ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARIO POLETTI

Su alcune strutture connesse alla teoria delle iperalgebre su schiere valutanti

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 3 (1969), p. 509-523

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_3_509_0>

SU ALCUNE STRUTTURE CONNESSE ALLA TEORIA DELLE IPERALGEBRE SU SCHIERE VALUTANTI

MARIO POLETTI [1]

In un suo recente lavoro (cfr. n^0 11 di [1]), I. Barsotti ha risolto il problema della specializzazione delle classi di isogenia analitica delle varietà abeliane in caratteristica $p \neq 0$, rispetto ad un posto archimedeo del loro corpo di definizione.

La tecnica consiste nel determinare certe sottoiperalgebre della parte inseparabile dell'ipercampo legato alla varietà (iperalgebre definite sulla schiera valutante del posto), e nello studiare gli ipercampi inseparabili che si ottengono riducendo le iperalgebre dette, modulo i loro ideali chiusi generati dall'ideale massimo della schiera valutante del posto.

Il metodo adottato è suscettibile di generalizzazioni alla specializzazione di un qualsiasi ipercampo inseparabile. Si deve però tenere conto che in questo caso le iperalgebre da associare all'ipercampo non sono più offerte in modo naturale dal contesto.

Si rende quindi necessaria un'analisi di quelle tra tali iperalgebre che meglio si prestano ad affrontare il problema della specializzazione.

Compito del presente lavoro è quello di analizzare le strutture come moduli topologici e come algebre topologiche, di cui sono suscettibili tali iperalgebre.

CAPITOLO 1

MODULI TOPOLOGICI RIFLESSIVI SU SCHIERE ARCHIMEDEE

In questo capitolo $\mathbb{k}$ è un corpo, R è uno spazio vettoriale su $\mathbb{k}$ linearmente compatto (ossia somma diretta completa, come $\mathbb{k}$-moduli, di una infinità numerabile di $\mathbb{k}$-moduli discreti isomorfi a $\mathbb{k}$), D è uno spazio

(1) Lavoro eseguito nell'ambito dei raggruppamenti di ricerca del C. N. R.

Pervenuto alla Redazione il 2 Aprile 1969.

vettoriale su $\mathbb{K}$ a topologia discreta e base numerabile. Inoltre D ed R sono duali l'uno dell'altro tramite una dualità che indicheremo con $(d, x) \longrightarrow d \circ x$.

Indichiamo poi con v una valutazione archimedea non banale di $\mathbb{K}$, di gruppo valutante Γ, gruppo che considereremo come sottogruppo dei reali. Indichiamo con $\mathbb{O}$ la schiera valutante di v, con $\mathbb{P}$ il primo massimo di $\mathbb{O}$, e con k il corpo residuo di v. Sia $\mathbb{K}$ che $\mathbb{O}$ che k saranno sempre considerati con la topologia discreta.

Se H è un sottoinsieme di R o di D, ne indicheremo con $\overline{H}$ la chiusura. Se H_i, $i \in I$, è una famiglia di sotto-$\mathbb{O}$-moduli di R, la cui somma sia diretta, indicheremo con $\overline{\bigoplus_{i \in I}} H_i$ la chiusura di $\bigoplus_{i \in I} H_i$. Nel caso di una famiglia H_i di sotto-$\mathbb{O}$-moduli di D, per uniformità di scrittura, scriveremo talvolta $\overline{\bigoplus_{i \in I}} H_i$ in luogo di $\bigoplus_{i \in I} H_i$; ciò non porta a confusione essendo D a topologia discreta.

Un sotto-$\mathbb{O}$-modulo H di R si dirà una *$\mathbb{O}$-schiera* di R se esiste una pseudobase $x_0, x_1, \dots$ di R tale che $H = \overline{\bigoplus_{i \geq 0}} \mathbb{O} x_i$. Analogamente si definiscono le $\mathbb{O}$-schiere di D.

Se H è un sotto-$\mathbb{O}$-modulo di R, il sotto-$\mathbb{O}$-modulo $\{d/d \in D,\ d \circ H \subseteq \mathbb{O}\}$ di D si indicherà con H^* e si dirà il *duale* di H. Se H è un sotto-$\mathbb{O}$-modulo di D, H^* ha significato analogo.

Un sotto-$\mathbb{O}$-modulo H di R si dirà *preriflessivo* se è chiuso e inoltre $\overline{\mathbb{K} H} = R$, $\overline{\mathbb{K} H^*} = D$; H si dirà poi *riflessivo* se è preriflessivo e inoltre $H^{**} = H$. Analoghe definizioni di preriflessività e riflessività si danno per i sotto-$\mathbb{O}$-moduli di D.

1. Diamo in questo numero una caratterizzazione dei sotto-$\mathbb{O}$-moduli preriflessivi di R e di D, ed alcune loro proprietà. Diamo inoltre la caratterizzazione dei sotto-$\mathbb{O}$-moduli riflessivi di R e di D nel caso di v discreta.

1.1. TEOREMA. *Un sotto $\mathbb{O}$-modulo chiuso H di R* (risp.: *di D*) *è preriflessivo se e solo se esistono due $\mathbb{O}$-schiere M, N di R* (risp.: *di D*) *tali che $M \subseteq H \subseteq N$.*

DIM. Supponiamo in primo luogo che H sia un sotto-$\mathbb{O}$-modulo chiuso di R tale che $\overline{\mathbb{K} H} = R$ (in particolare preriflessivo). Sia $x_0, x_1, \dots$ una pseudobase di R. Essendo $\overline{\mathbb{K} H} = R$, dato $n \geq 0$, esistono per $i \geq 0$ elementi $a_{n,i} \in \mathbb{K}$ ed $h_{n,i} \in H$ tali che $x_n = \sum_{i \geq 0} a_{n,i} h_{n,i}$. Esiste poi m (dipendente da n) tale che $\sum_{i \geq 1} a_{n,m+i} h_{n,m+i} = \sum_{i \geq 1} b_{n,n+i} x_{n+i}$, con i $b_{n,n+i}$ elementi opportuni di $\mathbb{K}$. Sia a_n un elemento non nullo di $\mathbb{K}$ tale che $a_n a_{n,0}, \dots, a_n a_{n,m} \in \mathbb{O}$ (un tale a_n esiste dato che $\mathbb{O}$ è valutante). In tale caso si ha $x'_n = a_n x_n -$

$-\sum_{i\geq 1} a_n b_{n,\,n+i}\, x_{n+i} = \sum_{0\leq i\leq m} a_n a_{n\, i}\, h_{n,\,i} \in H$. Essendo ogni $a_n \neq 0$, gli elementi $x'_0, x'_1, \ldots$ costituiscono una pseudobase di R ad elementi in H. Allora $M = \overline{\bigoplus_{i\geq 0}} \mathbb{O} x'_i$ è una $\mathbb{O}$-schiera di R contenuta in H (si ricordi che H è chiuso).

Se H è un sotto $\mathbb{O}$ modulo di D tale che $\mathbb{K} H = D$ (in particolare preriflessivo), e $d_0, d_1, \ldots$ è una base di D, tenuto conto che $\mathbb{K} H = D$ e che $\mathbb{O}$ è valutante, per $i \geq 0$ esistono elementi $h_i \in H$, ed elementi non nulli $a_i \in \mathbb{K}$, tali che $d_i = a_i h_i$. Allora gli elementi $d'_i = h_i = a_i^{-1} d_i$, $i \geq 0$, costituiscono una base di D ad elementi in H. Quindi $M = \overline{\bigoplus_{i\geq 0}} \mathbb{O}\, d'_i$ è una $\mathbb{O}$-schiera di D contenuta in H.

Se H è un sotto-$\mathbb{O}$-modulo preriflessivo di R, per quanto provato esiste una $\mathbb{O}$-schiera M di R contenuta in H. Siccome $\mathbb{K} H^* = D$, quanto precede prova che esiste una $\mathbb{O}$-schiera S di D contenuta in H^*. Si ha allora $H \subseteq H^{**} \subseteq S^*$, ed S^* è quindi una $\mathbb{O}$-schiera di R che contiene H. Analogamente si prova che un sotto-$\mathbb{O}$-modulo preriflessivo di D è contenuto in una $\mathbb{O}$-schiera di D.

Quanto precede prova che la condizione enunciata dal teorema è necessaria. Che tale condizione risulti anche sufficiente è ovvio, C.V.D..

Come conseguenza pressochè immediata di 1.1, se H è un sotto-$\mathbb{O}$-modulo preriflessivo di R (risp.: di D), allora H^* è un sotto-$\mathbb{O}$-modulo preriflessivo di D (risp.: di R) che risulta canonicamente isomorfo allo $\mathbb{O}$-modulo delle applicazioni $\mathbb{O}$-lineari continue di H in $\mathbb{O}$ (si ricordi che tanto $\mathbb{K}$ che $\mathbb{O}$ sono considerati con la topologia discreta).

1.2. LEMMA. *Sia H un sotto-$\mathbb{O}$-modulo preriflessivo di R* (risp.: *di D*).

Se v è discreta, allora H è una $\mathbb{O}$-schiera di R (risp.: *di D*).

Se v non è discreta, allora dato comunque $r > 0$, esiste un elemento $\sigma \in \mathbb{K}$, con $-r \leq v(\sigma) \leq 0$, ed una pseudobase $x_0, x_1, \ldots$ di R (risp.: *una base d_0, $d_1, \ldots$ di D*) *tali che $\overline{\bigoplus_{i\geq 0}} \mathbb{O}\, x_i \subseteq H \subseteq \overline{\bigoplus_{i\geq 0}} \mathbb{O}\, \sigma x_i$* (risp: *tali che $\overline{\bigoplus_{i\geq 0}} \mathbb{O}\, d_i \subseteq H \subseteq \overline{\bigoplus_{i\geq 0}} \mathbb{O}\, \sigma\, d_i$*).

DIM. Supponiamo in primo luogo che H sia un sotto-$\mathbb{O}$-modulo preriflessivo di R. In tale caso, per 1.1 esiste una pseudobase $y_0, y_1, \ldots$ di R ad elementi in H.

Sia v discreta. Dimostriamo per induzione che esistono elementi $x_0, x_1, \ldots$ di H tali che per ogni $n \geq 0$ si abbia che: 1) $x_0, \ldots, x_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots$ è una pseudobase di R, 2) se $c_0 x_0 + \ldots + c_n x_n + c_{n+1} y_{n+1} + \ldots \in H$, allora $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{O}$.

Determiniamo x_0 come segue. Sia $\Omega_0 = \{a_0 \in \mathbb{K} / esistono\ a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{K}$ *tali che* $\sum_{i\geq 0} a_i y_i \in H\}$; è $\mathbb{O} \subseteq \Omega_0$. Sia $y_0^*, y_1^*, \ldots$ la base di D trasposta di

$y_0, y_1, \ldots$; siccome $\mathbb{K} H^* = D$, ed $\mathbb{O}$ è valutante, esiste $\lambda \neq 0$ tale che $\lambda y_0^* \in H^*$. Tenuto conto che $\Omega_0 = y_0^* \circ H$, si ha $\lambda \Omega_0 \subseteq \mathbb{O}$, e quindi, essendo v discreta, esiste $\min v(\Omega_0)$ e tale minimo, essendo $\mathbb{O} \subseteq \Omega_0$, è $\neq \infty$. Sia m_0 tale minimo e sia $x_0 = a_{0,0} y_0 + a_{0,1} y_1 + \ldots$ un elemento di H tale che $v(a_{0,0}) = m_0$. Siccome $a_{0,0} \neq 0$, allora $x_0, y_1, y_2, \ldots$ è una pseudobase di R. Inoltre se $c_0 x_0 + c_1 y_1 + \ldots \in H$, si ha $v(c_0 a_{0,0}) \geq m_0$, e quindi $v(c_0) \geq m_0 - v(a_{0,0}) = 0$; si conclude che $c_0 \in \mathbb{O}$.

Supponendo determinati $x_0, \ldots, x_n$ con le proprietà richieste, determiniamo x_{n+1} come segue. Sia $\Omega_{n+1} = \{a_{n+1} \in \mathbb{K} / \text{esistono } a_0, \ldots, a_n, a_{n+2}, \ldots \in \mathbb{K}$ *tali che* $\sum_{0 \leq i \leq n} a_i x_i + \sum_{i \leq n+1} a_i y_i \in H\}$. Come nel caso precedente si prova che esiste $\min v(\Omega_{n+1})$ e che tale minimo è $\neq \infty$. Sia m_{n+1} tale minimo e sia $x'_{n+1} = a_{n+1,0} x_0 + \ldots + a_{n+1,n} x_n + a_{n+1,n+1} y_{n+1} + \ldots$ un elemento di H tale che $v(a_{n+1,n+1}) = m_{n+1}$. Per l'ipotesi di induzione $a_{n+1,0}, \ldots, a_{n+1,n} \in \mathbb{O}$, allora $a_{n+1,0} x_0 + \ldots + a_{n+1,n} x_n \in H$. Quindi $x_{n+1} = a_{n+1,n+1} y_{n+1} + \ldots \in H$, e tenuto conto che $a_{n+1,n+1} \neq 0$, si ha che $x_0, \ldots, x_{n+1}, y_{n+2}, \ldots$ è una pseudobase di R. Inoltre se $c_0 x_0 + \ldots + c_{n+1} x_{n+1} + c_{n+2} y_{n+2} + \ldots \in H$, tenuto conto dell'espressione di x_{n+1} e dell'ipotesi di induzione, si ha che $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{O}$, e in più che $v(c_{n+1} a_{n+1,n+1}) \geq m_{n+1}$, ossia $v(c_{n+1}) \geq m_{n+1} - v(a_{n+1,n+1}) = 0$; si conclude che $c_{n+1} \in \mathbb{O}$.

$x_0, x_1, \ldots$ è ovviamente una pseudobase di R, ed essendo ad elementi in H si ha $\overline{\bigoplus_{i \geq 0}} \mathbb{O} x_i \subseteq H$. Sia adesso $c_0 x_0 + c_1 x_1 + \ldots$ un elemento di H. Per come scelti gli x_i, per ogni $n \geq 0$ si ha che $c_0 x_0 + \ldots = c_0 x_0 + \ldots + c_n x_n + b_{n+1} y_{n+1} + \ldots$. e allora $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{O}$. Si conclude che $H = \overline{\bigoplus_{i \geq 0}} \mathbb{O} x_i$, e quindi che H è una $\mathbb{O}$-schiera di R.

Sia v non discreta. Dato $r > 0$, siccome Γ è denso nei reali, esiste $\sigma \in \mathbb{K}$ tale che $-r \leq v(\sigma) \leq -r/2$. Siano $\varrho_0, \varrho_1, \ldots$ reali positivi tali che $\sum_{i \geq 0} \varrho_i = 1$, e sia $r_i = \varrho_i r/2$.

Dimostriamo per induzione che esistono elementi $x_0, x_1, \ldots$ di H tali che per ogni $n \geq 0$ si abbia: 1) $x_0, \ldots, x_n, y_{n+1}, \ldots$ è una pseudobase di R, 2) se $c_0 x_0 + \ldots + c_n x_n + c_{n+1} y_{n+1} + \ldots \in H$, allora: $-r_0 < v(c_0)$, $-r_0 - r_1 < v(c_1), \ldots, -r_0 - \ldots - r_n < v(c_n)$, 3) $x_n = \sum_{h \geq 0} a_{n,n+h} y_{n+h}$, con gli $a_{n,n+h}$ elementi opportuni di $\mathbb{K}$, e $a_{n,n} \neq 0$.

Determiniamo x_0 come segue. Come nel caso di v discreta si definisce Ω_0 e si prova che esiste $-q_0 = \inf v(\Omega_0)$ finito. Sia $x_0 = a_{0,0} y_0 + a_{0,1} y_1 + \ldots$ un elemento di H tale che $-q_0 \leq v(a_{0,0}) < -q_0 + r_0$. L'elemento x_0 verifica ovviamente le condizioni 1), 3). Inoltre se $c_0 x_0 + c_1 y_1 + \ldots \in H$, si ha $v(c_0 a_{0,0}) \geq -q_0$, allora $v(c_0) \geq -q_0 - v(a_{0,0}) > -q_0 + q_0 - r_0 = -r_0$.

Supponendo determinati $x_0, \dots, x_n$ con le proprietà richieste, determiniamo x_{n+1} come segue. Come nel caso di v discreta si definisce Ω_{n+1} e si prova che esiste $-q_{n+1} = \inf v(\Omega_{n+1})$ finito. Sia $x'_{n+1} = a'_{n+1,0} x_0 + \dots + a'_{n+1,n} x_n + a'_{n+1,n+1} y_{n+1} + \dots$ un elemento di H tale che $-q_{n+1} \leq v(a'_{n+1,n+1}) < -q_{n+1} + r_{n+1}/2$; sia poi $\omega \in \mathbb{K}$ tale che $(\varrho_0 + \dots + \varrho_n) r/2 \leq v(\omega) \leq (\varrho_0 + \dots + \varrho_n) r/2 + r_{n+1}/2$.

Per l'ipotesi di induzione si ha $-(\varrho_0 + \dots + \varrho_n) r/2 < v(a'_{n+1,0}), \dots, v(a'_{n+1,n})$. Allora $\omega a'_{n+1,0} x_0 + \dots + \omega a'_{n+1,n} \in H$. Posto quindi $a_{n+1,n+1+h} = \omega a'_{n+1,n+1+h}$, si ha che $x_{n+1} = a_{n+1,n+1} y_{n+1} + a_{n+1,n+2} y_{n+2} + \dots \in H$.

L'elemento x_{n+1} verifica ovviamente le condizioni 1), 3). Se poi $c_0 x_0 + \dots + c_{n+1} x_{n+1} + c_{n+2} y_{n+2} + \dots \in H$, per la forma di x_{n+1} e per l'ipotesi di induzione si ha che $v(c_0), \dots, v(c_n)$ verificano le disuguaglianze volute. Inoltre si ha $v(c_{n+1} \omega a'_{n+1,n+1}) \geq -q_{n+1}$, ossia $v(c_{n+1}) \geq -q_{n+1} - v(a'_{n+1,n+1}) - v(\omega) > -q_{n+1} - (-q_{n+1} + r_{n+1}/2) - v(\omega) = -v(\omega) - r_{n+1}/2 \geq -(\varrho_0 + \dots + \varrho_n) r/2 - r_{n+1}/2 - r_{n+1}/2 = -(\varrho_0 + \dots + \varrho_{n+1}) r/2$, come richiesto.

$x_0, x_1, \dots$ è ovviamente una pseudobase di R, ed essendo ad elementi in H si ha $\overline{\bigoplus_{i\geq 0}} \mathbb{O} x_i \subseteq H$. Sia adesso $c_0 x_0 + c_1 x_1 + \dots$ un elemento di H. Per come scelti gli x_i, per ogni $n \geq 0$ si ha $c_0 x_0 + \dots = c_0 x_0 + \dots + c_n x_n + b_{n+1} y_{n+1} + \dots$. Allora si ha $v(c_n) > -r_0 - \dots - r_n > -r/2$, ossia $c_n \in \mathbb{O} \sigma$. Si conclude che $H \subseteq \overline{\bigoplus_{i\geq 0}} \mathbb{O} \sigma x_i$.

Supponiamo adesso che H sia sotto-$\mathbb{O}$-modulo preriflessivo di D. Per 1.1 esiste una base $s'_0, s'_1, \dots$ di D tale che $H \subseteq \bigoplus_{i\geq 0} \mathbb{O} s'_i$. Esistono elementi non nulli λ_i di $\mathbb{K}$ tali che $s_i = \lambda_i^{-1} s'_i \in H$; di conseguenza $s_0, s_1, \dots$ è una base di D su $\mathbb{K}$ tale che $\bigoplus_{i\geq 0} \mathbb{O} s_i \subseteq H \subseteq \bigoplus_{i\geq 0} \mathbb{O} \lambda_i s_i$.

Siano, per $i \geq 0$, $d_i = \sum_{h\geq 0} a_{i,i+h} s_{i+h}$ elementi qualsiansi di H con $a_{i,i} \neq 0$. Proviamo per induzione su n che i sotto-$\mathbb{O}$-moduli $\Omega_{n+1} = \{a_{n+1} \in \mathbb{K} /$ *esistono* $a_0, \dots, a_n, a_{n+2}, \dots \in \mathbb{K}$ *tali che* $\sum_{0\leq i\leq n} a_i d_i + \sum_{i\leq n+1} a_i s_i \in H\}$ di $\mathbb{K}$, sono diversi da $\mathbb{K}$ e non sono ridotti al solo zero.

Siccome $\mathbb{K} H = D$ e $\mathbb{O}$ è valutante, gli Ω_i non sono ridotti al solo zero.

Proviamo che $\Omega_1 \neq \mathbb{K}$ come segue. Sia $d = a_0 d_0 + a_1 s_1 + \dots \in H$. Siccome $d = a_0 a_{0,0} s_0 + (a_1 + a_0 a_{0,1}) s_1 + a'_2 s_2 + \dots$, si ha $v(a_0 a_{0,0}) \geq v(\lambda_0)$, ossia $v(a_0) \geq v(\lambda_0) - v(a_{0,0})$. Esiste allora u_0 (dipendente solo dai λ_i e dai d_i) tale che $a_0 \in \mathbb{O} u_0$. Inoltre $a_1 + a_0 a_{0,1} \in \mathbb{O} \lambda_1$, ed essendo $a_{0,1} \in \mathbb{O} \lambda_1$, si ha $a_1 \in \mathbb{O} \lambda_1 + \mathbb{O} u_0 \lambda_1$. Si conclude che $\Omega_1 \subseteq \mathbb{O} \lambda_1 + \mathbb{O} u_0 \lambda_1 \neq \mathbb{K}$.

Supponiamo provato che $\Omega_1, \dots, \Omega_n \neq \mathbb{K}$, e dimostriamo che $\Omega_{n+1} \neq \mathbb{K}$ come segue. Sia $d = a_0 d_0 + \dots + a_n d_n + a_{n+1} s_{n+1} + \dots \in H$. Per $i = 1, \dots, n$ si ha $d = a_0 d_0 + \dots + a_{i-1} d_{i-1} + a_i a_{i,i} s_i + a'_{i+1} s_{i+1} + \dots$, onde $a_i \in a_{i,i}^{-1} \Omega_i$, e inoltre $a_0 \in \mathbb{O} \lambda_0 a_{0,0}^{-1}$; esiste allora u_n (dipendente solo dai λ_i e dai d_i) tale che $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{O}\, u_n$. Posto $d = b_0 s_0 + b_1 s_1 + \dots$, si ha $b_{n+1} = a_{n+1} + a_0 a_{0,\,n+1} + \dots + a_n a_{n,\,n+1} \in \mathbb{O}\, \lambda_{n+1}$; siccome inoltre $a_{0,\,n+1}, \dots, a_{n,\,n+1} \in \mathbb{O}\, \lambda_{n+1}$, si ha $a_{n+1} \in \mathbb{O}\, \lambda_{n+1} + \mathbb{O}\, u_n \lambda_{n+1}$. Allora $\Omega_{n+1} \subseteq \mathbb{O}\, \lambda_{n+1} + \mathbb{O}\, u_n \lambda_{n+1} \neq \mathbb{K}$.

Con queste premesse, le considerazioni fatte a partire da $y_0, y_1, \dots$ nel caso di H sotto-$\mathbb{O}$-modulo preriflessivo di R, sono adattabili, a partire da $s_0, s_1, \dots$, alla situazione presente, C.V.D..

Come conseguenza di 1.2, se v è discreta allora i sotto-$\mathbb{O}$-moduli preriflessivi di R (risp.: di D) sono le $\mathbb{O}$-schiere di R (risp.: di D); in particolare tali moduli sono riflessivi.

2. In questo numero supponiamo v non discreta. In tale caso un sotto-$\mathbb{O}$-modulo preriflessivo H di R (risp.: di D) non è necessariamente riflessivo; in quanto segue determineremo sotto quali condizioni un tale H è anche riflessivo.

Se H è un sotto $\mathbb{O}$-modulo di R (risp.: di D) indichiamo con $\widetilde{H}$ o con $H^{\sim}$ il sotto-$\mathbb{O}$ modulo di R (risp.: di D) definito da $\widetilde{H} = \{x \in R / \mathbb{P}\, x \subseteq H\}$ (risp.: $\widetilde{H} = \{d \in D / \mathbb{P}\, d \subseteq H\}$). È certamente $H \subseteq \widetilde{H}$, inoltre, essendo v non discreta si ha $(\widetilde{H})^{\sim} = \widetilde{H}$.

Un sotto $\mathbb{O}$-modulo H di R (risp.: di D) si dirà *saturo* se è preriflessivo e inoltre $\widetilde{H} = H$.

2.1. LEMMA. *Sia H un sotto-$\mathbb{O}$-modulo preriflessivo di R* (risp.: *di D*). *In tale caso $\widetilde{H}$ coincide con l'intersezione di tutte le $\mathbb{O}$-schiere di R* (risp.: *di D*) *che contengono H.*

DIM. Supponiamo H sotto $\mathbb{O}$-modulo preriflessivo di R. Sia $x \in \widetilde{H}$, e sia $S = \overline{\bigoplus_{i \geq 0}} \mathbb{O}\, x_i$ una qualsiansi $\mathbb{O}$-schiera di R contenente H. Posto $x = \sum_{i \geq 0} a_i x_i$, e dato comunque $\lambda \in \mathbb{P}$, si ha $\lambda x = \sum_{i \geq 0} (\lambda a_i)\, x_i \in H \subseteq S$; di conseguenza, per $i \geq 0$, si ha $v(\lambda a_i) \geq 0$. Ne segue che per ogni $\lambda \in \mathbb{P}$ si ha $v(a_i) \geq -v(\lambda)$, ed essendo v non discreta si ha $v(a_i) \geq 0$; ciò comporta che $x \in S$.

Sia x un elemento appartenente ad ogni $\mathbb{O}$ schiera di R contenente H, e sia $\lambda \in \mathbb{P}$. Per 1.2 esistono $\mu \in \mathbb{K}$, con $0 \leq v(\mu) \leq v(\lambda)$, ed una pseudobase $x_0, x_1, \dots$ di R, tali che $\overline{\bigoplus_{i \geq 0}} \mathbb{O}\, \mu x_i \subseteq H \subseteq \overline{\bigoplus_{i \geq 0}} \mathbb{O}\, x_i$. Posto $x = \sum_{i \geq 0} a_i x_i$, essendo $x \in \overline{\bigoplus_{i \geq 0}} \mathbb{O}\, x_i$, si ha che $v(a_i) \geq 0$ per ogni $i \geq 0$. Allora $v(\lambda a_i) = v(a_i) + v(\lambda) \geq v(\lambda) \geq v(\mu)$; di conseguenza $\lambda x = \sum_{i \geq 0} (\lambda a_i)\, x_i \in \overline{\bigoplus_{i \geq 0}} \mathbb{O}\, \mu x_i \subseteq H$.

La dimostrazione dell'asserto nel caso di un sotto-$\mathbb{O}$-modulo preriflessivo di D è pressochè identica a quella del caso precedentemente considerato, C.V.D..

2.2. TEOREMA. *Sia H un sotto-$\mathbb{O}$-modulo preriflessivo di R* (risp. : *di D*) *; si ha $H^{**} = \widetilde{H}$.*

DIM. Supponiamo H sotto-$\mathbb{O}$-modulo preriflessivo di R. Sia $x \in \widetilde{H}$, e sia d un qualsiasi elemento di H^*. Per ogni $\lambda \in \mathbb{P}$ si ha: $\lambda x \in H$, $d \circ \lambda x \in \mathbb{O}$, $\lambda (d \circ x) \in \mathbb{O}$, e quindi $v(d \circ x) \geq - v(\lambda)$; ne segue $v(d \circ x) \geq 0$. Si ha quindi $H^* \circ x \subseteq \mathbb{O}$, ossia $x \in H^{**}$.

Sia $x \notin \widetilde{H}$; esiste $\lambda \in \mathbb{P}$ tale che $\lambda x \notin H$. Per 1.2 esistono $\sigma \in \mathbb{K}$, con $- v(\lambda)/2 \leq v(\sigma) \leq 0$, e una pseudobase $x_0, x_1, \ldots$ di R, tali che $\overline{\bigoplus_{i \geq 0}} \mathbb{O} x_i \subseteq H \subseteq \overline{\bigoplus_{i \geq 0}} \mathbb{O} \sigma x_i$. Si osservi in primo luogo che: $0 \leq v(\sigma^{-1}) \leq v(\lambda)/2$, $0 \leq v(\sigma^{-2}) \leq v(\lambda)$, $v(\sigma^{-1}) \leq v(\lambda\sigma)$. Ciò posto, se fosse $\sigma^{-1} x \in \overline{\bigoplus_{i \geq 0}} \mathbb{O} \sigma x_i$, essendo $v(\sigma^{-1}) \leq v(\lambda\sigma)$, si avrebbe $(\lambda\sigma)\sigma^{-1} x \in \overline{\bigoplus_{i \geq 0}} \mathbb{O} x_i \subseteq H$, ossia $\lambda x \in H$, il che è assurdo. Allora si ha $\sigma^{-1} x \notin \overline{\bigoplus_{i \geq 0}} \mathbb{O} \sigma x_i$; posto quindi $x = \sum_{i \geq 0} a_i x_i$, esiste j tale che $v(\sigma^{-1} a_j) < v(\sigma)$, ossia $v(a_j) < 2v(\sigma)$. Sia quindi d l'elemento di D definito da $d \circ x_i = 0$ se $i \neq j$, $d \circ x_j = \sigma^{-1}$ (si osservi che la definizione è consistente). Si ha che $d \in H^*$, ma $d \circ x = d \circ (\sum_{i \geq 0} a_i x_i) = a_j (d \circ x_j) = a_j \sigma^{-1}$, ove $v(a_j \sigma^{-1}) = v(a_j) + v(\sigma^{-1}) < 2v(\sigma) + v(\sigma^{-1}) = v(\sigma) \leq 0$, e quindi $x \notin H^{**}$.

La dimostrazione dell'asserto nel caso di un sotto-$\mathbb{O}$ modulo preriflessivo di D è pressochè identica alla precedente, C.V.D..

2.3. TEOREMA. *Sia H un sotto $\mathbb{O}$ modulo di R* (risp. : *di D*). *Sono equivalenti le asserzioni :* a) *H è riflessivo,* b) *H è saturo,* c) *H è il duale di un sotto-$\mathbb{O}$ modulo preriflessivo di D* (risp. : *di R*).

DIM. L'equivalenza tra a) e b) segue da 2.2. Dimostriamo quindi l'equivalenza tra b) e c) supponendo H sotto-$\mathbb{O}$-modulo di R, la dimostrazione dell'altro caso essendo pressochè identica a questa.

Se H è riflessivo, allora H^* è ovviamente preriflessivo e $H = (H^*)^*$. Supponiamo viceversa che esista un sotto-$\mathbb{O}$-modulo preriflessivo A di D tale che $H = A^*$. Per 1.1, H è preriflessivo. Sia inoltre $x \in R$ tale che per ogni $\lambda \in \mathbb{P}$ risulti $\lambda x \in H$. Allora $A \circ \lambda x \subseteq \mathbb{O}$ e quindi $A \circ x \subseteq \mathbb{O} \lambda^{-1}$; siccome ciò si verifica per ogni $\lambda \in \mathbb{P}$, e v è non discreta, si ha $A \circ x \subseteq \mathbb{O}$, e quindi $x \in A^* = H$. Si conclude che $H = \widetilde{H}$, onde per 2.2, $H = H^{**}$, C.V.D..

Terminiamo questo numero con una definizione. Un sotto-$\mathbb{O}$-modulo riflessivo H di R si dirà *riducibile* se l'applicazione k-bilineare $H^*/\mathbb{P}H^* \times H/\overline{\mathbb{P}H} \xrightarrow{\circ} k$, indotta da $H^* \times H \xrightarrow{\circ} \mathbb{O}$, è una dualità.

3. Anche in questo numero supponiamo v non discreta.

Sia $\mathbb{K}'$ un prolungamento di $\mathbb{K}$; poniamo $R' = \mathbb{K}' \overline{\times}_{\mathbb{K}} R$, $D' = \mathbb{K}' \overline{\times}_{\mathbb{K}} D$ (cfr. n⁰ 19, pg. 184 di [2]). R' risulta uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}'$ linearmente compatto; D' risulta uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}'$ a topologia discreta e base numerabile. D' ed R' risultano inoltre duali l'uno dell'altro rispetto all'applicazione $\mathbb{K}'$-bilineare che prolunga la dualità tra D ed R.

Sia $\mathbb{O}'$ una schiera valutante archimedea di $\mathbb{K}'$ che prolunga $\mathbb{O}$; siano $\mathbb{P}'$, k' rispettivamente il primo massimo ed il corpo residuo di $\mathbb{O}'$. Naturalmente k' è un prolungamento di k.

Sia H un sotto $\mathbb{O}$ modulo riflessivo di R. Siccome $\mathbb{O}$ è una schiera valutante, $\mathbb{O}' \overline{\times}_{\mathbb{O}} H^*$ e $\mathbb{O}' \overline{\times}_{\mathbb{O}} H$ risultano sotto-$\mathbb{O}$-moduli topologici di D', R' rispettivamente (cfr. i corollari 1. e 2. nell'appendice). Tali $\mathbb{O}'$ moduli, come sotto-$\mathbb{O}'$-moduli di D', R', sono certamente preriflessivi (cfr 1.1); in generale non è detto che siano riflessivi.

Ciò posto, se comunque siano dati $\mathbb{K}'$, $\mathbb{O}'$, i sotto $\mathbb{O}'$-moduli $\overline{\mathbb{O}}' \times_{\mathbb{O}} H^*$, $\mathbb{O}' \overline{\times}_{\mathbb{O}} H$ di D', R' rispettivamente, risultano riflessivi (nel qual caso essi risultano duali l'uno dell'altro), allora diremo che H è *regolare*.

Il seguente teorema prova che le $\mathbb{O}$-schiere di R sono i soli sotto-$\mathbb{O}$-moduli riflessivi di R che risultano riducibili e regolari.

3.1 TEOREMA. *Sia H un sotto-$\mathbb{O}$-modulo riflessivo di R. Allora H è riducibile e regolare se e solo se è una $\mathbb{O}$-schiera di R.*

In tale caso $H^*/\mathbb{P}H^*$ è uno spazio vettoriale su k a topologia discreta e base numerabile; $H/\overline{\mathbb{P}H}$ è uno spazio vettoriale su k linearmente compatto. Inoltre $H^*/\mathbb{P}H^*$ e $H/\overline{\mathbb{P}H}$ risultano duali l'uno dell'altro tramite l'applicazione k bilineare indotta da $H^* \times H \xrightarrow{\circ} \mathbb{O}$.

DIM. Supponiamo che H sia riducibile. Sia allora d un elemento non nullo di H^*, e sia $\mu = inf\{v(d \circ x)/x \in H\}$; è $0 \leq \mu$. Supponiamo che $\mu \in \Gamma$; in tale caso esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $v(\lambda) = \mu$. Per ogni $x \in H$ si ha $v(\lambda^{-1} d \circ x) = -v(\lambda) + v(d \circ x) \geq -v(\lambda) + \mu = 0$; allora $\lambda^{-1} d \in H^*$. Inoltre $\lambda^{-1} d \circ H \supseteq \mathbb{P}$. Se fosse $\lambda^{-1} d \circ H \neq \mathbb{O}$, sarebbe $\lambda^{-1} d \circ H = \mathbb{P}$; siccome l'applicazione $H^*/\mathbb{P}H^* \times H/\overline{\mathbb{P}H} \xrightarrow{\circ} k$ indotta da $H^* \times H \xrightarrow{\circ} \mathbb{O}$ è una dualità, si avrebbe $\lambda^{-1} d \in \mathbb{P}H^*$. Esisterebbero quindi $\sigma \in \mathbb{P}$ e $d' \in H^*$ tali che $\lambda^{-1} d = \sigma d'$. Ma allora $\lambda^{-1} d \circ H = \sigma d' \circ H = \sigma(d' \circ H) \subseteq \sigma \mathbb{O} \subset \mathbb{P}$, il che è assurdo. Si conclude che $\lambda^{-1} d \circ H = \mathbb{O}$. Esiste quindi $x \in H$ tale che $\lambda^{-1} d \circ x = 1$, ossia che $d \circ x = \lambda$; allora $v(d \circ x) = \mu$. Ne segue che $\mu = min\{v(d \circ x)/x \in H\}$.

Supponiamo adesso che H oltre che riducibile sia anche regolare. Sia d un elemento non nullo di D, e sia $\mu = inf\{v(d \circ x)/x \in H\}$. Dalle precedenti considerazioni segue pressochè immediatamente che: o $\mu \notin \Gamma$, o $\mu = min\{v(d \circ x)/x \in H\}$. Dico che $\mu \in \Gamma$, ossia che $\mu = min\{v(d \circ x)/x \in H\}$.

Sia infatti $\mathbb{k}'$ un prolungamento di $\mathbb{k}$ e v' un prolungamento archimedeo di v a $\mathbb{k}'$, per il quale esiste $c \in \mathbb{k}'$ tale che $v'(c) = \mu$ (l'esistenza di tali $\mathbb{k}'$, v' è facilmente provabile); siano $\mathbb{O}'$, $\mathbb{P}'$, k' rispettivamente la schiera valutante di v', il primo massimo di $\mathbb{O}'$, il corpo residuo di v'. Posto $H' = \mathbb{O}' \,\overline{\times}_{\mathbb{O}}\, H$, si ha $d \circ H' = \mathbb{O}'(d \circ H)$, onde $\mu = inf\{v'(d \circ x')/x' \in H'\}$. Siccome $\overline{H'^*/\mathbb{P}' H'^*} = k' \,\overline{\times}_k\, (\overline{H^*/\mathbb{P} H^*})$ (essendo, per la regolarità di H, $H'^* = \mathbb{O}' \,\overline{\times}_{\mathbb{O}}\, H^*$), e $\overline{H'/\mathbb{P}' H'} = k' \,\overline{\times}_k\, (\overline{H/\mathbb{P} H})$ (la verifica di tali uguaglianze viene omessa perchè tediosa e non difficile), H' risulta riducibile. Siccome μ è elemento del gruppo valutante di v', analogamente a come fatto all'inizio di questa dimostrazione, si prova che $\mu = min\{v'(d \circ x')/x' \in H'\}$.

Sia quindi $\varrho = \sum_{i \geq 0} \omega_i' \,\overline{\times}\, a_i$, con gli $\omega_i' \in \mathbb{O}'$ e gli $a_i \in H$, un elemento di H' tale che $v'(d \circ \varrho) = \mu$. Esiste s tale che $d \circ \varrho = d \circ (\sum_{0 \leq i \leq s} \omega_i' \,\overline{\times}\, a_i)$; allora $\mu = v'(\sum_{0 \leq i \leq s} \omega_i'(d \circ a_i))$. Se per ogni i con $0 \leq i \leq s$, fosse $v(d \circ a_i) > \mu$, si avrebbe $v'(d \circ \varrho) > \mu$, il che è assurdo. Allora esiste i tale che $v(d \circ a_i) = \mu$. Si conclude che $\mu = min\{v(d \circ x)/x \in H\}$.

Quanto precede prova che dato comunque un elemento non nullo d di D, l'insieme $\{v(d \circ x)/x \in H\}$ ha minimo. Allora con la tecnica usata nella dimostrazione di 1.2 (caso di H sotto-$\mathbb{O}$-modulo di R. e v discreta), si prova che H è una $\mathbb{O}$-schiera di R.

I rimanenti asserti del teorema sono pressochè banali, C.V.D..

Dalla dimostrazione del precedente teorema segue che se H è un sotto-$\mathbb{O}$-modulo riflessivo e riducibile di R tale che $\mathbb{O}' \,\overline{\times}_{\mathbb{O}}\, H^*$ e $\mathbb{O}' \,\overline{\times}_{\mathbb{O}}\, H$ risultino riflessivi rispettivamente in $\mathbb{k}' \,\overline{\times}_{\mathbb{k}}\, D$ e $\mathbb{k}' \,\overline{\times}_{\mathbb{k}}\, R$, per ogni schiera archimedea $\mathbb{O}'$ che prolunga $\mathbb{O}$ ad un fissato sovracorpo $\mathbb{k}'$, di trascendenza almeno 1, di $\mathbb{k}$, allora H è regolare.

Un caso particolare, ma abbastanza significativo, in cui la riducibilità comporta la regolarità, è quello considerato nel seguente teorema.

3.2 Teorema. *Sia D un sotto-$\mathbb{O}$-modulo riflessivo e riducile di R. Se Γ coincide col gruppo additivo dei reali, allora H è regolare; in particolare H è una $\mathbb{O}$-schiera di R.*

Dim. Sia d un qualsiasi elemento non nullo di D. Posto $\mu = inf\{v(d \circ x)/x \in H\}$, siccome $\mu \in \Gamma$, come nella prima parte della dimostrazione di 3.1, si prova che $\mu = min\{v(d \circ x)/x \in H\}$. La conclusione è quindi identica a quella della dimostrazione di 3.1, C.V.D..

Per le applicazioni alla teoria delle iperalgebre definite su schiere archimedee interessa il caso in cui lo spazio vettoriale linearmente compatto R è un anello locale regolare completo, equicaratteristico di corpo residuo $\mathbb{k}$.

In tale caso ha interesse conoscere la struttura delle sotto-$\mathbb{O}$-algebre H di R, possedenti 1, riflessive riducibili e regolari come sotto-$\mathbb{O}$-moduli di R, tali inoltre che $H/\overline{\mathbb{P}H}$ risulti un anello locale regolare della stessa dimensione di R.

A tale problema risponde, in forma leggermente più generale (tenuto conto di 3.1) il seguente capitolo.

CAPITOLO 2

SPECIALIZZAZIONI DI ANELLI LOCALI

In questo capitolo $\mathbb{K}$, v, $\mathbb{O}$, $\mathbb{P}$, k, conservano gli stessi significati del capitolo precedente, con l'unica variante che non si richiede l'archimedeicità di v.

Indichiamo con R un anello locale regolare completo equicaratteristico, di corpo residuo $\mathbb{K}$ e dimensione n; sia M l'ideale massimo di R. In tale caso R è isomorfo all'anello $\mathbb{K}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ delle serie formali in n indeterminate $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, a coefficienti in $\mathbb{K}$, ed è linearmente compatto come $\mathbb{K}$ modulo.

Le informazioni richieste alla fine del primo capitolo sono contenute nel seguente teorema.

TEOREMA. *Sia H una $\mathbb{O}$-schiera di R, che risulti sottoanello di R e che possegga* 1. *Sussistono i seguenti asserti:*

a) $H = \mathbb{O} \oplus (H \cap M)$.

b) *$H/\overline{\mathbb{P}H}$ è un anello locale (non necessariamente noetheriano) equicaratteristico, di corpo residuo k.*

c) *Se $H/\overline{\mathbb{P}H}$ è regolare si ha* $\dim (H/\overline{\mathbb{P}H}) \geq n$.

d) *$H/\overline{\mathbb{P}H}$ è regolare di dimensione n se e solo se esiste un sistema regolare di parametri di R, $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, tale che $H = \mathbb{O}\{\sigma_1, \dots, \sigma_n]$.*

DIM. Per comodità ripartiamo la dimostrazione in varie osservazioni.

1. Sia $x_0, x_1, \dots$ una pseudobase qualsiasi di R, e sia $\Omega_j = \{a_j \in \mathbb{K} \,/\, $*esistono* $a_0, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots \in \mathbb{K}$ *tali che* $\sum_{i \geq 0} a_i x_i \in H\}$. Allora $v(\Omega_j)$ ha minimo finito.

Infatti: Sia D uno spazio vettoriale a base numerabile e topologia discreta su $\mathbb{K}$, duale di R tramite una dualità $D \times R \xrightarrow{\circ} \mathbb{K}$. Sia $d'_0, d'_1, \dots$ la base di D trasposta di $x_0, x_1, \dots$. Sia $H = \overline{\bigoplus_{i \geq 0}} \mathbb{O} s_i$, e sia $d_0, d_1, \dots$ la base di D trasposta di $s_0, s_1, \dots$.

Poniamo $d'_j = \mu_0 d_0 + \dots + \mu_r d_r$, e sia i tale che $v(\mu_i) \leq v(\mu_0), \dots, v(\mu_r)$. Risulta $\Omega_j = d'_j \circ H = (\mu_0 d_0 + \dots + \mu_r d_r) \circ (\overline{\bigoplus_{i \geq 0}} \mathbb{O} s_i) = \{\mu_0 \omega_0 + \dots + \mu_r \omega_r / \omega_0, \dots \dots, \omega_r \in \mathbb{O}\} = \mu_i \mathbb{O}$. Allora $v(\mu_i)$ è il minimo di $v(\Omega_j)$.

2. Sia $x_0, x_1, \dots$ una pseudobase qualsiasi di R. Tenuto conto del punto 1. e della tecnica usata nella dimostrazione di 1.2 del primo capitolo (caso di H sotto-$\mathbb{O}$-modulo di R, e v discreta), si prova che esistono per $i \geq 0$, elementi y_i tali che: a) $y_i = \sum_{h \geq 0} a_{i, i+h} x_{i+h} \in H$, con $a_{i,j} \in \mathbb{K}$, b) $a_{i,i} \neq 0$, c) $v(a_{0,0}) = min\ v\ \{a_0 \in \mathbb{K}$ *esistono* $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{K}$ *tali che* $\sum_{i \geq 0} a_i x_i \in H\}$, d) per $i \geq 1$ si ha $v(a_{i,i}) = min\ v\ \{a_i \in \mathbb{K}$ / *esistono* $a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots \in \mathbb{K}$, *tali che* $a_0 y_0 + \dots + a_{i-1} y_{i-1} + \sum_{h \geq i} a_h x_h \in H\}$. Si prova inoltre che comunque siano dati $y_0, y_1, \dots$ verificanti le proprietà a), b), c), d), si ha $H = \overline{\bigoplus_{i \geq 0}} \mathbb{O} y_i$.

3. Sia $x_0, x_1, \dots$ una pseudobase di R, con $x_0 = 1$, e $x_1, x_2, \dots \in M$, e sia $\Omega = \{a \in \mathbb{K}$ / *esistono* $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{K}$ *tali che* $a + \sum_{i \geq 1} a_i x_i \in H\}$. Per il punto 1. esiste $a' \in \Omega$ tale che $v(a') = min\ v(\Omega)$. Sia $a' + \sum_{i \geq 1} a'_i x_i \in H$.

Siccome $H \ni 1$ si ha che $H \cap \mathbb{K} \supseteq \mathbb{O}$. Se fosse $H \cap \mathbb{K} \supset \mathbb{O}$, esisterebbe $c \in H \cap \mathbb{K}$, con $v(c) < 0$. In tale caso $ca' + \sum_{i \geq 1} ca'_i x_i$ sarebbe elemento di H, il che è assurdo essendo $v(ca') < v(a')$. Si conclude che $H \cap \mathbb{K} = \mathbb{O}$.

A questo punto l'asserto a) risulta pressochè immediato. Quanto a b), è sufficiente osservare che i residui in $H/\mathbb{P}H$ degli elementi di $\mathbb{O}$ costituiscono un corpo isomorfo a k, e che i residui degli elementi di $H \cap M$ costituiscono un ideale di $H/\mathbb{P}H$ i cui elementi sono topologicamente nilpotenti.

4. Sia $X = (X_1, \dots, X_n)$ un sistema di indeterminate su $\mathbb{K}$. Indichiamo con r_i il numero dei monomi monici di grado i nelle $X_1, \dots, X_n$; in particolare $r_0 = 1$, $r_1 = n$.

Poniamo $M_0(X) = 1$, $M_1(X) = X_1, \dots, M_n(X) = X_n$. Per $i \geq 2$ indichiamo poi con $M_{(r_0 + \dots r_{i-1}) + 1}(X), \dots, M_{(r_0 + \dots + r_{i-1}) + r_i}(X)$ i monomi monici (ordinati in qualche modo) di grado i, nelle $X_1, \dots, X_n$.

Se $(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ è un sistema regolare di parametri di R, allora $M_0(\lambda), M_1(\lambda), \dots$ è una pseudobase di R che diremo *legata* a (λ).

5. Sia (λ) un sistema regolare di parametri di R, e siano $x_0 = 1, x_1, x_2, \ldots$ verificanti le condizioni a), b), c), d) di cui al punto 2., rispetto alla pseudobase di R legata a (λ). Tenuto conto della proprietà a), si ha che $(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ è un sistema regolare di parametri di R. Siccome $H = \mathfrak{O} \oplus (\mathfrak{O}x_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{O}x_n) \oplus (\overline{\bigoplus_{h \geq 1}} \mathfrak{O}x_{n+h})$ e $\overline{\bigoplus_{h \geq 1}} \mathfrak{O}x_{n+h} \subseteq M^2$, si possono scegliere elementi $y_0, y_1, \ldots$ verificanti rispetto alla pseudobase legata ad (x) le condizioni a), b), c), d) di cui al punto 2., in modo che $y_0 = 1, y_1 = x_1, \ldots, y_n = x_n$.

6. Per $i \geq 1$ poniamo $F_i = \mathfrak{O}y_{(r_0 + \ldots + r_{i-1})+1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{O}y_{(r_0 + \ldots + r_{i-1})+r_i}$; F_i è un $\mathfrak{O}$-modulo libero su r_i elementi. Si ha $H = \mathfrak{O} \oplus (\overline{\bigoplus_{i \geq 1}} F_i)$

Indichiamo con G_i il residuo di F_i in $H/\overline{\mathfrak{P}H}$. G_i è canonicamente isomorfo (come k-modulo) a $F_i/\mathfrak{P}F_i$, onde è uno spazio vettoriale su k di dimensione r_i. Si ha inoltre $H/\overline{\mathfrak{P}H} = k \oplus (\overline{\bigoplus_{i \geq 1}} G_i)$.

Tenuto conto che $H \cap M^i = \overline{\bigoplus_{h \geq 0}} F_{i+h}$ si ha che $\overline{\bigoplus_{h \geq 0}} G_{i+h}$ è un ideale di $H/\overline{\mathfrak{P}H}$, e che $(\overline{\bigoplus_{h \geq 0}} G_{i+h})(\overline{\bigoplus_{h \geq 0}} G_{j+h}) \subseteq \overline{\bigoplus_{h \geq 0}} G_{(i+j)+h}$. L'ideale massimo N di $H/\overline{\mathfrak{P}H}$ coincide con $\overline{\bigoplus_{h \geq 1}} G_h$.

7. Supponiamo adesso che $H/\overline{\mathfrak{P}H}$ sia regolare. In tale caso, essendo $N^2 \subseteq \overline{\bigoplus_{h \geq 2}} G_h$, si ha $dim\ H/\overline{\mathfrak{P}H} = dim_k\ N/N^2 \geq dim_k\ (\overline{\bigoplus_{h \geq 1}} G_h)/(\overline{\bigoplus_{h \geq 2}} G_h) = dim_k\ G_1 = n$. Quanto precede prova l'asserto c).

8. Se esiste un sistema regolare (σ) di parametri di R tale che $H = \mathfrak{O}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$, si ha ovviamente che $H/\overline{\mathfrak{P}H}$ è regolare e che $dim\ H/\overline{\mathfrak{P}H} = n$.

9. Da qui innanzi supponiamo che $H/\overline{\mathfrak{P}H}$ sia regolare di dimensione n. In tale caso, oltre ad essere $N^2 \subseteq \overline{\bigoplus_{h \geq 2}} G_h$, si ha anche $dim_k\ N/(\overline{\bigoplus_{h \geq 2}} G) = n = dim_k\ N/N^2$, onde risulta $N^2 = \overline{\bigoplus_{h \geq 2}} G_h$.

Supponiamo dimostrato che per $s = 1, \ldots, m-1$ si abbia $N^s = \overline{\bigoplus_{h \geq s}} G_h$. Dall'essere $N^m \subseteq \overline{\bigoplus_{h \geq m}} G_h$, e dall'essere $dim_k\ N^{m-1}/N^m = r_{(m-1)} = dim_k\ G_{m-1} = dim_k\ (\overline{\bigoplus_{h \geq (m-1)}} G_h)/(\overline{\bigoplus_{h \geq m}} G_h) = dim_k\ N^{m-1}/(\overline{\bigoplus_{h \geq m}} G_h)$, segue che $N^m = \overline{\bigoplus_{h \geq m}} G_h$.

Quanto precede prova che per ogni $s \geq 1$ si ha $N^s = \overline{\bigoplus_{h \geq s}} G_h$; è quindi chiaro che si ha $N^s = G_s \oplus N^{s+1}$. Allora gli elementi di una qualsiasi base di G_s come spazio vettoriale su k, sono una base minimale dell'ideale N^s.

10. Sia $(x) = (x_1, \dots, x_n)$ il sistema regolare di parametri di R di cui al punto 5., e siano $u_1, \dots, u_n$ i residui di $x_1, \dots, x_n$ in $H/\mathfrak{P}H$. Siccome $u_1, \dots, u_n$ è una base di G_1 come spazio vettoriale su k, per il punto 9. si ha che $(u) = (u_1, \dots, u_n)$ è un sistema regolare di parametri di $H/\overline{\mathfrak{P}H}$.

11. Dato $s \geq 2$, esistono elementi $c_{(h)}$ (con $(h) = (h_1, \dots, h_n)$ tali che $\Sigma h_i = s$) di N^{s+1} tali che gli $u^h + c_{(h)}$ (ove $u^{(h)} = u_1^{h_1} \dots u_n^{h_n}$) siano una base di G_s come spazio vettoriale su k.

Infatti: essendo $N^s = G_s \oplus N^{s+1}$, per ogni (h) del tipo descritto, esistono $g_{(h)} \in G_s$, $c_{(h)} \in N^{s+1}$ tali che $u^{(h)} = g_{(h)} - c_{(h)}$. Allora gli elementi $u^{(h)} + c_{(h)}$ sono in G_s; essendo in numero di r_s, ed essendo linearmente indipendenti su k, essi sono una base di G_s su k.

Sia adesso $c^*_{(h)} \in \overline{\bigoplus_{i \geq s+1}} F_i$, un elemento di residuo $c_{(h)}$. Allora il residuo di $x^{(h)} + c^*_{(h)}$ è $u^{(h)} + c_{(h)}$. Siccome $u^{(h)} + c_{(h)} \in G_s$, esiste $b_{(h)} \in \overline{\mathfrak{P}H} = \mathfrak{P} \oplus (\overline{\bigoplus_{i \geq 1}} \mathfrak{P}F_i)$, tale che $x^{(h)} + c^*_{(h)} + b_{(h)} \in F_s$. Siccome $x^{(h)} + c^*_{(h)} \in \overline{\bigoplus_{i \geq s}} F_i$, si ha che $b_{(h)} = \sum_{i \geq s} c_i$, con ogni $c_i \in \mathfrak{P}F_i$. Allora $F_s \ni x^{(h)} + c^*_{(h)} + \sum_{i \geq s} c_i = c_s + (x^{(h)} + (c^*_h + \sum_{i \geq (s+1)} c_i))$. Siccome $c_s \in F_s$ si ha che $x^{(h)} + (c^*_{(h)} + \sum_{i \geq (s+1)} c_i) \in F_s$. Inoltre $c'_{(h)} = c^*_{(h)} + \sum_{i \geq (s+1)} c_i \in \overline{\bigoplus_{i \geq (s+1)}} F_i$, ed ha per residuo $c_{(h)}$.

Si conclude che esistono elementi $c'_{(h)} \in \overline{\bigoplus_{i \geq (s+1)}} F_i$ tali che gli elementi $x^{(h)} + c'_{(h)}$ verificano le proprietà: a) sono elementi di F_s, b) i loro residui sono una base di $G_s = F_s/\mathfrak{P}F_s$ su k.

Allora gli elementi $x^{(h)} + c'_{(h)}$ generano liberamente F_s come $\mathfrak{O}$-modulo (cfr. il lemma nell'appendice); ciò prova che ogni elemento di F_s può porsi in uno ed un solo modo nella forma $f(x) + c$, ove $f(X)$ è una forma di grado s nelle indeterminate $X_1, \dots, X_n$, e $c \in \overline{\bigoplus_{i \geq (s+1)}} F_i$.

12. Sia $f = \sum_{i \geq 0} f_i$, con $f_0 \in \mathfrak{O}$, e $f_i \in F_i$ per $i \geq 1$, un elemento qualsiasi di H. Tenuto conto del risultato ottenuto al punto 11., si prova con procedimento induttivo che per ogni $s \geq 1$ esistono un elemento $P_s \in \mathfrak{O}[x]$, di grado non superiore ad s, ed un elemento $c_s \in H \cap M^{s+1}$, tali che $f = P_s + c_s$. Ne segue che $f = \lim P_s \in \mathfrak{O}\{x\}$. Siccome $\mathfrak{O}\{x\} \subseteq H$ (essendo $\mathfrak{O}[x] \subseteq H$, ed essendo H completo), si conclude che $H = \mathfrak{O}\{x\}$; ciò completa la prova di d), C. V. D..

APPENDICE

Raggruppiamo in questa appendice alcuni risultati che sono stati utilizzati nel corso dei due precedenti capitoli.

Indichiamo con $\mathbb{K}$ un corpo, con $\mathfrak{O}$ una schiera valutante di $\mathbb{K}$ non necessariamente archimedea, con $\mathfrak{P}$ e con k rispettivamente l'ideale massimo e il corpo residuo di $\mathfrak{O}$.

LEMMA. *Sia V un $\mathfrak{O}$-modulo finito, e sia μ il semiomomorfismo canonico di V su tutto il k-modulo $V/\mathfrak{P}V$. Siano $v_1, \dots, v_n$ elementi di V.*

Sussistono le asserzioni seguenti:

a) *$v_1, \dots, v_n$ generano V su $\mathfrak{O}$ se e solo se $\mu(v_1), \dots, \mu(v_n)$ generano $V/\mathfrak{P}V$ su k.*

b) *Se V è senza torsione, allora è libero. Inoltre $v_1, \dots, v_n$ è un sistema libero di generatori di V su $\mathfrak{O}$ se e solo se $\mu(v_1), \dots, \mu(v_n)$ è una base di $V/\mathfrak{P}V$ su k. In particolare tutti i sistemi liberi di generatori di V su $\mathfrak{O}$ hanno la stessa cardinalità coincidente con la dimensione di $V/\mathfrak{P}V$ su k.*

DIM. a) Se $v_1, \dots, v_n$ generano V su $\mathfrak{O}$, allora $\mu(v_1), \dots, \mu(v_n)$ generano ovviamente $V/\mathfrak{P}V$ su k

Viceversa. Sia $u_1, \dots, u_s$ un sistema di generatori di V su $\mathfrak{O}$, e sia $r > n, s$. Poniamo $v'_1 = u_1, \dots, v'_n = v_n$, $v'_{n+1} = \dots = v'_r = 0$, $u'_1 = u'_1, \dots, u'_s = u'_s$, $u'_{s+1} = \dots = u'_r = 0$.

Siccome $\mu(v'_1), \dots, \mu(v'_r)$ generano $V/\mathfrak{P}V$ su k, si ha $V = \mathfrak{O}u'_1 + \dots + \mathfrak{O}u'_r = (\mathfrak{O}v'_1 + \dots + \mathfrak{O}v'_r) + ker(\mu) = (\mathfrak{O}v'_1 + \dots + \mathfrak{O}v'_r) + (\mathfrak{P}u'_1 + \dots + \mathfrak{P}u'_r)$. Esistono allora elementi $\omega_{ij} \in \mathfrak{O}$, $p_{ij} \in \mathfrak{P}$, con $i, j = 1, \dots, r$, tali che $(u'_1, \dots, u'_r)_{-1} = (\omega_{ij})(v'_1, \dots, v'_r)_{-1} + (p_{ij})(u'_1, \dots, u'_r)_{-1}$. Allora $(I - (p_{ij}))(u'_1, \dots, u'_r)_{-1} = (\omega_{ij})(v'_1, \dots, v'_r)_{-1}$. Si prova facilmente che la matrice $I - (p_{ij})$ è invertibile e che la sua inversa è ad elementi in $\mathfrak{O}$. Allora si ha che $u'_1, \dots, u'_r$ sono elementi di $\mathfrak{O}v'_1 + \dots + \mathfrak{O}v'_r$. Si conclude che $v_1, \dots, v'_r$ è un sistema di generatori di V su $\mathfrak{O}$, e quindi che anche $v_1, \dots, v_n$ lo è.

L'asserto b) è conseguenza pressochè immediata dell'asserto a), e dell'essere $\mathfrak{O}$ valutante, C. V. D..

Diamo qui di seguito gli enunciati di due corollari del precedente lemma, omettendone le dimostrazioni in quanto noiose e non difficili. Osserviamo soltanto che tali dimostrazioni si basano sul fatto che ogni modulo finito e senza torsione su una schiera valutante, è libero.

COROLLARIO 1. *Siano M, N due $\mathbb{O}$-moduli senza torsione. Siano M', N' gli spazi vettoriali ottenuti estendendo M, N, su $\mathbb{K}$ e siano M_1, N_1 sotto-$\mathbb{O}$-moduli di M, N rispettivamente.*

Gli omomorfismi canonici $M_1 \otimes_{\mathbb{O}} N_1 \to M \otimes_{\mathbb{O}} N$, $M \otimes_{\mathbb{O}} N \to M' \otimes_{\mathbb{K}} N'$, sono iniettivi.

COROLLARIO 2. *Siano M', N' spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, e siano M, N sotto-$\mathbb{O}$-moduli di M', N' rispettivamente.*

Dati comunque sotto-$\mathbb{K}$-spazi vettoriali W, T di M', N' rispettivamente, si ha $(M \otimes_{\mathbb{O}} N) \cap (W \otimes_{\mathbb{K}} N' + M' \otimes_{\mathbb{K}} T) = (W \cap M) \otimes_{\mathbb{O}} N + M \otimes_{\mathbb{O}} (T \cap N)$.

Pisa, Università

BIBLIOGRAFIA

[1] I. BARSOTTI, *Varietà abeliane su corpi p-adici: parte prima.* Ist. Nazionale di Alta Matematica, Symp. Math., volume 1^0, 1968.

[2] I. BARSOTTI, *Metodi analitici per varietà abeliane in caratteristica positiva. Capitoli* 3, 4. Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, Serie III, Vol. XIX, Fasc. III, 1965.