ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SALVATORE CIAMPA

Topologie e funzioni reali semicontinue

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 22, nº 1 (1968), p. 133-158

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1968_3_22_1_133_0>

TOPOLOGIE E FUNZIONI REALI SEMICONTINUE

di SALVATORE CIAMPA [1] [2]

1. Notazioni, Introduzione, Riassunto.

1.1. In tutto questo lavoro saranno adoperate le seguenti notazioni:

se X ed Y sono insiemi, $X - Y$ indica sempre il complementare di Y rispetto ad X;

R indica il corpo ordinato dei numeri reali, I l'intervallo $[0, 1] = \{a : 0 \leq a \leq 1\}$, N l'insieme ordinato dei numeri interi positivi;

gli spazi topologici sono indicati con una coppia (L, λ) dove L è l'insieme dei punti e λ è la famiglia di tutti gli insiemi aperti; le topologie indotte da λ sui sottoinsiemi di L sono indicate con la stessa lettera λ;

ϱ indica la topologia euclidea su R, ϱ' indica la topologia su R costituita da R stesso, dall'insieme vuoto e da tutti gli intervalli $\{a : a > h\}$ per ogni $h \in R$;

funzione reale continua definita su uno spazio topologico (L, λ) significa un'applicazione di L in R continua nelle rispettive topologie λ e ϱ; quando su R si considera la topologia ϱ', si dice funzione reale ϱ'-continua;

fissato uno spazio topologico (L, λ), una topologia μ su un insieme M dicesi (L, λ) *generata per continuità* dalla famiglia $\mathcal{J}$ di applicazioni di M in L quando μ è la meno fine topologia nella quale tutte le applicazioni della famiglia $\mathcal{J}$ risultano continue: si dice allora che la topologia μ è (L, λ)-*generabile per continuità*; l'indicazione dello spazio (L, λ) viene omessa quando si tratta dello spazio (R, ϱ);

se (L, λ) è uno spazio topologico, con L/λ^0 viene indicato l'insieme quoziente di L per la relazione «*due punti sono equivalenti quando hanno la stessa chiusura nella topologia λ*», munito della topologia quoziente.

Pervenuto alla Redazione il 19 Ottobre 1967.

[1] Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 9 del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R. (anno 1967/68).

[2] I risultati di questo lavoro sono stati comunicati durante l'VIII Congresso Naz. dell'Unione Matemat. Ital (Trieste 1967).

Altre notazioni più particolari saranno introdotte nei paragrafi successivi.

Salvo avviso contrario, la terminologia adoperata è quella usata nel noto trattato di Kelley [5].

1.2. Fissato un insieme M ed uno spazio topologico (L, λ), lo studio delle relazioni tra le topologie μ su M e le corrispondenti famiglie $\mathcal{C}(\mu)$ di tutte le applicazioni continue di (M, μ) in (L, λ) costituisce uno dei problemi fondamentali della topologia, avendo particolare importanza il caso in cui lo spazio fissato coincida con (R, ϱ).

Partendo dai seguenti noti fatti (i) la famiglia $\mathcal{C}(\mu)$ è determinata, come è ovvio, dalla topologia μ; (ii) l'insieme $\mathcal{T}(\mathcal{C}, \mu)$ di tutte le topologie sull'insieme M per le quali la famiglia di tutte le applicazioni continue nello spazio (L, λ) coincide con $\mathcal{C}(\mu)$ non sempre contiene soltanto μ; (iii) nell'insieme $\mathcal{T}(\mathcal{C}, \mu)$ vi è una topologia minima (cioè meno fine di tutte le altre topologie appartenenti a $\mathcal{T}(\mathcal{C}, \mu)$) e questa, naturalmente, può non essere μ; (iv) esistono certamente topologie su M che possono essere (L, λ)-generate per continuità; si possono considerare le questioni seguenti:

(I) assegnati lo spazio topologico (L, λ) e l'insieme M, determinare quali topologie su M risultano (L, λ)-generabili e quindi cercare gli spazi (L, λ) *migliori* nel senso che vaste classi di topologie su M risultano (L, λ)-generabili per continuità;

(II) sapere quando una topologia su M è determinata dalla famiglia $\mathcal{C}$ di tutte le sue applicazioni continue nello spazio (L, λ), nel senso che essa è l'unica topologia su M che ammette $\mathcal{C}$ come famiglia di tutte le applicazioni continue in (L, λ).

1.2.1. Il problema (I), nel caso in cui lo spazio assegnato sia (R, ϱ) è risolto, come è noto, dal teorema seguente (3):

Per ogni topologia μ sull'insieme M le proposizioni seguenti sono equivalenti

(a) *μ è una topologia completamente regolare* (cioè, per ogni insieme X chiuso in (M, μ) e per ogni $x \in M - X$ esiste una funzione reale continua su (M, μ) che si annulla per ogni $y \in X$ ma non si annulla in x);

(b) *la topologia μ è generabile per continuità;*

(c) *μ è una topologia uniformizzabile;*

(d) *la topologia μ può essere generata da una famiglia uniforme di ricoprimenti di M;*

(3) Vedere, per esempio, [5] ch. 4 n. 7, ch. 6 nn. 15, 16, 17; [3] nn. 3.6, 3.7, 15. 6; [4] n. 1.15; [1] § 1.

(*e*) *la topologia* μ *può essere generata da una famiglia di pseudometriche in* M;

(*f*) *la topologia* μ *è generata per continuità dalla famiglia di tutte le funzioni reali continue definite sullo spazio* (M, μ);

(*g*) *lo spazio quoziente* M/μ^0 *è* (*omeomorfo ad*) *un sottospazio di uno spazio compatto di Hausdorff.*

1.2.2. Una questione analoga al problema (I) è stata considerata da Tognoli [10]: egli ha provato che se lo spazio fissato (L, λ) contiene un sottospazio costituito da due punti dei quali, nella topologia indotta, uno soltanto costituisce un insieme chiuso, allora, ogni topologia su M risulta generata dalla famiglia $\mathcal{J}$ di tutte le applicazioni continue definite su sottospazi di (M, μ) a valori nello spazio (L, λ) nel senso che se $a \in M$, $A \subset M$, allora $a \in \bar{A}$ se e solo se per ogni funzione $f \in J$ definita sull'insieme $A \cup \{a\}$, risulta $f(a) \in \overline{f(A)}$.

1.2.3. Nei riguardi del problema (II), dal teorema citato in 1.2.1. segue che nell'insieme di tutte le topologie uniformizzabili su un insieme M ne esiste al più una per cui la famiglia di tutte le funzioni reali continue coincide con un'assegnata famiglia di funzioni reali definite in M.

1.3. In questo lavoro si dà una completa soluzione alla seconda parte della questione (I) ed alla questione (II) partendo dalle semplici constatazioni seguenti (i) sebbene non in tutti gli spazi topologici esistono funzioni reali continue in quantità tale da esser sufficienti a distinguere gli insiemi chiusi dai punti che ad essi non appartengono, tuttavia in ogni spazio topologico questo è possibile se si considerano funzioni reali semicontinue (inferiormente, per esempio); (ii) per le funzioni reali definite in uno spazio (L, λ), la semicontinuità inferiore coincide con la ϱ'-continuità.

Più precisamente, ed inoltre, proveremo che:

A. *Per ogni topologia* λ *sull'insieme* L *le proposizioni seguenti sono equivalenti* (cfr. nn. 2.3. e 3.4.):

A.1. *esiste una famiglia* $\mathcal{J}$ *di funzioni reali definite in* L *tale che la topologia* λ *risulta la meno fine tra quelle che rendono semicontinue inferiormente tutte le funzioni della famiglia* $\mathcal{J}$;

A.2. *per ogni* $x \in L$ *e per ogni suo intorno* Y, *esiste una funzione* $f\colon L \to I$, *semicontinua inferiormente, tale che* $f(x) \neq 0$ *mentre per ogni* $y \notin Y$, $f(y) = 0$;

A.3. *la topologia* λ *può essere indotta da una quasiuniformità* (intendendo con ciò una uniformità senza la proprietà che ogni suo elemento ne contiene uno simmetrico);

A.4. *la topologia λ può essere generata da una famiglia di pseudometriche asimmetriche* (per le quali cioè non sempre accade che $d(x, y) = d(y, x)$);

A.5. *la topologia λ può essere indotta da una opportuna famiglia di ricoprimenti dell'insieme L* (per le definizioni precise rimandiamo al n. 3.3.);

A.6. *lo spazio quoziente L/λ^0 è omeomorfo ad un sottospazio di uno spazio compatto;*

A.7. *λ è la meno fine topologia su L che rende semicontinue inferiormente tutte le funzioni della famiglia $\mathcal{S}_\lambda$, dove $\mathcal{S}_\lambda$ indica la classe di tutte le funzioni reali semicontinue inferiormente definite sullo spazio (L, λ)*;

A.8. *se Q_λ indica la famiglia di tutte le funzioni di L in $[0, 1]$ semicontinue inferiormente, la topologia λ è la meno fine tra quelle che rendono semicontinue inferiormente tutte le funzioni della famiglia Q_λ.*

B. *Ogni topologia sull'insieme L gode delle proprietà espresse nel teorema A., quindi ogni topologia su L è determinata dalla classe delle sue funzioni reali semicontinue inferiormente* (cfr. nn. 4.2. e 4.3.1) [4].

C. *Due topologie sull'insieme L coincidono se e solo se hanno le stesse funzioni reali semicontinue inferiormente* (cfr. n. 5.2.1.).

2. Spazi generabili per semicontinuità.

2.1. Richiamiamo che una funzione reale definita in uno spazio topologico (L, λ) dicesi semicontinua inferiormente quando per ogni $x \in L$ ed ogni $a \in R$, se $a < f(x)$ allora $f^{-1}(a, +\infty)$ è un intorno di x nella topologia λ. È subito visto che per una funzione reale tale semicontinuità equivale alla ϱ'-continuità. Ne segue che, assegnati un insieme L ed una famiglia $\mathcal{J}$ di funzioni reali definite su L, è sempre possibile parlare della meno fine topologia su L che rende semicontinue inferiormente tutte le funzioni della famiglia $\mathcal{J}$.

Fissato uno spazio topologico (L, λ), si dirà che la topologia λ è *generabile per semicontinuità inferiore* quando esiste una famiglia di funzioni reali $\mathcal{J}$ definite in L tale che λ sia la meno fine topologia su L che rende semicontinua inferiormente ogni funzione di $\mathcal{J}$.

2.2. Alla dimostrazione dei risultati principali di questo n. premettiamo le seguenti osservazioni.

---

[4] Altre proprietà delle topologie connesse con quelle enumerate nella Prop. A. si trovano nei nn. 4.3. e 5..

2.2.1. *Se (L, λ) e (M, μ) sono due spazi topologici, se $\mathcal{J}$ è una famiglia di applicazioni di L in M, le affermazioni seguenti sono equivalenti*

(*a*) *la topologia λ è generata per continuità dalla famiglia $\mathcal{J}$;*

(*b*) *ogni applicazione appartenente alla famiglia $\mathcal{J}$ è continua e per ogni successione (generalizzata* [5]) *σ in L ed ogni $x \in L$ si ha*

σ non converge ad $x \Longrightarrow$ esiste $f \in \mathcal{J}$ in modo che $f \circ \sigma$ non converge verso $f(x)$.

DIMOSTRAZIONE. $(a) \Longrightarrow (b)$ se σ non converge ad x devono esistere $f \in \mathcal{J}$ ed un insieme Y aperto in (M, μ) in modo che $f(x) \in Y$ e inoltre che la successione σ sia frequentemente fuori dell'insieme $f^{-1}(Y)$ (altrimenti σ sarebbe definitivamente in ogni intorno di x); ne segue che la successione $f \circ \sigma$ non può essere definitivamente in Y e quindi che non può convergere verso $f(x)$.

$(b) \Longrightarrow (a)$ se π è un'altra topologia su L nella quale tutte le applicazioni della famiglia $\mathcal{J}$ sono continue, π risulta essere più fine della topologia data λ giacchè se σ è una successione convergente verso x in (L, π), per ogni $f \in \mathcal{J}$ la successione $f \circ \sigma$ converge verso $f(x)$ a causa della continuità di f e quindi, per ipotesi, σ converge ad x anche nella topologia λ: questo prova che ogni insieme chiuso in (L, λ) lo è anche in (L, π).

2.2.2. *Sia (L, λ) uno spazio topologico e sia $\mathcal{J}$ una famiglia di funzioni reali definite in L che genera la topologia λ per semicontinuità inferiore. Per ogni $x \in L$ sia $d_x \colon \mathcal{J} \longrightarrow R$ la funzione definita da $d_x(f) = f(x)$ per ogni $f \in \mathcal{J}$. Allora, per ogni x ed y in L si ha:*

(*a*) *in $\mathcal{J}$ esiste una funzione f tale che $f(x) > f(y)$ se e solo se esiste un intorno di x cui y non appartiene;*

(*b*) *x ed y hanno chiusure distinte se e solo se $d_x \neq d_y$.*

DIMOSTRAZIONE. (*a*) se $f(x) > f(y)$, con $f \in \mathcal{J}$, scelto un numero reale a in modo che $f(x) > a > f(y)$, l'insieme $f^{-1}(a, +\infty)$ è un intorno di x cui y non appartiene; viceversa, se H è un intorno di x per cui $y \notin H$, esistono in $\mathcal{J}$ delle funzioni $f_1, \dots, f_n$ ed in R dei numeri $a_1, \dots, a_n$ in modo che

$$f_i(x) > a_i, \qquad \text{per ogni} \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$y \notin \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(a_i, +\infty),$$

in particolare, esisterà un indice i per cui $f_i(y) \leq a_i < f_i(x)$.

---

(5) Nel senso di Moore-Smith; cfr. anche la nota (15).

(*b*) se $\bar{x} \neq \bar{y}$, non può accadere che $x \in \bar{y}$ ed $y \in \bar{x}$, perciò uno dei due punti ha un intorno che non contiene l'altro e quindi, per quanto si è provato in (*a*), esiste una funzione $f \in \mathcal{J}$ che non assume lo stesso valore in x ed in y, cioè $d_x \neq d_y$; viceversa, se $\bar{x} = \bar{y}$, allora $y \in \bar{x}$ e, per ogni $f \in \mathcal{J}$, si ha

$$f(y) \in f(\bar{x}) \subset \overline{f(x)} = (-\infty, f(x)]$$

ed in definitiva $f(x) \geq f(y)$; scambiando x con y si prova analogamente che, per ogni $f \in \mathcal{J}$, $f(x) \leq f(y)$ e si conclude pertanto che $d_x = d_y$.

2.3. Se (L, λ) è uno spazio topologico, una famiglia $\mathcal{J}$ di funzioni reali definite in L dicesi *separante per la topologia* λ se (i) ogni funzione appartenente a $\mathcal{J}$ è semicontinua inferiormente; (ii) $f(L) \subset I$, per ogni $f \in \mathcal{J}$; (iii) per ogni $x \in L$ ed ogni intorno Y di x, esiste una funzione $f \in \mathcal{J}$ in modo che $f(x) \neq 0$ mentre $f(L - Y) \subset \{0\}$ [6].

2.3.1. TEOREMA: *In ogni spazio topologico* (L, λ) *accade che*

(*a*) *ogni famiglia separante per la topologia* λ *genera la topologia stessa per semicontinuità inferiore;*

(*b*) *se la famiglia di funzioni reali* $\mathcal{J}$ *genera per semicontinuità inferiore la topologia* λ, *esiste una famiglia* $\mathcal{F}$ *separante per la topologia* λ *e si può fare in modo che la cardinalità della famiglia* $\mathcal{F}$ *non superi la più grande tra quella di* N *e quella di* $\mathcal{J}$;

(*c*) *per la topologia* λ *sono fatti equivalenti*

(*c*,1) *l'esistenza di una famiglia separante;*

(*c*,2) *l'essere generabile per semicontinuità inferiore;*

(*c*,3) *l'essere generata per semicontinuità inferiore dalla famiglia* $\mathcal{S}_\lambda$ *di tutte le funzioni reali semicontinue inferiormente definite in* L;

(*c*,4) *l'essere generata per semicontinuità inferiore dalla famiglia* $\mathcal{Q}_\lambda$ *di tutte le funzioni di* L *in* I *semicontinue inferiormente.*

DIMOSTRAZIONE. (*a*) nella topologia λ tutte le funzioni della famiglia $\mathcal{F}$, supposta separante per λ, sono semicontinue inferiormente; inoltre, se σ è una successione (generalizzata) che non converge verso un fissato punto $x \in L$, esiste certamente un intorno Y di x nel quale σ non cade definitivamente. Sia $f \in \mathcal{F}$ una funzione per cui $f(x) \neq 0$ mentre $f(L - Y) = \{0\}$,

---

(6) La condizione (ii) è stata imposta per comodità; la condizione (iii) può, forse più significativamente, scriversi (se $Y \neq L$)

$$f(x) > \sup f(L - Y).$$

allora la successione $f \circ \sigma$ non converge verso $f(x)$ giacchè $f \circ \sigma$ assume frequentemente il valore zero e quindi è frequentemente fuori di ogni intorno aperto $(a, 1]$ di $f(x)$ se $a \in [0, f(x))$. La proposizione 2.2.1. afferma allora che la topologia λ è generata per ϱ'-continuità dalla famiglia $\mathcal{F}$ e l'osservazione (ii) del n. 1.3. permette di concludere la dimostrazione;

(*b*) fissati $x \in L$ ed un intorno Y di x in (L, λ), siano $f_i \in \mathcal{J}$, $a_i \in R$ ($i \in$ insieme finito H) tali che

$$x \in \bigcap_{i \in H} f_i^{-1}(a_i, +\infty) \subset Y;$$

allora, posto

$$g = \min(1, \max(0, \min_{i \in H}(f_i - a_i))),$$

risulta che g è una funzione semicontinua inferiormente di L in $I = [0, 1]$ e che $g(x) \neq 0$ perchè per ogni $i \in H$, $f_i(x) > a_i$, mentre $g(L - Y) \subset \{0\}$ perchè se $y \notin Y$ esiste qualche $i \in H$ per cui $f_i(y) \leq a_i$ e quindi $g(y) = 0$; considerando poi che ci si può limitare a scegliere i numeri a_i tra i razionali, si prova subito l'affermazione relativa alla cardinalità della famiglia di tutte le funzioni g;

(*c*) che (c,1) implica (c,2) è provato in (*a*); che (c,2) implica (c,3) segue dall'analoga, nota, proposizione relativa alla generazione di una topologia per continuità; che (c,4) implica (c,2) è ovvio e che (c,2) implica (c,1) è provato in (*b*); resta da provare che (c,3) implica (c,4): se f è una funzione reale semicontinua inferiormente definita in L, se $a \in R$,

$$f^{-1}(a, +\infty) = g^{-1}(0, 1] \qquad \text{dove} \qquad g = \min(1, \max(0, f - a)),$$

ciò prova, dato che la funzione g assume valori soltanto in I ed è semicontinua inferiormente, che ogni insieme aperto nella topologia generata per semicontinuità inferiore dalla famiglia $\mathcal{S}_\lambda$ è aperto anche nella topologia analogamente generata dalla famiglia $\mathcal{Q}_\lambda$, il viceversa è ovvio essendo $\mathcal{Q}_\lambda \subset \mathcal{S}_\lambda$.

2.3.2. *Se (L, λ) è uno spazio topologico generabile per semicontinuità inferiore, lo spazio quoziente $L\,\lambda^0$ è omeomorfo ad un sottospazio di uno spazio compatto. Quindi ogni spazio topologico in cui vale l'assioma di separazione T_0, se è generabile per semicontinuità inferiore, può pensarsi come un sottospazio di uno spazio compatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{J}$ una famiglia separante per la topologia λ ($\mathcal{J}$ esiste e genera λ per semicontinuità inferiore cfr. n. 2.3.1.) e si consideri l'applicazione $d : (L, \lambda) \to (I, \varrho')^{\mathcal{J}}$ definita ponendo $d_x(f) = f(x)$ per ogni

$x \in L$ ed ogni $f \in \mathcal{J}$. È noto ([5], pag. 116) che l'applicazione d è continua e relativamente aperta (7) quando in $(I, \varrho')^{\mathcal{J}}$ si considera la topologia prodotto. Considerata poi l'applicazione canonica $w : (L, \lambda) \longrightarrow L/\lambda^0$ (che risulta continua, aperta e chiusa giacchè la classe di equivalenza determinata dal punto $x \in L$ è l'intersezione della chiusura di x con l'intersezione di tutti gli intorni di x stesso) si osservi che su ogni classe di equivalenza l'applicazione d risulta costante (per (b) di 2.2.2.) e quindi che è possibile definire un'applicazione $u : L/\lambda^0 \longrightarrow I^{\mathcal{J}}$ ponendo, per ogni $Y \in L/\lambda^0$, $u(Y) = d(w^{-1}(Y))$. Dalle proprietà delle applicazioni d e w si deduce immediatamente che anche l'applicazione u è continua e relativamente aperta; che u sia iniettiva discende dalla propos. 2.2.2.. Per completate la dimostrazione è sufficiente osservare che lo spazio $(I, \varrho')^{\mathcal{J}}$ è compatto perchè (I, ϱ') lo è.

2.3.3. *Sia λ una topologia sull'insieme L generata per semicontinuità inferiore dalla famiglia di funzioni reali J; sia $d : L \longrightarrow R^{\mathcal{J}}$ l'applicazione tale che, per ogni $x \in L$ ed ogni $f \in \mathcal{J}$, $d_x(f) = f(x)$. Allora:*

(a) (L, λ) è uno spazio T_0 se e solo se l'applicazione d è iniettiva (cioè, se la famiglia $\mathcal{J}$ separa i punti);

(b) (L, λ) è uno spazio T_1 se e solo se, per ogni coppia di punti distinti x, y in L, esiste $f \in \mathcal{J}$ in modo che $f(x) > f(y)$;

(c) (L, λ) è uno spazio di Hausdorff se per ogni coppia di punti distinti x, y in L esistono due funzioni f, g in $\mathcal{J}$ ed un numero reale a in modo che

$$a < f(x) \quad e \quad g(y) > \sup g(f^{-1}(a, +\infty)).$$

Il viceversa vale se la famiglia $\mathcal{J}$ è separante.

DIMOSTRAZIONE. (a) segue immediatamente da 2.2.2. (b) avendo presente che la proprietà di separazione T_0 equivale a richiedere che punti distinti abbiano chiusure distinte.

(b) già provato in 2.2.2. (a).

(c) se b è un numero reale tale che

$$g(y) > b > \sup g(f^{-1}(a, +\infty)),$$

allora gli insiemi $f^{-1}(a, +\infty)$ e $g^{-1}(b, +\infty)$ sono aperti disgiunti contenenti rispettivamente x ed y. Se la famiglia $\mathcal{J}$ è separante (vedere nota (6)) e se X è un intorno di x, se $f \in \mathcal{J}$ è tale che $f(x) > \sup f(L - X)$, sce-

---

(7) In altre parole, l'immagine $d(A)$ di un insieme aperto risulta aperta nella topologia relativa su $d(L)$.

gliendo un numero reale a in modo che $f(x) > a > \sup f(L - X)$, l'insieme $f^{-1}(a, +\infty)$ è un intorno di x contenuto in X. Ciò premesso, si considerino gli intorni (aperti) disgiunti X, Y rispettivamente di x ed y, sarà allora possibile trovare in $\mathcal{G}$ una funzione g tale che

$$g(y) > \sup g(\bar{X}) \geq \sup g(f^{-1}(a, +\infty)).$$

3. Quasi-uniformità, quasi-metriche, famiglie quasi-uniformi (8).

3.1. Una *quasi-uniformità* (9) su un insieme L è definita come un filtro di parti del prodotto $L \times L$ avente una base $\mathcal{X}$ con la proprietà: per ogni $X, Y \in \mathcal{X}$ esiste $V \in \mathcal{X}$ in modo che (diagonale di $L \times L) \subset V \circ V \subset X \cap Y$. La quasi-uniformità generata dalla base di filtro $\mathcal{X}$ verrà indicata con $\bar{\mathcal{X}}$; due basi di quasi-uniformità sono *equivalenti* quando generano la stessa quasi-uniformità.

Se $X \subset L \times L$ ed $x \in L$, si definisce, come è usuale, $X(x) = \{y : (x, y) \in X\}$.

Come nel caso delle uniformità (che, ovviamente, sono anche quasi-uniformità), così anche in questa situazione è facile vedere che ogni quasi-uniformità di base $\mathcal{X}$ induce su L una topologia definendo aperti i sottoinsiemi A di L per cui

$$x \in A \Longleftrightarrow \text{esiste } Y \in \mathcal{X} \text{ in modo che } Y(x) \subset A.$$

Ciò equivale ad assumere come base d'intorni nel punto $x \in L$ la famiglia di insiemi $\{Y(x)\}_{Y \in \mathcal{X}}$.

È altresì evidente che la topologia così ottenuta dipende soltanto dal filtro $\bar{\mathcal{X}}$ e non dalla base fissata $\mathcal{X}$.

Una topologia λ sull'insieme L si dirà *quasi-uniformizzabile* quando esiste una quasi-uniformità $\bar{\mathcal{X}}$ la cui topologia indotta coincide con λ.

3.2. Una *quasi-metrica* (10) nell'insieme L è definita come una applicazione $d : L \times L \to R$ con la proprietà: per ogni x, y, t in L, $0 = d(x, x) \leq \leq d(x, y) \leq d(x, t) + d(t, y)$.

---

(8) Questo paragrafo conteneva una seconda parte dedicata allo studio delle nozioni di quasi-uniforme continuità, di successione di Cauchy e di completamento rispetto ad una quasi-uniformità: questa parte è stata soppressa perchè i risultati si trovano, essenzialmente, nel recente lavoro [9]. Nel medesimo lavoro si trova anche la proposizione sulla quasi-metrizzabilità (3.5.3. $(c) \Longrightarrow (f)$).

(9) Questa nozione è stata già introdotta in [6] e si ritrova in [2] p. 66.

(10) Questa nozione si trova già in [8] ed in [2] p. 178.

Anche in questo caso è facile vedere che a partire da una famiglia $\mathcal{D}$ di quasi-metriche si può definire una topologia in L assumendo come sottobase per gli insiemi aperti la famiglia di tutti gli insiemi $\{y: d(x,y) < 1/n\}$ per ogni $x \in L$, ogni $d \in \mathcal{D}$ ed ogni intero positivo n. Risulta così che tale topologia coincide con quella indotta in L dalla quasi-uniformità (generata dalla famiglia $\mathcal{D}$) avente per base la famiglia delle intersezioni finite di insiemi appartenenti alla classe

$$\mathcal{K}_{\mathcal{D}} = \{V \subset L \times L;\ \text{esistono } d \in \mathcal{D},\ n \in N \text{ in modo che } V = d^{-1}[0, 1/n)\}.$$

La quasi-uniformità e la topologia ora definite si dicono *indotte* dalla famiglia $\mathcal{D}$.

Più avanti mostreremo che, viceversa, ogni quasi-uniformità su L è associata nel suddetto modo ad una famiglia di quasi-metriche in L (ved. teor. 3.4.).

Una topologia λ sull'insieme L si dirà *quasi-metrizzabile* se esiste una quasi-metrica in L la cui topologia indotta sia λ.

3.3. Passiamo ora a definire la nozione di famiglia quasi-uniforme di ricoprimenti di un insieme L e ad indicarne i principali legami con le quasi-uniformità.

3.3.1. Richiamiamo che *ricoprimento* di un insieme L è ogni famiglia di parti non vuote di L la cui unione sia L stesso; un ricoprimento α è un *raffinamento* del ricoprimento β quando ogni elemento di α è contenuto in qualche elemento di β. Se α è un ricoprimento di L ed $Y \subset L$ si definisce *stella* di Y relativa al ricoprimento α l'insieme

$$St(Y, \alpha) = \bigcup \{V:\ V \in \alpha \quad \text{e} \quad V \cap Y \neq \varnothing\}.$$

Un ricoprimento α dicesi $*$-*raffinamento* del ricoprimento β quando la famiglia $\{St(Y, \alpha)\}_{Y \in \alpha}$ è un raffinamento di β.

Le definizioni date permettono di asserire che le relazioni di raffinamento e di $*$-raffinamento sono transitive.

Nel seguito, se $\mathcal{C}$ è una famiglia di ricoprimenti dell'insieme L, con $\overline{\mathcal{C}}$ verrà indicata la famiglia di tutti i ricoprimenti di L che hanno qualche raffinamento in $\mathcal{C}$: si dirà che la famiglia $\overline{\mathcal{C}}$ è *generata* dalla famiglia $\mathcal{C}$.

Richiamiamo poi che una famiglia di ricoprimenti dell'insieme L dicesi *uniforme* quando può essere generata da una famiglia $\mathcal{C}$ avente la proprietà: comunque si prendano in $\mathcal{C}$ i ricoprimenti α, β, in $\mathcal{C}$ stessa si può trovare un loro comune $*$-raffinamento.

È noto che definendo per ogni $\beta \in \mathcal{C}$ l'insieme

$$V_\beta = \bigcup_{Y \in \beta} Y \times Y,$$

la famiglia $\mathcal{K} = \{V_\beta\}_{\beta \in \mathcal{C}}$ è base di un filtro che risulta essere una uniformità in L: questa, evidentemente, non dipende dalla scelta della famiglia generatrice $\mathcal{C}$ e si chiama *uniformità indotta* da $\mathcal{C}$ ([11]).

3.3.2. (*a*) Un ricoprimento α di un insieme L lo diremo *puntuale* quando $\alpha = \{Y_x\}_{x \in L}$ e, per ogni $x \in L$, $x \in Y_x \subset L$. Se $\alpha = \{Y_x\}$ e $\beta = \{Z_x\}$ sono due ricoprimenti puntuali di L, scriveremo $\alpha < \beta$ per significare che, per ogni $x \in L$, $Y_x \subset Z_x$. Anche la relazione $<$ ora introdotta risulta transitiva.

Denoteremo poi con $Q(x, \alpha)$ l'insieme $\bigcup \{Y_r : r \in Y_x\}$, mentre con α^0 verrà indicato il ricoprimento (ancora puntuale) costituito dagli insiemi $Q(x, \alpha)$ per ogni $x \in L$.

Se β è un ricoprimento qualsiasi dell'insieme L, con β^+ verrà denotato il ricoprimento puntuale costituito dagli insiemi $St(x, \beta)$, per ogni $x \in L$.

Infine, se α è un ricoprimento puntuale di L ed $x \in L$, denoteremo talvolta con α_x l'elemento di α associato ad x; così $Q(x, \alpha)$ potrà essere indicato con α_x^0.

(*b*) A proposito delle definizioni date è utile tener presente che:

Se α, β, η, σ sono ricoprimenti dell'insieme L ed α e β sono puntuali, allora

(*b*,1) $\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha$ *raffina* β *e* $\alpha^0 < \beta^0$;

(*b*,2) $\alpha < \alpha^0$; $\alpha < \alpha^+$ *e quindi*

$$\alpha^0 < \beta \Longrightarrow \alpha \textit{ raffina } \beta;$$

(*b*,3) *se* α $*$-*raffina* β *in modo che, per ogni* $x \in L$, $St(\alpha_x, \alpha) \subset \beta_x$, *allora* $\alpha^0 < \beta$ *e* $\alpha^+ < \beta$;

(*b*,4) η *raffina* η^+;

(*b*,5) η *raffina* $\sigma \Longrightarrow \eta^+ < \sigma^+$;

(*b*,6) η $*$-*raffina* $\sigma \Longrightarrow (\eta^+)^0 < \sigma^+$ *e* η^+ *raffina* σ.

DIMOSTRAZIONE. (*b*,1) la prima affermazione è ovvia, nei riguardi dell'altra si osservi che

$$Q(x, \alpha) = \bigcup_{r \in \alpha_x} \alpha_r \subset \bigcup_{r \in \alpha_x} \beta_r \subset \bigcup_{r \in \beta_x} \beta_r = Q(x, \beta);$$

([11]) Vedere, per esempio, [5] ch. 6 es. J.

(*b*,2) osservare che $x \in \alpha_x \subset St(x, \alpha) \cap Q(x, \alpha)$;

(*b*,3) osservare che $St(x, \alpha) \subset St(\alpha_x, \alpha) \subset \beta_x$ e che se $r \in \alpha_x$, $\alpha_r \cap \alpha_x \neq \emptyset$ perciò $Q(x, \alpha) \subset St(\alpha_x, \alpha) \subset \beta_x$;

(*b*,4) se $x \in Y \in \eta$ allora $Y \subset St(x, \eta)$;

(*b*,5) se per ogni $Y \in \eta$ si indica con Y' un elemento di σ che lo contiene, si può scrivere

$$St(x, \eta) = \bigcup_{x \in Y \in \eta} Y \subset \bigcup_{x \in Y \in \eta} Y' \subset \bigcup_{x \in Y \in \sigma} Y = St(x, \sigma);$$

(*b*,6) per la prima affermazione osservare che se ad ogni $Y \in \eta$ si associa $Y' \in \sigma$ tale che $St(Y, \eta) \subset Y'$, tenuto presente che $Y \subset Y'$, per ogni fissato $x \in L$ si ha

$$\begin{aligned} Q(x, \eta^+) &= \bigcup \{St(r, \eta) : r \in St(x, \eta)\} = \\ &= \bigcup \{St(Y, \eta) : x \in Y \in \eta\} \subset \\ &\subset \bigcup_{x \in Y \in \eta} Y' \subset St(x, \sigma); \end{aligned}$$

per la seconda affermazione basta tener presente che, fissato $x \in L$, se $x \in Y \in \eta$ e se $Z \in \sigma$ è tale che $St(Y, \eta) \subset Z$, allora risulta anche $St(x, \eta) \subset Z$.

3.3.3. Una famiglia $\mathcal{C}$ di ricoprimenti dell'insieme L sarà detta ***basica*** quando è costituita da ricoprimenti puntuali ed è tale che, per ogni α, β in $\mathcal{C}$, esiste $\eta \in \mathcal{C}$ in modo che $\eta^0 < \alpha$, $\eta^0 < \beta$. Due famiglie basiche di ricoprimenti $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ si dicono *equivalenti* (e si scrive $\mathcal{E} \equiv \mathcal{F}$) quando per ogni $\eta \in \mathcal{E}$ esiste $\sigma \in \mathcal{F}$ in modo che $\sigma < \eta$ e viceversa, per ogni $\alpha \in \mathcal{F}$ esiste $\beta \in \mathcal{E}$ in modo che $\beta < \alpha$.

Si definisce poi *famiglia quasi-uniforme* nell'insieme L una coppia $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ di famiglie di ricoprimenti di L tale che $\mathcal{E}$ sia basica e $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{E}}$. Due famiglie quasi-uniformi $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ ed $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ si dicono *equivalenti* e si scrive $(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \equiv$ $\equiv (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ quando lo sono le famiglie basiche $\mathcal{E}$ e $\mathcal{G}$.

3.3.4. (*a*) *Sia* $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ *una famiglia quasi-uniforme in* L; *per ogni* $\eta \in \mathcal{E}$ *si ponga*

$$V_\eta = \{(x, y) : x \in L,\ y \in Q(x, \eta)\}$$

(cioè, $(x, y) \in V_\eta \iff$ esiste $r \in \eta_x$ in modo che $y \in \eta_r$); *allora la famiglia* $\mathcal{K} = \{V_\eta\}_{\eta \in \mathcal{E}}$ *è una base di filtro in* $L \times L$ *che genera una quasi-uniformità in* L.

Considerando poi la famiglia di tutte le parti A di L per cui

$$x \in A \iff \text{esiste } \eta \in \mathcal{E} \text{ in modo che } Q(x, \eta) \subset A,$$

si ottiene su L una topologia λ che coincide con quella ivi indotta dalla quasi-uniformità di base $\mathcal{K}$.

La quasi-uniformità $\overline{\mathcal{K}}$ e la topologia λ si dicono *indotte* dalla famiglia $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$.

(*b*) ***Siano $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ ed $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ due famiglie quasi-uniformi nell'insieme L: esse sono equivalenti se e solo se inducono in L la stessa quasi-uniformità.***

DIMOSTRAZIONE. (*a*) È ovvio intanto che, essendo $x \in Q(x, \eta)$, la diagonale del prodotto $L \times L$ è contenuta in ogni V_η. Si osservi poi che se $\alpha, \beta \in \mathcal{E}$ e $\alpha^0 < \beta$, allora $V_\alpha \circ V_\alpha \subset V_\beta$: infatti, se (x, y) ed (y, r) sono in V_α, esistono $p \in \alpha_x$ e $q \in \alpha_y$ in modo che $y \in \alpha_p$ ed $r \in \alpha_q$; ma allora, risultando per ogni $t \in L$, $Q(t, \alpha) \subset \beta_t$, si ha $y \in \alpha_p \subset Q(x, \alpha) \subset \beta_x$ ed $r \in \alpha_q \subset Q(y, \alpha) \subset \beta_y$ e questo significa che $(x, r) \in V_\beta$.

Quindi, fissati α, β in $\mathcal{E}$ e scelto $\eta \in \mathcal{E}$ in modo che $\eta^0 < \alpha$ ed $\eta^0 < \beta$, segue che $V_\eta \circ V_\eta \subset V_\alpha \cap V_\beta$ e perciò $\mathcal{K}$ è una base di quasi-uniformità in L.

Per concludere la dimostrazione basta ora osservare che la famiglia λ delle parti A definite nell'enunciato coincide con la famiglia degli aperti della topologia indotta in L dalla quasi-uniformità $\overline{\mathcal{K}}$.

(*b*) Se $\mathcal{E} \equiv \mathcal{G}$, fissato α in $\mathcal{E}$ e scelto β in $\mathcal{G}$ in modo che $\alpha > \beta$, si ha $V_\beta \subset V_\alpha$ perchè

$$Q(x, \beta) = \bigcup_{r \in \beta_x} \beta_r \subset \bigcup_{r \in \beta_x} \alpha_r \subset \bigcup_{r \in \alpha_x} \alpha_r = Q(x, \alpha);$$

il viceversa si prova alla stessa maniera.

Se si suppone ora che le quasi-uniformità $\overline{\mathcal{K}}_{\mathcal{E}}$ e $\overline{\mathcal{K}}_{\mathcal{G}}$ rispettivamente indotte dalle famiglie $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ ed $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ coincidono, fissato α in $\mathcal{E}$ e scelto $\beta \in \mathcal{E}$ in modo che $\alpha > \beta^0$, si trovi $\eta \in \mathcal{G}$ in modo che $V_\eta \subset V_\beta$: in questa situazione si ha allora $\alpha > \beta^0 > \eta^0 > \eta$. Analogamente si prova il viceversa.

3.3.5. (*a*) *Sia $\mathcal{K}$ una base di quasi uniformità nell'insieme L. Per ogni $V \in \mathcal{K}$ si ponga $\beta_V = \{V(x)\}_{x \in L}$: allora, la famiglia di ricoprimenti $\mathcal{E} = \{\beta_V\}_{V \in \mathcal{K}}$ è basica e la quasi-uniformità indotta in L dalla famiglia quasi-uniforme $(\overline{\mathcal{E}}, \mathcal{E})$ coincide con quella generata da $\mathcal{K}$. Coincidono anche le topologie indotte su L rispettivamente dalla quasi-uniformità $\overline{\mathcal{K}}$ e dalla famiglia quasi-uniforme $(\overline{\mathcal{E}}, \mathcal{E})$.*

La famiglia quasi-uniforme $(\overline{\mathcal{E}}, \mathcal{E})$ dicesi *associata* alla quasi-uniformità $\overline{\mathcal{K}}$.

(*b*) *Se* $\mathcal{H}$ *è un'altra base della quasi-uniformità* $\overline{\mathcal{K}}$, *la famiglia quasi-uniforme costruita a partire dalla base* $\mathcal{H}$ *è equivalente alla famiglia* $(\overline{\mathcal{E}}, \mathcal{E})$.

DIMOSTRAZIONE. (*a*) È subito visto che ogni famiglia β_V è un ricoprimento puntuale di L; notiamo poi che se V, Z sono in $\mathcal{K}$ e $V \circ V \subset Z$, allora $\beta_V^0 < \beta_Z$: infatti, se $t \in Q(x, \beta_V)$, esiste $u \in V(x)$ in modo che $t \in V(u)$ e quindi $t \in V \circ V(x) \subset Z(x)$. Ne segue che se $V \in \mathcal{K}$ è scelto in modo che $V \circ V \subset Z \cap Y$, per certi Z ed Y fissati in $\mathcal{K}$, risulta $\beta_V^0 < \beta_Z$ e $\beta_V^0 < \beta_Y$: ciò prova che la famiglia $\mathcal{E}$ è basica.

La quasi-uniformità indotta in L dalla famiglia quasi-uniforme $(\overline{\mathcal{E}}, \mathcal{E})$ ha come base la famiglia $\mathcal{H} = \{Y_V\}_{V \in \mathcal{K}}$ dove

$$Y_V = \{(x, y) : x \in L \quad \text{ed} \quad y \in Q(x, \beta_V)\};$$

inoltre per ogni $V \in \mathcal{K}$ risulta $V \subset Y_V \subset V \circ V$, infatti da $(x, y) \in V$ segue $y \in V(x) \subset Q(x, \beta_V)$ mentre, se $(x, y) \in Y_V$, cioè se $y \in Q(x, \beta_V)$, esiste $t \in V(x)$ in modo che $y \in V(t)$ e quindi $y \in V \circ V(x)$. È subito evidente allora che $\overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{K}}$ e quindi che le topologie rispettivamente indotte su L dalla quasi-uniformità $\overline{\mathcal{K}}$ e dalla famiglia quasi-uniforme $(\overline{\mathcal{E}}, \mathcal{E})$ coincidono.

(*b*) Discende immediatamente dall'osservare che

$$V \subset Z \subset L \times L \Longrightarrow \beta_V < \beta_Z .$$

3 3.6. *Sia* $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ *una famiglia quasi-uniforme nell'insieme* L, *sia* $\mathcal{K}$ *una base della quasi-uniformità da essa indotta. Ogni famiglia quasi-uniforme* $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *associata alla quasi-uniformità* $\overline{\mathcal{K}}$ *è equivalente alla famiglia* $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ *e quindi induce nuovamente la quasi-uniformità* $\overline{\mathcal{K}}$.

DIMOSTRAZIONE. Una famiglia quasi-uniforme $(\overline{\mathcal{H}}, \mathcal{H})$ associata alla quasi-uniformità $\overline{\mathcal{K}}$ è quella per cui

$$\mathcal{H} = \{\alpha_\beta\}_{\beta \in \mathcal{E}} \quad \text{dove} \quad \alpha_\beta = \{V_\beta(x)\}_{x \in L} = \{Q(x, \beta)\}_{x \in L} .$$

Allora, se η, σ sono in $\mathcal{E}$ e $\eta^0 < \sigma$, si ha $\alpha_\eta < \sigma < \alpha_\sigma$ e questo prova che le famiglie basiche $\mathcal{E}$ ed $\mathcal{H}$ (e quindi anche le famiglie quasi-uniformi $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ ed $(\overline{\mathcal{H}}, \mathcal{H})$) sono equivalenti. Se $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ è un'altra famiglia quasi-uniforme associata alla quasi uniformità $\overline{\mathcal{K}}$ anch'essa è equivalente alla famiglia $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ perchè (n. 3.3.5. (*b*)) risulta equivalente alla famiglia $(\overline{\mathcal{H}}, \mathcal{H})$.

L'ultima affermazione discende dal n. 3.3.4. (*b*).

3.3.7. *Se la quasi-uniformità* $\overline{\mathcal{K}}$ *indotta in* L *dalla famiglia quasi-uniforme* $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ *è una uniformità, allora* $\mathcal{C}$ *è una famiglia uniforme di ricoprimenti di* L.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{K} = \{ V_\beta \}_{\beta \in \mathcal{E}}$, $V_\beta = \{ (x, y) : x \in L,\ y \in Q(x, \beta) \}$. Fissato $\alpha \in \mathcal{E}$ siano η, π, σ elementi della famiglia $\mathcal{E}$ tali che $\eta^0 < \alpha$, $\sigma^0 < \eta$, $V_\pi \circ V_\pi^{-1} \subset V_\sigma$. Ne segue allora che $\pi^0 < \sigma^0 < \eta < \eta^0 < \alpha$ (tener presente che $V_\pi \subset V_\sigma$) e che per ogni x ed r in L,

$$Q(x, \pi) \cap Q(r, \pi) \neq \varnothing \Longrightarrow r \in Q(x, \sigma)$$

(questo traduce il fatto che se (x, y) ed (r, y) sono in V_π, allora $(x, r) \in V_\sigma$). Si può allora provare che il ricoprimento π è uno $*$-raffinamento del ricoprimento α risultando

$$St(\pi_x, \pi) = \bigcup \{\pi_r : \pi_r \cap \pi_x \neq \varnothing\} \subset \alpha_x ,$$

infatti, avendo presente che

$$\pi_x \cap \pi_r \neq \varnothing \Longrightarrow Q(x, \pi) \cap Q(r, \pi) \neq \varnothing \Longrightarrow r \in Q(x, \sigma) \subset \eta_x$$

si ha

$$\pi_r \subset Q(r, \pi) \subset Q(r, \sigma) \subset \eta_r \subset Q(x, \eta) \subset \alpha_x .$$

Per concludere la dimostrazione si osservi che, per quanto si è ora provato, fissati α, β in $\mathcal{E}$ e scelto $\eta \in \mathcal{E}$ in modo che sia un raffinamento tanto di α quanto di β (e per questo basta prendere η in modo che $\eta^0 < \alpha$, $\eta^0 < \beta$), è possibile trovare in $\mathcal{E}$ un ricoprimento π che $*$-raffini η e quindi che $*$-raffini tanto α quanto β.

3.3.8. *Sia $\mathcal{C}$ una famiglia uniforme di ricoprimenti dell'insieme L; siano $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ parti di $\mathcal{C}$ tali che $\overline{\mathcal{E}} = \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{C}$. Allora:*

(*a*) *se la famiglia di ricoprimenti $\mathcal{E}$ è basica, la quasi-uniformità $\overline{\mathcal{H}}$ indotta dalla famiglia quasi-uniforme $(\overline{\mathcal{E}}, \mathcal{E})$ è più fine dell'uniformità $\overline{\mathcal{K}}$ indotta dalla famiglia uniforme $\mathcal{C}$ (cioè, $\overline{\mathcal{K}} \subset \overline{\mathcal{H}}$);*

(*b*) *la famiglia $(\mathcal{C}, \mathcal{E}^+)$ è quasi-uniforme e la quasi-uniformità $\overline{\mathcal{J}}$ che essa induce coincide con l'uniformità $\overline{\mathcal{K}}$ indotta dalla famiglia uniforme $\mathcal{C}$;*

(*c*) *le famiglie di ricoprimenti $\mathcal{E}^+$ ed $\mathcal{F}^+$ sono equivalenti e lo sono anche, perciò, le famiglie quasi-uniformi $(\mathcal{C}, \mathcal{E}^+)$, $(\mathcal{C}, \mathcal{F}^+)$.*

DIMOSTRAZIONE. (*a*) sia

$$\mathcal{H} = \{V_\beta\}_{\beta \in \mathcal{E}} \quad \text{dove} \quad V_\beta = \{(x, y) : x \in L,\ y \in Q(x, \beta)\}$$

$$\mathcal{K} = \{W_\beta\}_{\beta \in \mathcal{E}} \quad \text{dove} \quad W_\beta = \bigcup_{x \in L} \beta_x \times \beta_x ;$$

si tratta di provare che ogni W_β contiene qualche V_α. Per questo basta scegliere α in modo che $\alpha^0 < \beta$, giacchè allora risulta $Q(x, \alpha) \subset \beta_x$ e perciò, se $y \in Q(x, \alpha)$, $(x, y) \in \beta_x \times \beta_x$;

(*b*) si osservi dapprima che la famiglia di ricoprimenti $\mathcal{E}^+$ è basica: ogni suo elemento, infatti, è un ricoprimento puntuale ed inoltre, se α, β sono in $\mathcal{E}$ e il ricoprimento $\eta \in \mathcal{E}$ è uno $*$-raffinamento tanto di α quanto di β, allora (n. 3.3.2 (*b*)) $(\eta+)^0 < \beta^+$ e $(\eta^+)^0 < \alpha^+$. Poi, $\overline{\mathcal{E}^+} = \mathcal{C} = \overline{\mathcal{E}}$ giacchè ogni ricoprimento $\beta^+ \in \mathcal{E}^+$ ha un raffinamento in $\mathcal{E}$ (perchè β raffina β^+) e, viceversa, $\alpha^+ \in \mathcal{E}^+$ è un raffinamento di $\beta \in \mathcal{E}$ se α è uno $*$-raffinamento di β (n. 3.3.2. (*b*)). Resta da provare che $\overline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{K}}$: dalla precedente proposizione (*a*) segue che $\overline{\mathcal{K}} \subset \overline{\mathcal{J}}$ (perchè $\mathcal{E}^+$ è una famiglia basica che genera $\mathcal{C}$); il viceversa si prova tenendo presente che, per ogni $x \in L$ ed ogni $\beta \in \mathcal{E}$,

$$\beta_x \subset \beta_x^+ = St(x, \beta)$$

e quindi

$$W_\beta(x) = St(x, \beta) \subset Q(x, \beta^+) = V_{\beta+}(x);$$

(*c*) le famiglie $\mathcal{E}^+$ ed $\mathcal{F}^+$ sono equivalenti perchè le famiglie $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ e $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ inducono in L la stessa quasi-uniformità per quanto si è provato nella precedente proposizione (*b*) (cfr. 3.3.4. (*b*)).

3.3.9. (*a*) Mostreremo ora con un esempio che su un insieme L possono esistere famiglie quasi-uniformi non equivalenti $(\overline{\mathcal{E}}, \mathcal{E})$ ed $(\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$ che inducono la stessa topologia e tali che $\overline{\mathcal{E}} = \overline{\mathcal{F}}$.

Si consideri lo spazio topologico (I, ϱ'); per ogni $x \in I$ e per ogni intero $n \in N$, con $n > 1$, si definisca

$$\alpha_{n,x} = \left[\max\left(0, x - \frac{1}{n}\right), 1\right]; \quad \beta_{n,x} = \left[x - \frac{x}{n}, 1\right]$$

e sia $\mathcal{E}$ la famiglia dei ricoprimenti $\{\alpha_n\}_{n>1}$ ed $\mathcal{F}$ la famiglia dei ricoprimenti $\{\beta_n\}_{n>1}$.

Poichè, per ogni $x \in I$ ed ogni intero $n > 1$, si ha $\alpha_{n,x} \subset \beta_{n,0}$ e $\beta_{n,x} \subset \alpha_{n,y}$ se $2ny = 1$, resta provato che ogni ricoprimento di I che abbia un raffinamento in $\mathcal{E}$ lo ha anche in $\mathcal{F}$ e viceversa, cioè $\overline{\mathcal{E}} = \overline{\mathcal{F}}$.

La famiglia quasi-uniforme $(\overline{\mathcal{E}}, \mathcal{E})$ induce una topologia che nel punto $x \in I$ ha come base d'intorni la famiglia di insiemi

$$\{Q(x, \alpha_n)\}_{n>1} = \left\{\left[\max\left(0, x - \frac{2}{n}\right), 1\right]\right\}_{n>1};$$

analogamente, una base d'intorni in x nella topologia indotta su I dalla famiglia quasi-uniforme $(\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$ è

$$\{Q(x, \beta_n)\}_{n>1} = \left\{\left[x\left(1-\frac{1}{n}\right)^2, 1\right]\right\}_{n>1}$$

ed è evidente che queste basi d'intorni sono equivalenti entrambe alla famiglia degli intorni di x nella topologia ϱ', cioè

$$[0, 1] \text{ e } \{(a, 1]\}_{0 \leq a < x} .$$

Infine, le famiglie basiche $\mathcal{E}$ ed $\mathcal{F}$ non sono equivalenti perchè, fissato n, nessun intero p può esser tale che $\beta_n > \alpha_p$ ($\alpha_{p,x}$ non è contenuto in $\beta_{n,x}$ se $0 < x < n/p$).

(*b*) La proposizione provata nel precedente n. 3.3.8., alla luce dell'esempio ora mostrato, chiarisce la relazione tra le famiglie uniformi di ricoprimenti di un insieme e le famiglie quasi-uniformi permettendo di dare un preciso significato alla frase (imprecisa *per se*) « *ogni famiglia uniforme di ricoprimenti di un insieme è una famiglia quasi-uniforme* ». Infatti, il risultato del n. 3.3.8. può riassumersi affermando che ogni famiglia uniforme di ricoprimenti di un insieme contiene sempre qualche sottofamiglia basica $\mathcal{K}$ che la genera ed è tale che la quasi-uniformità indotta dalla famiglia $(\mathcal{C}, \mathcal{K})$ è una uniformità (coincidente con quella indotta dalla famiglia $\mathcal{C}$). Tutte le siffatte sottofamiglie basiche, poi, se sono del tipo $\mathcal{E}^+$, sono certamente equivalenti.

3.4. Teorema. (*a*) *In ogni spazio topologico* (L, λ) *le proposizioni seguenti sono equivalenti*

(a, 1) *la topologia* λ *può essere generata per semicontinuità inferiore da una famiglia* $\mathcal{J}$ *di funzioni reali*;

(a, 2) *la topologia* λ *può essere indotta da una quasi-uniformità* $\mathcal{H}$ *di base* $\mathcal{K}$;

(a, 3) *esiste una famiglia quasi-uniforme* $(\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{C})$ *in* L *la cui topologia associata coincide con* λ;

(a, 4) *esiste una famiglia* $\mathcal{D}$ *di quasi-metriche in* L *che genera la topologia* λ.

(b) *Si può fare in modo che*

(b, 1) *la famiglia quasi-uniforme* $(\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{C})$ *e la famiglia* $\mathcal{D}$ *di quasi-metriche di cui si parla in* (a) *inducano su* L *la stessa quasi-uniformità* $\mathcal{H}$ *di cui si parla in* (a, 2);

(*b*, 2) *le cardinalità degli insiemi* $\mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ (*di cui si parla in* (*a*)) *siano tali che*

$$\max(\text{card } N, \text{card } \mathcal{J}) \geq \text{card } \mathcal{K} \geq \text{card } \mathcal{C} \geq \text{card } \mathcal{D}.$$

DIMOSTRAZIONE. (*a*) (*a*, 1) $\Longrightarrow$ (*a*, 2) dalla proposizione 2.3.1. (*b*) segue l'esistenza di una famiglia $\mathcal{F}$ separante per la topologia λ; per ogni $f \in \mathcal{F}$ si definisca

$$V_f = \{(x, y) \in L \times L : f(x) = 0 \text{ oppure } f(y) \neq 0\}.$$

È immediato verificare che ogni insieme V_f contiene la diagonale del prodotto $L \times L$ ed è tale che $V_f \circ V_f \subset V_f$, infatti, per ogni $f \in \mathcal{F}$ ed ogni $x, y, t \in L$, $(x, x) \in V_f$ tanto se $f(x) = 0$ quanto se $f(x) \neq 0$, inoltre, se (x, y) ed (y, t) sono in V_f ed $f(x) = 0$ allora, ovviamente, anche $(x, t) \in V_f$, se $f(x) \neq 0$ anche $f(y)$ (e quindi $f(t)$) è diverso da 0 e perciò $(x, t) \in V_f$. Ciò prova che la famiglia $\mathcal{K}$ delle intersezioni finite di insiemi V_f (con $f \in \mathcal{F}$) genera un filtro $\overline{\mathcal{K}} = \mathcal{H}$ che è una quasi-uniformità sull'insieme L. Per provare che la topologia indotta da $\mathcal{H}$ coincide con λ, si noti che per ogni $x \in L$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$ l'insieme $V_f(x)$ coincide con L se $f(x) = 0$ altrimenti coincide con l'insieme $f^{-1}(0, 1]$: in ogni caso si tratta di un insieme λ-aperto cui x appartiene; viceversa, se Y è un λ-intorno di x, scegliendo $f \in \mathcal{F}$ in modo che $f(x) \neq 0$ ed $f(L - Y) \subset \{0\}$, risulta $V_f(x) = f^{-1}(0, 1] \subset Y$;

(*a*, 2) $\Longrightarrow$ (*a*, 3) dimostrato in 3.3.5.;

(*a*, 3) $\Longrightarrow$ (*a*, 4) (12) sia $(\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{C})$ una famiglia quasi-uniforme nell'insieme L cui sono associate la quasi-uniformità $\overline{\mathcal{G}}$ e la topologia λ. Per ogni $\beta \in \mathcal{C}$ si definisca la successione di ricoprimenti $\mathcal{C}_\beta = \{\beta_n\}_{n \in N}$ in modo che β_1 sia il ricoprimento puntuale di L che ad ogni suo punto associa L stesso; $\beta_2 = \beta$; per ogni $n \in N$ accada che

$$\beta_{n+1} < \beta^0_{n+1} < \beta^{00}_{n+1} < \beta_n,$$

in altre parole, per ogni $x \in L$, $Q(x, \beta^0_{n+1}) \subset \beta_{n,x}$.

Per ogni x, y in L si ponga:

$$A_\beta(x, y) = \inf\{1/n : \text{per ogni } n \in N \text{ tale che } y \in \beta_{n,x}\},$$

$$B_\beta(x_0, \dots, x_p) = \sum_{i=0}^{p-1} A_\beta(x_i, x_{i+1}) \text{ se } x_0 = x, x_p = y, x_i \in L,$$

(12) Questa dimostrazione è un semplice adattamento della dimostrazione del teorema di metrizzazione di uno spazio uniforme data da A. H. Frink (ved. [1] § 1 n. 4).

$$d_\beta(x, y) = \inf\{B_\beta(x_0, \dots, x_p) : \text{per ogni successione finita}$$

$$\{x_0, \dots, x_p\} \subset L \text{ tale che } x_0 = x, x_p = y\}.$$

Si osservi dapprima che $d_\beta(x, y) \leq A_\beta(x, y)$ e quindi che

$$y \in \beta_{n,x} \iff d_\beta(x, y) \leq A_\beta(x, y) \leq 1/n.$$

Si proverà ora che, fissati x ed y in L, per ogni successione finita di punti di L $x_0 = x, x_1, \dots, x_p = y$, posto $B_\beta(x_0, \dots, x_p) = h$ si ha $A_\beta(x, y) \leq 2h$. Sia dapprima $h = 0$: è sufficiente allora considerare il caso $p = 2$. Avendo presente che, per le definizioni poste, da $x_1 \in \beta_{n+1}(x_0)$ ed $x_2 \in \beta_{n+1}(x_1)$ segue $x_2 \in \beta_n(x_0)$, si può concludere che da $h = 0$ segue che $x_2 \in \beta_n(x_0)$ per ogni $n \in N$, cioè che $A_\beta(x, y) = 0$.

Se, poi, $2h \geq 1$, la disuguaglianza da provare è ovvia giacchè i valori della funzione A_β sono compresi tra 0 ed 1.

Sia quindi $0 < 2h < 1$: la dimostrazione verrà fatta per induzione sul numero p. Se $p = 1$, poichè $A_\beta(x, y) \geq 0$, è ovvio che $A_\beta(x, y) \leq 2A_\beta(x, y) = 2B_\beta(x, y)$; se $p > 1$, sia r il più grande intero (tra 0 e p) per cui $2B_\beta(x_0, \dots, x_r) \leq h$, allora $2B_\beta(x_{r+1}, \dots, x_p) < h$ e $0 < A_\beta(x_r, x_{r+1}) \leq h$. Questo implica, poichè si sta procedendo per induzione su p, che

$$A_\beta(x_0, x_r) \leq h, \quad A_\beta(x_r, x_{r+1}) \leq h, \quad A_\beta(x_{r+1}, x_p) < h;$$

Poichè $0 < 2h < 1$, esiste un intero $m > 1$ tale che

$$\frac{1}{m+1} \leq h < \frac{1}{m},$$

per l'osservazione fatta all'inizio di questa dimostrazione, si ha

$$x_r \in \beta_{m+1}(x_0), \qquad x_{r+1} \in \beta_{m+1}(x_r), \qquad x_p \in \beta_{m+1}(x_{r+1})$$

da cui, tenuto conto che $\beta_{m+1} < \beta^0_{m+1} < \beta^{00}_{m+1} < \beta_m$, si trae

$$x_p \in Q(x_0, \beta^0_{m+1}) \subset \beta_m(x_0)$$

ed infine

$$A_\beta(x_0, x_p) \leq \frac{1}{m} \leq \frac{2}{m+1} \leq 2h.$$

Rimane così provato che per ogni $\beta \in \mathcal{C}$ e per ogni x ed y in L si ha

$$\frac{1}{2} A_\beta(x, y) \leq d_\beta(x, y) \leq A_\beta(x, y).$$

Dalla definizione della funzione d_β risulta evidente che si tratta di una quasi-metrica in L, mostreremo ora che la quasi-uniformità $\mathcal{H}$ associata alla famiglia di quasi-metriche $\mathcal{D} = \{d_\beta\}_{\beta \in \mathcal{C}}$ coincide con quella indotta dalla famiglia $(\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{C})$, questo proverà altresì che la topologia generata dalla famiglia $\mathcal{D}$ coincide con λ. Da quanto si è detto sugli insiemi $Q(x, \beta_n)$ e dalla disuguaglianza prima dimostrata segue che

$$\{(x, y) : d_\beta(x, y) < 1/2\} \subset \{(x, y) : x \in L, y \in Q(x, \beta)\}$$

giacchè

$$d_\beta(x, y) < 1/2 \Longrightarrow A_\beta(x, y) < 1 \Longrightarrow y \in \beta_2(x) = \beta_x \Longrightarrow y \in Q(x, \beta);$$

viceversa, se $\beta \in \mathcal{C}$ ed $n \in N$,

$$\{(x, y) : x \in L, y \in Q(x, \beta_{n+2})\} \subset \{(x, y) : d_\beta(x, y) < 1/n\}$$

poichè da $y \in \beta^0_{n+2}(x)$ segue $y \in \beta_{n+1}(x)$ e quindi

$$d_\beta(x, y) \leq A_\beta(x, y) \leq \frac{1}{n+1} < 1/n.$$

Si conclude così che le quasi-uniformità $\mathcal{H}$ e $\overline{\mathcal{G}}$ coincidono.

$(a,4) \Longrightarrow (a, 1)$ siano $d \in \mathcal{D}$, a un numero reale positivo, $x \in L$; l'applicazione di L in R che ad ogni y associa $d(x, y)$ sia indicata con d_x. La funzione d_x è semicontinua superiormente poichè $d_x^{-1}[a, +\infty)$ come complementare in L dell'insieme $d_x^{-1}[0, a)$ è un insieme chiuso perchè la quasi-metrica d interviene nella definizione della topologia considerata su L. Definendo allora

$$f_{d, a, x} = \min(1, (a - \min(a, d_x)))$$

si ottiene una funzione definita in L a valori in $[0, 1]$ che è semicontinua inferiormente ed è positiva per ogni $y \in L$ per cui $d(x, y) < a$ (in particolare, $f_{d,a,x}(x) = \min(1, a) > 0$), mentre, per ogni altro $y \in L$, è nulla. Allora, posto $S_d(x, a) = d_x^{-1}[0, a)$, se A è un insieme λ-aperto di L cui x appartiene, esistono degli insiemi $S_{d_i}(x_i, a_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ la cui intersezione S è tale che $x \in S \subset A$: ne segue che la funzione $f = \min(f_{d_i, x_i, a_i} : i = 1, 2, \dots, n)$ è semicontinua inferiormente e si annulla per ogni $y \notin A$ ma non si annulla su S, in particolare $f(x) > 0$. In conclusione, la famiglia di tutte le funzioni $f_{d,x,a}$ per ogni $d \in \mathcal{D}$, $x \in L$, a reale positivo, è separante per la topologia λ.

(b) le dimostrazioni sono contenute nelle costruzioni effettuate nel provare la parte (a) del teorema.

3.5.1. Come nel caso delle famiglie di metriche, anche a proposito delle quasi-metriche si può provare che:

Se una quasi-uniformità (e quindi una topologia) su un insieme L è generata da una famiglia al più numerabile di quasi-metriche, essa può essere generata da una sola quasi-metrica.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{K}$ una base della quasi-uniformità considerata e sia $\mathcal{D}$ una famiglia al più numerabile di quasi-metriche in L che genera $\mathcal{K}$. Se la famiglia $\mathcal{D}$ è finita, $\mathcal{K}$ può essere generata, come facilmente si vede, dalla quasi-metrica

$$d_1 = \max_{d \in \mathcal{D}} \{d\}.$$

Se, al contrario, la famiglia $\mathcal{D}$ non è finita, si cominci con l'osservare che se ad ogni $e_n \in \mathcal{D}$ si sostituisce la quasimetrica $d_n = \min(e_n, 1/n)$, la famiglia $\mathcal{J} = \{d_n\}_{n \in N}$ genera ancora la stessa quasi-uniformità giacchè

$$d_n(x, y) < \min(a, 1/n) \Longrightarrow e_n(x, y) < a \Longrightarrow d_n(x, y) < a$$

per ogni intero $n \in N$ ed ogni numero reale positivo a. Si consideri poi la funzione $d = \sup\limits_{n \in N} \{d_n\}$ che, evidentemente, è una quasi-metrica in L risultando, per ogni $x, y \in L$,

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) = \sup\{d_n(x, y)\} \leq \sup\{d_n(x, t) + d_n(t, y)\} \leq$$
$$\leq d(x, t) + d(t, y).$$

Proveremo ora che la quasi-uniformità generata da d coincide con quella generata dalla famiglia $\mathcal{J}$. Dall'osservare che, per ogni $n \in N$, $p \in N$,

$$d(x, y) < 1/p \Longrightarrow d_n(x, y) < 1/p$$

e che

$$d_r(x, y) < 1/p \text{ per } r = 1, 2, \dots, p \Longrightarrow d(x, y) < 1/p,$$

seguono le seguenti inclusioni che permettono di concludere la dimostrazione:

$$\{(x, y) : d(x, y) < 1/\max(p_1, \dots, p_r)\} \subset \bigcap_{i=1}^{r} \{(x, y) : d_{n_i}(x, y) < 1/p_i\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{p} \{(x, y) : d_r(x, y) < 1/p\} \subset \{(x, y) : d(x, y) < 1/p\}.$$

3.5.2. La stessa argomentazione della precedente proposizione può essere adoperata per mostrare che:

Il prodotto di una famiglia al più numerabile di spazi topologici quasi-metrizzabili è a sua volta quasi-metrizzabile.

3.5.3. *Se (L, λ) è uno spazio topologico le proposizioni seguenti*

(*a*) *esiste una famiglia separante per la topologia λ al più numerabile;*

(*b*) *esiste una famiglia al più numerabile di funzioni reali che genera λ per semicontinuità inferiore;*

(*c*) *esiste una quasi-uniformità avente base al più numerabile che induce su L la topologia λ;*

(*d*) *esiste una famiglia quasi-uniforme $(\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{C})$, con $\mathcal{C}$ al più numerabile, che induce in L la topologia λ;*

(*e*) *esiste una famiglia al più numerabile di quasi-metriche che genera la topologia λ;*

(*f*) *la topologia λ è quasi-metrizzabile* ([13])

sono tali che:

$$(a) \Longleftrightarrow (b) \Longrightarrow (c) \Longleftrightarrow (d) \Longleftrightarrow (e) \Longleftrightarrow (f).$$

DIMOSTRAZIONE. L'equivalenza tra (*a*) e (*b*) segue dalle prop. 2.3.1. (*a*) e (*b*); le altre affermazioni seguono dalle propos. 3.4. (*b*) e 3.5.1. osservando che, per quanto si è detto in 3.2., l'implicazione $(f) \Longrightarrow (c)$ è ovvia.

4. Topologie quasi-uniformizzabili.

4.1. Il risultato principale del n. 3. è l'affermazione della equivalenza tra

(*a*) la possibilità di generare la topologia λ per semicontinuità inferiore;

(*b*) la quasi-uniformizzabilità della topologia λ;

(*c*) la possibilità di indurre la topologia λ mediante una famiglia quasi-uniforme;

(*d*) la possibilità di generare la topologia λ mediante una famiglia di quasi-metriche.

In altre parole, le classi delle topologie λ rispettivamente definite dalla validità di una delle precedenti proprietà (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) coincidono in un'unica classe che denoteremo con $\mathcal{T}$.

4.2. Ci proponiamo ora di mostrare che le suelencate proprietà descrivono ogni possibile topologia su un insieme assegnato.

TEOREMA. *Ogni topologia λ sull'insieme L appartiene alla classe $\mathcal{T}$* ([14]).

([13]) Nel lavoro di RIBEIRO [8] si trova (con altra dimostrazione) una proposizione che, in sostanza, afferma l'equivalenza tra (*c*) ed (*f*). Nello stesso lavoro si prova anche che la prop. (*a*) con l'aggiunta della ipotesi di equi-semicontinuità delle funzioni della famiglia separante e senza l'ipotesi di numerabilità equivale alla propos. (*f*).

([14]) Che ogni topologia sia quasi-uniformizzabile è stato già provato esplicitamente da PERVIN [7] e si può dedurre dalle considerazioni svolte in [2] ch. 7.

DIMOSTRAZIONE. Si indichi con χ_A la funzione caratteristica dell'insieme $A \subset L$. Se $A \in \lambda$, la sua funzione caratteristica risulta semicontinua inferiormente giacchè per ogni insieme Y aperto in (I, ϱ'), $\chi_A^{-1}(Y)$ se non è tutto lo spazio L, coincide con A. È immediato constatare poi che la famiglia di funzioni $\{\chi_A\}_{A \in \lambda}$ è separante per la topologia λ. La dimostrazione si conclude richiamando la propos. 2.3.1. (c) ed il teorema 3.4..

4.3. Notevoli conseguenze del teorema ora dimostrato sono le proposizioni che seguono.

4.3.1. *Ogni topologia sull'insieme L è generata per semicontinuità inferiore dalla famiglia di tutte le funzioni reali semicontinue inferiormente definite in L.*

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dal teorema 4.2. e dalla prop. 2.3.1. (c).

4.3.2. Il teorema 4.2. ed il corollario 4.3.1. servono a completare la proposizione 2.3.2. permettendo di affermare che:

Ogni spazio topologico in cui vale l'assioma di separazione T_0 è (omeomorfo ad) un sottospazio di uno spazio compatto.

4.3.3. (a) Richiamiamo che una topologia λ su un insieme L dicesi *topologia di convergenza* quando esiste una direzione D [15] tale che per ogni insieme $Y \subset L$ le proposizioni seguenti sono equivalenti:

(a, 1) $Y \in \lambda$

(a, 2) $x \in Y \Longleftrightarrow$ ogni D-successione [15] in L convergente ad x nella topologia λ è definitivamente in Y.

(b) *Ogni topologia su un assegnato insieme è una topologia di convergenza.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (L, λ) lo spazio topologico considerato, il teorema 4.2. afferma l'esistenza di una quasi-uniformità $\mathcal{U}$ che induce la topologia λ. Se $\mathcal{X}$ è una base di $\mathcal{U}$, è sufficiente assumere come direzione D la famiglia d'insiemi $\mathcal{X}$ ordinata per inclusione (cioè, se $V, W \in \mathcal{X}$, $V < W$ significa $W \subset V$); allora, infatti, da (a, 2) segue (a, 1) perchè, fissato l'insieme $Y \subset L$, se Y non è λ-aperto, esiste $x \in Y$ in modo che per ogni $V \in \mathcal{X}$ l'insieme $V(x)$ ha punti fuori di Y (cioè Y non è intorno di x), quindi, scegliendo, per ogni

---

[15] D-successione è ogni applicazione definita sulla direzione D (direzione è un insieme parzialmente ordinato in cui esiste sempre un elemento che ne segua due prefissati ad arbitrio).

$V \in \mathcal{K}$, x_V in $V(x) - Y$, si può definire una $\mathcal{K}$-successione $\{x_V\}_{V \in \mathcal{K}}$ convergente ad x e non definitivamente in Y. Questo basta per concludere la dimostrazione giacchè l'implicazione $(a, 1) \Longrightarrow (a, 2)$ vale per ogni direzione D (infatti, se Y è aperto, ogni D-successione convergente ad $x \in Y$ cade definitivamente in Y essendo quest'ultimo insieme un intorno di x e, viceversa, se ogni D-successione convergente ad x è definitivamente in Y, per provare che $x \in Y$ basta considerare la D-successione costante che converge ad x).

4.3.4. (a) Sia (L, λ) uno spazio topologico e si denoti con χ_A la funzione caratteristica dell'insieme $A \subset L$. Si è già notato (nella dimostrazione del teorema 4.2.) che la famiglia di funzioni $\{\chi_A\}_{A \in \lambda}$ è separante per la topologia λ; dalla dimostrazione dell'implicazione $(a, 1) \Longrightarrow (a, 2)$ del teorema 3.4. (a) si può dedurre allora che la famiglia $\mathcal{H}_\lambda$ delle intersezioni finite di insiemi della classe

$$\{V_A = \{(x, y): \chi_A(x) = 0 \text{ oppure } \chi_A(y) \neq 0\}\}_{A \in \lambda}$$

è base di una quasi-uniformità che induce su L la stessa topologia λ. Diremo che $\overline{\mathcal{H}}_\lambda$ è la ***quasi-uniformità canonica*** associata alla topologia λ.

(b) Siano L, M insiemi e $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ basi di quasi-uniformità rispettivamente in L ed M. Un'applicazione $f: L \longrightarrow M$ verrà detta ***uniformemente continua*** rispetto alle quasi-uniformità $\overline{\mathcal{H}}$ e $\overline{\mathcal{K}}$ quando per ogni $V \in \mathcal{K}$ esiste $W \in \mathcal{H}$ in modo che

$$(x, y) \in W \Longrightarrow (f(x), f(y)) \in V, \text{ per ogni } x, y \text{ in } L.$$

Si noti che la definizione non dipende dalle basi scelte per le quasi-uniformità $\overline{\mathcal{H}}$ e $\overline{\mathcal{K}}$; inoltre, questa nozione di uniforme continuità coincide con quella usuale se $\overline{\mathcal{H}}$ e $\overline{\mathcal{K}}$ sono uniformità.

(c) ***Ogni applicazione continua tra due spazi topologici è uniformemente continua rispetto alle quasi-uniformità canoniche associate rispettivamente alle topologie degli spazi considerati*** (***e, ovviamente, viceversa***).

DIMOSTRAZIONE Siano (L, λ), (M, μ) gli spazi considerati e sia $f: L \longrightarrow M$ un'applicazione (λ, μ)-continua. Siamo poi $\overline{\mathcal{H}}_\lambda$ ed $\overline{\mathcal{H}}_\mu$ le quasi-uniformità canoniche rispettivamante associate alle topologie λ e μ. Per provare la uniforme continuità dell'applicazione f è sufficiente mostrare che per ogni $A \in \mu$ esiste $B \in \lambda$ in modo che da $(x, y) \in V_B$ segua $(f(x), f(y)) \in V_A$: per questo basta assumere $B = f^{-1}(A)$, come è facile verificare.

5. Caratterizzazione di una topologia mediante funzioni reali semicontinue inferiormente.

5.1. Sia λ una topologia sull'insieme L e sia Q_λ la classe di tutte le funzioni $f: L \longrightarrow I$ semicontinue inferiormente. Si indichi poi con Q_λ^0 la classe di tutte le funzioni $f \in Q_\lambda$ che assumono soltanto i valori 0 ed 1.

5.1.1. (*a*) *La famiglia di funzioni Q_λ^0 è separante per la topologia λ, quindi la genera per semicontinuità inferiore*;

(*b*) *esiste una biiezione $u: Q_\lambda^0 \longrightarrow \lambda$*;

(*c*) *se λ e μ sono topologie sull'insieme L, dire che λ è più fine di μ equivale ad affermare che $Q_\mu^0 \subset Q_\lambda^0$, quindi $\lambda = \mu \Longleftrightarrow Q_\lambda^0 = Q_\mu^0$.*

Dimostrazione. (*a*) la famiglia Q_λ^0 contiene le funzioni caratteristiche degli insiemi aperti dello spazio (L, λ) e queste funzioni, come già si è detto nella dimostrazione del teorema 4.2., costituiscono una famiglia separante per la topologia λ;

(*b*) basta porre per ogni $f \in Q_\lambda^0$, $u(f) = f^{-1}(1)$, osservando che $f^{-1}(1) = f^{-1}(0, 1]$ e che $(0, 1]$ costituisce un insieme aperto nello spazio (I, ϱ'); l'iniettività segue dal fatto che le funzioni appartenenti a Q_λ^0 possono assumere soltanto i valori 0 ed 1; la surgettività dal fatto che Q_λ^0 contiene le funzioni caratteristiche di tutti gli insiemi aperti dello spazio (L, λ);

(*c*) segue immediatamente da (*b*).

5.2 Proveremo ora che ogni topologia su un insieme L è caratterizzata dalla famiglia $\mathcal{S}_\lambda$ di tutte le funzioni reali semicontinue inferiormente definite in L oppure dalla famiglia di funzioni Q_λ introdotta nel n. precedente.

5.2.1. Con riferimento alle notazioni introdotte nel precedente n. si ha:

(*a*) *Q_λ è la più piccola parte di I^L avente le proprietà*

(*a*, 1) *contiene le funzioni prodotto di ogni funzione costante a $(a \in I)$ per ogni funzione $f \in Q_\lambda^0$*;

(*a*, 2) *contiene la funzione estremo superiore di ogni sua sottofamiglia non vuota:*

(*b*) *se λ e μ sono topologie sull'insieme L, allora*

(*b*, 1) *λ è più fine di $\mu \Longleftrightarrow Q_\mu \subset Q_\lambda$;*

(*b*, 2) $\lambda = \mu \Longleftrightarrow \mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_\mu \Longleftrightarrow Q_\lambda = Q_\mu$.

Dimostrazione. (*a*) si osservi dapprima che la classe di tutte le parti di I^L godenti delle proprietà (*a*, 1) ed (*a*, 2) è chiusa rispetto alle intersezioni e non è vuota contenendo la stessa famiglia Q_λ. Sia quindi $\mathcal{X}$ una di queste parti di I^L, occorre far vedere che $Q_\lambda \subset \mathcal{X}$. Per ogni $f \in Q_\lambda$ e per ogni $a \in [0, 1]$ l'insieme $\{x : f(x) > a\}$ è λ-aperto, perciò esiste una funzione $h_{f,a} \in Q_\lambda^0$ tale che (vedere la dimostrazione di 5.1.1. (*b*)):

$$f^{-1}(a, 1] = h_{f,a}^{-1}(1).$$

Allora la funzione

$$g_f = \sup\{a \cdot h_{f,a} : a \in [0, 1]\}$$

appartiene a $\mathcal{X}$ e coincide con f, infatti, se $x \in L$ ed $f(x) > a$ si ha $h_{f,a}(x) = 1$, se invece $f(x) \leq a$, si ha $h_{f,a}(x) = 0$ e quindi

$$g_f(x) = \sup \{a \in I : a < f(x)\} = f(x);$$

$(b, 1)$ segue immediatamente da (a) e da 5.1.1. (c);

$(b, 2)$ diretta conseguenza di $(b, 1)$ e della proposizione 4.3.1..

Scuola Normale Superiore, Pisa

BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI N. - *Topologie Générale.* Ch. 9 Act. Sc. Ind. n. 1045 (nuov. édit.), Paris Hermann, 1958.

[2] CSASZAR, A. - *Foundations of General Topology.* Pergamon Pr., Oxford, 1963.

[3] GILLMAN, L. and JERISON, M. - *Rings of Continuous Functions.* Van Nostrand, Princeton. 1960.

[4] ISBELL, J. R. - *Uniform Spaces.* Math. Surv. no. 12; Am. Math. Soc. Providence, 1964,

[5] KELLEY, J. L. - *General Topology.* Van Nostrand, Princeton, 1955.

[6] NACHBIN, L. - *Sur les espaces uniformes ordonnés.* C. R. Acad. Paris 226 (1948); 774-775.

[7] PERVIN, W. J. - *Quasi-Uniformization of Topological Spaces.* Math. Annalen, Bd. 147 (1962); 316-317.

[8] RIBEIRO, H. - *Sur Les Espaces A Metrique Faible.* Portug. Mathem. vol. 4 (1943); 21-40 e 65-68.

[9] STOLTENBERG, R. - *Some properties of quasi-uniform spaces.* Proc. London Math. Soc. XVII/2 (1967); 226-240.

[10] TOGNOLI, A. - *Osservazioni sulle famiglie di funzioni continue su spazi topologici e condizioni di metrizzabilità.* Rend. Circ. Mat. Palermo, S. II, T. XIV (1965).