabili speciali hanno tutte la specie di qualche termine di φ. In particolare dunque φ è equivalente a una formula in cui non compare l'operatore di comprensione.

Al variare dell'insieme delle costanti non logiche, o delle specie di variabili, o delle gerarchie di tipi di L, ferme restando le costanti logiche e le variabili universali, si ottiene una famiglia di linguaggi morfologicamente e sintatticamente *affini* a L. Un *sottolinguaggio* di L è, per definizione, un linguaggio *affine* in questo senso a L, e tale che: ogni specie di variabili di L_0 è una specie di L; ogni gerarchia di tipi di L_0 è una gerarchia di L; ogni gerarchia di tipi di L o è una gerarchia di L_0, oppure non ha specie di L_0 come elementi; infine ogni classe di simboli relazionali o funzionali di L_0 è una sottoclasse della corrispondente classe di L. Naturalmente si possono considerare anche sottolinguaggi di sottolinguaggi di L. La relazione « L_1 è un sottolinguaggio di L_2 » verrà rappresentata con $L_1 \subseteq L_2$; rispetto a tale relazione d'ordine, la classe dei sottolinguaggi di L costituisce un *reticolo completo.*

L'*intersezione* e la *riunione* reticolare di due sottolinguaggi L_1 e L_2 di L verranno indicate con $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cup L_2$. $L_1 \cap L_2$ non contiene necessariamente tutte le costanti non logiche comuni a L_1 e a L_2. Da ciò discende che il reticolo dei sottolinguaggi di L può non essere *distributivo.*

Dato un insieme H di formule di L indicheremo con $L(H)$ il minimo sottolinguaggio di L che ha tra le sue formule tutti gli elementi di H. Indicheremo invece con $\Sigma(L_1)$ e con $\Sigma_0(L_1)$ rispettivamente l'insieme di tutti gli enunciati del sottolinguaggio L_1, e l'insieme di tutti gli enunciati di L_1 privi di variabili universali.

Siano ora L_1 e L_2 due sottolinguaggi di L. Chiameremo *definizione di L_2 in L_1* un insieme $\Delta(L_2, L_1)$ di enunciati di $L_1 \cup L_2$ equivalente alla riunione di quattro gruppi di enunciati, comprendenti rispettivamente:

(i) per ogni specie di variabili $V^{(\lambda)}$ di L_2 non appartenente a L_1 e non coincidente con un tipo, uno e un solo enunciato della forma:

$$\forall\, u\, [\exists\, v^{(\lambda)}\, (u = v^{(\lambda)}) <\!\!\longrightarrow \varphi]$$

ove φ è una formula di L_1, avente la variabile universale u come sola variabile libera;

(ii) per ogni gerarchia di tipi $\{T^{(i)} \mid i < \omega\}$ di L_2 non appartenente a L_1, uno e un solo enunciato della forma:

$$\forall\, u\, [\,\exists\, t^{(0)}\, (u = t^{(0)}) <\!\!\longrightarrow \varphi\,]$$

ove φ è una formula di L_1, avente u come sola variabile libera;

(iii) per ogni n-pla ordinata $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ di ordinali $< \nu$, corrispondenti a specie di L_2 e ogni costante non logica σ di classe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, appartenente a L_2 e non a L_1, uno ed un solo enunciato della forma:

$$\forall\, y_1 \ldots \forall\, y_m\, \forall\, z_{m+1} \ldots \forall\, z_n\, [A_\sigma <\!\!\longrightarrow$$

$$<\!\!\longrightarrow \exists\, u_1 \ldots \exists\, u_m\, (u_1 = y_1, \ldots, u_m = y_m, \varphi)]$$

ove A_σ è una formula atomica ridotta contenente σ, di classe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $y_1, \ldots, y_m$ sono le variabili di A_σ appartenenti a L_2 e non a L_1, $z_{m+1}, \ldots, z_n$ sono le variabili di A_σ appartenenti a $L_1 \cap L_2$, infine φ è una formula di L_1 non avente variabili libere diverse da $u_1, \ldots, u_m$, $z_{m+1}, \ldots, z_n$.

(iv) per ogni n-pla ordinata $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ di ordinali $< \nu$ corrispondenti a specie di L_2, non tutte appartenenti a L_1, e ogni costante non logica σ di classe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, appartenente sia a L_1 sia a L_2, uno e un solo enunciato della forma descritta in (iii).

Può accadere che il gruppo (iv) sia conseguenza dei gruppi (i)-(iii). In tal caso esso può venir omesso nella descrizione di $\Delta(L_2, L_1)$ e la definizione stessa viene detta *semplice*.

Si dimostra facilmente, per induzione sulla *lunghezza* di una formula ridotta, che ogni formula (ridotta o no) di L_2 è equivalente, relativamente a una definizione $\Delta(L_2, L_1)$ di L_2 in L_1, a una formula di $L_1 \cup L_2$ le cui costanti non logiche e le cui variabili vincolate appartengono tutte a L_1. In particolare, ogni enunciato γ di L_2 è $\Delta(L_2, L_1)$-equivalente a un enunciato di L_1. Indicheremo con $\gamma * \Delta(L_2, L_1)$ un enunciato di L_1, $\Delta(L_2, L_1)$-equivalente a γ, e costruito in una qualunque maniera canonica, che qui non interessa precisare nei dettagli. Per ogni insieme $\Gamma \subseteq \Sigma(L_2)$ si porrà poi anche

$$\Gamma * \Delta(L_2, L_1) = \{\gamma * \Delta(L_2, L_1) \mid \gamma \in \Gamma\}.$$

Da quanto appena detto si deduce subito che, se L_3 è un terzo sottolinguaggio di L, ogni definizione $\Delta(L_3, L_2)$ di L_3 in L_2 è $\Delta(L_2, L_1)$-equivalente a un sottoinsieme di $\Sigma(L_1 \cup L_3)$. Quest'ultimo, qualora sia costruito in una certa maniera canonica, verrà indicato con $\Delta(L_3, L_2) * \Delta(L_2, L_1)$. Nel caso particolare che si abbia $L_3 \cap L_1 = L_3 \cap L_2$, $\Delta(L_3, L_2) * \Delta(L_2, L_1)$ è una definizione di L_3 in L_1.

Dato un insieme Γ_1 di enunciati di L_1, una definizione $\Delta(L_2, L_1)$ di L_2 in L_1 verrà detta una *definizione ammissibile per* Γ_1, allorchè vale la relazione

$$Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1)) \cap \Sigma(L_1) = Cn(\Gamma_1) \cap \Sigma(L_1). \tag{1}$$

Il concetto appena introdotto è indipendente da L_1, in quanto la (1) vale o non vale simultaneamente per ogni linguaggio L_1', per cui si abbia $\Gamma_1 \subseteq \Sigma(L_1')$ e tale che $\Delta(L_2, L_1)$ sia una definizione di L_2 in L_1'. Si dimostra pure senza difficoltà che, se $\Delta(L_2, L_1)$ è una definizione ammissibile per Γ_1, essa è ammissibile pure per ogni insieme di enunciati Γ_1' di L_1, tali che $\Gamma_1' \vdash \Gamma_1$.

Un'altra, quasi immediata, proprietà di una definizione $\Delta(L_2, L_1)$ di L_2 in L_1, ammissibile per un insieme $\Gamma_1 \subseteq \Sigma(L_1)$, è la seguente: ogni altra definizione $\Delta'(L_2, L_1)$ di L_2 in L_1 tale che $\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1) \vdash \Delta'(L_2, L_1)$ è ad essa Γ_1-equivalente, dunque, *a fortiori*, ammissibile per Γ_1.

In seguito con $\Delta(L_2, L_1)$, $\Delta'(L_2, L_1)$ verranno sempre indicate definizioni di L_2 in L_1.

2. Richiameremo ora (con alcune semplificazioni rispetto a [2]) i concetti metamatematici fondamentali della nostra ricerca.

Siano dati due insiemi Γ_1 e Γ_2 di enunciati e un sottolinguaggio L_0 di L, tali che, posto $L_1 = L_0 \cup L(\Gamma_1)$, $L_2 = L_0 \cup L(\Gamma_2)$, si abbia $L_1 \cap L_2 = L_0$.

DEF. I. Γ_2 è *L_0-interpretabile in* Γ_1 allorchè esiste una definizione $\Delta(L_2, L_1)$ di L_2 in L_1, ammissibile per Γ_1, tale che

$$\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1) \vdash \Gamma_2. \tag{I}$$

In tal caso Γ_2 si dice *L_0-interpretabile in* Γ_1 *mediante* $\Delta(L_2, L_1)$.

Def. II. Γ_2 è *L_0-rappresentabile debolmente in* Γ_1 allorchè esiste una definizione $\Delta(L_2, L_1)$, ammissibile per Γ_1 e tale che

(II) $$\Gamma_2 \equiv Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1)) \cap \Sigma(L_2$$

Γ_2 si dirà allora *L_0-rappresentabile debolmente in Γ_1 mediante* $\Delta(L_2, L_1)$.

Def. III. Γ_2 è *L_0-rappresentabile in* Γ_1 allorchè esiste una coppia di definizioni $\Delta(L_2, L_1)$, $\Delta(L_1, L_2)$ ammissibili rispettivamente per Γ_1 e Γ_2, tale che

(III$_1$) $$\Gamma_2 \equiv Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1)) \cap \Sigma(L_2)$$ (9)

(III$_2$) $$\Gamma_2 \cup \Delta(L_1, L_2) \vdash \Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1)$$

Γ_2 si dirà in tal caso *L_0-rappresentabile in Γ_1 mediante* la coppia $\Delta(L_2, L_1)$, $\Delta(L_1, L_2)$.

Def. IV. Γ_1 e Γ_2 sono *L_0-equipollenti* allorchè esiste una coppia di definizioni $\Delta(L_2, L_1)$, $\Delta(L_1, L_2)$ ammissibili rispettivamente per Γ_1 e Γ_2, tale che

(IV) $$\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1) \equiv \Gamma_2 \cup \Delta(L_1, L_2).$$

In tal caso Γ_1 e Γ_2 si dicono *L_0-equipollenti rispetto* alla coppia $\Delta(L_2, L_1)$, $\Delta(L_1, L_2)$.

I quattro concetti definiti possono venir *relativizzati* rispetto a un insieme K di enunciati di L_0. Limitiamoci a mostrare come ciò avvenga per la L_0-equipollenza.

Γ_1 e Γ_2 si dicono *(L_0, K)-equipollenti* [rispetto alla coppia $\Delta(L_2, L_1)$, $\Delta(L_1, L_2)$], allorchè $K \cup \Gamma_1$ e $K \cup \Gamma_2$ sono L_0-equipollenti [rispetto alla coppia $\Delta(L_2, L_1)$, $\Delta(L_1, L_2)$].

Γ_1 e Γ_2 si dicono poi *K-equipollenti*, allorchè essi sono $(L(K), K)$-equipollenti, e semplicemente, *equipollenti*, allorchè essi sono $\varnothing$-equipollenti.

---

(9) In [2], nelle condizioni (II) e (III$_1$), al posto di $\Sigma(L_2)$ si trova $\Sigma_0(L_2)$, insieme degli enunciati di L_2 privi di variabili universali. Nel caso assai frequente che Γ_2 sia un sottoinsieme di $\Sigma_0(L_2)$, questa diversità non ha influenza sulla *Def. III*, in cui la condizione (III$_1$) può essere sostituita indifferentemente sia con $\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1) \vdash \Gamma_2$, sia con $\Gamma_2 \equiv Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1)) \cap \Sigma_0(L_2)$ (come risulta dai teoremi seguenti). Ha invece influenza sulla *Def. II*, che risulta più restrittiva della corrispondente definizione di [2]. Il concetto definito dalla *Def. II* di [2] è quello qui introdotto, sotto altro nome, con la *Def. II'* (che non ha corrispondente in [2]).

Analoghe specializzazioni si intendono introdotte per gli altri tre concetti fondamentali.

Daremo ora alcuni teoremi concernenti i quattro concetti fondamentali. Proprietà analoghe si dimostrano per le varianti di tali concetti.

TEOREMA I. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè Γ_2 sia L_0-interpretabile in Γ_1 mediante la definizione $\Delta(L_1, L_2)$ è che esista un ampliamento di Γ_2 in $\Sigma(L_2)$, Γ_2', L_0-rappresentabile debolmente in Γ_1 mediante $\Delta(L_2, L_1)$.*

DIM. La condizione è ovviamente sufficiente. Per dimostrare la necessità basta porre $\Gamma_2' = Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1)) \cap \Sigma(L_2)$.

TEOREMA 2. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè Γ_2 sia L_0-rappresentabile in Γ_1 mediante la coppia di definizioni $\Delta(L_2, L_1)$, $\Delta(L_1, L_2)$, è che queste ultime siano ammissibili rispettivamente per Γ_1 e Γ_2, e che inoltre valgano le due relazioni:*

$$\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1) \vdash \Gamma_2 \tag{2.1}$$

$$\Gamma_2 \cup \Delta(L_1, L_2) \vdash \Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1). \tag{2.2}$$

DIM. La condizione è ovviamente necessaria. Per provarne la sufficienza, ammettiamo la condizione stessa e deduciamone la (III_1).

Posto $\Gamma_2' = Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1)) \cap \Sigma(L_2)$, per la (2.1) si ha subito $\Gamma_2' \supseteq \Gamma_2$. Per la (2.2) si ha d'altronde:

$$\Gamma_2' \subseteq Cn(\Gamma_2 \cup \Delta(L_1, L_2)) \cap \Sigma(L_2) = Cn(\Gamma_2) \cap \Sigma(L_2).$$

Se ne conclude $\Gamma_2' \equiv \Gamma_2$, cioè la (III_1).

DEF. V. Diremo $\Delta(L_1, L_2)$ *reciproca di* $\Delta(L_2, L_1)$ *rispetto a* Γ_1, allorchè $\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1) \vdash \Delta(L_1, L_2)$

TEOREMA 3. *Le tre seguenti condizioni sono tra loro equivalenti:*

(a) Γ_1 e Γ_2 sono L_0-equipollenti rispetto a $\Delta(L_2, L_1)$, $\Delta(L_1, L_2)$;

(b) $\Delta(L_1, L_2)$ è reciproca di $\Delta(L_2, L_1)$ rispetto a Γ_1 e inoltre Γ_2 è L_0-rappresentabile in Γ_1 mediante la coppia $\Delta(L_2, L_1)$, $\Delta(L_1, L_2)$;

(c) $\Delta(L_1, L_2)$ è reciproca di $\Delta(L_2, L_1)$ rispetto a Γ_1 e inoltre Γ_2 è L_0-rappresentabile debolmente in Γ_1 mediante $\Delta(L_2, L_1)$.

DIM. Tenuto conto del teorema precedente, si ha subito $(a) \rightarrow (b)$ e $(b) \rightarrow (c)$. Non resta dunque che provare l'implicazione $(c) \rightarrow (a)$. Ora, in generale, si ha:

$$[Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1) \cup \Delta(L_1, L_2)) \cap \Sigma(L_2)] \cup \Delta(L_1, L_2) \equiv$$

$$\equiv [Cn(\{\Gamma_1 * \Delta(L_1, L_2)\} \cup \{\Delta(L_2, L_1) * \Delta(L_1, L_2)\} \cup \Delta(L_1, L_2)) \cap \Sigma(L_2)] \cup \Delta(L_1, L_2)$$

$$\equiv [Cn(\{\Gamma_1 * \Delta(L_1, L_2)\} \cup \{\Delta(L_2, L_1) * \Delta(L_1, L_2)\}) \cap \Sigma(L_2)] \cup \Delta(L_1, L_2)$$

$$\equiv \{\Gamma_1 * \Delta(L_1, L_2)\} \cup \{\Delta(L_2, L_1) * \Delta(L_1, L_2)\} \cup \Delta(L_1, L_2)$$

$$\equiv \Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1) \cup \Delta(L_1, L_2).$$

Di qui, ammesso (*c*) si ricava immediatamente:

$$\Gamma_2 \cup \Delta(L_1, L_2) \equiv \Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1),$$

cioè la (IV) e inoltre

$$Cn(\Gamma_2 \cup \Delta(L_1, L_2)) \cap \Sigma(L_2) =$$

$$= Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1)) \cap \Sigma(L_2) = Cn(\Gamma_2) \cap \Sigma(L_2),$$

cioè la condizione di ammissibilità di $\Delta(L_1, L_2)$ per Γ_2. Ciò è precisamente quanto occorreva provare.

Teorema 4. *Supposta l'ammissibilità di $\Delta(L_2, L_1)$ per Γ_1, condizione necessaria e sufficiente affinchè Γ_2 sia L_0-rappresentabile in Γ_1 mediante la coppia $\Delta(L_2, L_1)$, $\Delta(L_1, L_2)$ è che esista un ampliamento Γ_1' di Γ_1 in $\Sigma(L_1)$, L_0-equipollente a Γ_2 rispetto a tale coppia e soddisfacente alla condizione:*

$$Cn(\Gamma_1' \cup \Delta(L_2, L_1)) \cap \Sigma(L_2) = Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1)) \cap \Sigma(L_2). \tag{4}$$

Dim. La condizione è sufficiente, poichè implica sia l'ammissibilità di $\Delta(L_1, L_2)$ per Γ_2, sia, in virtù del teorema precedente, le relazioni:

$$Cn(\Gamma_1' \cup \Delta(L_2, L_1)) \cap \Sigma(L_2) \equiv \Gamma_2$$

$$\Gamma_2 \cup \Delta(L_1, L_2) \vdash \Gamma_1' \cup \Delta(L_2, L_1)$$

e perciò pure le relazioni (III_1) e (III_2).

Per dimostrarne la necessità, supponiamo Γ_2 L_0-rappresentabile in Γ_1 mediante la coppia $\Delta(L_2, L_1)$, $\Delta(L_1, L_2)$ e proviamo che

$$\Gamma_1' = Cn(\Gamma_2 \cup \Delta(L_1, L_2)) \cap \Sigma(L_1)$$

soddisfa alla condizione stessa.

Anzitutto $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_1' \subseteq \Sigma(L_1)$. In secondo luogo Γ_1' è L_0-rappresentabile debolmente in Γ_2 mediante $\Delta(L_1, L_2)$, e inoltre, per ipotesi, $\Delta(L_2, L_1)$ è reciproca di $\Delta(L_1, L_2)$ rispetto a Γ_2. Si può pertanto applicare il TEOREMA 3 e concludere che Γ_2 e Γ_1' sono L_0-equipollenti rispetto alla coppia $\Delta(L_1, L_2)$, $\Delta(L_2, L_1)$.

Lo stesso TEOREMA 3 e l'ipotesi fatta permettono infine di affermare che entrambi i membri della (4) sono equivalenti a Γ_2 e perciò sono uguali fra loro.

TEOREMA 5. (COROLLARIO DEL TEOREMA 3). *Sia ancora $L_1 = L_0 \cup L(\Gamma_1)$ e sia L_2 un sottolinguaggio di L tale che $L_1 \cap L_2 = L_0$. Sia inoltre $\Delta(L_2, L_1)$ una definizione di L_2 in L_1 ammissibile per Γ_1.*

Condizione necessaria e sufficiente affinchè Γ_1 sia L_0-equipollente a un insieme $\Gamma_2 \subseteq \Sigma(L_2)$ rispetto a una coppia di definizioni comprendente $\Delta(L_2, L_1)$ è che $\Delta(L_2, L_1)$ ammetta una definizione $\Delta(L_1, L_2)$ reciproca rispetto a Γ_1. In tal caso, supposto $\Gamma_2 \subseteq \Sigma(L_2)$, le tre seguenti condizioni risultano tra loro equivalenti:

(i) *Γ_2 è L_0-equipollente a Γ_1 rispetto alla coppia $\Delta(L_2, L_1)$, $\Delta(L_1, L_2)$;*

(ii) $\Gamma_2 \equiv Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1)) \cap \Sigma(L_2)$

(iii) $\Gamma_2 \equiv \{\Gamma_1 * \Delta(L_1, L_2)\} \cup \{\Delta(L_2, L_1) * \Delta(L_1, L_2)\} \cup \{Cn(\Delta(L_1, L_2)) \cap \Sigma(L_2)\}$.

DIM. In virtù del TEOREMA 3, è sufficiente provare, che se $\Delta(L_1, L_2)$ è reciproca di $\Delta(\Gamma_2, L_1)$ rispetto a Γ_1, i secondi membri della (ii) e della (iii) sono equivalenti. Ora ciò segue immediatamente dalla relazione

$$\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1) \equiv \{\Gamma_1 * \Delta(L_1, L_2)\} \cup \{\Delta(L_2, L_1) * \Delta(L_1, L_2)\} \cup \Delta(L_1, L_2)$$

che è ovvia conseguenza dell'ipotesi fatta.

OSSERVAZIONE. Il TEOREMA 5 ha notevole importanza per quanto concerne la ricerca di *nozioni primitive* adatte per l'assiomatizzazione di una teoria. Supponiamo che la teoria in questione sia già stata assiomatizzata utilizzando il linguaggio L_1 e che Γ_1 sia il corrispondente insieme di assiomi. Proponiamoci di assiomatizzare la teoria utilizzando, come nozioni primitive, nozioni appartenenti al linguaggio L_2, definite in L_1 mediante una definizione $\Delta(L_2, L_1)$ di L_2 in L_1 ammissibile per Γ_1. Ci si domanda: Le nozioni così definite sono idonee all'assiomatizzazione della teoria? Il senso preciso di tale domanda non può evidentemente che essere: Esiste un insieme $\Gamma_2 \subseteq \Sigma(L_2)$ L_0-equipollente a Γ_1 rispetto a una coppia di definizioni comprendente la data $\Delta(L_2, L_1)$? Per il TEOREMA 5 la risposta è dunque affermativa, se e solo se $\Delta(L_2, L_1)$ ammette una definizione $\Delta(L_1, L_2)$

reciproca rispetto a Γ_1. Un insieme di assiomi nelle nuove nozioni primitive (anche se di solito non il più semplice) si ottiene molto facilmente costruendo l'insieme $\{\Gamma_1 * \Delta(L_1, L_2)\} \cup \{\Delta(L_2, L_1) * \Delta(L_1, L_2)\} \cup \{Cn(\Delta(L_1, L_2)) \cap \Sigma(L_2)\}$.

TEOREMA 6. *Siano $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ insiemi di enunciati di L tali che, posto $L_1 = L_0 \cup L(\Gamma_1)$, $L_2 = L_0 \cup L(\Gamma_2)$, $L_3 = L_0 \cup L(\Gamma_3)$, si abbia $L_1 \cap L_2 = L_1 \cap L_3 = L_2 \cap L_3 = L_0$. Supponiamo che Γ_1 e Γ_2 siano L_0 equipollenti rispetto alla coppia di definizioni $\Delta(L_2, L_1)$, $\Delta(L_1, L_2)$ e che Γ_2 e Γ_3 siano L_0-equipollenti rispetto alla coppia $\Delta(L_3, L_2)$, $\Delta(L_2, L_3)$. Γ_1 e Γ_3 sono allora L_0-equipollenti*

(*a*) *rispetto alla coppia di definizioni di L_3 in L_1 e di L_1 in L_3:*

$$\Delta^*(L_3, L_1) = \Delta(L_3, L_2) * \Delta(L_2, L_1), \qquad \Delta^*(L_1, L_3) = \Delta(L_1, L_2) * \Delta(L_2, L_3) \text{ (}^{10}\text{)}$$

(*b*) *rispetto a ogni coppia di definizioni $\Delta(L_3, L_1)$, $\Delta(L_1, L_3)$ tali che $\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1) \cup \Delta(L_3, L_2) \vdash \Delta(L_3, L_1) \cup \Delta(L_1, L_3)$ (o, equivalentemente, tali che $\Gamma \vdash \Delta(L_3, L_1) \cup \Delta(L_1, L_3)$, Γ essendo la riunione di $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, e delle quattro definizioni date).*

DIM. Per quanto concerne il punto (*a*), basta dimostrare che $\Delta^*(L_3, L_1)$ è ammissibile per Γ_1, e inoltre che

$$(a.1) \qquad \Gamma_1 \cup \Delta^*(L_3, L_1) \vdash \Delta^*(L_1, L_3)$$

$$(a.2) \qquad \Gamma_3 \equiv Cn(\Gamma_1 \cup \Delta^*(L_3, L_1)) \cap \Sigma(L_3).$$

Cominciamo a provare che dalle ipotesi fatte seguono le relazioni:

$$\text{(i)} \qquad Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1) \cup \Delta(L_3, L_2)) \cap \Sigma(L_1) = Cn(\Gamma_1) \cap \Sigma(L_1)$$

$$\text{(i}'\text{)} \qquad Cn(\Gamma_3 \cup \Delta(L_2, L_3) \cup \Delta(L_1, L_2)) \cap \Sigma(L_3) = Cn(\Gamma_3) \cap \Sigma(L_3)$$

$$\text{(ii)} \qquad Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1) \cup \Delta(L_3, L_2)) \cap \Sigma(L_1 \cup L_3) = \\ = Cn(\Gamma_1 \cup \Delta^*(L_3, L_1)) \cap \Sigma(L_1 \cup L_3).$$

Il primo membro della (i) si può scrivere nella forma:

$$[Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1) \cup \Delta(L_3, L_2)) \cap \Sigma(L_1 \cup L_2)] \cap \Sigma(L_1)$$

---

(10) $\Delta^*(L_3, L_1)$ e $\Delta^*(L_1, L_3)$ sono effettivamente definizioni del tipo indicato (Si veda una delle osservazioni finali del § 1).

e perciò, poichè $\Delta(L_3, L_2)$ è anche una definizione di L_3 in $L_1 \cup L_2$ (11), ammissibile per $\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1)$, è uguale a

$$[Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1)) \cap \Sigma(L_1 \cup L_2)] \cap \Sigma(L_1) \text{ cioè a}$$

$$Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1)) \cap \Sigma(L_1).$$

Questo termine tuttavia, per l'ammissibilità di $\Delta(L_2, L_1)$ per Γ_1, è uguale al secondo membro della (i). La (i) è così provata. In modo del tutto simile si dimostra la (i').

Il primo membro della (ii) si può d'altra parte identificare con

$$Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1) \cup \Delta^*(L_3, L_1)) \cap \Sigma(L_1 \cup L_3)$$

e perciò, poichè $\Delta(L_2, L_1)$ è una definizione di L_2 in $L_1 \cup L_3$ ammissibile per $\Gamma_1 \cup \Delta^*(L_3, L_1)$, con il secondo membro della (ii) medesima.

Dalla (ii) e dalla (i) segue subito:

$$Cn(\Gamma_1 \cup \Delta^*(L_3, L_1)) \cap \Sigma(L_1) = Cn(\Gamma_1) \cap \Sigma(L_1)$$

e cioè l'ammissibilità di $\Delta^*(L_3, L_1)$ per Γ_1.

Si ha poi

$$\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1) \cup \Delta(L_3, L_2) \vdash \Delta^*(L_1, L_3)$$

dunque, per la (ii), pure

$$\Gamma_1 \cup \Delta^*(L_3, L_1) \vdash \Delta^*(L_1, L_3).$$

Infine, poichè

$$\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1) \cup \Delta(L_3, L_2) \equiv \Gamma_3 \cup \Delta(L_2, L_3) \cup \Delta(L_1, L_2)$$

per la (i') e la (ii) si ha:

$$\begin{aligned} \Gamma_3 &\equiv Cn(\Gamma_3 \cup \Delta(L_2, L_3) \cup \Delta(L_1, L_2)) \cap \Sigma(L_3) \\ &\equiv Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1) \cup \Delta(L_3, L_2)) \cap \Sigma(L_3) \\ &\equiv Cn(\Gamma_1 \cup \Delta^*(L_3, L_1)) \cap \Sigma(L_3), \end{aligned}$$ cioè la (*a*.2).

(11) Si verifica infatti facilmente che $L_3 \cap (L_1 \cup L_2) = L_0$.

Supponiamo ora che $\Delta(L_3, L_1)$, $\Delta(L_1, L_3)$ soddisfino alla condizione del punto (*b*). Per la (ii) abbiamo:

$$\Gamma_1 \cup \Delta^*(L_3, L_1) \vdash \Delta(L_3, L_1) \cup \Delta(L_1, L_3)$$

perciò, per l'osservazione finale del § 1, $\Delta(L_3, L_1)$ è ammissibile per Γ_1 ed è Γ_1-equivalente a $\Delta^*(L_3, L_1)$. Ne segue immediatamente:

$$\Gamma_1 \cup \Delta(L_3, L_1) \vdash \Delta(L_1, L_3)$$

e tenuto conto della (*a*.2):

$$\Gamma_3 \equiv Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_3, L_1)) \cap \Sigma(L_3).$$

Con ciò anche il punto (*b*) è completamente dimostrato.

3. Una notevole generalizzazione dei quattro concetti fondamentali del § 2 e dei vari loro derivati è costituita dagli omonimi concetti *in senso lato.* Allo scopo di richiamare tale generalizzazione, consideriamo due sottolinguaggi $\overline{L}_1$, $\overline{L}_2$ di L, tali che $\overline{L}_1 \cup \overline{L}_2$ sia isomorfo a $L_1 \cup L_2$ e abbia in comune con $L_1 \cup L_2$ precisamente le specie e le costanti non logiche comuni a L_1 e a L_2. L'isomorfismo tra $L_1 \cup L_2$ e $\overline{L}_1 \cup \overline{L}_2$ induce una corrispondenza tra variabili, costanti non logiche, termini, formule, insiemi di formule di $L_1 \cup L_2$ ed elementi omologhi di $\overline{L}_1 \cup \overline{L}_2$. Conveniamo che, se, in un certo contesto, un elemento di $L_1 \cup L_2$ è stato indicato con una certa lettera, la stessa lettera con una sopralineatura indichi l'elemento corrispondente di $\overline{L}_1 \cup \overline{L}_2$. Data poi una definizione $\Delta(L_2, L_1)$ di L_2 in L_1, si indicherà, nel medesimo contesto, con $\Delta(\overline{L}_2, L_1)$ la definizione di $\overline{L}_2$ in L_1 che si ottiene da essa sostituendovi ogni elemento di L_2 con il corrispondente elemento di $\overline{L}_2$. Un significato analogo avranno pure $\Delta(\overline{L}_1, L_2)$, $\Delta(\overline{L}_2, \overline{L}_1)$.

Infine, data una formula $C(u_1, u_2)$ di L avente come variabili libere precisamente le due variabili universali u_1 e u_2, indicheremo con *Isom* $(C; L_1, \overline{L}_1)$ l'insieme di enunciati costituito da ogni enunciato della forma:

$$\forall x \exists ! \overline{x}\, C(x, \overline{x}), \quad \forall \overline{x} \exists ! x\, C(x, \overline{x}) \text{ [12]}$$

[12] $C(x, \overline{x})$ è naturalmente la formula che si ottiene da $C(u_1, u_2)$ sostituendovi le occorrenze libere di u_1 e u_2 con x e $\overline{x}$. Si osservi che tale formula esiste effettivamente sem-

ove x è una variabile di L_1 (e $\bar{x}$ è la corrispondente variabile di $\bar{L}_1$) e ogni enunciato della forma:

$$\forall x_1 \forall \bar{x}_1 \ldots \forall x_m \forall \bar{x}_m \forall z_{m+1} \ldots \forall z_n$$

$$[C(x_1, \bar{x}_1), \ldots, C(x_m, \bar{x}_m) \longrightarrow (\alpha \longleftrightarrow \bar{\alpha})]$$

ove α è una formula atomica ridotta di L_1 di uno dei tipi $v_1 = v_2$, $v_1 \in v_2$, $v_1 = \emptyset$, $Rv_1 \ldots v_n$, $v_1 = fv_2 \ldots v_n$, (dunque priva di variabili universali), $x_1, \ldots, x_m$ sono le variabili di α appartenenti a L_1 e non a L_0, $z_{m+1}, \ldots, z_n$ sono le variabili di α appartenenti a L_0.

In modo analogo si definirà *Isom* $(C; L_2, \bar{L}_2)$.

DEF. II'. Γ_2 è L_0-*rappresentabile debolmente in s. l.* (*in senso lato*) *in* Γ_1, allorchè esiste una definizione $\Delta(L_2, L_1)$ ammissibile per Γ_1 tale che

$$\text{(II')} \qquad \Gamma_2 \equiv Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1)) \cup \Sigma_0(L_2)$$

DEF. III'. Γ_2 è L_0-*rappresentabile in s. l in* Γ_1 allorchè esiste una coppia di definizioni $\Delta(L_2, L_1)$, $\Delta(L_1, L_2)$ ammissibili per Γ_1 e Γ_2 e una formula $C(u_1, u_2)$ non avente altre variabili libere che u_1 e u_2 tali che

$$\text{(III}'_1) \qquad \Gamma_2 \equiv Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1)) \cup \Sigma_0(L_2)$$

$$\text{(III}'_2) \qquad \Gamma_2 \cup \Delta(L_2, L_1) \cup \Delta(\bar{L}_1, L_2) \vdash \Gamma_1 \cup Isom(C; L_2, \bar{L}_2).$$

DEF. IV'. Γ_1 e Γ_2 sono L_0-*equipollenti in s. l.* allorchè esiste una coppia di definizioni $\Delta(L_2, L_1)$, $\Delta(L_1, L_2)$ ammissibili per Γ_1 e Γ_2 e una coppia di formule $C(u_1, u_2)$, $C'(u_1, u_2)$ non aventi altre variabili libere che u_1 e u_2 tali che

$$\text{(IV}'_1) \qquad \Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1) \cup \Delta(\bar{L}_1, L_2) \vdash \Gamma_2 \cup Isom(C; L_1, \bar{L}_1)$$

$$\text{(IV}'_2) \qquad \Gamma_2 \cup \Delta(L_1, L_2) \cup \Delta(\bar{L}_2, L_1) \vdash \Gamma_1 \cup Isom(C; L_2, \bar{L}_2)$$

---

pre, qualunque sia la variabile x.

$$\forall x \, \exists! \bar{x}, C(x, \bar{x}) \text{ sta per}$$

$$\forall x \, \exists \bar{x} [C(x, \bar{x}), \forall \bar{x}_1 (C(x, \bar{x}_1) \to \bar{x}_1 = \bar{x})]$$

$\bar{x}_1$ essendo una variabile della stessa specie di $\bar{x}$.

Anche i concetti *in s. l.* si relativizzano rispetto a un insieme di enunciati K di L_0, e si specializzano come i corrispondenti concetti in senso stretto. Danno pure luogo a teoremi analoghi ai teoremi 1-6 del paragrafo precedente. Ad es. i teoremi 1 e 2 si trasformano in

TEOREMA 1'. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'insieme $\Gamma_2 \subseteq \Sigma_0(L_2)$ sia L_0-interpretabile in Γ_1 mediante la definizione $\Delta(L_2, L_1)$ è che esista un ampliamento $\Gamma_2' \subseteq \Sigma_0(L_2)$ di Γ_2 L_0-rappresentabile debolmente in s. l. in Γ_1 mediante $\Delta(L_2, L_1)$.*

TEOREMA 2'. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè $\Gamma_2 \subseteq \Sigma_0(L_2)$ sia L_0-rappresentabile in s. l. in Γ_1 mediante la coppia di definizioni $\Delta(L_2, L_1)$, $\Delta(L_1, L_2)$ è che $\Delta(L_2, L_1)$, $\Delta(L_1, L_2)$ siano ammissibili rispettivamente per Γ_1 e Γ_2 e che inoltre valgano le relazioni:*

$$(2.1') \qquad \Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1) \vdash \Gamma_2$$

$$(2.2') \qquad \Gamma_2 \cup \Delta(L_1, L_2) \cup \Delta(\bar{L}_2, L_1) \vdash \Gamma_1 \cup Isom(C; L_2, \bar{L}_2).$$

per un'opportuna formula $C(u_1, u_2)$ non avente altre variabili libere che u_1 e u_2.

Il primo di questi due teoremi è ovvio; la dimostrazione del secondo si fonda invece sul seguente *Lemma*:

LEMMA 1. *Sia $C(u_1, u_2)$ una formula di L avente u_1, u_2 come sole variabili libere. Data una qualsiasi formula φ di L_1, priva di variabili universali, si ha:*

$$Isom(C; L_1, \bar{L}_1) \vdash$$
$$\vdash \forall x_1 \forall \bar{x}_1 \dots \forall x_n \forall \bar{x}_n [C(x_1, \bar{x}_1), \dots, C(x_n, \bar{x}_n) \rightarrow (\varphi \longleftrightarrow \bar{\varphi})]$$

$x_1, \dots, x_n$ essendo le variabili libere di φ appartenenti a L_1 e non a L_0.

In particolare, se φ è un enunciato di L_1 privo di variabili universali, si ha:

$$Isom(C; L_1, \bar{L}_1) \vdash \varphi \longleftrightarrow \bar{\varphi}$$

Il LEMMA si dimostra facilmente per induzione sulla lunghezza di φ, supponendo, senza alcuna perdita di generalità, φ ridotta [13].

Per dimostrare il TEOREMA 2', basterà ovviamente provare la sufficienza della condizione del teorema, e cioè che tale condizione implica:

$$\Gamma_2 \equiv Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1)) \cap \Sigma_0(L_2)$$

---

[13] Per la dimostrazione di questo lemma, si veda [2], pp. 32-33.

Posto:

$$\Gamma_2' = Cn\,(\Gamma_1 \cup \Delta\,(L_2\,, L_1)) \cap \Sigma_0\,(L_2)$$

si ha subito, per la (2.1′):

$$\Gamma_2' \vdash \Gamma_2$$

Per la (2.2)′ si ha poi:

$$\Gamma_2 \cup \Delta\,(L_1\,, L_2) \cup \Delta\,(\bar{L}_2\,, L_1) \vdash$$

$$\vdash [Cn\,(\Gamma_1 \cup \Delta\,(\bar{L}_2\,, L_1)) \cap \Sigma_0\,(\bar{L}_2)] \cup Isom\,(C\,;\,L_2\,, \bar{L}_2)$$

vale a dire:

$$\Gamma_2 \cup \Delta\,(L_1\,, L_2) \cup \Delta\,(\bar{L}_2\,, L_1) \vdash \bar{\Gamma}_2' \cup Isom\,(C\,;\,L_2\,, \bar{L}_2).$$

D'altra parte, per il LEMMA 1, $\bar{\Gamma}_2'$ e Γ_2' sono equivalenti relativamente a $Isom\,(C\,;\,L_2\,, \bar{L}_2)$. Se ne deduce che

$$\Gamma_2 \cup \Delta\,(L_1\,, L_2) \cup \Delta\,(\bar{L}_2\,, L_1) \vdash \Gamma_2'$$

e di qui, tenuto conto del fatto che $\Delta\,(L_1\,, L_2)$ è ammissibile per Γ_2 e $\Delta\,(\bar{L}_2\,, L_1)$ è una definizione di $\bar{L}_2$ in $L_2 \cup L_1$ ammissibile per $\Gamma_2 \cup \Delta\,(L_1\,, L_2)$: $\Gamma_2 \vdash \Gamma_2'$.

Ciò prova che Γ_2 e Γ_2' sono equivalenti, come si voleva dimostrare.

I rimanenti teoremi 3-6 del paragrafo precedente si estendono ai concetti in s. l. con maggiore difficoltà. Ci limiteremo a estendere i teoremi 3 e 4 sotto certe condizioni piuttosto restrittive su Γ_1 e Γ_2, sulle definizioni $\Delta\,(L_2\,, L_1)$ e $\Delta\,(L_1\,, L_2)$ e infine sulla formula $C\,(u_1\,, u_2)$.

Γ_1 e Γ_2 siano insiemi di enunciati privi di variabili universali. Supponiamo inoltre che le uniche variabili di $L_1 = L_0 \cup L\,(\Gamma_1)$, rispettiv. di $L_2 = L_0 \cup L\,(\Gamma_2)$, non appartenenti a L_0, siano quelle di una gerarchia di tipi $\{X^{(i)} \mid i < \omega\}$ rispettiv. $\{Y^{(i)} \mid i < \omega\}$. Con x, $x^{(i)}$, y, $y^{(i)}$, z, con l'eventuale aggiunta di indici interi, verranno indicate, nel seguito di questo paragrafo, rispettivamente, generiche variabili della prima gerarchia, generici elementi di $X^{(i)}$, generiche variabili della seconda gerarchia, generici elementi di $Y^{(i)}$, e infine generiche variabili speciali di L_0.

In tali condizioni, una definizione $\Delta\,(L_2\,, L_1)$ verrà detta *normale*, allorchè verifica le seguenti condizioni: il suo gruppo (i) è privo di elementi; il gruppo (ii) si riduce a un unico enunciato della forma:

$$\forall u\, [\exists\, y^{(0)}\, (u = y^{(0)}) \longleftrightarrow \exists\, x^{(h)}\, (u = x^{(h)}, \varphi)]$$

ove h è un intero $\geqq 0$, detto *altezza* della definizione, e φ è una formula di L_1 priva di variabili universali avente al più $x^{(h)}$ come variabile libera; infine, in tutti gli enunciati dei gruppi (iii) e (iv), φ è della forma:

$$\exists\, x_1 \dots \exists x_m\, (u_1 = x_1, \dots, u_m = x_m, \psi)\ (^{14})$$

ove ψ è una formula di L_1, priva di variabili universali, non avente variabili libere diverse da $x_1, \dots, x_m, z_{m+1}, \dots, z_n$ e le cui variabili libere $x_1, \dots, x_m$ hanno (nella propria gerarchia) il tipo di $y_1, \dots, y_m$, aumentato di h.

Si verifica facilmente che, relativamente a una definizione $\Delta(L_2, L_1)$ *normale*, ogni enunciato appartenente a $\Sigma_0(L_2)$ è equivalente a un enunciato appartenente a $\Sigma_0(L_1)$.

Diremo pure *formula di trasformazione normale di altezza k* ogni formula $C(u_1, u_2)$, avente u_1 e u_2 come uniche variabili libere, tale che, per ogni coppia di variabili, $t^{(i)}, t^{(i+k)}$, di una qualunque gerarchia $G = \{T^{(i)} \mid i < \omega\}$, la formula $C(t^{(i)}, t^{(i+k)})$ sia equivalente alla formula che si ottiene da essa, sostituendovi le variabili universali (vincolate), eventualmente ancora presenti, con opportune variabili della gerarchia G. Ad es. $C(u_1, u_2) = \forall u\, (u \in u_2 \rightarrow u_1 \in u)$ è una formula di trasformazione normale di altezza 2, poiché

$$C(t^{(i)}, t^{(i+2)}) \equiv \forall\, t^{(i+1)}\, (t^{(i+1)} \in t^{(i+2)} \rightarrow t^{(i)} \in t^{(i+1)}).$$

Ciò premesso si ha:

TEOREMA 3'. *Supponiamo $\Delta(L_2, L_1)$ normale di altezza h_1, $\Delta(L_1, L_2)$ normale di altezza h_2 e ammissibile per Γ_2. Sia inoltre:*

$$(\mathrm{o}) \qquad \Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1) \cup \Delta(\overline{L}_1, L_2) \vdash Isom\,(C; L_1, \overline{L}_1)$$

$C(u_1, u_2)$ essendo una formula di trasformazione normale di altezza $h_1 + h_2$ appartenente al linguaggio L_0.

Sotto tali ipotesi le tre seguenti condizioni risultano tra loro equivalenti:

(a) Γ_1 e Γ_2 sono L_0-equipollenti in s. l. rispetto alla coppia $\Delta(L_2, L_1)$, $\Delta(L_1, L_2)$;

(^{14}) Sicchè gli enunciati stessi risultano equivalenti a

$$\forall y_1 \cdots \forall y_m \forall z_{m+1} \cdots \forall z_n\, [A_\sigma \longleftrightarrow \exists\, x_1 \cdots \exists\, x_m\, (x_1 = y_1, \dots, x_m = y_m, \psi)].$$

(b) Γ_2 *è* L_0*-rappresentabile in s. l. in* Γ_1 *mediante la coppia* $\Delta(L_2, L_1)$ $\Delta(L_1, L_2)$;

(c) Γ_2 *è* L_0*-rappresentabile debolmente in s. l. in* Γ_1 *mediante* $\Delta(L_2, L_1)$.

Anche questo teorema verrà dimostrato con l'ausilio di un LEMMA, di cui omettiamo la dimostrazione (15):

LEMMA 2. *Se* $\Delta(L_2, L_1)$ *è una definizione normale e* $C(u_1, u_2)$ *è una (qualunque) formula avente* u_1, u_2, *come sole variabili libere si ha:*

$$Isom(C\,;\,L_1\,,\,\overline{L}_1)\cup\Delta(L_2\,,\,L_1)\cup\Delta(\overline{L}_2\,,\,\overline{L}_1)\vdash Isom(C\,;\,L_2\,,\,\overline{L}_2).$$

Sotto le ipotesi generali del TEOREMA 3′, si ha subito $(b)\longrightarrow(c)$ e, tenuto conto del TEOREMA 2′, $(a)\longrightarrow(b)$. Non resta dunque che provare l'implicazione $(c)\longrightarrow(a)$. Ammettiamo perciò la (c) e proviamo le relazioni (IV_1') e (IV_2') (le condizioni di ammissibilità per $\Delta(L_2, L_1)$ e $\Delta(L_1, L_2)$ sono entrambe soddisfatte per ipotesi).

La (IV_1') è un'immediata conseguenza delle ipotesi fatte. Per provare la (IV_2'), osserviamo che per la (o) e i LEMMI 1 e 2, si ha:

$$\Gamma_1\cup\Delta(L_2\,,\,L_1)\cup\Delta(\overline{L}_1\,,\,L_2)\cup\Delta(\overline{L}_2\,,\,\overline{L}_1)\vdash\overline{\Gamma}_1\cup Isom(C\,;\,L_2\,,\,\overline{L}_2).$$

D'altra parte $\overline{\Gamma}_1\cup Isom(C\,;\,L_2\,,\,\overline{L}_2)$ è, per le ipotesi fatte su $C(u_1, u_2)$, equivalente a un sottoinsieme di $\Sigma_0(L_2\cup\overline{L}_1\cup\overline{L}_2)$, quindi, per la normalità di $\Delta(\overline{L}_1, L_2)$ e $\Delta(\overline{L}_2, \overline{L}_1)$, equivalente, relativamente a $\Delta(\overline{L}_1, L_2)\cup\Delta(\overline{L}_2, \overline{L}_1)$, a un sottoinsieme di $\Sigma_0(L_2)$, che indicheremo con Γ_2^*. Tenuto conto delle condizioni di ammissibilità di $\Delta(L_2, L_1)$ e $\Delta(L_1, L_2)$, si ha perciò:

$$Cn\,[\Gamma_1\cup\Delta(L_2\,,\,L_1)]\cap\Sigma_0(L_2)\vdash\Gamma_2^*$$

quindi, per la (c), $\Gamma_2\vdash\Gamma_2^*$, e per il significato di Γ_2^*:

$$\Gamma_2\cup\Delta(\overline{L}_1\,,\,L_2)\cup\Delta(\overline{L}_2\,,\,\overline{L}_1)\vdash\overline{\Gamma}_1\cup Isom(C\,;\,L_2\,,\,\overline{L}_2).$$

Se ne ricava immediatamente la (IV_2'), con $C'=C$.

TEOREMA 4′. *Supponiamo* $\Delta(L_2, L_1)$ *normale di altezza* h_1 *e ammissibile per* Γ_1, $\Delta(L_1, L_2)$ *normale di altezza* h_2. *Sia inoltre:*

$$\Gamma_2\cup\Delta(L_1\,,\,L_2)\cup\Delta(\overline{L}_2\,,\,L_1)\vdash Isom(C\,;\,L_2\,,\,\overline{L}_2)$$

---

(15) Per la dimostrazione rimandiamo ancora a [2], pp. 34-35.

$C(u_1, u_2)$ essendo una formula di trasformazione normale di altezza $h_1 + h_2$ appartenente al linguaggio L_0.

Sotto tali ipotesi, condizione necessaria e sufficiente affinché Γ_2 sia L_0-rappresentabile in s. l. in Γ_1 mediante la coppia $\Delta(L_2, L_1)$, $\Delta(L_1, L_2)$, è che esista un ampliamento Γ_1' di Γ_1 in $\Sigma_0(L_1)$, L_0-equipollente in s. l. a Γ_2 rispetto alla coppia $\Delta(L_2, L_1)$, $\Delta(L_1, L_2)$, soddisfacente alla condizione:

$$Cn(\Gamma_1' \cup \Delta(L_2, L_1)) \cap \Sigma_0(L_2) = Cn(\Gamma_1 \cup \Delta(L_2, L_1)) \cap \Sigma_0(L_2).$$

La dimostrazione di questo teorema è simile a quella del TEOREMA 4. In essa naturalmente si applica il TEOREMA 3′, invece del TEOREMA 3.

Un problema aperto, che vale la pena di segnalare prima di concludere, riguarda la possibilità di eliminare la condizione di ammissibilità di $\Delta(L_1, L_2)$ per Γ_2 tra le ipotesi generali del TEOREMA 3′. A tale possibilità è subordinata quella di estendere ai concetti in s. l. l'importante COROLLARIO DEL TEOREMA 3 (TEOREMA 5).

TESTI CITATI

[1] KREISEL G., KRIVINE J. L., *Eléments de logique mathématique*, Dunod, Paris, 1967.

[2] PREVIALE F., *Introduzione a una teoria generale della rappresentazione per le teorie assiomatiche*, Memoria dell'Accad. d. Scienze di Torino, Cl. Sc. Fis. Mat. Nat., Serie 4a, n. 6, 1968.