

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GENEVIÈVE POURCIN

Théorème de Douady au-dessus de S

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 23, n° 3 (1969), p. 451-459

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_3_451_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME DE DOUADY AU-DESSUS DE S

par GENEVIÈVE POURCIN

§ 1. Introduction.

Les espaces analytiques considérés sont séparés de dimension finie et ne sont pas nécessairement réduits.

Soient $X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces analytiques et \mathcal{C} un faisceau analytique cohérent sur X . Pour tout morphisme d'espaces analytiques $Z \rightarrow S$, on pose $X_Z = Z \times_S X$ et $\mathcal{C}_Z = pr_2^* \mathcal{C}$, faisceau analytique image réciproque de \mathcal{C} sur X_Z ; de même, étant donnée une section g de \mathcal{C} , on note g_Z la section correspondante de \mathcal{C}_Z .

Le but de cet article est de généraliser le théorème suivant dû à Douady ([1], § 9 théorème 1):

THÉORÈME 1. *Soient X un espace analytique et \mathcal{C} un faisceau analytique cohérent sur X . Il existe un espace analytique $H(\mathcal{C})$ et un faisceau quotient $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ du faisceau $\mathcal{C}_{H(\mathcal{C})}$ sur $H(\mathcal{C}) \times X$ jouissant de la propriété universelle suivante :*

- (i) $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ est $H(\mathcal{C})$ -propre et $H(\mathcal{C})$ -plat
- (ii) Pour tout espace analytique Z et tout faisceau quotient Z -plat et Z -propre \mathcal{F} de \mathcal{C}_Z , il existe un morphisme et un seul $f: Z \rightarrow H(\mathcal{C})$ tel que $\mathcal{F} = (f \times I_X)^* \mathcal{R}(\mathcal{C})$.

Sous le nom de « Platitude et Privilège » on réfère au scholie ([1], § 8):

SCHOLIE. *Soient S un espace analytique, U un ouvert de \mathbb{C}^n , \mathcal{C} un faisceau S -plat sur $S \times U$ et $K \subset U$ un polycylindre. L'ensemble S' des points $s \in S$ tels que K soit \mathcal{C}_{s_i} -privilegié est ouvert dans S et les espaces de Banach $B(K, \mathcal{C}_{s_i})$ sont les fibres d'un fibré analytique localement trivial $B(K, \mathcal{C})$ sur S' .*

De plus si $\mathcal{H}_{S'}(B(K, \mathcal{C}))$ désigne le faisceau des sections de ce fibré et

$p : S' \times K \rightarrow S'$ (resp. $q : S' \times \overset{\circ}{K} \rightarrow S'$) la première projection, on a un diagramme commutatif de morphismes de faisceaux sur S' , ρ désignant le morphisme de restriction :

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} p_* \mathcal{E} |_{S' \times K} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{R}_{S'}(B(K, \mathcal{E})) \\ \rho \downarrow & & \swarrow \beta \\ q_* \mathcal{E} |_{S' \times \overset{\circ}{K}} & & \end{array}$$

Pour tout changement de base $Z \xrightarrow{\psi} S'$, K est $(\mathcal{E}_Z)_{z \in Z}$ privilégié pour tout $z \in Z$, le fibré $B(K, \mathcal{E}_Z)$ est l'image réciproque du fibré $B(K, \mathcal{E})$ et le diagramme suivant :

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} p_* \mathcal{E} |_{S' \times K} & \xrightarrow{h} & p_* \mathcal{E}_Z |_{Z \times K} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{R}_Z(B(K, \mathcal{E}_Z)) \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho & & \swarrow \beta \\ q_* \mathcal{E} |_{S' \times \overset{\circ}{K}} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{R}_{S'}(B(K, \mathcal{E})) & \xrightarrow{k} & \mathcal{R}_Z(B(K, \mathcal{E}_Z)) \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow \beta \\ & & q_* \mathcal{E}_Z |_{Z \times \overset{\circ}{K}} & & \end{array}$$

où h, k et l sont des ψ comorphismes, est commutatif.

A l'aide de ces résultats, on démontre au § 3 du présent article le théorème suivant :

THÉORÈME 2. *Soient S un espace analytique, X un espace analytique au-dessus de S et \mathcal{E} un faisceau analytique cohérent sur X .*

Il existe un espace analytique $H_S(\mathcal{E})$ au-dessus de S et un faisceau quotient $\mathcal{R}_S(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}_{H_S(\mathcal{E})}$ jouissant de la propriété universelle suivante :

(i) $\mathcal{R}_S(\mathcal{E})$ est $H_S(\mathcal{E})$ -propre et $H_S(\mathcal{E})$ -plat

(ii) *Pour tout espace analytique Z au-dessus de S et tout faisceau quotient Z -propre et Z -plat \mathcal{F} de \mathcal{E}_Z , il existe un S -morphisme et un seul $f : Z \rightarrow H_S(\mathcal{E})$ tel que :*

$$(f \times_S I_X)^* \mathcal{R}_S(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$$

§ 2. Construction pour tout quotient \mathcal{F} de \mathcal{E} d'un sous-espace T de S universel.

PROPOSITION 1. *Soient $\varphi: X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces analytiques et \mathcal{E} un faisceau analytique cohérent sur X , S -propre et S -plat.*

Soit \mathcal{F} un faisceau analytique cohérent sur X , quotient de \mathcal{E} . Il existe un sous-espace T de S tel que :

(i) $\mathcal{E}_T = \mathcal{F}_T$

(ii) *Tout morphisme d'espaces analytiques $\psi: Z \rightarrow S$, tel que $\mathcal{E}_Z = \mathcal{F}_Z$, se factorise de manière unique à travers T .*

REMARQUE 1. L'ensemble sous-jacent à T est l'ensemble des points $s \in S$ tels que $\mathcal{E}_{\{s\}} = \mathcal{F}_{\{s\}}$.

La démonstration de la proposition 1 se fait en trois pas :

Premier pas. Soient S un espace analytique, U un ouvert de \mathbb{C}^n et (s_0, x_0) un point de $S \times U$. Soient \mathcal{E} et \mathcal{F} deux faisceaux analytiques cohérents sur $S \times U$ tels que \mathcal{E} soit S -plat et que \mathcal{F} soit un quotient de \mathcal{E} .

En restreignant au besoin $S \times U$, on se donne un nombre fini de sections $(g_i)_{i \in \{1, \dots, r\}}$ de \mathcal{E} au dessus de $S \times U$ de sorte que \mathcal{F} soit le quotient de \mathcal{E} par le sous- $\mathcal{O}_{S \times U}$ -module de \mathcal{E} engendré par ces sections.

Soit $K \subset U$ un polycylindre $\mathcal{E}_{\{s_0\}}$ -privilegié tel que $x_0 \in \overset{\circ}{K}$. D'après « Platitude et Privilège » on peut supposer, quitte à rétrécir S , que K est $\mathcal{E}_{\{s\}}$ -privilegié pour tout $s \in S$.

LEMME 1. *Soit T le sous-espace analytique de S défini par les équations:*

$$\alpha(g_i) = 0 \quad i = 1, \dots, r.$$

Alors :

(i) $\mathcal{E}_T = \mathcal{F}_T$ au-dessus de $T \times \overset{\circ}{K}$

(ii) *Tout morphisme d'espaces analytiques $\psi: Z \rightarrow S$ tel que $\mathcal{E}_Z = \mathcal{F}_Z$ se factorise de manière unique à travers T .*

DÉMONSTRATION :

(i) Il suffit de montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ $g_{i,T}$ est nulle sur $T \times \overset{\circ}{K}$; or $\alpha(g_i)|_T = 0, i = 1, \dots, r$, par définition de T , d'où l'assertion d'après le diagramme (1) du § 1.

(ii) On doit montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $\alpha(g_i) \circ \psi = 0$, ce qui résulte de la commutativité du diagramme (2) du § 1 et du fait que, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, g_{iZ} étant nulle sur $Z \times U$, $\alpha(g_{iZ}) = 0$.

L'unicité de la factorisation est évidente du fait que $T \rightarrow S$ est un monomorphisme.

2ème pas. Soient $\varphi: X \rightarrow S$ un morphisme propre d'espaces analytiques et \mathcal{C} un faisceau analytique cohérent sur X . On appelle armure \mathcal{C} -privilegiée de φ la donnée

- (i) d'un ouvert Ω de S
- (ii) d'un ensemble fini d'indices I
- (iii) Pour tout $i \in I$, d'un morphisme $\alpha_i: V_i \rightarrow \Omega \times U_i$ (où V_i est un ouvert de X au-dessus de Ω et U_i un ouvert de \mathbb{C}^{n_i} , α_i identifiant V_i à un sous-espace fermé de $\Omega \times U_i$) tel que :

$$\begin{array}{ccc}
 & \alpha_i & \\
 & \longrightarrow & \\
 \varphi|_{V_i} & & \Omega \times U_i \\
 & \searrow & \text{pr}_1 \\
 & \Omega & \\
 & \swarrow & \\
 & &
 \end{array}
 \quad \text{commut.}$$

- (iv) Pour tout $i \in I$, un polycylindre $K_i \subset U_i$ tel que :

$$\varphi^{-1}(\Omega) = \bigcup_{i \in I} \alpha_i^{-1}(\Omega \times \overset{\circ}{K}_i)$$

et

$$\forall s \in \Omega \quad K_i \text{ est } \mathcal{C}_{i,s}\text{-privilegié} \quad (\mathcal{C}_i = \alpha_{i*} \mathcal{C}|_{V_i}).$$

On déduit de Platitude et Privilège que, pour tout $s \in S$, il existe une armure \mathcal{C} -privilegiée $(\Omega, I, (\alpha_i)_{i \in I}, (K_i)_{i \in I})$ de φ telle que $s \in \Omega$.

LEMME 2. Soit $\varphi: X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces analytiques. Soient \mathcal{C} et \mathcal{F} deux faisceaux analytiques cohérents sur X tels que \mathcal{C} soit S -propre et S -plat et que \mathcal{F} soit un quotient de \mathcal{C} . Soit s un point de S .

Il existe un voisinage ouvert Ω de s dans S et un sous-espace fermé T de Ω tel que :

- (i) $\mathcal{C}_T = \mathcal{F}_T$
- (ii) Tout morphisme d'espaces analytiques $Z \rightarrow \Omega$ tel que $\mathcal{C}_Z = \mathcal{F}_Z$ se factorise de manière unique à travers T .

On peut supposer $X = \text{supp } \mathcal{C}$. Soit $(\Omega, I, (\alpha_i)_{i \in I}, (K_i)_{i \in I})$ une armure \mathcal{C} -privilegiée de φ . Quitte à restreindre Ω , pour tout $i \in I$, il existe d'après le lemme 1, un sous-espace fermé T_i de Ω passant par s et tel que :

(i) $\forall i \in I \quad \mathcal{E}_i|_{T_i} = \mathcal{F}_i|_{T_i}$ au-dessus de $T_i \times \overset{\circ}{K}_i$

(ii) Tout morphisme $Z \rightarrow \Omega$ tel que $\mathcal{E}_i|_Z = \mathcal{F}_i|_Z$ se factorise de manière unique à travers T_i .

Soit $T = \bigcap_{i \in I} T_i$, c'est le sous-espace cherché.

3ème pas. Démonstration de la proposition 1 :

Pour tout $s \in S$, on a montré l'existence d'un voisinage ouvert Ω_s de s dans S et d'un sous-espace analytique fermé T_s de Ω_s , solution au-dessus de Ω_s du problème universel énoncé dans la proposition 1. D'après l'unicité d'une telle solution, les sous-espaces $(T_s)_{s \in S}$ de S se recollent en un sous-espace fermé T de S , solution du même problème universel au-dessus de S .

§ 3. L'espace $H(\mathcal{F})$ quand \mathcal{F} est un quotient de \mathcal{E} (4).

PROPOSITION 2. Soient X un espace analytique, \mathcal{E} et \mathcal{F} deux faisceaux analytiques cohérents sur X tels que \mathcal{F} soit quotient de \mathcal{E} . Le morphisme canonique $H(\mathcal{F}) \rightarrow H(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{R}(\mathcal{F}) = \mathcal{R}(\mathcal{E})_{H(\mathcal{F})}$ est un plongement fermé.

Notons $p: H(\mathcal{E}) \times X \rightarrow X$ la 2^{ème} projection. Soit \mathcal{G} le faisceau analytique cohérent sur $H(\mathcal{E}) \times X$, somme amalgamée de $p^*\mathcal{F}$ et $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ au-dessus de $p^*\mathcal{E}$, relativement aux deux épimorphismes de $\mathcal{O}_{H(\mathcal{E}) \times X}$ -modules $p^*\mathcal{E} \rightarrow p^*\mathcal{F}$ et $p^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{E})$; \mathcal{G} est un quotient de $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ et on a le diagramme commutatif :

$$(3) \quad \begin{array}{ccccc} p^* \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{R}(\mathcal{E}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ p^* \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & \end{array}$$

Le faisceau $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ étant propre et plat sur $H(\mathcal{E})$, il existe d'après la proposition 1, un sous-espace fermé T de $H(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{R}(\mathcal{E})_T = \mathcal{G}_T$ et universel pour cette propriété. Montrons que $(T, \mathcal{R}(\mathcal{E})_T) \approx (H(\mathcal{F}), \mathcal{R}(\mathcal{F}))$.

Soit Z un espace analytique, $q: Z \times X \rightarrow X$ la 2^{ème} projection et \mathcal{G}' un faisceau analytique cohérent sur $Z \times X$, quotient de $q^*\mathcal{F}$, Z -propre et

(4) Les résultats de ce § ne sont pas utilisés dans la suite.

Z-plat. Puisque \mathcal{F} est quotient de \mathcal{E} , le faisceau \mathcal{G}' est quotient de $q^*\mathcal{E}$ et il existe un morphisme unique $\psi : Z \rightarrow H(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{R}(\mathcal{E})_Z = \mathcal{G}'$. Montrons que $\mathcal{G}_Z = \mathcal{G}'$.

Le diagramme (3) donne par changement de base le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & q^* & \mathcal{E} & \xrightarrow{j} & \mathcal{G}' & \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow j' & & & \downarrow k & \\
 & & q^* & \mathcal{F} & \xrightarrow{k'} & \mathcal{G}_Z & \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & \downarrow & \\
 & & 0 & & & 0 &
 \end{array}$$

Le morphisme canonique $h : q^*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}'$ vérifiant $h \circ j' = j$, il existe un morphisme unique $l : \mathcal{G}_Z \rightarrow \mathcal{G}'$ tel que $l \circ k = I_{\mathcal{G}'}$ et $l \circ k' = h$; donc k est un isomorphisme.

Puisque $\mathcal{R}(\mathcal{E})_Z = \mathcal{G}_Z$, ψ se factorise de manière unique à travers T et par construction $(\mathcal{R}(\mathcal{E})_T)_Z = \mathcal{R}(\mathcal{E})_Z = \mathcal{G}'$.

— Le corollaire suivant donne une forme explicite de l'espace T de la proposition 1 et montre l'équivalence entre les proposition 1 et 2.

Avec les notations et hypothèses de la proposition 1, on remarque tout d'abord l'existence d'un morphisme unique $\varrho : S \rightarrow H(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{R}(\mathcal{E})_S = \mathcal{E}$ (après identification de X à un sous-espace fermé de $S \times X$ à l'aide de $(\varphi, I_X) : X \rightarrow S \times X$). On peut donc former $S \times_{H(\mathcal{E})} H(\mathcal{F})$, lequel s'identifie par la 1^{ère} projection à un sous-espace fermé de S .

COROLLAIRE. *Les notations étant celles de la proposition 1 :*

$$T \approx S \times_{H(\mathcal{E})} H(\mathcal{F}).$$

Il suffit de vérifier que $S \times_{H(\mathcal{E})} H(\mathcal{F})$ possède la propriété universelle de T .

§ 4. **Démonstration du Théorème 2.**

Notons φ le morphisme $X \rightarrow S$ et considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 & S \times H(\mathcal{E}) \times X & \\
 \swarrow l & & \searrow \text{pr}_{23} \\
 H(\mathcal{E}) \times X & \xrightarrow{I_{H(\mathcal{E})} \times X} & H(\mathcal{E}) \times X \xrightarrow{\mathcal{R}(\mathcal{E})}
 \end{array}$$

où ι désigne le plongement fermé déduit de $(\varphi, I_X): X \rightarrow S \times X$. Le faisceau $pr_{23}^* \mathcal{R}(\mathcal{E})$ est propre et plat sur $S \times H(\mathcal{E})$ et $\iota_* \mathcal{R}(\mathcal{E})$ est un quotient de $pr_{23}^* \mathcal{R}(\mathcal{E})$. D'après la proposition 1, il existe donc un sous-espace T de $S \times H(\mathcal{E})$ tel que $(pr_{23}^* \mathcal{R}(\mathcal{E}))_T = (\iota_* \mathcal{R}(\mathcal{E}))_T$ et universel pour cette propriété. Le $\mathcal{O}_{T \times_S X}$ -module $(\iota_* \mathcal{R}(\mathcal{E}))_T$ a son support dans $T \times_S X$ et est propre et plat sur T . Montrons que $(T, \iota_* (\mathcal{R}(\mathcal{E}))_T)$ est solution du problème universel énoncé dans le théorème.

Soit $\psi: Z \rightarrow S$ un morphisme et \mathcal{F} un faisceau analytique cohérent sur $Z \times_S X$, quotient de \mathcal{C}_Z , propre et plat sur Z . Montrons qu'il existe un S -morphisme unique $f: Z \rightarrow T$ tel que $(f \times_S I_X)^* (\iota_* \mathcal{R}(\mathcal{E}))_T = \mathcal{F}$.

Du plongement canonique $Z \times_S X \rightarrow Z \times X$, on déduit l'existence d'un morphisme unique $\theta: Z \rightarrow H(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{R}(\mathcal{E})_Z = \mathcal{F}$, d'où un S -morphisme $g = (\psi, \theta): Z \rightarrow S \times H(\mathcal{E})$. Il nous suffit de montrer que :

$$(g \times I_X)^* (\iota_* \mathcal{R}(\mathcal{E})) = (g \times I_X)^* (pr_{23}^* \mathcal{R}(\mathcal{E})) = \mathcal{F}.$$

On déduit du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z \times X & \xrightarrow{g \times I_X} & S \times H(\mathcal{E}) \times X \\ & \searrow \theta \times I_X & \downarrow pr_{23} \\ & & H(\mathcal{E}) \times X \end{array}$$

que $((g \times I_X)^* (pr_{23}^* \mathcal{R}(\mathcal{E}))) = (\theta \times I_X)^* \mathcal{R}(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$.

Le faisceau $\iota_* \mathcal{R}(\mathcal{E})$ ayant son support dans $\iota(H(\mathcal{E}) \times X)$, on en déduit que $(g \times I_X)^* (\iota_* \mathcal{R}(\mathcal{E}))$ a son support dans $Z \times_S X$, en effet :

$$\begin{aligned} Z \times X \times_{S \times H(\mathcal{E}) \times X} H(\mathcal{E}) \times X &\approx Z \times_{S \times H(\mathcal{E})} S \times H(\mathcal{E}) \times X \times_{S \times H(\mathcal{E}) \times X} H(\mathcal{E}) \times X \\ &\approx Z \times_{S \times H(\mathcal{E})} H(\mathcal{E}) \times X \approx Z \times_S X. \end{aligned}$$

On déduit alors du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z \times_S X & \xrightarrow{\theta \times I_X} & H(\mathcal{E}) \times X \\ g \times I_X \downarrow & & \swarrow \iota \\ S \times H(\mathcal{E}) \times X & & \end{array}$$

que $(g \times I_X)^* (\iota_* \mathcal{R}(\mathcal{E})) = (\theta \times I_X)^* \mathcal{R}(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$. Le théorème est démontré.

§ 5. **Complements.****REMARQUE.**

1. La fibre de $H_S(\mathcal{C})$ au point $s \in S$ s'identifie à l'espace $H(\mathcal{C}_{\{s\}})$.

En particulier l'ensemble sous-jacent à $H_S(\mathcal{C})$ est la somme disjointe des ensembles sous-jacents aux $H(\mathcal{C}_{\{s\}})$;

$$|H_S(\mathcal{C})| = \bigsqcup_{s \in S} |H(\mathcal{C}_{\{s\}})|$$

2. Si \mathcal{F} est un faisceau analytique cohérent quotient de \mathcal{C} , on démontre, comme dans § 2 proposition 2, que l'on a un plongement fermé $H_S(\mathcal{F}) \rightarrow H_S(\mathcal{C})$ tel que $\mathcal{R}_S(\mathcal{F}) = \mathcal{R}_S(\mathcal{C})_{H_S(\mathcal{F})}$. En fait :

$$H_S(\mathcal{F}) = S \times H(\mathcal{F}) \times_{S \times H(\mathcal{C})} H_S(\mathcal{C}).$$

3. Soit $S' \rightarrow S$ un morphisme d'espaces analytiques ;

$$H_{S'}(\mathcal{C}_{S'}) = S' \times_S H_S(\mathcal{C}).$$

Au faisceau nul sur X , considéré comme quotient de \mathcal{C} , est associé un point simple isolé, de $H(\mathcal{C})$; c'est le point $0 \in H(\mathcal{C})$ tel que $\mathcal{R}(\mathcal{C})(0) = 0$. En effet, il résulte de la proposition 1 (§ 2) et du fait que $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ est $H(\mathcal{C})$ -propre, que 0 est un point isolé. C'est un point simple car pour tout espace analytique Z , il y a un seul morphisme $Z \rightarrow \{0\}$, celui associé au faisceau nul sur $Z \times X$.

Notons

$$H^*(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}) - \{0\}, \quad \mathcal{R}^*(\mathcal{C}) = \mathcal{R}(\mathcal{C})_{H^*(\mathcal{C})}$$

et

$$H_S^*(\mathcal{C}) = H_S(\mathcal{C}) \cap S \times H^*(\mathcal{C}).$$

On a :

$$H(\mathcal{C}) = H^*(\mathcal{C}) \bigsqcup \{0\} \quad \text{et} \quad H_S(\mathcal{C}) = H_S^*(\mathcal{C}) \bigsqcup S \times \{0\}.$$

PROPOSITION. *Le morphisme $j : H_S^*(\mathcal{C}) \rightarrow H^*(\mathcal{C})$ obtenu en composant :*

$$H_S^*(\mathcal{C}) \rightarrow S \times H^*(\mathcal{C}) \xrightarrow{pr_2} H^*(\mathcal{C})$$

est un plongement fermé.

Posons $T = H_S^*(\mathcal{E})$ et ${}^c\mathcal{R} = \mathcal{R}_S(\mathcal{E})_T$. On a $T \times_{S \times H^*(\mathcal{E})} H^*(\mathcal{E}) \times X = T \times_S X$, donc $T \times_S X \xrightarrow{i} H^*(\mathcal{E}) \times X$ est un plongement fermé et $\iota_* \mathcal{R}$ est un quotient de $\mathcal{R}^*(\mathcal{E})$. D'après la proposition 1, il existe un sous-espace, fermé T' de $H^*(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{R}^*(\mathcal{E})_{T'} = \mathcal{R}_{T'}$ et universel pour cette propriété.

Comme $\mathcal{R}^*(\mathcal{E})_T = \mathcal{R}_T = \mathcal{R}$, le morphisme j se factorise de manière unique à travers T' ; soit $j = i \circ h : T \xrightarrow{h} T' \xrightarrow{i} H^*(\mathcal{E})$. Montrons que h est un isomorphisme.

L'application continue h_0 sous-jacente à h est bijective d'après la remarque 1 ci-dessus. Montrons que h_0 est propre; cela résulte du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \text{supp } \mathcal{R} & \xrightarrow{i} & \text{supp } \mathcal{R}^*(\mathcal{E}) \\ \text{surjection } \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\ T & \xrightarrow{h_0} & H^*(\mathcal{E}) \end{array}$$

et du fait que $\mathcal{R}^*(\mathcal{E})$ est $H^*(\mathcal{E})$ -propre. L'application h_0 est donc un homéomorphisme.

Il reste à montrer que le morphisme de faisceaux $h_1 : \mathcal{O}_{T'} \rightarrow h_{0*} \mathcal{O}_T$, défini par h est un isomorphisme de faisceaux d'algèbres.

De la suite de morphismes d'espaces analytiques :

$$T \times X \xrightarrow{h \times I_X} T' \times X \xrightarrow{i \times I_X} H^*(\mathcal{E}) \times X$$

on déduit la suite d'homomorphismes de $\mathcal{O}_{H^*(\mathcal{E})}$ -modules :

$$\iota_* \mathcal{R} \xrightarrow{\tilde{i}} (i \times I_X)_* \mathcal{R}^*(\mathcal{E})_{T'} \xrightarrow{\tilde{h}} \iota_* \mathcal{R}.$$

Comme $i \times I_X$ est un plongement fermé, l'homomorphisme \tilde{i} est un épimorphisme; de plus $\tilde{h} \circ \tilde{i} = I_{\mathcal{R}}$, par définition de h ; Donc \tilde{h} et \tilde{i} sont deux isomorphismes réciproques de $\mathcal{O}_{H^*(\mathcal{E})}$ -modules. On déduit alors du fait que T' (resp. T) est un sous espace de $H^*(\mathcal{E})$ (resp. $S \times H^*(\mathcal{E})$) que h_1 est un isomorphisme de faisceaux d'algèbres.

[1] A. DOUADY. *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donnée*. Ann. Inst. Fourier Grenoble, 16, 1 (1966), 1-95.